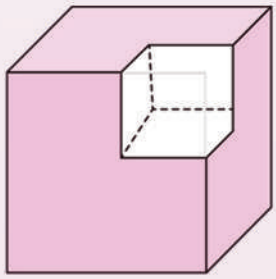
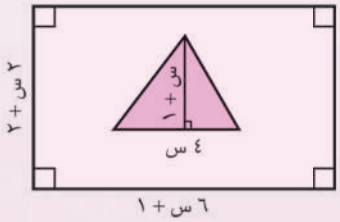
وزارة التربية
Ministry of Education
State of Kuwait | دولـــة الكويـت

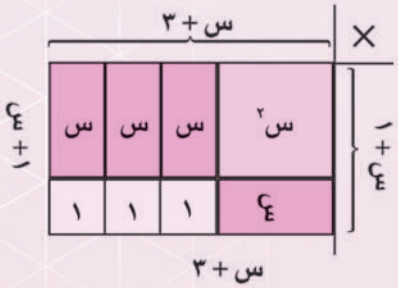
الرياضيات

الصفّ التاسع

الفصل الدراسي الأوّل ـ القسم الأوّل







دورك الآن | استكشف | تمارين ذاتيّة | حلّ وناقش | عبّر عن فهمك | مهارات تفكير عليا

1/1

المرحلة المتوسّطة

وزارة التربية
Ministry of Education
State of Kuwait | دولـــة الكويـت

الرياضيات

الصفّ التاسع

الفصل الدراسي الأوّل ـ القسم الأوّل

تأليف
أ. دلال مبارك فلاح الحجرف (رئيسًا)
أ.نـوره عبـد الله أبورقبـة العتيبـي
أ. سـاره زايـد شـيـنـان الـعـجـمي
أ. وسـميه بـادي هادي الرشـيدي
أ. عصـام عبـد الهـادي السـيد حسـن
أ. منى فـرج سـعد المطـيري

الطبعة الثانية
١٤٤٨ هـ
٢٠٢٦ - ٢٠٢٧ م

حقوق التأليف والطبع والنشر محفوظة لوزارة التربية - الإدارة العامة للتواجيه والبحوث والمناهج
إدارة البحوث التربوية والمناهج

الطبعة الأولى: ٢٠٢٥ / ٢٠٢٦ م
الطبعة الثانية: ٢٠٢٦ / ٢٠٢٧ م

المراجعة العلمية

أ. سمير عبدالله مرسي

فريق الشروحات التعليمية المعززة بالذكاء الاصطناعي

د . راندا موسى برغش

أودع في مكتبة الكويت الوطنية – ردمك: 978-9921-33-112-7

ذات السلاسل – الكويت

أودع بمكتبة الوزارة تحت رقم (٤٠٧) بتاريخ ١٣/ ٧/ ٢٠٢٦ م

بسم الله الرحمن الرحيم

حضرة صاحب السمو الشيخ مشعل الأحمد الجابر الصباح

أمير دولة الكويت

H.H. Sheikh Meshal AL-Ahmad Al-Jaber Al-Sabah
Amir Of The State Of Kuwait

سمو الشيخ صباح خالد الحمد الصباح
ولي عهد دولة الكويت

H. H. Sheikh Sabah Khaled Al-Hamad Al-Sabah
Crown Prince Of The State Of Kuwait

مقدّمة

الحمدلله ربّ العالمين والصلاة والسلام على سيد المرسلين محمد بن عبدالله وصحبه أجمعين.

اِنطلاقًا من التوجيهات السامية لحضرة صاحب السموّ أمير البلاد الشيخ مشعل الأحمد الجابر الصباح ، حفظه الله ورعاه ، بضرورة الإسراع في تنفيذ كافّة مشاريع الدولة التنموية ومن ضمنها على وجه الخصوص المشاريع التعليمية ، وتماشيًا مع رؤية الكويت ٢٠٣٥ والتي تنادي بكويت جديدة فقد شرعت وزارة التربية في تطوير مناهجها التعليمية مستندة ، في ذلك إلى أهمّية رأس المال البشري كعنصر أساسي في تنمية الوطن ورفعته.

ولأنّ المناهج التعليمية هي قاعدة الهرم التعليمي إلى جانب المعلّم والمتعلّم ، وتُعدّ أحد الروافد المهمّة في خلق جيل متعلّم وواعٍ ، قادر على المشاركة في بناء المجتمع ، ولأنّ المناهج عبارة عن كمّ الخبرات التربوية والتعليمية التي تُقدَّم للمتعلّم ، فقد أولت الوزارة أهمّية بتطوير المناهج حسب المعايير العلمية وذلك لتحقيق نقلة نوعية في الشكل والمضمون ، وإيمانًا بأهمّيتها وانطلاقًا من أنّها ذات صفة عالمية مع الأخذ في الاعتبار خصوصية المجتمع الكويتي وبيئته المحلّية ، ملتزمة بأن تصبّ جميعها في تعزيز الهويّة الوطنية وبعقلية منفتحة على الآخرين مع احترام حقوق الإنسان وحرّياته الأساسية والتمسّك بمبادئ الإسلام والتسامح من جهة ، وغزيرة بمهارات القرن الواحد والعشرين لتعزيز المفاهيم الرياضية لجميع المتعلّمين من جهة أخرى لكي يكونوا في طليعة المنافسين في المسابقات العلمية والدولية ، وذلك عبر بناء الخطط التعليمية المعتمَدة من قطاع المناهج مؤكِّدين على أهمّية التكامل بين الجوانب العلمية والتطبيقية حتّى تكون ذات طبيعة وظيفية مرتبطة بحياة المتعلّم ، متضمّنة في الكثير من بنودها التمارين ذات المستويات العليا في التفكير والفهم والتحليل والتركيب .

وقد تمّت صياغة وترتيب الكتاب المدرسي في منهجية خاصة ذات هيكل ومجالات معينة تتمحور حول العدّ والجبر والهندسة والقياس ، وأخيرًا الإحصاء والاحتمال .

فقد تمّ بناء الكتاب وفق منهجية تربوية حديثة تراعي التدرّج المنطقي في المفاهيم والمهارات لبناء معرفة رياضية تراكمية تراعي الفروق الفردية بين المتعلّمين وتعزّز التفكير الرياضي العميق .

كما ويحوي الكتاب على وحدات تعليمية وموضوع محوري يتمّ إبرازه في مقدّمة كلّ وحدة ، تساعدهم على تنمية الفهم البنائي وربط المفاهيم الجديدة مع سياقات من واقع الحياة .

وحرصنا على إدراج التمارين المتنوّعة مع نهاية كلّ درس ، والتي تنوّعت بين الأسئلة المباشرة والمسائل الحياتية وأسئلة مهارات تفكير عليا ، مثل التبرير والنقد وتعدّد طرق الحلّ والاستنتاج .

تنتهي كلّ وحدة بقسم خاصّ للتقويم لقياس مدى تحقيق الأهداف متضمّنة أسئلة شاملة للمفاهيم والمهارات التي تمّ تناولها ، حتّى تكون أداة تمكّننا من تحديد الاحتياجات التعليمية لاحقًا .

ممّا سبق من معطَيات وغيرها من الجوانب التعليمية والتربوية ، فقد تمّت صياغة وإعداد كتب الرياضيات لتحقّق نقلة نوعية ذات جودة عالية تلبيّ الطموحات المطلوبة وتكون نافذة واسعة تُطلّ على آمالنا وتطلّعاتنا في المستقبل لما نهدف إليه من تأسيس فكر رياضي في عقول أجيالنا القادمة تنهض بها أمّتنا وتضعها في مكانها المناسِب في الصفوف المتقدّمة ، ويُشار إليها بالبنان مع كلّ محفل.

المحتويات

الجزء الأوّل :

الوحدة التعليمية الأولـــــى : الأعداد الحقيقية والعمليات عليها

الوحدة التعليمية الثانية : التحليل والمعادلات

الوحدة التعليمية الثالثـة : الحدوديات النسبية - الهندسة الإحداثية

الوحدة التعليمية الرابعة : هندسة التحويلات - الإحصاء والاحتمال

الجزء الثاني :

الوحدة التعليمية الخامسة : العلاقات والدوالّ

الوحدة التعليمية السادسة : المعادلات الخطّية والمتباينات الخطّية

الوحدة التعليمية السابعة : هندسة المثلّث

الوحدة التعليمية الثامنة : النسبة المئوية - الهندسة والقياس

الوحدة التعليمية الأولى

الأعداد الحقيقية والعمليات عليها

المحتوى	رقم الصفحة
معايير المنهج ومؤشّرات الأداء للوحدة التعليمية الأولى	١٦
مخطّط تنظيمي للوحدة التعليمية الأولى	١٧
هل أنت مستعدّ ؟ للوحدة التعليمية الأولى	١٨
(١ - ١) الجذور التربيعية والأعداد غير النسبية	٢٠
(١ - ٢) الأعداد الحقيقية (مقارنة - ترتيب)	٢٤
(١ - ٣) العمليات على الأعداد الحقيقية	٣٢
(١ - ٤) القيمة المطلَقة	٣٦
(١ - ٥) حلّ متباينة من الدرجة الأولى في متغيّر واحد	٤٣
(١ - ٦) الصورة العلمية باستخدام الأسس الصحيحة	٥١
تقويم الوحدة التعليمية الأولى	٥٩

الوحدة التعليمية الثانية

التحليل والمعادلات

المحتوى	رقم الصفحة
معايير المنهج ومؤشّرات الأداء للوحدة التعليمية الثانية	٦٦
مخطّط تنظيمي للوحدة التعليمية الثانية	٦٧
هل أنت مستعدّ ؟ للوحدة التعليمية الثانية	٦٨
(٢ - ١) تحليل الفرق بين مكعّبَين أو مجموعهما	٧٠
(٢ - ٢) تحليل الحدودية الثلاثية : $س^{٢} + ب س + جـ$	٧٥
(٢ - ٣) تحليل الحدودية الثلاثية : $أ س^{٢} + ب س + جـ$ ، $أ \neq ١$	٨١
(٢ - ٤) تحليل المربّع الكامل	٨٦
(٢ - ٥) تحليل الحدودية الرباعية	٩٤
(٢ - ٦) حلّ معادلة من الدرجة الثانية في متغيّر واحد	٩٨
تقويم الوحدة التعليمية الثانية	١٠٦
المشروع الأوّل	١١٣

الوحدة التعليمية
الأولى

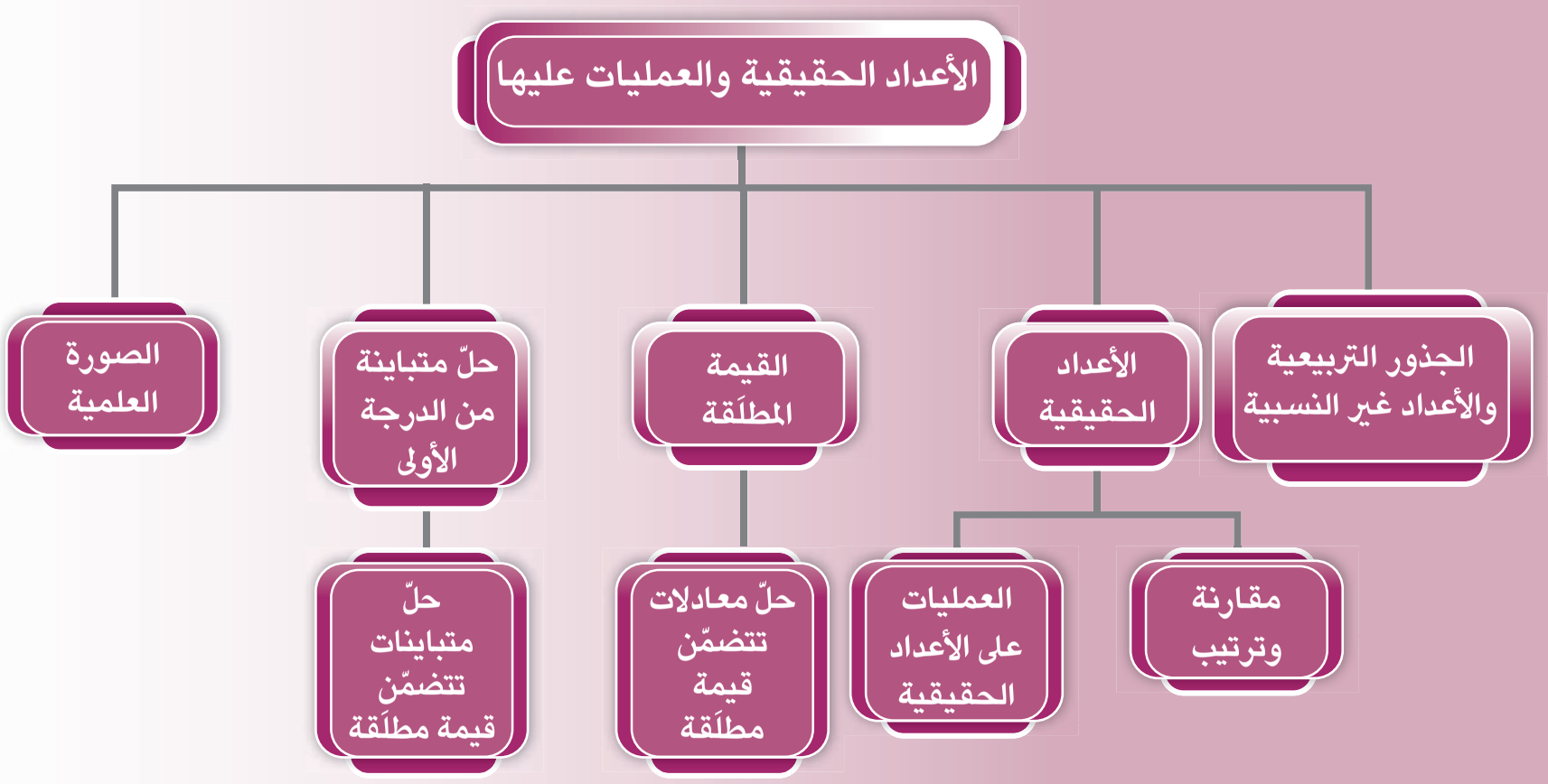
الأعداد الحقيقية والعمليات عليها

العلوم في حياتنا

تهتمّ دولة الكويت بتطوّر العلوم والثقافة ، لزيادة الوعي لدى مواطنيها ، ومن مظاهر هذا الاهتمام إنشاء المراكز العلمية والثقافية ، ومنها مركز الشيخ عبدالله السالم الثقافي ، وهو أحد أكبر معالم التطوّر الثقافي من نوعه حول العالم والذي تمّ افتتاحه في مايو ٢٠١٧ م . يضمّ المركز عدّة متاحف ومنشآت ، منها :
متحف التاريخ الطبيعي ، ومتحف العلوم والتكنولوجيا ، ومركز الفنون الجميلة ، ومتحف العلوم العربية الإسلامية ، ومتحف الفضاء ومسرح .

المجال	معايير المنهج	مؤشّر الأداء
العدّ والجبر	تمثيل الأعداد واستخدامها ضمن أشكال متكافئة متنوّعة ، وإدراك أنّ مختلف أشكال الأعداد تتلاءم مع حالات مختلفة .	العمل الجَماعي - الاستكشاف والتقصّي - التذكّر - التعرّف - الفهم - المقارنة والتمييز - القوانين - التمثيل -حلّ المشكلات - العلاقات - الاستدلال - الاستنتاج - التقويم
	اِستخدام المعادلات والنماذج الرياضية لحلّ المسائل .	التعاون - المشاركة - الاستنتاج - القراءة -الترميز والبرمجة - حلّ المشكلات - التمثيل - التذكّر - الفهم - التعرّف - الاستدلال
	اختيار العمليات المناسِبة ، واستخدامها لحلّ المسائل وتعليل الخيارات .	الاستنتاج - التحويل - القيادة - اِتّخاذ القرار - التذكّر - التعرّف - الفهم - التحليل والتركيب - حلّ المشكلات - العلاقات - الاستدلال - التمثيل
	تقدير وتقريب لتحديد النتائج المعقولة للعمليات الحسابية .	التذكّر - الفهم - التعرّف - العمل الجَماعي- الاستكشاف والتقصّي - حلّ المشكلات - المقارنة والتمييز - التعليل - التمثيل - الوسائط - الاستدلال
	اِستخدام التمثيلات البيانية والجداول والتمثيلات الجبرية للقيام بالتوقّعات ولحلّ المسائل .	التذكّر - التعرّف - الفهم - التمثيل - الاستكشاف والتقصّي - الاستدلال - الاستنتاج - حلّ المشكلات

مخطّط تنظيمي للوحدة التعليمية الأولى



هل أنت مستعدّ ؟

١ أوجِد مساحة منطقة مربّعة طول ضلعها ٣ سم . .....

٢ أوجِد قيمة كلّ ممّا يلي :

أ $٣^{٢}$ = ...

.....

ب $٨^{٢}$ = ...

.....

ج $(-٦)^{٢}$ = ...

.....

٣ أوجِد قيمة كلّ ممّا يلي :

أ $\sqrt{٤}$ = ...

.....

ب $\sqrt{٢٥}$ = ...

.....

ج $\sqrt{٤٩}$ = ...

.....

د $-\sqrt{١٦}$ = ...

.....

٤ قارِن بوضع > أو < أو = فيما يلي :

أ ٠,٦ ◯ $\frac{٣}{٥}$

ب ٠,٧ ◯ $\frac{٢}{٥}$

ج $٣,\overline{٩}$ ◯ ٣,٩٥

٥ أوجِد ناتج كلّ ممّا يلي :

أ) ٩ + ٣ × ٨ = ...

.....

ب) ١٥ ÷ (٧ - ٤) = ...

.....

ج) $٢^{٦}$ ÷ (٧ + ٢) = ...

.....

د) ٨ × $\sqrt{٤٩}$ - ١٠ = ...

.....

٦ أوجِد ناتج كلّ ممّا يلي :

أ) $\frac{٤}{٧} \times \frac{٧}{٨}$ = ...

.....

ب) $\frac{٥}{٩}$ ÷ ٥ = ...

.....

٧ أوجِد قيمة ٥س - ٣ ، إذا كانت س = ٢ .

.....

.....

٨ حُلّ المعادلة الآتية : ٢س + ١ = ٧ .

.....

.....

.....

٩ بسِّط كلًّا من التعابير الآتية :

أ) $س^{٤} \times س^{٥}$ = ...

ب) $\frac{ب^{٦}}{ب^{٢}}$ = ...

ج) $س^{-٤}$ = ...

هل أنت مستعدّ ؟

١ - ١ الجذور التربيعية والأعداد غير النسبية
Square Roots and Irrational Numbers

سوف تتعلّم : الأعداد غير النسبية .

العبارات والمفردات :

جذر تربيعي	Square Root	عدد غير نسبي	Irrational Number
جذر تربيعي أساسي	Principal Square Root		

إستكشِف

لدى سعد لوحات مربّعة الشكل لبعض معالم دولة الكويت (أبراج المياه - برج التحرير - أبراج الكويت) .

كما هو موضَّح في الأشكال المقابِلة :

من فضلك ، ساعِد سعدًا في إيجاد طول ضلع كلّ مربّع .

مساحة المنطقة المربّعة = ٤ م^{٢} **(لوحة أبراج المياه)**

طول الضلع = $\sqrt{٤}$ م = ... م

مساحة المنطقة المربّعة = ٩ م^{٢} **(لوحة برج التحرير)**

طول الضلع = ...

مساحة المنطقة المربّعة = ٧ م^{٢} **(لوحة أبراج الكويت)**

طول الضلع = ...

هل وجدت عددًا نسبيًّا مربّعه يساوي ٧ ؟ .....

تذكَّر

الجذر التربيعي للعدد النسبي الموجَب س : هو العدد الذي إذا ضُرب في نفسه كان الناتج س .

تعلم أنّ مجموعة الأعداد النسبية ن = $\left\{ \frac{أ}{ب} : أ ، ب \in صـ ، ب \neq ٠ \right\}$ وأنّ الأعداد النسبية يمكن كتابتها في صورة أعداد عشرية (أو كسور عشرية) منتهية مثل ٣,٢٥ ، ٠,٤٨٧ أو بصورة أعداد عشرية دورية (أو كسور عشرية دورية) مثل $٢,١\overline{٦}$ ، $٠,\overline{٣}$.

تذكَّر

$٠,\overline{٥} = \frac{٥}{٩}$

$٠,\overline{١٧} = \frac{١٧}{٩٩}$

بالعودة إلى (إستكشِف) :

$\sqrt{٧}$ لا ينتمي إلى مجموعة الأعداد النسبية ن ، ولذلك فهو ينتمي إلى مجموعة أخرى جديدة تُسمّى مجموعة **الأعداد غير النسبية** $\overline{ن}$.

أي أنّ الجذر التربيعي لأيّ عدد ليس مربّعًا كاملًا ، هو عدد غير نسبي .

الأعداد غير النسبية : هي الأعداد التي لا يمكن كتابتها على الصورة $\frac{أ}{ب}$ حيث أ ، ب عددان صحيحان ، ب ≠ ٠

وفي ما يلي بعض الأمثلة لأعداد غير نسبية :

- $\sqrt{٥}$ ، $-\sqrt{٢}$ ، $\frac{١}{\sqrt{٧}}$ ، $\sqrt[٣]{٥}$ ، ...
- الأعداد العشرية التي أرقامها العشرية لا تنتهي ولا تتكرّر مثل π ≈ ٣,١٤١٥٩ ...
- كسور عشرية ذات نمط في كتابتها مثل ٠,٠٢٠٢٢٠٢٢٢٠٢٢٢٢ ...

الجذور التربيعية

تعلم أنّ $(-٣)^{٢} = ٩$ ، $(٣)^{٢} = ٩$ ،

وأنّه يوجد جذران تربيعيان للعدد ٩ هما :

$+\sqrt{٩} = ٣$ (الجذر التربيعي الموجَب) ،

$-\sqrt{٩} = -٣$ (الجذر التربيعي السالب)

ويُعرف الجذر التربيعي الموجَب : **بالجذر التربيعي الأساسي** .

اللوازم

آلة حاسبة

دورك الآن

ضَع الأعداد الآتية في مكانها المناسِب في الجدول :

$\sqrt{١٥}$ ، $-\sqrt{٢}$ ، $\frac{١}{\sqrt{٦٤}}$ ، π ، $\frac{٧}{٩}$ ،

$-٠,١٧$ ، ٠,٣ ، ٠,٣٥٣٣٥٣٣٣٥... ،

عدد نسبي	عدد غير نسبي

مثال (١) :

قدِّر $\sqrt{١٣}$

الحلّ :

نبحث عن عددَين مربّعَين كاملَين متتاليَين يقع بينهما العدد ١٣ وهما ٩ ، ١٦

$٩ < ١٣ < ١٦$

$\sqrt{٩} < \sqrt{١٣} < \sqrt{١٦}$

$٣ < \sqrt{١٣} < ٤$

بالتالي فإنّ $\sqrt{١٣}$ يقع بين ٣ ، ٤

١٣ أقرب إلى العدد ١٦

$\sqrt{١٣} \approx ٣,٦$

(تحقَّق من إجابتك باستخدام الآلة الحاسبة)

تذكَّر

$١^{٢} = ١$	$٧^{٢} = ٤٩$
$٢^{٢} = ٤$	$٨^{٢} = ٦٤$
$٣^{٢} = ٩$	$٩^{٢} = ٨١$
$٤^{٢} = ١٦$	$١٠^{٢} = ١٠٠$
$٥^{٢} = ٢٥$	$١١^{٢} = ١٢١$
$٦^{٢} = ٣٦$	$١٢^{٢} = ١٤٤$

من خواصّ الجذور التربيعية

إذا كان أ ، ب عددَين نسبيَّين موجَبَين ، فإنّ :

- $\sqrt{أ \times ب} = \sqrt{أ} \times \sqrt{ب}$
- $\sqrt{\frac{أ}{ب}} = \frac{\sqrt{أ}}{\sqrt{ب}}$
- $\sqrt{أ} \times \sqrt{أ} = أ$

انتبه

- $\sqrt{أ + ب} \neq \sqrt{أ} + \sqrt{ب}$
- $\sqrt{أ - ب} \neq \sqrt{أ} - \sqrt{ب}$

مثال (٢) :

أوجِد ناتج كلّ ممّا يلي موظِّفًا خواصّ الجذور التربيعية :

(أ) $\sqrt{٥} \times \sqrt{٥} = ٥$

(ب) $\sqrt{٤٩ \times ٩} = \sqrt{٤٩} \times \sqrt{٩} = ٧ \times ٣ = ٢١$

(ج) $\sqrt{\frac{٢٥}{٦٤}} = \frac{\sqrt{٢٥}}{\sqrt{٦٤}} = \frac{٥}{٨}$

(د) $\sqrt{٢} \times \sqrt{٨} = \sqrt{٨ \times ٢} = \sqrt{١٦} = ٤$

(هـ) $\frac{\sqrt{٢٤}}{\sqrt{٦}} = \sqrt{\frac{٢٤}{٦}} = \sqrt{٤} = ٢$

(و) $-\sqrt{٠,٨١} = -\sqrt{\frac{٨١}{١٠٠}} = -\frac{\sqrt{٨١}}{\sqrt{١٠٠}} = -\frac{٩}{١٠} = -٠,٩$

(ز) $\sqrt{٣٦٠٠} = \sqrt{١٠٠ \times ٣٦} = \sqrt{١٠٠} \times \sqrt{٣٦} = ١٠ \times ٦ = ٦٠$

(ح) $٢\sqrt{٣} \times \sqrt{٣} = ٢ \times ٣ = ٦$

عبِّر عن فهمك

هل الجذر التربيعي للعدد ٥٠ يساوي ضعف الجذر التربيعي للعدد ٢٥ ؟ وضِّح إجابتك .

تمارين ذاتية :

١ حدِّد ما إذا كان كلّ عدد ممّا يلي عددًا نسبيًّا أم غير نسبي :

أ) $\sqrt{١٦}$ .....

ب) $\sqrt{٢٠}$ .....

ج) $٢,\overline{١٥}$ .....

د) $-٠,٧٧$ .....

هـ) $\frac{٨}{٣}$ .....

و) $\sqrt{\frac{٩}{٢٥}}$ .....

ز) π .....

ح) $٠,٢٤٢٤٢٤٤٤...$ .....

ط) $\sqrt{٣} + ٢$ .....

٢ قدِّر كلًّا ممّا يلي :

أ) $\sqrt{٣٥}$ .....

ب) $\sqrt{٦٨}$ .....

٣ أوجِد ناتج كلّ ممّا يلي موظِّفًا خواصّ الجذور التربيعية :

أ) $-\sqrt{\frac{١}{٨١}} =$ .....

ب) $\sqrt{١١} \times \sqrt{١١} =$ .....

ج) $\sqrt{٤ \times ٤٩} =$ .....

د) $\sqrt{٢} \times \sqrt{١٨} =$ .....

هـ) $\sqrt{\frac{٢٧}{٣}} =$ .....

و) $\sqrt{٢٥٠٠} =$ .....

ز) $\sqrt{٠,٦٤} =$ .....

ح) $\sqrt[٥]{٣} \times \sqrt[٥]{٢} =$ .....

ط) $\sqrt{٧٥} \times \sqrt{٧} \times \sqrt{٢} =$ .....

ي) $\sqrt{٧٧} \times \sqrt{٣} =$ .....

مهارات تفكير عليا :

٤ في أحد المعارض ، يوجد قاعة عرض ، لها أرضية مربّعة الشكل مقسَّمة إلى أربعة أجزاء متطابقة . إذا كانت مساحة الجزء الواحد من الأرضية تساوي ٤٠٠ م^٢ ، فما طول ضلع أرضية القاعة ؟

.....

.....

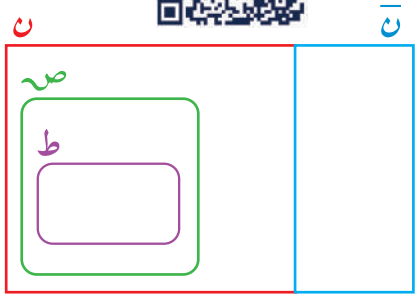
١ - ٢ الأعداد الحقيقية (مقارنة – ترتيب)
Real Numbers (Comparing - Ordering)

سوف تتعلّم : الأعداد الحقيقية ومقارنتها وترتيبها وتمثيلها .

العبارات والمفردات :

الأعداد الحقيقية	Real Numbers	فترة مغلَقة	Closed Interval
الفترات	Intervals	فترة مفتوحة	Open Interval
فترات محدودة	Bounded Intervals	فترة نصف مغلَقة	Half-Closed Interval
فترات غير محدودة	Unbounded Intervals	فترة نصف مفتوحة	Half-Open Interval

حُلّ وناقِش



١ ضَع كلًّا من الأعداد الآتية في مكانها المناسِب على شكل ڤن المقابِل .

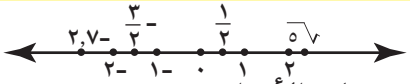
$\frac{١}{٢}$ ، -٤ ، ٩ ، $\sqrt{٥}$ ، ٠,٦ ، $\frac{٧}{٩}$ ، $\sqrt[٣]{-٢}$ ، $\sqrt{١٦}$ ، ٠ ، ٥

٢ أكمِل : ن ∩ $\bar{ن}$ = ...

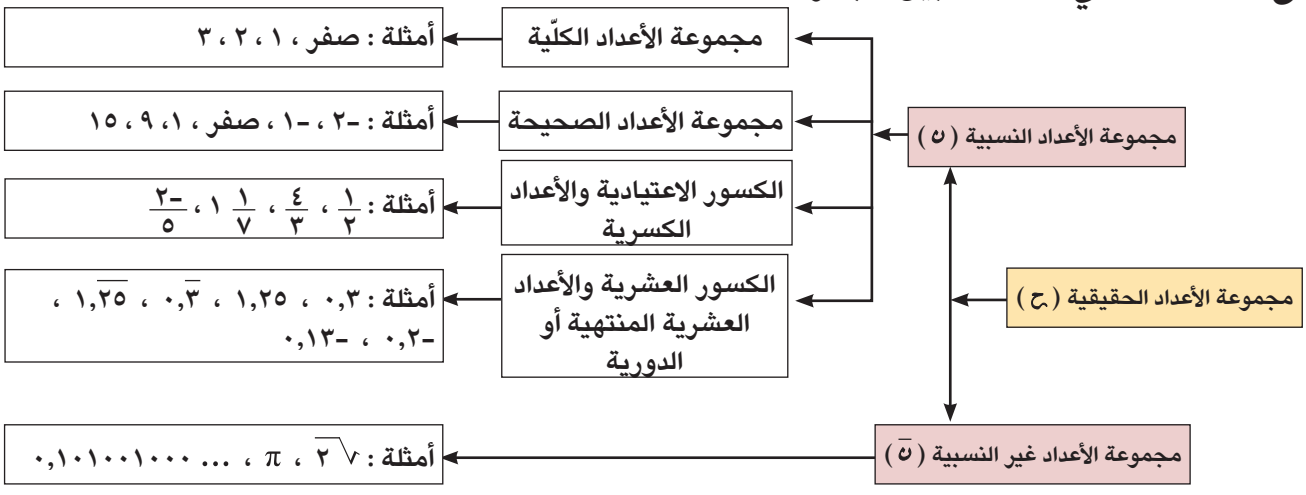
اِتّحاد مجموعة الأعداد النسبية (ن) ومجموعة الأعداد غير النسبية ($\bar{ن}$) يشكّل مجموعة تُسمّى مجموعة الأعداد الحقيقية (ح) .

أي أنّ : ن ∪ $\bar{ن}$ = ح

ويمكن تمثيلها على خطّ الأعداد بحيث كلّ نقطة على هذا الخطّ تمثّل عددًا حقيقيًّا وكلّ عدد حقيقي يُمثَّل بنقطة على خطّ الأعداد .



يوضّح المخطّط الآتي العلاقات بين مجموعات الأعداد :



مثال (١) :

قارِن بين العددَين:

(أ) π ، ٣,١٤

الحلّ :

$\pi \approx ٣,١٤١٥٩$

$\therefore \pi > ٣,١٤$

(ب) $٠,\overline{٦}$ ، $\frac{٣}{٥}$

الحلّ :

$٠,\overline{٦} \approx ٠,٦٦٦$

$\frac{٣}{٥} = ٠,٦$

$٠,٦٦٦ > ٠,٦$

$\therefore ٠,\overline{٦} > \frac{٣}{٥}$

(ج) $\frac{\pi}{٥}$ ، $\frac{٤}{٩}$

الحلّ :

$\frac{\pi}{٥} \approx ٠,٦٢٨ > \frac{١}{٢}$

$\frac{٤}{٩} < \frac{١}{٢}$

$\therefore \frac{٤}{٩} < \frac{\pi}{٥}$

$$\begin{array}{r|l} ٣,١٤٠ & ٥ \\ \hline ٣٠ & ٠,٦٢٨ \\ \hline ١٤ \\ ١٠ \\ \hline ٤٠ \\ ٤٠ \\ \hline ٠٠ \end{array}$$

حلّ آخر :

$\frac{\pi}{٥} \approx ٠,٦٢٨$

$\frac{٤}{٩} = ٠,\overline{٤}$

$\therefore \frac{٤}{٩} < \frac{\pi}{٥}$

تذكّر

$\frac{٤}{٩} = ٠,\overline{٤}$

مثال (٢) :

رتِّب تصاعديًّا الأعداد الآتية : π ، $\sqrt{١٧}$ ، $٣\frac{٥}{٨}$

الحلّ :

$\pi \approx ٣,١٤١٥$

$٣\frac{٥}{٨} = ٣,٦٢٥$

$\therefore \pi < ٣\frac{٥}{٨}$

$\sqrt{١٦} < \sqrt{١٧} < \sqrt{٢٥}$

$٤ < \sqrt{١٧} < ٥$

$\therefore ٤ < \sqrt{١٧}$

$\therefore \sqrt{١٧} > ٣\frac{٥}{٨}$

$\therefore$ **الترتيب التصاعدي :** π ، $٣\frac{٥}{٨}$ ، $\sqrt{١٧}$

دورك الآن (١)

(أ) رتِّب تصاعديًّا الأعداد الآتية :

$\pi ٢$ ، $\sqrt{٢٧}$ ، $٦,\overline{٥}$

.....

.....

.....

(ب) رتِّب تنازليًّا الأعداد الآتية :

$٣\frac{١}{٨}$ ، $-٣,\overline{١٣}$ ، $-\pi$ ، $\sqrt{٨}$

.....

.....

.....

الفترات

الفترة : هي مجموعة جزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية ، وتنقسم الفترات إلى نوعَين : فترات محدودة، وفترات غير محدودة .

أوّلاً : الفترات المحدودة

يُعبَّر عن الفترة بقوسَين يوضع داخلهما عددان، الأصغر يمثّل بداية الفترة والأكبر يمثّل نهاية الفترة مثلًا :

[-٥ ، ١] ، (٤ ، ٧) ، (-٦ ، -٤] ، [٠ ، ٣)

وتُصنَّف الفترات المحدودة إلى ثلاثة أنواع:

الفترات المغلَقة : [أ ، ب] هي مجموعة كلّ الأعداد الحقيقية التي تقع بين أ ، ب بما فيها أ ، ب ؛
أي الأعداد الحقيقية الأكبر من أو تساوي أ وأصغر من أو تساوي ب .

مثال (٣) :

اِشرح معنى الفترة [-٣ ، ١] ومثّلها على خطّ الأعداد :

الحلّ :

[-٣ ، ١] : هي مجموعة كلّ الأعداد الحقيقية التي تقع بين -٣ ، ١
وتضمّ أيضًا العددَين -٣ ، ١

أو [-٣ ، ١] : هي مجموعة الأعداد الحقيقية الأكبر من أو تساوي -٣ وأصغر من أو تساوي ١

ونمثّل طرفَي الفترة المغلَقة على خطّ الأعداد بدوائر مظلَّلة .

اِنتبِه

يكون العدد الواقع إلى اليسار على خطّ الأعداد أصغر من العدد الواقع إلى يمينه دائمًا .

الفترات المفتوحة : (أ ، ب) هي مجموعة كلّ الأعداد الحقيقية التي تقع بين أ ، ب فقط ؛
أي الأعداد الحقيقية الأكبر من أ ، وأصغر من ب .

مثال (٤) :

مثّل الفترة (-٤ ، ٥) على خطّ الأعداد .

ونمثّل طرفَي الفترة المفتوحة على خطّ الأعداد بدوائر غير مظلَّلة .

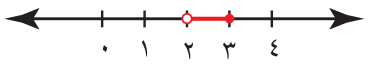
الفترات نصف المفتوحة أو نصف المغلَقة :

(أ ، ب] : هي مجموعة كلّ الأعداد الحقيقية التي تقع بين أ ، ب ومن ضمنها ب .
[أ ، ب) : هي مجموعة كلّ الأعداد الحقيقية التي تقع بين أ ، ب ومن ضمنها أ .

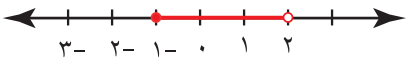
مثال (٥) :

مثِّل كلًّا من الفترات الآتية على خطّ الأعداد :

(أ) (٢ ، ٣] :



(ب) [-١ ، ٢) :



يوضّح الجدول الآتي أنواع الفترات المحدودة : ليكن أ ، ب عددَين حقيقيَّين حيث أ < ب .

رمز الفترة	نوع الفترة	رمز المتباينة	التمثيل البياني	التعبير اللفظي
[أ ، ب]	مغلَقة	أ ≤ س ≤ ب		مجموعة الأعداد الحقيقية الأكبر من أو تساوي أ والأصغر من أو تساوي ب
(أ ، ب)	مفتوحة	أ < س < ب		مجموعة الأعداد الحقيقية الأكبر من أ والأصغر من ب
[أ ، ب)	نصف مغلَقة أو نصف مفتوحة	أ ≤ س < ب		مجموعة الأعداد الحقيقية الأكبر من أو تساوي أ والأصغر من ب
(أ ، ب]	نصف مفتوحة أو نصف مغلَقة	أ < س ≤ ب		مجموعة الأعداد الحقيقية الأكبر من أ والأصغر من أو تساوي ب

دورك الآن (٢)

أكمِل الجدول الآتي :

رمز الفترة	نوع الفترة	رمز المتباينة	التمثيل البياني	التعبير اللفظي
[١ ، ٣]		١ ≤ س ≤ ٣		مجموعة الأعداد الحقيقية الأكبر من أو تساوي ١ والأصغر من أو تساوي ٣
(-١ ، ٤)	مفتوحة			
	نصف مغلَقة أو نصف مفتوحة			مجموعة الأعداد الحقيقية الأكبر من أو تساوي -٤ والأصغر من ٠
	نصف مفتوحة أو نصف مغلَقة	-٥ < س ≤ -٢		

عبِّر عن فهمك

هل كلّ مجموعة جزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية تمثّل فترة ؟

ثانيًا : الفترات غير المحدودة

فترات تتضمّن ∞ ، -∞

[أ ، ∞) هي مجموعة كلّ الأعداد الحقيقية الأكبر من أ ومن ضمنها أ .

(أ ، ∞) هي مجموعة كلّ الأعداد الحقيقية الأكبر من أ .

(-∞ ، أ] هي مجموعة كلّ الأعداد الحقيقية الأصغر من أ ومن ضمنها أ .

(-∞ ، أ) هي مجموعة كلّ الأعداد الحقيقية الأصغر من أ .

ملاحظة :

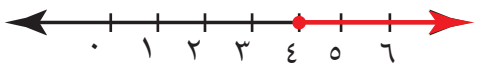
الرمز ∞ يُقرأ ما لا نهاية . وهو أكبر من أيّ عدد حقيقي .

الرمز -∞ يُقرأ سالب ما لا نهاية . وهو أصغر من أيّ عدد حقيقي .

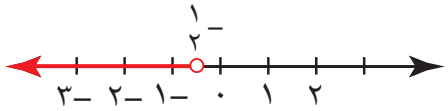
مثال (٦) :

مثِّل كلًّا من الفترات الآتية على خطّ الأعداد :

(أ) [٤ ، ∞) :



(ب) (-∞ ، $-\frac{١}{٢}$) :



يوضّح الجدول الآتي أنواع الفترات غير المحدودة : ليكن أ ، ب عددَين حقيقيَّين .

رمز الفترة	نوع الفترة	رمز المتباينة	التمثيل البياني	التعبير اللفظي
[أ ، ∞)	نصف مغلَقة وغير محدودة من أعلى	س ≥ أ		مجموعة الأعداد الحقيقية الأكبر من أو تساوي أ
(أ ، ∞)	مفتوحة وغير محدودة من أعلى	س > أ		مجموعة الأعداد الحقيقية الأكبر من أ
(-∞ ، ب]	نصف مغلَقة وغير محدودة من أسفل	س ≤ ب		مجموعة الأعداد الحقيقية الأصغر من أو تساوي ب
(-∞ ، ب)	مفتوحة وغير محدودة من أسفل	س < ب		مجموعة الأعداد الحقيقية الأصغر من ب

دورك الآن (٣)

أكمِل الجدول الآتي :

رمز الفترة	نوع الفترة	رمز المتباينة	التمثيل البياني	التعبير اللفظي
] -٤ ، ∞)	نصف مغلَقة وغير محدودة من أعلى			مجموعة الأعداد الحقيقية الأكبر من أو تساوي -٤
	مفتوحة وغير محدودة من أعلى			مجموعة الأعداد الحقيقية الأكبر من صفر
		س ≥ -٢		
(-∞ ، -٢)				مجموعة الأعداد الحقيقية الأصغر من -٢

تمارين ذاتية :

١ قارِن بين العددَين في كلّ ممّا يلي :

(أ) $\frac{٢}{٣}$ ، $٠,\overline{٦}$

.....

.....

.....

(ب) -٢π ، $-٦,٢$

.....

.....

.....

(ج) $\frac{١}{٤}$ ، $٠,٢٥\overline{٠}$

.....

.....

.....

(د) $١\frac{٢}{٥}$ ، $\sqrt{٥٧}$

.....

.....

.....

٢ (أ) رتِّب تصاعديًّا الأعداد الآتية :

$\frac{٣}{٥}$ ، $٠,\overline{٦}$ ، $\frac{١}{٢}$

.....

.....

.....

(ب) رتِّب تنازليًّا الأعداد الآتية :

$٣\frac{٣}{٨}$ ، $-٣,\overline{٣٧}$ ، $\sqrt{١٥}$

.....

.....

.....

(ج) رتِّب تصاعديًّا الأعداد الآتية :

$٠,\overline{٥}$ ، $\frac{\pi}{٤}$ ، $\frac{٣}{٧}$

.....

.....

.....

.....

(د) رتِّب تنازليًّا الأعداد الآتية :

٢π ، $\sqrt{٤٨}$ ، $-٦,\overline{٢٥}$ ، $-٦\frac{٧}{٢٠}$

.....

.....

.....

.....

.....

٣ (أ) أُكتب الفترة التي تعبّر عن مجموعة الأعداد الحقيقية الأكبر من أو تساوي ٢ والأصغر من ٥

.....

(ب) أُكتب الفترة التي تعبّر عن مجموعة الأعداد الحقيقية الأكبر من ٢ والأصغر من أو تساوي ٥

.....

ج أُكتب الفترة التي تعبّر عن مجموعة الأعداد الحقيقية الأكبر من −٣

.....

د أُكتب الفترة التي تعبّر عن مجموعة الأعداد الحقيقية الأصغر من أو تساوي −٣

.....

هـ إذا كانت ٣ ≥ س > $\sqrt{٣٦}$ ، فاكتب الفترة ومثِّلها على خطّ الأعداد .

.....

.....

٤ أكمِل الجدول الآتي :

رمز الفترة	نوع الفترة	رمز المتباينة	التمثيل البياني	التعبير اللفظي
[٢ ، ٥]			←——→	
			←——●——●——→ (−٢ ، ١)	
			←——→	مجموعة الأعداد الحقيقية الأكبر من أو تساوي −٤
		س > ٥	←——→	

مهارات تفكير عليا :

٥ تُقاس سرعة إغلاق الكاميرات الرقمية بوحدة الثانية . إذا كانت سرعات إغلاق الستّ كاميرات الرقمية بالثانية كما يلي : $\frac{١}{١٢٥}$ ، ٠,٠٦ ، $\frac{١}{٢٠}$ ، ٠,١٢٥ ، $\sqrt{٢}$ ، ٠,٠٠٤ ،
فرتِّب هذه السرعات من الأسرع إلى الأبطأ .

.....

.....

١ - ٣

العمليات على الأعداد الحقيقية
Operations on Real Numbers

سوف تتعلّم : إجراء عمليات على الأعداد الحقيقية .

حُلّ وناقِش

يعمل ناصر بعد المدرسة في شركة والده كمتدّرب في إدارة الحسابات .

لنفترِض أنّ الجدول الآتي يوضّح بعض المصروفات لهذا الشهر .

مجال المصروفات	قيمة المصروفات
قرطاسية	١٠٠ دينار
ضيافة	١٥٠ دينارًا
صيانة	١٥٠ دينارًا
مجموع المصروفات الفعلي	..... دينار

كتب ناصر العبارة الرياضية المناسِبة لإيجاد مجموع الحسابات وهي : ١٠٠ + ١٥٠ × ٢

حسب ناصر ومحاسب الشركة الناتج بطريقتَين مختلفتَين كما يلي :

الخطوات التي اتّبعها ناصر	الخطوات التي اتّبعها المحاسب
١٠٠ + ١٥٠ = ...	١٥٠ × ٢ = ...
٢٥٠ × ٢ = ... دينار	١٠٠ + ٣٠٠ = ... دينار

ناصر

محاسب الشركة

أكمِل الجدول .

قارِن النواتج بمجموع المصروفات الفعلي ، وأيّ منها كان صحيحًا ؟

هل نحتاج إلى أولويات لتبسيط التعابير العددية ؟ فسِّر ذلك .

.....

.....

ترتيب العمليات على الأعداد الحقيقية

يمكنك تبسيط التعابير العددية باستخدام أولويات وهي :

أ **تبسيط العمليات داخل الأقواس .**

ب **الأسس والجذور والأعداد الدورية .**

ج **إجراء عمليات الضرب والقسمة من جهة اليمين .**

د **إجراء عمليات الجمع والطرح من جهة اليمين .**

دورك الآن (١)

حدِّد الإجراء الذي يتمّ أوّلًا :

أ) $\sqrt{٨١} - ٢ \times ٨$ .....

ب) $-١٢ (٧٠ + ٣٠)$ .....

ج) $٤٨ \div ٣٢ \times ٢$ .....

د) $\frac{(٢٤ + ٤)}{-٤}$ .....

عبِّر عن فهمك

بأيّ العمليات نبدأ : $٣ + \frac{٦ - ٨}{٢}$

خواصّ العمليات على الأعداد الحقيقية

إذا كانت أ ، ب ، جـ أعدادًا حقيقية فإنّ :

- أ + ب = ب + أ — خاصّية الإبدال لعملية الجمع .
- أ × ب = ب × أ — خاصّية الإبدال لعملية الضرب .
- أ + (ب + جـ) = (أ + ب) + جـ — خاصّية التجميع لعملية الجمع .
- أ × (ب × جـ) = (أ × ب) × جـ — خاصّية التجميع لعملية الضرب .
- أ × (ب + جـ) = أ × ب + أ × جـ — خاصّية توزيع الضرب على الجمع .

دورك الآن (٢)

أُذكر الخاصّية المستخدَمة :

أ) $\pi + \frac{١}{٢} = \frac{١}{٢} + \pi$ — خاصّية .....

ب) $\sqrt{٢} \times (\sqrt{٨} \times \sqrt{٥}) = (\sqrt{٢} \times \sqrt{٨}) \times \sqrt{٥}$ — خاصّية .....

ج) $\frac{٤}{٣} \times (\frac{٣}{٤} + \frac{٦}{٤}) = (\frac{٤}{٣} \times \frac{٣}{٤}) + (\frac{٤}{٣} \times \frac{٦}{٤})$ — خاصّية .....

مثال :

أوجِد الناتج في أبسط صورة : $٣ \times \overline{٠,٦} - \sqrt{٣} \times \sqrt{٢٧}$

الحلّ :

$$٣ \times \overline{٠,٦} - \sqrt{٣} \times \sqrt{٢٧}$$
$$= ٣ \times \frac{٦}{٩} - \sqrt{٨١}$$
$$= ٣^{١} \times \frac{٢}{\cancel{٣}_{١}} - ٩$$
$$= ٢ - ٩$$
$$= -٧$$

تذكَّر

- $\overline{٠,٦} = \frac{٦}{٩}$
- $\sqrt{أ} \times \sqrt{ب} = \sqrt{أ \times ب}$

حيث أ ، ب عددان موجَبان .

دورك الآن (٣)

أوجِد الناتج في أبسط صورة :

(أ) $٥ \times \sqrt{١٦} \div \overline{٠,٣} - ٧ \times ٢$

(ب) $\sqrt{\frac{١٠٠}{١٦}} \times ٨ - ٢٥$

عبِّر عن فهمك

ضَع أقواسًا لتصبح العبارة صحيحة : $١٢ \div ٣ + ١ + ٢ = ٥$

تمارين ذاتية :

١ أوجِد قيمة كلّ ممّا يلي بطريقتَين مختلفتَين :

(أ) $٤ \times (٧ + ٨)$

(ب) $٨ \times (١٠ - ١)$

٢ أوجِد قيمة كلّ ممّا يلي :

(أ) $٢٥ \div ٥ \times (-٣) + ٧$

.....

.....

(ب) $١٨ - (-٤) + ٦ \div (-٣)$

.....

.....

(ج) $\frac{١٢ - ٦}{٦} + (-١)$

.....

.....

(د) $\frac{-٣(٩ + ٢)}{-١١} + (-٢)$

.....

.....

٣ أوجِد ناتج كلّ ممّا يلي في أبسط صورة :

(أ) $٢ \times \frac{٣}{٨} - \frac{\sqrt{٨}}{\sqrt{٢}}$

.....

.....

.....

(ب) $\sqrt{٢٧} \times \sqrt{٣} + ٠,\overline{٧} \times \frac{١٨}{٧}$

.....

.....

.....

(ج) $٨ \times \sqrt{٢٥} \div ٠,\overline{٦} + ٤ \times ٩$

.....

.....

.....

(د) $\sqrt{٤٩} \div ٠,\overline{٧} - ٩ \times ٦$

.....

.....

.....

٤ نظّمت إحدى المدارس رحلة إلى المركز العلمي ، وكانت أسعار التذاكر على الشكل الآتي :
زيارة المركز ٣,٥ دنانير ، زيارة قاعة الاستكشاف ٤,٥ دنانير .
أُحسب المبلغ الإجمالي للرحلة مستعينًا بالجدول الموضَّح فيه عدد المتعلّمين المشارِكين ؟

أنواع التذاكر	زيارة المركز	زيارة قاعة الاستكشاف
عدد المتعلّمين	٢٠	١٠

.....

.....

٥ إذا أنتجت كلّ من الكويت والإمارات العربية المتّحدة والصين الكمّية نفسها من النفط في أحد الأيّام ولتكن ٣,٦ ملايين برميل ، وأنتجت المملكة العربية السعودية في اليوم نفسه ١٠ ملايين برميل ، فاحسب إجمالي إنتاج الدول الأربع في هذا اليوم .

.....

.....

.....

١ - ٤ القيمة المطلَقة Absolute Value

سوف تتعلّم : إيجاد القيمة المطلَقة وحلّ معادلات تتضمّن القيمة المطلَقة .

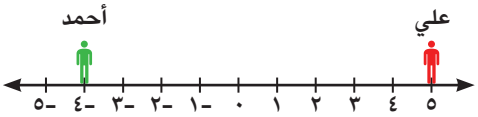
العبارات والمفردات :

معادلة	Equation	متغيّر	Variable
قيمة مطلَقة	Absolute value		

اِستكشِف

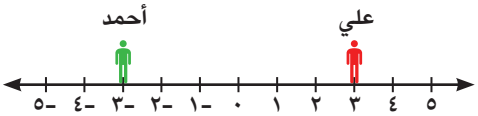
يقف كلّ من علي وأحمد على خطّ للأعداد ، كما هو موضَّح في الشكل أدناه :

(أ) يقول علي : إنّه يقف على بعد ٥ وحدات إلى يمين الصفر ، ويقول أحمد : إنّه يقف على بعد ٤ وحدات إلى يسار الصفر .



أيّهما الأقرب إلى الصفر على خطّ الأعداد ؟ .....

(ب) يقول علي : إنّه يقف على بعد ٣ وحدات إلى يمين الصفر ، ويقول أحمد : إنّه يقف على بعد ٣ وحدات إلى يسار الصفر .



أيّهما الأقرب إلى الصفر على خطّ الأعداد ؟ .....

القيمة المطلَقة

القيمة المطلَقة لعدد حقيقي : هي البعد على خطّ الأعداد بين هذا العدد والصفر .

إيجاد القيمة المطلَقة للعدد الحقيقي يتشابه مع إيجاد القيمة المطلَقة للعدد النسبي .

فمثلًا $|-\overline{٠,٨١}| = \overline{٠,٨١}$ ، $|٠,٥| = ٠,٥$ ، $|-\frac{٢}{٣}| = \frac{٢}{٣}$

مثال (١) :

أوجِد كلًّا ممّا يلي : (أ) $|\pi - ٢|$ (ب) $|\sqrt{١٦ - ٩}|$

الحلّ :

(أ) $|\pi - ٢| \approx |٣,١٤ - ٢| \approx |-١,١٤| \approx ١,١٤$

(ب) $|\sqrt{١٦ - ٩}| = |\sqrt{٧}| = \sqrt{٧}$

من خواصّ القيمة المطلَقة : لكلّ س ، ص ∈ ح

(١) | س × ص | = | س | × | ص |

(٢) | س / ص | = | س | / | ص | ، حيث ص ≠ ٠

(٣) | س - ص | = | ص - س |

عبِّر عن فهمك

هل | ٥ + (-٣) | = | ٥ | + | -٣ | ؟ ولماذا ؟

دورك الآن (١)

أوجِد ناتج كلّ ممّا يلي مستخدِمًا خواصّ القيمة المطلَقة :

(أ) | ٣ × ٦ |

= | ..... | × | ..... |

= ..... × .....

= .....

(ب) | -٤ / ٩ |

= | ..... | / | ..... |

= .....

(ج) | ٠,٥ - ٢٣,٥ |

= | ..... - ٢٣,٥ |

= | ..... |

= .....

إيجاد قيمة مقدار جبري

مثال (٢) :

أوجِد قيمة : | س + ٤ | + | -٠,٥ | إذا كانت س = -٦

الحلّ :

| س + ٤ | + | -٠,٥ |

= | -٦ + ٤ | + | -٠,٥ | بالتعويض عن قيمة س

= | -٢ | + ٠,٥

= ٢ + ٠,٥

= ٢,٥

دورك الآن (٢)

أوجِد قيمة كلّ ممّا يلي :

(أ) $|$ س × ٦ + ٤ $|$

إذا كانت س = ١١

.....

.....

(ب) $|$ س − ٥ $|$ + $|$ −٣,٢ $|$

إذا كانت س = − ٤

.....

.....

حلّ معادلات تتضمّن قيمة مطلَقة

بالرجوع إلى (اِستكشِف) السابق، نستطيع أن نعرّف أيضًا القيمة المطلَقة على الشكل الآتي :

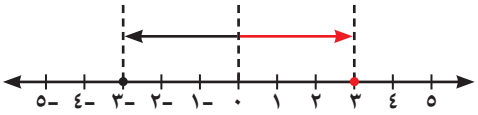
لكلّ عدد حقيقي س يكون :

(أ) $|$ س $|$ = { س إذا كان س > ٠ ؛ ٠ إذا كان س = ٠ ؛ − س إذا كان س < ٠ }

(ب) $|$ س $|$ ≥ ٠

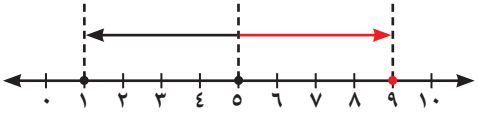
يمكن استخدام خطّ الأعداد لحلّ معادلات تتضمّن قيمة مطلَقة .

عندما نقول : إنّ $|$ س $|$ = ٣ نعني بها أنّ المسافة بين س و الصفر تساوي ٣ وحدات ، كما هو موضَّح في التمثيل البياني المقابِل على خطّ الأعداد.



∴ للمعادلة $|$ س $|$ = ٣ حلّان هما ٣ ، − ٣

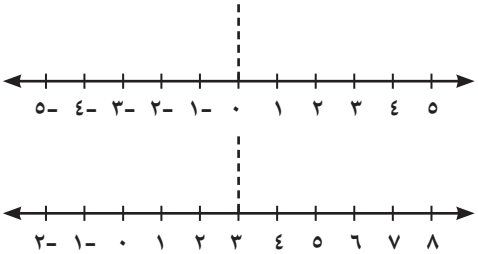
وعندما نقول : إنّ $|$ س − ٥ $|$ = ٤ نعني بها أنّ المسافة بين س و العدد ٥ تساوي ٤ وحدات ، كما هو موضَّح في التمثيل البياني المقابِل على خطّ الأعداد .



∴ للمعادلة $|$ س − ٥ $|$ = ٤ حلّان هما ٩ ، ١

دورك الآن (٣)

أكمِل لتوجِد حلّ المعادلات الآتية مستعينًا بالتمثيل الموضَّح على خطّ الأعداد :



(أ) $|$ س $|$ = ٤ للمعادلة حلّان هما :

س = ... أو س = ...

(ب) $|$ س − ٣ $|$ = ٥ للمعادلة حلّان هما :

س = ... أو س = ...

(١) إذا كان $أ$ عددًا حقيقيًّا موجَبًا ، فإنّ المعادلة :

$|س| = أ$

لها حلّان هما $س = أ$ أو $س = -أ$ ومجموعة الحلّ هي $\{أ ، -أ\}$

(٢) إذا كان $أ$ عددًا حقيقيًّا سالبًا ، فإنّ المعادلة :

$|س| = أ$ ليس لها حلّ ومجموعة حلّها هي $\varnothing$

(٣) إذا كان $أ = ٠$ ، فإنّ المعادلة :

$|س| = أ$ لها حلّ وحيد هو $س = ٠$ ومجموعة حلّها هي $\{٠\}$

مثال (٣) :

أوجِد مجموعة حلّ كلّ من المعادلات الآتية في ح :

(أ) $|س| = ٥$

الحلّ :

$س = ٥$ أو $س = -٥$

∴ مجموعة الحلّ $= \{٥ ، -٥\}$

(ب) $|٢س + ١| = ٣$

الحلّ :

$|٢س + ١| = ٣$

$٢س + ١ = ٣$ أو $٢س + ١ = -٣$

$٢س + ١ - ١ = ٣ - ١$ $٢س + ١ - ١ = -٣ - ١$

$٢س = ٢$ $٢س = -٤$

$\frac{١}{٢} \times ٢س = \frac{١}{٢} \times ٢$ $\frac{١}{٢} \times ٢س = \frac{١}{٢} \times -٤$

$س = ١$ $س = -٢$

∴ مجموعة الحلّ $= \{١ ، -٢\}$

لاحِظ أنّ

ح = ح$^-$ ∪ {٠} ∪ ح$^+$

تذكَّر

- المجموعة الخالية نعبّر عنها : { } أو $\varnothing$
- المعكوس الجمعي للعدد $أ$ هو $(-أ)$ بحيث :

$أ + (-أ) =$ صفرًا

$(-أ) + أ =$ صفرًا

- المعكوس الضربي للعدد $أ$ هو $\frac{١}{أ}$ بحيث :

$أ \times \frac{١}{أ} = \frac{١}{أ} \times أ = ١$ ،

حيث $أ \neq ٠$

ج) $|٥ص - ٢| + ٩ = ٩$

الحلّ :

$|٥ص - ٢| + ٩ = ٩$

$|٥ص - ٢| + ٩ - ٩ = ٩ - ٩$

$|٥ص - ٢| = ٠$

$٥ص - ٢ = ٠$

$٥ص = ٢$ (بالضرب في $\frac{١}{٥}$ للطرفَين)

$ص = \frac{٢}{٥}$

∴ مجموعة الحلّ = $\{\frac{٢}{٥}\}$

انتبه

تخلَّص من العدد ٩ ، وذلك بإضافة المعكوس الجمعي للطرفَين قبل البدء بفكّ المطلَق .

د) $٢|٣ - س| = ٦$

الحلّ :

$٢|٣ - س| = ٦$

$\frac{١}{٢} \times ٢|٣ - س| = \frac{١}{٢} \times ٦$

$|٣ - س| = ٣$

$|س - ٣| = ٣$

$س - ٣ = ٣$ أو $س - ٣ = -٣$

$س - ٣ + ٣ = ٣ + ٣$ $س - ٣ + ٣ = -٣ + ٣$

$س = ٦$ $س =$ صفرًا

∴ مجموعة الحلّ = $\{٠ ، ٦\}$

انتبه

تخلَّص من العدد ٢ ، وذلك بالضرب في المعكوس الضربي للطرفَين قبل البدء بفكّ المطلَق .

تذكَّر

$|س - ص| = |ص - س|$

هـ) $|٤س + ١| + ٧ = ١$

الحلّ :

$|٤س + ١| + ٧ = ١$

$|٤س + ١| + ٧ - ٧ = ١ - ٧$

$|٤س + ١| = -٦$

∴ مجموعة الحلّ = $\varnothing$

تمارين ذاتية :

١ أوجِد قيمة كلّ ممّا يلي :

(أ) $|٢ س| - ٣$ إذا كانت $س = ٥$

.....

.....

.....

(ب) $|س + ٢| + |٦|$ إذا كانت $س = -٢$

.....

.....

.....

(ج) $|س \times ٧ - ٦|$ إذا كانت $س = ٨$

.....

.....

.....

(د) $|س - ٨| + |-١,٣|$ إذا كانت $س = ٤$

.....

.....

.....

٢ أوجِد مجموعة حلّ كلّ من المعادلات الآتية في ح :

(أ) $|٥ س - ٣| = ٨$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

ب) $|٧ س| = ٠$

.....

.....

.....

ج) $|١ - ص| = ٤$

.....

.....

.....

.....

.....

د) $|٣ س + ٧| = ٠$

.....

.....

.....

هـ) $|٩ س - ٢| = -١$

.....

.....

و) $|\frac{١}{٢} س - ٣| = ١٠$

.....

.....

.....

ز) $|س| - ١ = ٣$

.....

.....

.....

ح) $٣|٤ س + ١| - ٩ = ٠$

.....

.....

.....

.....

١ - ٥ حلّ متباينة من الدرجة الأولى في متغيّر واحد

Solving First Degree Inequality in One Variable

سوف تتعلّم : حلّ متباينة من الدرجة الأولى في متغيّر واحد .

العبارات والمفردات :

المتباينة	Inequality

حُلّ وناقِش

في يوم المعلّم العالمي ، أرادت إدارة المدرسة تصميم بطاقة مستطيلة الشكل ويُحيط بها إطار ذهبي اللون كإهداء لمعلّمي المدرسة .

قم للمُعلّم وفِّه التبجيلا
كادَ المُعلّم أن يكون رسولًا

١ ما القانون المستخدَم لحساب محيط البطاقة ؟

.....

٢ قرّرت إدارة المدرسة أن يكون طول البطاقة ٢٠ سم ، شرط ألّا يتعدّى محيط البطاقة ٦٠ سم . أُكتب متباينة تحقّق هذه الشروط .

.....

٣ (أ) حُلّ المتباينة التي كتبتها .....

.....

(ب) ما العرض الأقصى للبطاقة ؟ .....

في المعادلات نستخدم علاقة المساواة ، بينما في المتباينات نستخدم العلاقات ($>$ ، $\geq$ ، $<$ ، $\leq$) .

المتباينات $٢٠س > ٥$ ، $ب < -٣$ ، $٢م + ٤ \leq ٧$ ، هي متباينات من الدرجة الأولى في متغيّر واحد ، بينما $٣ص^{٢} - ٤ < ٥$ هي متباينة من الدرجة الثانية لأنّ أسّ المتغيّر ص يساوي ٢ .

طريقة حلّ المتباينات من الدرجة الأولى في متغيّر واحد تشبه طريقة حلّ المعادلات من الدرجة الأولى في متغيّر واحد ، والاختلاف يكون في مجموعة الحلّ .

المتباينة $٢م + ٤ < ٧$ ، إذا كانت م = ٣ ، تصبح $٢ \times ٣ + ٤ < ٧$ وهذه عبارة صحيحة .

العدد ٣ يحقّق صحّة المتباينة وهو أحد حلولها .

معلومة مفيدة :

يحلّ الإخصائيون في المعامل المتباينات كي لا تتخطّى كلفة إنتاج السلعة المبلغ المقرَّر .

من خواصّ التباين :

لكلّ أ ، ب ، جـ ∈ ح ، إذا كان أ < ب فإنّ :

(١) أ + جـ < ب + جـ

(٢) أ × جـ < ب × جـ ، حيث جـ > ٠

(٣) أ × جـ > ب × جـ ، حيث جـ < ٠

مثال (١) :

أوجِد مجموعة حلّ المتباينة : ٢س + ٣ ≥ ٧ في ح ، ومثِّلها على خطّ الأعداد الحقيقية .

الحلّ :

٢ س + ٣ ≥ ٧

٢ س + ٣ - ٣ ≥ ٧ - ٣ إضافة المعكوس الجمعي للعدد ٣ للطرفَين

٢ س ≥ ٤

$\frac{١}{٢} \times ٢ س \geq \frac{١}{٢} \times ٤$ ضرب الطرفَين في المعكوس الضربي للعدد ٢

س ≥ ٢

∴ مجموعة الحلّ = [٢ ، ∞ -)

مثال (٢) :

أوجِد مجموعة حلّ : ٢ - ٣ س < ١٤ في ح ، ومثِّلها على خطّ الأعداد الحقيقية .

الحلّ :

٢ - ٣ س < ١٤

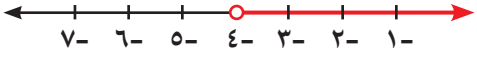
- ٣ س < ١٤ - ٢

- ٣ س < ١٢

$-\frac{١}{٣} \times -٣ س > -\frac{١}{٣} \times ١٢$ بضرب طرفَي المتباينة في $-\frac{١}{٣}$ ،

س > - ٤

∴ مجموعة الحلّ = (٤- ، ∞)



إنتبِه

عند ضرب طرفَي المتباينة في عدد حقيقي سالب نعكس علامة التباين .

مثال (٣) :

أوجِد مجموعة حلّ المتباينة : ٣ > س + ١ ≥ ٤ ، س ∈ ح ، ومثِّلها على خطّ الأعداد الحقيقية .

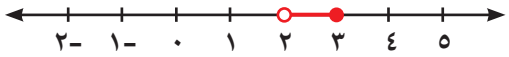
الحلّ :

٣ > س + ١ ≥ ٤

٣ - ١ > س + ١ - ١ ≥ ٤ - ١

٢ > س ≥ ٣

مجموعة الحلّ = (٢ ، ٣]



حلّ متباينات تتضمّن قيمة مطلَقة

أوّلاً :

المتباينة |س| ≥ ٣ تعني أنّ س عدد حقيقي بعده عن الصفر أصغر من أو يساوي ٣ ، أي أنّ : - ٣ ≥ س ≥ ٣

وتُكتب مجموعة حلّ المتباينة كالآتي [-٣ ، ٣] .

تذكَّر

إذا كان | س | = أ

حيث أ ∈ ح+

فإنّ : س = أ أو س = -أ

| س | ≥ أ ⟺ -أ ≥ س ≥ أ ، حيث س ∈ ح ، أ ∈ ح+

مثال (٤) :

أوجِد مجموعة حلّ المتباينة : | س + ٤ | > ٧ في ح ، ومثِّلها على خطّ الأعداد الحقيقية .

الحلّ :

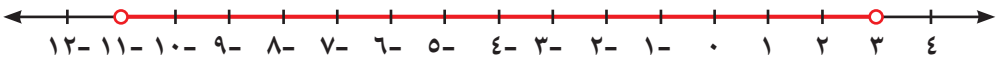
| س + ٤ | > ٧

- ٧ > س + ٤ > ٧

- ٧ - ٤ > س + ٤ - ٤ > ٧ - ٤

- ١١ > س > ٣

مجموعة الحلّ = (- ١١ ، ٣)



تذكَّر

الرمز ⟺ يُقرأ إذا وفقط إذا .

مثال (٥) :

أوجِد مجموعة حلّ المتباينة $|٢س + ٤| - ٣ \geq ٥$ في ح ، ومثِّلها على خطّ الأعداد الحقيقية .

الحلّ :

$|٢س + ٤| - ٣ \geq ٥$

$|٢س + ٤| - ٣ + ٣ \geq ٥ + ٣$

$|٢س + ٤| \geq ٨$

$-٨ \geq ٢س + ٤ \geq ٨$

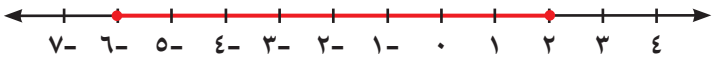
$-٨ - ٤ \geq ٢س + ٤ - ٤ \geq ٨ - ٤$

$-١٢ \geq ٢س \geq ٤$

$\frac{-١٢}{٢} \geq \frac{٢}{٢}س \geq \frac{٤}{٢}$

$-٦ \geq س \geq ٢$

مجموعة الحلّ = [-٦ ، ٢]



ثانيًا :

المتباينة $|س| \geq ٢$ تعني أنّ س عدد حقيقي بعده عن الصفر أكبر من أو يساوي ٢ ،

أي أنّ $س \geq ٢$ أو $س \leq -٢$

وتُكتب مجموعة حلّ المتباينة كالآتي : [٢ ، ∞) ∪ (-∞ ، -٢]

$|س| \geq ا \Leftrightarrow س \geq ا$ أو $س \leq -ا$ ، حيث $س \in ح ، ا \in ح^+$

مثال (٦) :

أوجِد مجموعة حلّ المتباينة : $|٢س - ١| \leq ٣$ في ح ، ومثِّلها على خطّ الأعداد الحقيقية .

الحلّ :

$|٢س - ١| \leq ٣$

$٢س - ١ \leq ٣$ أو $٢س - ١ \geq -٣$

$٢س - ١ + ١ \leq ٣ + ١$ $٢س - ١ + ١ \geq -٣ + ١$

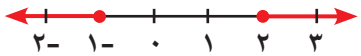
$٢س \leq ٤$ $٢س \geq -٢$

$س \leq \frac{٤}{٢}$ $س \geq \frac{-٢}{٢}$

$س \leq ٢$ $س \geq -١$

$س \in (-\infty ، ٢]$ $س \in [-١ ، \infty)$

مجموعة الحلّ = [-١ ، ∞) ∪ (-∞ ، ٢]



تذكَّر

- «أو» تعبّر عن الاتّحاد .
- «و» تعبّر عن التقاطع .

مثال (٧) :

أوجِد مجموعة حلّ المتباينة : ٢ | ٢ − س | > ٧ في ح ، ومثِّلها على خط الأعداد الحقيقية .

الحلّ :

تذكَّر

| س − ص | = | ص − س |

٢ | ٢ − س | > ٧

| ٢ − س | > $\frac{٧}{٢}$

| س − ٢ | > $\frac{٧}{٢}$

س − ٢ > $\frac{٧}{٢}$ أو س − ٢ < − $\frac{٧}{٢}$

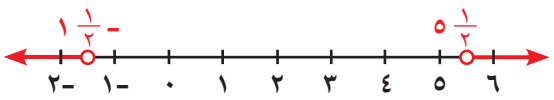
س − ٢ + ٢ > $\frac{٧}{٢}$ + ٢ س − ٢ + ٢ < − $\frac{٧}{٢}$ + ٢

س > $\frac{١١}{٢}$ س < − $\frac{٣}{٢}$

س > ٥ $\frac{١}{٢}$ س < − ١ $\frac{١}{٢}$

س ∈ (٥ $\frac{١}{٢}$ ، ∞) س ∈ (− ∞ ، − ١ $\frac{١}{٢}$)

مجموعة الحلّ = (٥ $\frac{١}{٢}$ ، ∞) ∪ (− ∞ ، − ١ $\frac{١}{٢}$)



عبِّر عن فهمك

- ما مجموعة حلّ | س | < − ٧ ؟ ولماذا ؟
- ما مجموعة حلّ | س | > − ٧ ؟ ولماذا ؟
- ما مجموعة حلّ | س | > ٠ ؟ ولماذا ؟
- ما مجموعة حلّ | س | ≤ ٠ ؟ ولماذا ؟

دورك الآن (١)

أوجِد مجموعة حلّ المتباينة : ٣ − | س | ≤ ٤ في ح .

.....

.....

.....

.....

دورك الآن (٢)

يقدّم محلّ للعصائر الطازجة أنواعًا مختلفة من العصير . إذا كان يقدّم نوعًا من العصير بخلط ثلاثة أنواع من عصير الفاكهة : الفراولة والمانجو والأناناس ، وإذا كانت كمّية عصير الفراولة المستخدَمة هي $\frac{١}{٤}$ لتر ، والمانجو $١\frac{١}{٢}$ لتر ، فما الكمّية التي يمكن إضافتها من عصير الأناناس علمًا بأنّ وعاء الخلط يتّسع لـ ٢ لتر على الأكثر .

(اُكتب متباينة لإيجاد كمّية عصير الأناناس المناسِبة) .

.....

.....

.....

.....

.....

تمارين ذاتية :

أوجِد مجموعة حلّ كلّ من المتباينات الآتية في ح ، ومثِّلها على خطّ الأعداد الحقيقية .

١ س - ٩ > ٥

.....

.....

.....

.....

.....

٢ ١ ≥ ٢ ص + ٣ > ١١

.....

.....

.....

.....

.....

٣ ٣ - ٥ س ≥ ٨

.....

.....

.....

.....

.....

٤ | س + ٧ | > ٥

.....

.....

.....

.....

٥ | م + ١ | ≤ ٦

.....

.....

.....

.....

.....

.....

٦ ٢ | س | - ٣ > ٧

.....

.....

.....

.....

٧ | ٣ س - ٤ | + ١ ≥ ١١

.....

.....

.....

.....

.....

٨ ٥ - | س | > -٢

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

٩ ٩ ≥ | ٣ - ٢ س |

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

مهارات تفكير عليا :

١٠ لتحصل مريم على تقدير امتياز في مادّة الرياضيات ، عليها أن تحصل على ١٨٠ درجة فأكثر من مجموع درجات الفصلَين الدراسيَّين ، إذا حصلت مريم على ٩١ درجة في نهاية الفصل الدراسي الأوّل ، فما الدرجات التي يجب أن تحصل عليها مريم في الفصل الدراسي الثاني لتحصل على تقدير امتياز في درجة نهاية العام ؟ (علمًا بأنّ الدرجة النهائية لمادّة الرياضيات = ١٠٠)

.....

.....

.....

.....

.....

١ - ٦ الصورة العلمية باستخدام الأسس الصحيحة

Scientific Notation by Using Integer Exponents

سوف تتعلّم : كتابة الأعداد الكبيرة والأعداد متناهية الصغر بالصورة العلمية .

العبارات والمفردات :

صورة علمية	Scientific Notation	أسس سالبة	Negative Exponents
أسس موجَبة	Positive Exponents		

حُلّ وناقِش

١ أكمِل الجدول الآتي :

العبارة	الناتج
$٨,٧ \times ١٠^{١} = ٨,٧ \times ١٠$	٨٧
$٨,٧ \times ١٠^{٢} = ٨,٧ \times ١٠٠$	.....
$٨,٧ \times ١٠^{٣} = ٨,٧ \times$	.....

العبارة	الناتج
$٨,٧ \times ١٠^{-١} = ٨,٧ \times \frac{١}{١٠}$	٠,٨٧
$٨,٧ \times ١٠^{-٢} = ٨,٧ \times \frac{١}{١٠٠}$	.....
$٨,٧ \times ١٠^{-٣} = ٨,٧ \times$	.....

٢ إذا ضُرب العدد ٨,٧ في إحدى القوى الموجَبة للعدد ١٠ ، فما العلاقة بين الموقع الجديد للفاصلة العشرية وقيمة الأسّ ؟

٣ إذا ضُرب العدد ٨,٧ في إحدى القوى السالبة للعدد ١٠ ، فما العلاقة بين الموقع الجديد للفاصلة العشرية وقيمة الأسّ السالب ؟

الصورة العلمية (القياسية) باستخدام الأسس الصحيحة الموجَبة

غالبًا ما يستخدم العلماء قوى العدد ١٠ في وصف معالم الأرض للتعبير عن الأعداد الكبيرة في الصورة العلمية ، وفي الصورة العلمية يُكتب العدد كقوى للعدد ١٠ مضروبًا في عدد قيمته المطلَقة أصغر من ١٠ وأكبر من أو تساوي ١ .

فمثلًا : $٤٥٦\,٠٠٠\,٠٠٠ = ٤,٥٦ \times ١٠^{٨}$

$-٢٨٧ = -٢,٨٧ \times ١٠^{٢}$

معلومة مفيدة :

الميكروبيولوجي
Microbiology

هو علم دراسة الأحياء الدقيقة غير المرئية بالعين المجرَّدة ، مثل البكتيريا والفطريات .

الميكرومتر : وهو أحد أجزاء وحدة المتر التي تُستخدم لقياس المسافات والأطوال القصيرة جدًّا ، وهي تمثّل ٠,٠٠٠٠٠١ من المتر (واحد من مليون من المتر) .

النانومتر : وهو أيضًا أحد أجزاء وحدة المتر الصغيرة جدًّا ؛ التي تُستخدم لقياس المسافات والأطوال الشديدة القصر ، وهي تمثّل ٠,٠٠٠٠٠٠٠٠١ من المتر (واحد من مليار من المتر) .

مثال (١) :

أُكتب العدد ٦٥ ٢٤١ بالصورة العلمية .

الحلّ :

٦٥ ٢٤١ ,٠ — ضَع العدد في الصورة العشرية

٦٥ ٢٤١ ,٠ — عُدّ المنازل التي نحتاج أن نحرّك بها الفاصلة العشرية لتحصل على عدد عشري قيمته المطلَقة أكبر من أوتساوي واحدًا وأصغر من ١٠

$\times \frac{10^{4}}{10^{4}}$ ٦٥٢٤١,٠ — إضرب واقسم على قوى العدد ١٠ بحيث تحافظ على قيمة العدد كما هي .

$\times 10^{4}$ ٦,٥٢٤١ — بالقسمة على العدد 10^{4} ، نحرّك الفاصلة العشرية إلى اليسار ٤ منازل .

∴ ٦٥ ٢٤١ = ٦,٥٢٤١ × 10^{4}

∴ ٦,٥٢٤١ × 10^{4} — تُسمّى بالصورة العلمية (القياسية) للعدد .

انتبه

نحرّك الفاصلة العشرية إلى اليسار عند القسمة على قوى العدد ١٠ الموجَبة

الصورة العلمية (القياسية) للعدد :

يُكتب العدد على الصورة : أ × $10^{ن}$ حيث ١ ≤ | أ | < ١٠ ، ن ∈ صـ .

فمثلًا :

الشكل النظامي		الصورة العلمية (القياسية)
٦٥ ٢٤١	=	٦,٥٢٤١ × 10^{4}

- ٦,٥٢٤١ : عدد عشري قيمته المطلَقة أكبر من أو يساوي ١ وأصغر من ١٠
- 10^{4} : قوى العدد ١٠ في الصورة الأسّية

دورك الآن (١)

أُكتب بالصورة العلمية كلًّا ممّا يلي :

أ) ٣٧٥ ٤ = ٤,٣٧٥ × ١٠ ☐

ب) ٤١٥,٣ = ...

ج) ١ ١٨٠ مليونًا = ١ ١٨٠ ٠٠٠ ٠٠٠ = ١,١٨ × ..... – .....

د) ٢٣١ مليارًا = ...

تذكَّر

- المليون = ١ ٠٠٠ ٠٠٠ = 10^{6}
- المليار = ١ ٠٠٠ ٠٠٠ ٠٠٠ = 10^{9}
- التريليون = ١ ٠٠٠ ٠٠٠ ٠٠٠ ٠٠٠ = 10^{12}

دورك الآن (٢)

أُكتب رمز كلّ من الأعداد الآتية بالشكل النظامي :

(أ) $١,٤ \times ١٠^{٣} = ١٤٠٠$

(ب) $٣,٤٥٦ \times ١٠^{٥} =$ .....

(ج) $٦,٨٩ \times ١٠^{٦} =$ .....

(د) $٢,٠٠٣ \times ١٠^{٧} =$ .....

الصورة العلمية (القياسية) باستخدام الأسس الصحيحة السالبة

بالعودة إلى (حُلّ وناقِش) السابق ، كُتبت الأعداد الكبيرة بالصورة العلمية مستخدِمًا الأسس الصحيحة الموجَبة ، وسوف تتعلّم كيفية كتابة الأعداد الصغيرة جدًّا بالصورة العلمية مستخدِمًا الأسس الصحيحة السالبة .

مثال (٢) :

أُكتب العدد ٠,٠٠٢٥٦ بالصورة العلمية .

الحلّ :

$٠,٠٠٢٥٦$

عُدّ المنازل التي نحتاج أن نحرّك بها الفاصلة العشرية لتحصل على عدد عشري قيمته المطلَقة أكبر من أو تساوي واحدًا وأصغر من ١٠

$٠,٠٠٢٥٦ \times \frac{١٠^{٣}}{١٠^{٣}}$

اِضرب واقسم على قوى العدد ١٠ بحيث تحافظ على قيمة العدد كما هي .

$٢,٥٦ \times ١٠^{-٣}$

بالضرب في العدد $١٠^{٣}$ نحرّك الفاصلة العشرية إلى اليمين ٣ منازل .

∴ $٠,٠٠٢٥٦ = ٢,٥٦ \times ١٠^{-٣}$

∴ $٢,٥٦ \times ١٠^{-٣}$ تُسمّى بالصورة العلمية (القياسية) للعدد .

اِنتبِه

نحرّك الفاصلة العشرية إلى اليمين عند الضرب في قوى العدد ١٠ الموجَبة

دورك الآن (٣)

أُكتب بالصورة العلمية كلًّا ممّا يلي :

(أ) $٠,٠٠٠٥٩ = ٥,٩ \times ١٠^{\square}$

(ب) $-٠,٠٠٠٠٠٦٤٥ =$ ..... $-$

(ج) أربعمئة وخمسون جزءًا من مئة ألف $= ٠,٠٠٤٥٠ =$ .....

(د) ٤٣ جزءًا من مليون = ... = ...

(هـ) $\frac{٥٣}{١٠٠٠٠٠} =$ ..... = ...

دورك الآن (٤)

أُكتب رمز كلّ من الأعداد الآتية بالشكل النظامي :

(أ) $٥,٢ \times ١٠^{-٢} =$ .....

(ب) $٣ \times ١٠^{-٦} =$ .....

(ج) $-٤,٠٠٣ \times ١٠^{-٥} =$ .....

(د) $٢,٥٦٤ \times ١٠^{-٤} =$ .....

دورك الآن (٥)

قارِن بوضع $>$ ، $<$ ، $=$ في كلّ ممّا يلي لتحصل على عبارة صحيحة :

(أ) $٤,٤ \times ١٠^{-٣}$ ◯ $٤,٤ \times ١٠^{-٥}$

(ب) $٣,٠٥ \times ١٠^{٧}$ ◯ $٧,٢ \times ١٠^{٧}$

(ج) $٢,٧ \times ١٠^{-٦}$ ◯ $٤,٠٧ \times ١٠^{-٤}$

مثال (٣) :

أوجِد ناتج كلّ ممّا يلي بالصورة العلمية :

(أ) $٤,١ \times ١٠^{٣} + ٧,٢ \times ١٠^{٣}$

الحلّ :

$٤,١ \times ١٠^{٣} + ٧,٢ \times ١٠^{٣}$

$= ١٠^{٣} (٤,١ + ٧,٢)$ (بأخذ $١٠^{٣}$ عامل مشترَك)

$= ١٠^{٣} (١١,٣)$

$= ١١,٣ \times ١٠^{٣}$

$= ١,١٣ \times ١٠^{٤}$

(ب) $٦,٤ \times ١٠^{٨} - ٢,٣ \times ١٠^{٨}$

الحلّ :

$٦,٤ \times ١٠^{٨} - ٢,٣ \times ١٠^{٨}$

$= ١٠^{٨} (٦,٤ - ٢,٣)$ (بأخذ $١٠^{٨}$ عامل مشترَك)

$= ١٠^{٨} \times ٤,١$

$= ٤,١ \times ١٠^{٨}$

(ج) $(٢,١ \times ١٠^{٥}) \div (٣ \times ١٠^{-٢})$

الحلّ :

$(٢,١ \times ١٠^{٥}) \div (٣ \times ١٠^{-٢})$

$= \frac{٢,١ \times ١٠^{٥}}{٣ \times ١٠^{-٢}} = \frac{٢,١}{٣} \times ١٠^{٥-(-٢)}$

$= ٠,٧ \times ١٠^{٧}$

$= ٧ \times ١٠^{٦}$

تذكّر

إذا كان س ، ص أعدادًا صحيحة :

- $أ^{س} \times أ^{ص} = أ^{س+ص}$
- $\frac{أ^{س}}{أ^{ص}} = أ^{س-ص}$ ، حيث $أ \neq ٠$

د) $(٣,٢ \times ١٠^{٧}) \times (٢ \times ١٠^{-٣})$

الحلّ :

$(٣,٢ \times ١٠^{٧}) \times (٢ \times ١٠^{-٣})$

$= (٣,٢ \times ٢) \times (١٠^{٧} \times ١٠^{-٣})$

$= ٦,٤ \times ١٠^{٤}$

تذكَّر

الضرب عملية إبدالية وتجميعية .

دورك الآن (٦)

يبلغ طول حشرة السوس $٩,٦٥٢ \times ١٠^{-٢}$ سم ، بينما يبلغ طول حشرة الماء ٠,٠١٩٨١ سم . أيّ الحشرتَين هي الأصغر طولًا ؟

مثال (٤) :

يبلغ طول قطر الأرض $١,٢٨ \times ١٠^{٤}$ كم ، وطول قطر كوكب المشتري $١,٤٣ \times ١٠^{٥}$ كم ، فبكم يزيد طول قطر كوكب المشتري عن طول قطر الأرض ؟

الحلّ :

مقدار الزيادة $= ١,٤٣ \times ١٠^{٥} - ١,٢٨ \times ١٠^{٤}$

$= ١٠^{٤} \times (١,٤٣ \times ١٠ - ١,٢٨)$

$= ١٠^{٤} \times (١٤,٣ - ١,٢٨)$

$= ١٠^{٤} \times ١٣,٠٢ = ١,٣٠٢ \times ١٠^{٥}$ كم

معلومة مفيدة :

أوزان بعض كواكب مجموعتنا الشمسية بالطنّ.

(١) عطارد $٣,٣ \times ١٠^{٢٠}$

(٢) الزهرة $٤,٩ \times ١٠^{٢١}$

(٣) الأرض $٥,٩ \times ١٠^{٢١}$

(٣) المشتري $١,٩ \times ١٠^{٢٤}$

عبِّر عن فهمك

١ هل يوجد عدد لا يمكن كتابته في الصورة العلمية ؟

٢ هل ($١٠^{\text{صفر}}$) هو عدد في الصورة العلمية ؟

تمارين ذاتية :

١ أُكتب بالصورة العلمية كلًّا ممّا يلي :

أ) ٣٥٩ ٠٠٠ = ...

.....

ب) ٠,٠٠٣٤٢ = ...

.....

ج) ٣٥٤ ٦١ = ...

.....

د) ٠,٠٠٠١٩٦٧ = ...

.....

.....

هـ) ٨٦٦ ٤ مليونًا = ...

.....

.....

و) ٣٤١ تريليونًا = ...

.....

.....

ز) خمسمئة وسبعة وثلاثون مليارًا = ...

.....

.....

ح) ستّمئة وثلاثون جزءًا من عشرة آلاف = ...

.....

.....

ط) ١٣ جزءًا من مليون = ...

.....

.....

ي) ٣٨٦ جزءًا من مليار = ...

.....

.....

٢ أُكتب كلًّا ممّا يلي بالشكل النظامي :

أ) $٣,١٤ \times ١٠^{٥} =$ .....

.....

ب) $-٣,٤ \times ١٠^{-٣} =$ .....

.....

ج) $٢,٠٩ \times ١٠^{٤} =$ .....

.....

د) $٢ \times ١٠^{-٧} =$ .....

.....

هـ) $-٥ \times ١٠^{٧} =$ .....

.....

و) $٣,٢٣١ \times ١٠^{-٢} =$ .....

.....

٣ قارِن بوضع > ، < ، = في كلّ ممّا يلي ، لتحصل على عبارة صحيحة :

أ) $٩,٩ \times ١٠^{٧}$ ◯ $١,١ \times ١٠^{٨}$

ب) $٣,٢ \times ١٠^{-٢}$ ◯ $١,٧ \times ١٠^{-٣}$

ج) $٣,٥٤ \times ١٠^{-١}$ ◯ ٣٥٤ جزءًا من ألف

٤ أوجِد ناتج كلّ ممّا يلي بالصورة العلمية :

أ) $٢,٥ \times ١٠^{٦} + ٣,٢ \times ١٠^{٦} =$ .....

.....

ب) $٩,٨ \times ١٠^{٤} - ٢,٧ \times ١٠^{٤} =$ .....

.....

ج) $(٤,٣ \times ١٠^{٢}) \times (٥ \times ١٠^{-٤}) =$ .....

.....

د) $(٦,٣ \times ١٠^{-٤}) \div (٧ \times ١٠^{٢}) =$ .....

.....

٥ بلغت مساحة مركز الشيخ عبد الله السالم الثقافي ١٢٧ ٠٠٠ متر مربّع .
أُكتب هذه المساحة في الصورة العلمية .

.....

.....

مهارات تفكير عليا :

٦ في عام ٢٠١٦ م ، بلغ عدد سكّان دولة الكويت حوالي (٤,١ × ١٠^٦) نسمة ، بينما بلغ عدد سكّان دولة الإمارات العربية المتّحدة حوالي (٨,٣ × ١٠^٦) نسمة .
فأيّ الدولتَين هي الأكثر عددًا في السكّان؟ وكم بلغ مجموع عدد سكّان الدولتَين معًا بالصورة العلمية ؟

.....

.....

.....

.....

.....

.....

تقويم الوحدة التعليمية الأولى
Unit One Assessment

أوّلًا : البنود المقالية

١ أوجِد مجموعة حلّ كلّ من المعادلات الآتية في ح :

(أ) $|٢س + ٥| = ٩$

.....

.....

.....

.....

.....

(ب) $٢|٦ - ص| = ١$

.....

.....

.....

.....

.....

(ج) $٤|س - ٩| + ٧ = ٧$

.....

.....

.....

.....

.....

٢ أوجِد مجموعة حلّ كلّ من المتباينات الآتية في ح ، مع تمثيل مجموعة الحلّ على خطّ الأعداد الحقيقية :

(أ) $|٣س - ٧| \geq ٢$

.....

.....

.....

.....

.....

ب) $|س + ١| > ٥$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

ج) $٣|٤ - س| < ٦$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

د) $|٥س + ٤| - ٣ \geq ٨$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

هـ) $٧ - |س| > ١٠$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

٣ أكمِل الجدول الآتي :

رمز العدد بالشكل النظامي	الصورة العلمية
١٨ ٠٠٠	.....
.....	$٦,٠٣ \times ١٠^{-٣}$
٠,٠٠٠٤٥	.....
.....	$-٨,٤٤ \times ١٠^{٥}$

٤ أوجِد ناتج كلّ ممّا يلي بالصورة العلمية :

أ) $(٨,٣ \times ١٠^{٩}) + (١,٥ \times ١٠^{٩}) =$ .....

.....

ب) $(٩,٣٦ \times ١٠^{٦}) - (٨,١ \times ١٠^{٦}) =$ .....

.....

ج) $(٣ \times ١٠^{٥}) \times (٤,١ \times ١٠^{-٣}) =$ .....

.....

د) $(٢,٤ \times ١٠^{-٢}) \div (٦ \times ١٠^{٧}) =$ .....

.....

٥ تُنتج دولة الكويت كمّية من النفط تبلغ ٣,١ ملايين برميل يوميًّا ، إذا أرادت زيادة إنتاجها نصف مليون برميل يوميًّا ، فكم سيبلغ إنتاجها من النفط في اليوم الواحد بعد الزيادة ؟

إنتاج دولة الكويت في اليوم الواحد بعد الزيادة =

.....

.....

الشكل النظامي : .....

الصورة العلمية : .....

ثانيًا : البنود الموضوعية

في البنود (١ - ٥) ، ظلِّل [أ] إذا كانت العبارة صحيحة ، وظلِّل [ب] إذا كانت العبارة غير صحيحة .

١ $\sqrt[٧]{\text{س} + \text{ص}} = \sqrt[٧]{\text{س}} + \sqrt[٧]{\text{ص}}$	أ	ب
٢ الأعداد : $\sqrt[٧]{١٠}$ ، $٣,\overline{٦}$ ، $-\pi$ مرتَّبة ترتيبًا تنازليًّا .	أ	ب
٣ مجموعة حلّ المعادلة $\lvert \text{س} \rvert = -٣$ في ح ، هي $\{٣ ، -٣\}$	أ	ب
٤ مجموعة حلّ المتباينة $\lvert \text{س} + ١ \rvert \geq ٣$ في ح ، هي $[-٤ ، ٢]$	أ	ب
٥ إذا كانت س = ٤ ، فإنّ قيمة $\lvert \text{س} - ٤ \rvert + ٧$ هي ٧	أ	ب

في البنود (٦ - ١٢) لكلّ بند أربعة اختيارات ، واحد فقط منها صحيح ، ظلِّل الإجابة الصحيحة .

٦ الفترة التي تعبّر عن مجموعة الأعداد الحقيقية الأصغر من ٥ والأكبر من أو تساوي -٥ هي :

أ $(-٥ ، ٥)$ ب $[-٥ ، ٥)$ ج $(-٥ ، ٥]$ د $[-٥ ، ٥]$

٧ الفترة الممثَّلة على خطّ الأعداد ←○ ($\frac{١}{٢}$) **هي :**

أ $(\frac{١}{٢} ، \infty)$ ب $[\frac{١}{٢} ، \infty)$ ج $(-\infty ، \frac{١}{٢}]$ د $(-\infty ، \frac{١}{٢})$

٨ مجموعة حلّ المتباينة $\lvert ٢\text{س} - ١ \rvert > ٣$ في ح هي :

أ $(٢ ، \infty)$ ب $(-\infty ، -١] \cup [٢ ، \infty)$

ج $(-\infty ، -١) \cup (٢ ، \infty)$ د $(-١ ، ٢)$

٩ $٨ \times \frac{٣}{٢} - \frac{\sqrt{٢٧}}{\sqrt{٣}} =$

أ ٩ ب ٣ ج $١\frac{١}{٢}$ د $-١\frac{١}{٢}$

١٠ أكبر الأعداد الآتية هو :

أ $٤,٢٣ \times ١٠^{٤}$ ب ٣٨ ٠٠٠ ج $٤,٢٣ \times ١٠^{٥}$ د $٩,٣٧ \times ١٠^{-٤}$

١١ العدد ٠,٠٠١٢٣ بالصورة العلمية هو :

أ $١,٢٣ \times ١٠^{٣}$ ب $١,٢٣ \times ١٠^{-٣}$ ج $١٢,٣ \times ١٠^{٢}$ د ١٢٣×١٠^{-٣}

١٢ العدد غير النسبي في ما يلي هو :

أ $\sqrt{١١}$ ب $\frac{٥}{٩}$ ج $\frac{١}{\sqrt{١٤٤}}$ د $٠,\overline{٣}$

الوحدة التعليمية
الثانية

التحليل والمعادلات

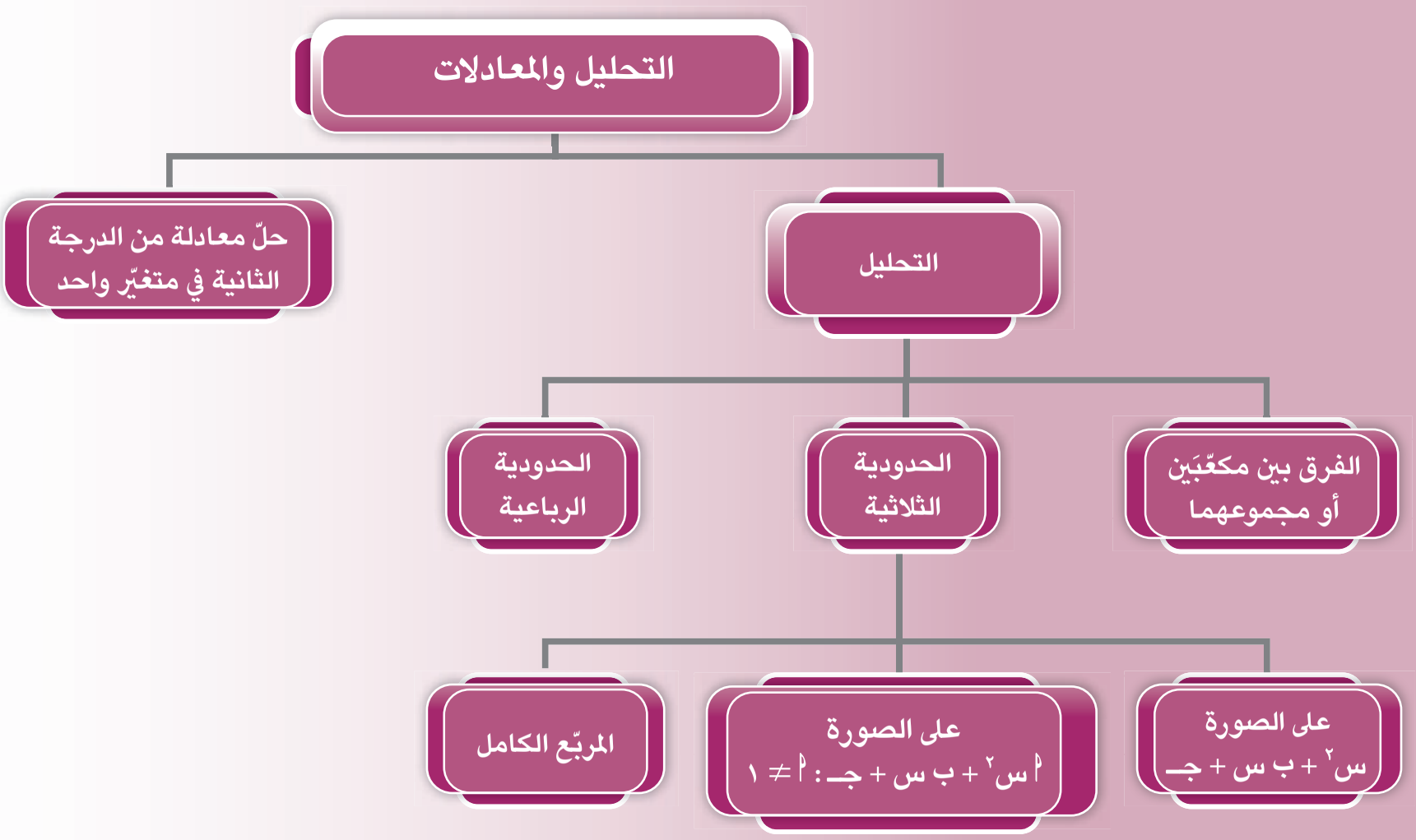
عالم الصناعة

تُعدّ الصناعة مصدرًا من أهمّ مصادر الدخل في دولة الكويت ؛ وحيث إنّ الكويت بلد مصدِّر للنفط كان لا بدّ من وجود مصانع كشركة الصناعات الهندسية الثقيلة وبناء السفن (HEISCO) حيث تأسّست عام ١٩٧٤ م. ومقرّها في الشويخ ، ومن أنشطتها :

- بناء وإصلاح السفن وأعمال الترسية .
- تصنيع الهياكل المعدنية والمبادلات الحرارية والخزّانات .
- التنفيذ الهندسي الشامل في مشاريع النفط والغاز والبتروكيماويات .
- أعمال الإنشاء المدني والصيانة الصناعية وخدمات الشحن والتفتيش الفنّي والإشعاعي والحلول اللوجستية .

المجال	معايير المنهج	مؤشّر الأداء
العدّ والجبر	تمثيل وتحليل المواقف والبنى الرياضية باستخدام الرموز الجبرية .	العمل الجَماعي - الاستكشاف والتقصّي - التذكّر - التعرّف - الفهم - المقارنة والتمييز - التمثيل - النمذجة - التحليل والتركيب - القوانين
	فهم الأنماط والعلاقات والدوالّ .	التعاون - المشاركة - الاستنتاج - الترميز والبرمجة - حلّ المشكلات - الاستدلال - القيادة - اِتّخاذ القرار - الاستكشاف والتقصّي

مخطّط تنظيمي للوحدة التعليمية الثانية



هل أنت مستعدّ ؟

١ أوجِد العامل المشترَك الأكبر (ع . م . أ) لكلّ ممّا يلي :

(أ) ١٤ ، ٧

.....

.....

.....

(ب) ٦س^{٢} ، ٨س^{٣}

.....

.....

.....

٢ حلِّل ما يلي تحليلًا تامًّا :

(أ) ٢س^{٢} – ٨س

.....

.....

.....

(ب) ص^{٢} – ٤

.....

.....

.....

٣ أوجِد ناتج كلّ ممّا يلي :

(أ) $\sqrt[٣]{\frac{-٨}{٢٧}}$

.....

.....

.....

(ب) $\sqrt[٣]{٠,٠٦٤}$

.....

.....

.....

٤ اِختصِر ما يلي :

(أ) $(٣^{٢})^{٣}$

.....

.....

.....

(ب) $(٢^{-٤})^{٢}$

.....

.....

.....

(ج) $(ص^{٣})^{٢}$

.....

.....

.....

(د) $(س^{٢} ص^{٣})^{٤}$

.....

.....

.....

٥ أوجِد ناتج كلّ ممّا يلي :

(أ) س (س + ٣)

.....

.....

(ب) ٣ (٢س^{٢} – ٧س + ٥)

.....

.....

(ج) (٣س – ١) × (س + ٤)

.....

.....

(د) (٢ص – ١) × (٢ص – ١)

.....

.....

(هـ) (س + ٥)^{٢}

.....

.....

(و) (س – ص)(س^{٢} + س ص + ص^{٢})

.....

.....

٦ أوجِد مجموعة حلّ كلّ من المعادلات الآتية في ح :

(أ) ٦ س + ٥ = ٨ س

.....

.....

(ب) س^{٢} – ١٦ = ٠

.....

.....

٧ أوجِد مساحة منطقة مربّعة طول ضلعها (س – ٣) سم .

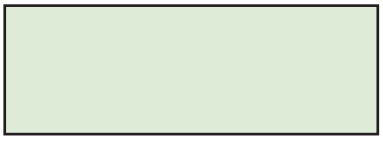
.....

.....

.....

.....

٨ منطقة مستطيلة أبعادها موضَّحة في الشكل المقابِل. أوجِد مساحتها .



.....

.....

.....

هل أنت مستعدّ ؟

٢ - ١ تحليل الفرق بين مكعّبَين أو مجموعهما

Factorising the Difference Between Two Cubes or Their Sum

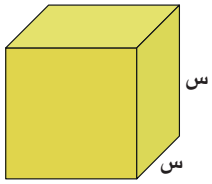
سوف تتعلّم : تحليل الفرق بين مكعّبَين وتحليل مجموع مكعّبَين .

العبارات والمفردات :

تحليل	Factorising	مجموع مكعّبَين	Sum of Two Cubes
الفرق بين مكعّبَين	Difference Between Two Cubes		

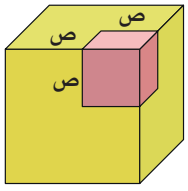
اِستكشِف

أنتج مصنع للإسفنج قطعة مكعّبة الشكل طول حرفها (س) وحدة طول ، كما في الشكل (أ) .



الشكل (أ)

ومن أحد رؤوسها تمّ قطع مكعّب صغير طول حرفه (ص) وحدة طول ، كما في الشكل (ب) .



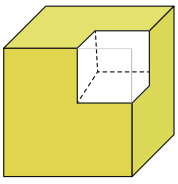
الشكل (ب)

- أُحسب كلًّا من : حجم المكعّب الكبير = ... × ..... × ..... = ... وحدة مكعّبة

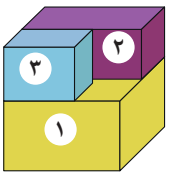
حجم المكعّب الصغير = ... × ..... × ..... = ... وحدة مكعّبة

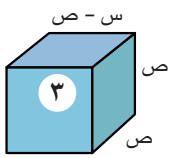
حجم الجزء المتبقّي = $س^{٣} - ص^{٣}$ وحدة مكعّبة

يُسمّى المقدار $س^{٣} - ص^{٣}$ **فرقًا بين مكعّبَين** ، كما في الشكل (ج) .

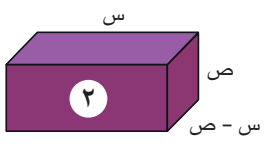

الشكل (ج)

وكذلك يمكن التوصّل إلى حجم الجزء المتبقّي من قطعة الإسفنج بتجزئتها إلى ثلاثة مجسَّمات ① ، ② ، ③ كلّ منها على شكل شبه مكعّب معلومة أبعاده كما يلي :

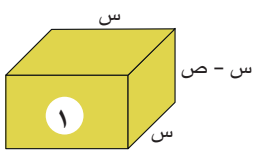




الحجم = ... × ..... × (س - ص)



الحجم = ... × ..... × (س - ص)



الحجم = ... × ..... × (س - ص)

حجم الجزء المتبقّي = حجم الجزء ① + حجم الجزء ② + حجم الجزء ③

$س^{٣} - ص^{٣}$ = ... (س - ص) + ... (س - ص) + ... (س - ص)

= (س - ص) ($س^{٢}$ + س ..... + ...)

تحقَّق جبريًّا: (س − ص) (س^{٢} + س ص + ص^{٢})

= س (س^{٢} + س ص + ص^{٢}) − ص (س^{٢} + س ص + ص^{٢})

= س^{٣} + س^{٢} ص + س ص^{٢} − ص س^{٢} − س ص^{٢} − ص^{٣} = س^{٣} − ص^{٣}

ممّا سبق، نستنتج أنّه لتحليل الفرق بين مكعّبَين س^{٣} ، ص^{٣} نتّبع القاعدة الآتية :

س^{٣} − ص^{٣} = (س − ص) (س^{٢} + س ص + ص^{٢})

أي أنّ الفرق بين مكعّبَي حدَّين يُحلَّل إلى حاصل ضرب عاملَين كما يلي :

(الحدّ الأوّل − الحدّ الثاني) (مربّع الحدّ الأوّل + الحدّ الأوّل × الحدّ الثاني + مربّع الحدّ الثاني)

يمكن استخدام قانون الفرق بين مكعّبَين لتحليل المقدار س^{٣} + ص^{٣}

يُكتب المقدار س^{٣} + ص^{٣} على الصورة س^{٣} − (− ص)^{٣}

س^{٣} + ص^{٣} = س^{٣} − (− ص)^{٣}

= (س − (− ص)) (س^{٢} + س (− ص) + (− ص)^{٢})

= (س + ص) (س^{٢} − س ص + ص^{٢})

∴ س^{٣} + ص^{٣} = (س + ص) (س^{٢} − س ص + ص^{٢})

يُسمّى المقدار س^{٣} + ص^{٣} مجموع مكعّبَين

معلومة مفيدة :

الإسفنج الطبيعي يتمّ استخراجه من حيوان الإسفنج البحري ، ولكنّ الإسفنج المستخدَم في منازلنا هو عبارة عن مادّة صناعية يتمّ تصنيعها من سيلّيلوز ألياف الخشب ، أو البوليمرات البلاستيكية الرغوية .

أي أنّ مجموع مكعّبَي حدَّين يُحلَّل إلى حاصل ضرب عاملَين كما يلي :

(الحدّ الأوّل + الحدّ الثاني) (مربّع الحدّ الأوّل − الحدّ الأوّل × الحدّ الثاني + مربّع الحدّ الثاني)

مثال (١) :

حلِّل كلًّا ممّا يلي تحليلًا تامًّا :

(أ) س^{٣} − ٢٧

الحلّ :

س^{٣} − ٢٧ = (س − ٣) (س^{٢} + ٣س + ٩)

(ب) ٦٤ أ^{٣} + ب^{٣}

الحلّ :

٦٤ أ^{٣} + ب^{٣} = (٤ أ + ب) (١٦ أ^{٢} − ٤ أ ب + ب^{٢})

(ج) ١ − م^{٣} ن^{٦}

الحلّ :

١ − م^{٣} ن^{٦} = (١ − م ن^{٢}) (١ + م ن^{٢} + م^{٢} ن^{٤})

انتبِه

١^{٢} = ١	٨^{٢} = ٦٤
١^{٣} = ١	٤^{٣} = ٦٤

لاحِظ أنّ

ن^{٦} = (ن^{٢})^{٣}

ن^{٦} = (ن^{٣})^{٢}

دورك الآن (١)

حلِّل كلًّا ممّا يلي تحليلًا تامًّا :

(أ) $س^{٣} - ٦٤ = (\ldots\ldots - ٤)(\ldots\ldots + \ldots\ldots + ١٦)$

(ب) $١ - ٨ ص^{٣} = (\ldots\ldots - ٢ ص)(\ldots\ldots + \ldots\ldots + \ldots\ldots)$

(ج) $٨ ل^{٣} + ٢٧ م^{٣} = (\ldots\ldots)(\ldots\ldots)$

مثال (٢) :

حلِّل كلًّا ممّا يلي تحليلًا تامًّا :

(أ) $٥٤ ص - ٢ص^{٤}$

الحلّ :

$٥٤ ص - ٢ص^{٤} = ٢ ص (٢٧ - ص^{٣})$

$= ٢ ص (٣ - ص)(٩ + ٣ص + ص^{٢})$

(ب) $٠,٠٠٨ - س^{٣}$

الحلّ :

$٠,٠٠٨ - س^{٣} = (٠,٢ - س)(٠,٠٤ + ٠,٢ س + س^{٢})$

(ج) $\frac{١}{٨} ٩^{٣} + ١$

الحلّ :

$\frac{١}{٨} ٩^{٣} + ١ = (\frac{١}{٢} ٩ + ١)(\frac{١}{٤} ٩^{٢} - \frac{١}{٢} ٩ + ١)$

انتبه

في التحليل، اِبدأ باستخراج العامل المشترَك الأكبر إن وُجد.

دورك الآن (٢)

حلِّل كلًّا ممّا يلي تحليلًا تامًّا :

(أ) $٣ ع^{٣} - ٨١ = ٣ (ع^{٣} - \ldots\ldots)$

$= ٣ (ع - \ldots\ldots)(\ldots\ldots + ٣ ع + \ldots\ldots)$

(ب) $٢ س^{٤} + ١٦ س = \ldots\ldots (\ldots\ldots + ٨)$

$= \ldots\ldots (\ldots\ldots + ٢)(\ldots\ldots - \ldots\ldots + \ldots\ldots)$

(ج) $٥ - ٤٠ م^{٣} = \ldots\ldots (١ - \ldots\ldots م^{٣})$

$= \ldots\ldots (١ - \ldots\ldots م)(\ldots\ldots)$

دورك الآن (٣)

حلِّل كلًّا ممّا يلي تحليلًا تامًّا :

أ) $\frac{٢٧}{٦٤}$ + ن^{٦} = (..... + ن^{٢}) (..... − ..... + ن^{٤})

ب) $\frac{١}{١٢٥}$ أ^{٣} − $\frac{٨}{٢٧}$ ب^{٣} = (..... أ − ..... ب) (..... + ... + ... ب^{٢})

ج) س^{٣} − ٠,١٢٥ = (س − .....) (..... + ... س + ٠,٢٥)

عبِّر عن فهمك

هل يمكن تحليل (م^{٦} − ن^{٦}) بطريقتَين مختلفتَين ؟ وضِّح ذلك .

.....

دورك الآن (٤)

صندوق على شكل شبه مكعّب حجمه (أ^{٣} + ٢٧) متر مكعّب وارتفاعه (أ + ٣) متر ، وظِّف مفهوم التحليل ، لإيجاد مساحة قاعدته .

تذكَّر

حجم شبه المكعّب =
مساحة القاعدة × الارتفاع

.....

.....

.....

تمارين ذاتية :

١ حلِّل كلًّا ممّا يلي تحليلًا تامًّا :

أ) أ^{٣} + ١ = ...

ب) ب^{٣} − ٨ = ...

ج) ٨ ل^{٣} + ١٢٥ = ...

د) ١ − ٢٧ هـ^{٣} = ...

هـ) ل^{٣} م^{٦} + ن^{٣} = ...

و) ١٢٥ س^{٣} − ٦٤ ص^{٣} ع^{٣} = ...

٢ حلِّل كلًّا ممّا يلي تحليلًا تامًّا :

أ) ٠,٠٢٧ - ص^{٣} = ...

.....

ب) $\frac{٨}{٢٧}$ أ^{٣} + $\frac{١}{٦٤}$ ب^{٣} = ...

.....

ج) ٥٤ ب^{٤} - ٢ ب = ...

.....

د) ٨١ ك^{٣} + ٣ هـ^{٣} = ...

.....

هـ) ٣ س^{٥} - ٢٤ س^{٢} = ...

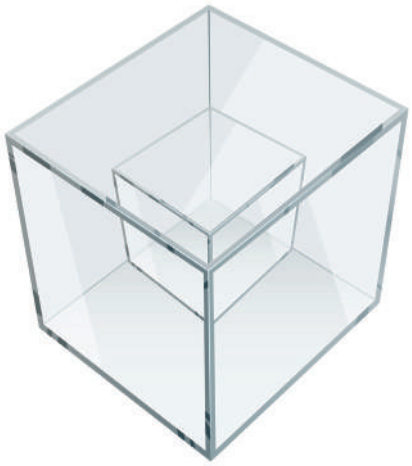
.....

و) ١٦ س^{٤} + ٥٤ س ص^{٣} = ...

.....

مهارات تفكير عليا :

٣ يريد فهد تخزين هديّة داخل صندوق مكعّب الشكل طول ضلعه (س + ١) سم ، لكنّه يحتاج إلى وضع صندوق آخر مكعّب الشكل أصغر منه طول ضلعه (س) سم ، وملء الفراغ المتبقّي بالزينة . كم حجم الفراغ المتبقّي ؟



.....

.....

.....

.....

٤ اِختر الإجابة الصحيحة :

صندوق على شكل شبه مكعّب مساحة قاعدته (س^{٢} - ٢س + ٤) متر مربّع وارتفاعه (س + ٢) متر ، فإنّ حجمه بالمتر المكعّب يساوي :

أ) (س^{٣} + ٨)

ب) (س^{٣} + ١٦)

ج) (س^{٣} - ٨)

د) (س^{٣} - ١٦)

٢ - ٢ تحليل الحدودية الثلاثية : س^{٢} + ب س + جـ

Factorising Trinomial : $x^2 + bx + c$

سوف تتعلّم : تحليل حدودية ثلاثية على الصورة : س^{٢} + ب س + جـ .

العبارات والمفردات :

حدودية ثلاثية	Trinomial

إستكشِف

حلِّل الحدودية الآتية تحليلًا تامًّا باستخدام بطاقات الجبر :

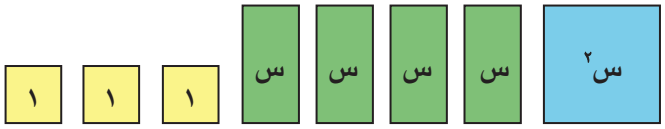
س^{٢} + ٤ س + ٣

اللوازم :

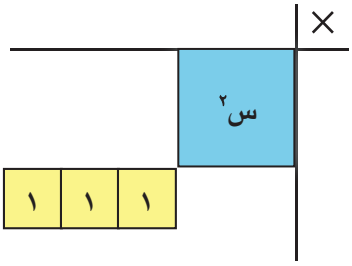
بطاقات الجبر	
س × س	س^{٢}
١ × س	س
١ × ١	١

الخطوة الأولى :

مثِّل الحدودية س^{٢} + ٤ س + ٣ ببطاقات الجبر كما يلي :



الخطوة الثانية :



ضَع البطاقة س^{٢} في زاوية رقعة الضرب ، ورتِّب بطاقات ١ . بما أنّ ٣ عدد أوّلي ، فإنّه يمكن ترتيب البطاقات الثلاث بمصفوفة ١ × ٣ كما في الشكل .

الخطوة الثالثة :

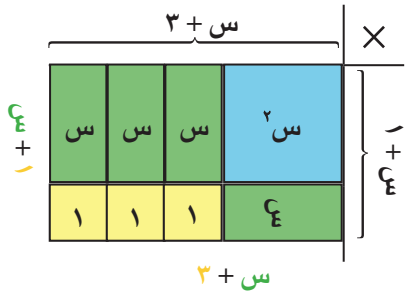
أكمِل شكل المستطيل على رقعة الضرب ببطاقات س

فيكون بذلك طول المستطيل (س + ٣)

وعرض المستطيل (س + ١)

∴ مساحة المنطقة المستطيلة = (س + ٣) (س + ١)

∴ س^{٢} + ٤ س + ٣ = (س + ٣) (س + ١)



تحقَّق جبريًا

$(س + ٣)(س + ١) = س \times س + س \times ١ + ٣ \times س + ٣ \times ١$

$= س^{٢} + ١ س + ٣ س + ٣ \times ١$

$= س^{٢} + (١ + ٣) س + ٣ \times ١$

$= س^{٢} + ٤ س + ٣$

اِنتبِه

اِجمع الحدود المتشابهة.

عندما نكتب : $س^{٢} + ٤ س + ٣ = (س + ٣)(س + ١)$

نقول : إنّنا حلّلنا الحدودية $س^{٢} + ٤ س + ٣$ إلى حاصل ضرب عاملَين هما $(س + ٣)(س + ١)$

لاحِظ: إنّه لتحليل الحدودية $س^{٢} + ٤ س + ٣$ نحلّل العدد ٣ إلى عاملَين يحقّقان الشرطَين:

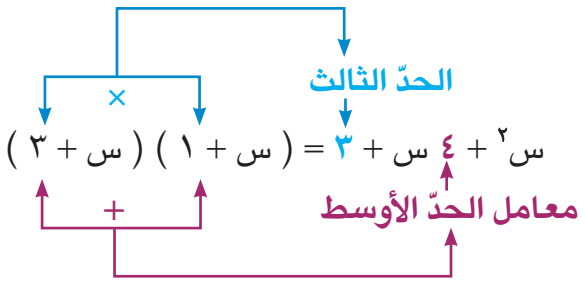
حاصل ضربهما ٣ الحدّ الثالث

ناتج جمعهما ٤ معامل الحدّ الأوسط

$١ \times ٣ = ٣$

$-١ \times -٣ = ٣$

كما في الشكل الآتي :



لتحليل حدودية ثلاثية على الصورة $س^{٢} + ب س + جـ$ إلى عواملها ،
اِبحث عن عددَين م ، ن حيث $جـ = م ن$ ، $ب = م + ن$
فيكون $س^{٢} + ب س + جـ = (س + م)(س + ن)$

مثال (١) :

حلِّل تحليلًا تامًّا :

(أ) $س^{٢} + ٦ س + ٥$

نبحث عن عددَين حاصل ضربهما ٥ وناتج جمعهما ٦

الحلّ :

$س^{٢} + ٦ س + ٥ = (س + ٥)(س + ١)$

(ب) $-٢ أ^{٢} + ٧ أ + ١٢$

نبحث عن عددَين حاصل ضربهما ١٢ وناتج جمعهما ٧-

الحلّ :

$-٢ أ^{٢} + ٧ أ + ١٢ = (-٢ أ + ٤)(أ + ٣)$

دورك الآن (١)

حلِّل كلًّا ممّا يلي تحليلًا تامًّا :

(أ) $ص^{٢} + ٨ ص + ٧$

$= (\ldots\ldots + \ldots\ldots) (\ldots\ldots + \ldots\ldots)$

(ب) $س^{٢} - ٩ س + ١٨$

$= (\ldots\ldots - \ldots\ldots) (\ldots\ldots - \ldots\ldots)$

مثال (٢) :

حلِّل تحليلًا تامًّا :

(أ) $أ^{٢} + أ - ٢$

نبحث عن عددَين حاصل ضربهما (-٢) وناتج جمعهما (+١)

الحلّ :

$أ^{٢} + أ - ٢ = (أ + ٢) (أ - ١)$

(ب) $س^{٢} - ٥ س - ٣٦$

نبحث عن عددَين حاصل ضربهما (-٣٦) وناتج جمعهما (-٥)

الحلّ :

$س^{٢} - ٥ س - ٣٦ = (س - ٩) (س + ٤)$

دورك الآن (٢)

حلِّل كلًّا ممّا يلي تحليلًا تامًّا :

(أ) $س^{٢} + ٢ س - ٣$

$= (\ldots\ldots) (\ldots\ldots)$

(ب) $س^{٢} - ٥ س ص - ١٤ ص^{٢}$

$= (\ldots\ldots) (\ldots\ldots)$

دورك الآن (٣)

حلِّل كلًّا ممّا يلي تحليلًا تامًّا :

(أ) $٥ ص^{٢} + ١٥ ص - ٢٠$

$= ٥ (\ldots\ldots + \ldots\ldots - \ldots\ldots)$

$= ٥ (\ldots\ldots - \ldots\ldots) (\ldots\ldots + \ldots\ldots)$

(ب) $- س^{٢} + ٧ س - ١٢$

$= - (\ldots\ldots)$

$= \ldots\ldots$

اِنتبِه

عند أخذ (-١) كعامل مشترَك يصبح ما داخل القوسَين هو المعكوس الجمعي للحدودية .

عبِّر عن فهمك

أعطِ ثلاث قِيَم مختلفة لـ جـ في الحدودية :
$س^{٢} + ٣ س - جـ$ بحيث يمكن تحليلها إلى حاصل ضرب عاملَين .

دورك الآن (٤)

حلِّل الحدوديات الثلاثية الآتية تحليلًا تامًّا :

(أ) $ص^{٢} - ٩ ص + ٢٠$

.....

.....

.....

(ب) $س^{٣} + ١٢ س^{٢} + ٣٢ س$

.....

.....

.....

(ج) $ص^{٢} - ص - ٤٢$

.....

.....

.....

(د) $س^{٢} + ٧ س ف - ١٨ ف^{٢}$

.....

.....

.....

عبِّر عن فهمك

يقول حسين : إنّ تحليل الحدودية $س^{٢} + ٤ س - ٢١$ هو (س - ٣) (س + ٧)
بينما يقول حمود : إنّ تحليلها هو (س + ٣) (س - ٧) .
أيّهما على صواب ؟ فسِّر إجابتك .

تمارين ذاتية :

١ أكمِل بوضع (+) أو (-) في كلّ ممّا يلي :

(أ) $س^{٢} + ٥ س + ٦ = (س ..... ٢) (س ..... ٣)$

(ب) $س^{٢} - س - ١٢ = (س ..... ٣) (س ..... ٤)$

٢ حلِّل كلًّا ممّا يلي تحليلًا تامًّا :

(أ) $س^{٢} + ٤ س + ٣$

.....

(ب) $س^{٢} - ٦ س + ٨$

.....

(ج) $ص^{٢} + ٧ ص - ٣٠$

.....

(د) $س^{٢} - ٥ س - ٦$

.....

(هـ) $س^{٢} - س - ٥٦$

.....

(و) $س^{٢} + ٧ س - ٤٤$

.....

(ز) $ب^{٢} - ١٠ ب ك + ١٦ ك^{٢}$

.....

(ح) $م^{٢} + ١٥ م ن + ٥٤ ن^{٢}$

.....

(ط) $ص^{٤} - ١٧ ص^{٣} + ٣٠ ص^{٢}$

.....

.....

(ي) $-٢ س^{٢} + ٢ س + ٤$

.....

.....

٣ يُنتج مصنع للألومينيوم نوافذ مختلفة الأشكال ،
إحدى هذه النوافذ مستطيلة الشكل مساحة سطحها الأمامي يساوي ($س^{٢} + ٩ س + ٢٠$) وحدة مربّعة.
أوجِد بعدَي السطح الأمامي للنافذة بدلالة س .

.....

.....

مهارات تفكير عليا :

٤ شبه مكعّب حجمه ٢س^{٣} + ١٠س^{٢} + ١٢ س وحدة مكعّبة ، وارتفاعه يساوي العامل المشترَك الأكبر لحجمه . ما أبعاد شبه المكعّب (بدلالة س) ؟

.....

.....

٥ اِختر الإجابة الصحيحة .

منطقة مستطيلة مساحتها س^{٢} + ٦ س + ٥ وحدة مربعة ، إذا كان طولها (س + ٥) وحدة طول فإنّ محيطها بوحدات الطول يساوي:

(أ) ٢ س + ٦

(ب) ٤ س + ١٢

(ج) س^{٢} + ٦

(د) ٤ س + ١٠

٢ - ٣

تحليل الحدودية الثلاثية : أ س^{٢} + ب س + جـ ، أ ≠ ١

Factorising Trinomials : a x^2 + bx + c, a ≠ 1

سوف تتعلّم : تحليل حدودية ثلاثية على الصورة : أ س^{٢} + ب س + جـ ، حيث أ ≠ ١

اِستكشِف

حلِّل الحدودية الآتية تحليلًا تامًّا باستخدام بطاقات الجبر :

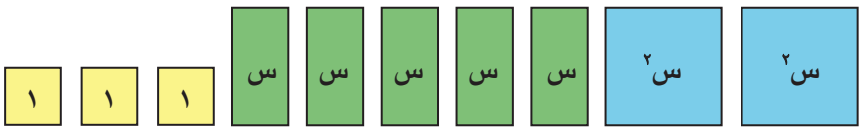
٢ س^{٢} + ٥ س + ٣

اللوازم

بطاقات الجبر	
س^{٢}	س × س
س	١ × س
١	١ × ١

الخطوة الأولى :

مثِّل الحدودية ببطاقات الجبر كما يلي :



الخطوة الثانية :

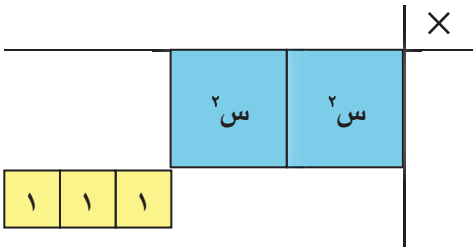
في زاوية رقعة الضرب، ضَع بطاقات س^{٢} ،

كذلك ضَع بطاقات ١ على شكل مصفوفة.

بما أنّ ٣ عدد أوّلي ، فإنّه يمكن ترتيب

البطاقات الثلاث بمصفوفة ١ × ٣

كما في الشكل .



الخطوة الثالثة :

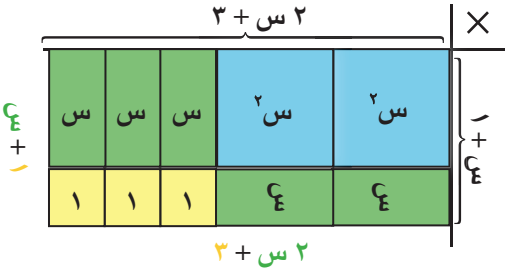
أكمِل شكل المستطيل على رقعة الضرب ببطاقات س ،

فنلاحظ أنّ : طول المستطيل = ٢ س + ٣

وعرض المستطيل = س + ١

∴ مساحة المنطقة المستطيلة = (٢ س + ٣) (س + ١)

∴ ٢ س^{٢} + ٥ س + ٣ = (٢ س + ٣) (س + ١)



تحقَّق جبريًّا

أوجِد ناتج ضرب (٢س + ٣) (س + ١)

الحلّ :

$$(٢س + ٣)(س + ١) = ٢س^{٢} + ٢س + ٣س + ٣$$
$$= ٢س^{٢} + ٥س + ٣$$

أي أنّ $٢س^{٢} + ٥س + ٣ = (٢س + ٣)(س + ١)$

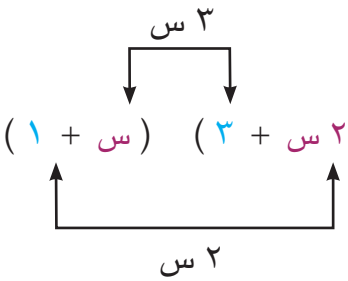
نلاحظ أنّنا حلّلنا $٢س^{٢} + ٥س + ٣$ إلى عاملَين (٢س + ٣) ، (س + ١) حيث إنّ

الحدّ الأوّل $٢س^{٢}$ في المقدار الثلاثي هو ناتج ضرب ٢س × س

الحدّ الثالث (المطلَق) ٣ في المقدار الثلاثي هو ناتج ضرب ٣ × ١

الحدّ الأوسط ٥ س هو ناتج جمع (٢س × ١) + (٣ × س) أي

[حاصل ضرب طرفَي عاملَي تحليل المقدار وهما (٢س ، ١) + حاصل ضرب وسطَي عاملَي التحليل للمقدار الثلاثي وهما (٣ ، س)]



حيث $٢س^{٢} + ٥س + ٣ = (٢س + ٣)(س + ١)$

٣ س + ٢ س = ٥ س = الحدّ الأوسط

$\therefore ٢س^{٢} + ٥س + ٣ = (٢س + ٣)(س + ١)$

مثال توضيحي

حلِّل تحليلًا تامًّا :

$٥س^{٢} - ١٢س + ٧$

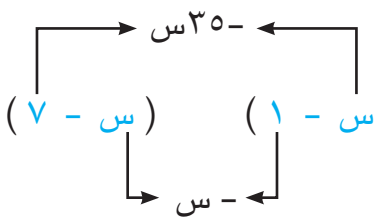
الحلّ :

الحدّ الأوّل : $٥س^{٢}$ عوامل الحدّ الأوّل هي ٥ س ، س

الحدّ الأوسط : $-١٢س$ (سالب)

الحدّ الثالث : ٧ (موجَب) عوامل الحدّ الثالث هي -٧ ، -١

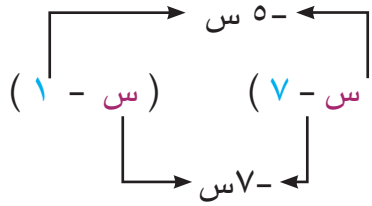
المحاولة الأولى $٥ س^{٢} - ١٢ س + ٧ = (٥س - ١) (س - ٧)$



نلاحظ أنّ الحدّ الأوسط الناتج (- ٣٦ س) وهو لا يساوي الحدّ الأوسط للمقدار الثلاثي المطلوب (- ١٢س) .

∴ المحاولة ليست صحيحة ؛ لذلك نبدّل موضع العاملَين -٧ ، -١

المحاولة الثّانية $٥ س^{٢} - ١٢ س + ٧ = (٥ س - ٧) (س - ١)$



نلاحظ أنّ الحدّ الأوسط الناتج (-١٢س) وهو مساوٍ للحدّ الأوسط للمقدار الثلاثي المطلوب .

∴ المحاولة صحيحة

∴ $٥ س^{٢} - ١٢ س + ٧ = (٥ س - ٧) (س - ١)$

مثال (١) :

حلِّل تحليلًا تامًّا :

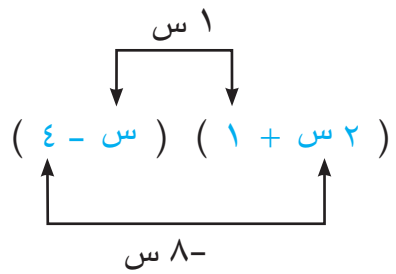
$٢ س^{٢} - ٧ س - ٤$

الحلّ :

الحدّ الأوّل : $٢ س^{٢}$ عوامل الحدّ الأوّل هي ٢ س ، س

الحدّ الأوسط : -٧ س (سالب)

الحدّ الثالث : -٤ (سالب) عوامل الحدّ الثالث هي -٤ ، ١ أو -١ ، ٤ أو -٢ ، ٢



الحدّ الأوسط = -٧ س = -٨ س + س

∴ $٢ س^{٢} - ٧ س - ٤ = (٢ س + ١) (س - ٤)$

دورك الآن (١)

حلِّل تحليلًا تامًّا كلًّا ممّا يلي :

أ) ٥ س^{٢} + ٨ س + ٣ = (..... + ...) (..... + ...)

ب) ٢ هـ^{٢} – ٣ هـ – ٥ = (..... + ...) (..... – .....)

ج) ٣ س^{٢} + ٧ س – ٦ = (..... – .....) (..... + ...)

انتبه

بعد إجراء التحليل ، تحقَّق من صحّته .

مثال (٢) :

حلِّل تحليلًا تامًّا :

٦ س^{٢} – ١٩ س ص + ١٠ ص^{٢}

الحلّ :

الحدّ الأوّل : ٦ س^{٢} عوامل الحدّ الأوّل هي ٦ س ، س
أو ٢س ، ٣ س

الحدّ الأوسط : –١٩ س ص (سالب)

الحدّ الثالث : + ١٠ ص^{٢} عوامل الحدّ الثالث هي –٢ ص ، –٥ ص
أو –ص ، –١٠ ص

–١٥ س ص

(٢ س – ٥ ص) (٣ س – ٢ ص)

–٤ س ص

الحدّ الأوسط = –١٩ س ص = (–٤ س ص) + –١٥ س ص

٦ س^{٢} – ١٩ س ص + ١٠ ص^{٢} = (٢ س – ٥ ص) (٣س – ٢ص)

دورك الآن (٢)

حلِّل تحليلًا تامًّا كلًّا ممّا يلي :

أ) ٤ س^{٢} – ٤ س – ٣ = ...

ب) ٧ ك^{٢} – ١١ ل ك – ٦ ل^{٢} = ...

ج) ٤٢ ص^{٢} + ٣٢ ص + ٦ = ٢ (.....)

= ٢ (.....) (.....)

د) ١٣ ع^{٣} + ٥ ع^{٢} – ٨ ع = ...

= .....

عبِّر عن فهمك

أوجِد قيمتَين للمعامل ك تسمحان بتحليل الحدودية :

$٤ س^{٢} + ك س + ١٠$

تمارين ذاتية :

حلِّل تحليلًا تامًّا كلًّا ممّا يلي :

١ $٣ س^{٢} + ١٦ س + ٥$

.....

.....

.....

.....

٢ $١١ ل^{٢} - ١٢ ل + ١$

.....

.....

.....

.....

٣ $٢ ك^{٢} - ١١ ك - ٢١$

.....

.....

.....

.....

٤ $٨ ص^{٢} + ١٠ ص ل - ٣ ل^{٢}$

.....

.....

.....

.....

٥ $٢٥ س^{٢} + ١٠ س - ١٥$

.....

.....

.....

.....

٦ $٦ س^{٢} - ٥ س ص - ص^{٢}$

.....

.....

.....

.....

٧ $٢١ ف^{٣} - ٧٠ ف^{٢} + ٤٩ ف$

.....

.....

.....

.....

٨ $٤ هـ^{٣} + ١٢ هـ^{٢} + ٩ هـ$

.....

.....

.....

.....

٢ - ٤ تحليل المربّع الكامل
Factorising Perfect Square

سوف تتعلّم : تحليل المربّع الكامل ، والتحليل بإكمال المربّع .

العبارات والمفردات :

مربّع كامل	Perfect Square
إكمال المربّع	Completing the Square

اِستكشِف

حلِّل الحدودية الآتية تحليلًا تامًّا باستخدام بطاقات الجبر :

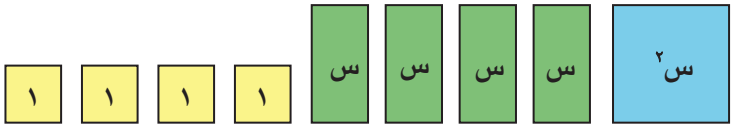
$س^{٢} + ٤ س + ٤$

اللوازم :

بطاقات الجبر	
س × س	$س^{٢}$
١ × س	س
١ × ١	١

الخطوة الأولى :

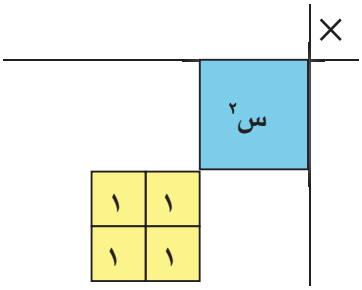
مثِّل الحدودية $س^{٢} + ٤ س + ٤$ ببطاقات الجبر كما يلي :



الخطوة الثانية :

في زاوية رقعة الضرب ، ضَع بطاقة $س^{٢}$ ،

كذلك ضَع بطاقات ١ على شكل مصفوفة كما في الشكل :



الخطوة الثالثة :

أكمِل شكل المربّع على رقعة الضرب ببطاقات س ،

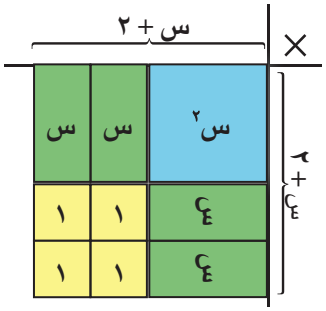
فنلاحظ أنّ طول ضلع المربّع = س + ٢

∴ مساحة المنطقة المربّعة = (س + ٢) (س + ٢)

$= (س + ٢)^{٢}$

∴ $س^{٢} + ٤ س + ٤ = (س + ٢) (س + ٢)$

$= (س + ٢)^{٢}$ (تحقَّق جبريًّا)



أكمِل ما يلي :

$(أ + ب)^{٢} = \ldots\ldots + \ldots\ldots + \ldots\ldots$

$(أ - ب)^{٢} = \ldots\ldots - \ldots\ldots + \ldots\ldots$

$(أ \pm ب)^{٢} = أ^{٢} \pm ٢أب + ب^{٢}$ يُسمّى ذلك **مربّعًا كاملًا** .

- $أ^{٢}$: مربّع الحدّ الأوّل
- $٢أب$: ٢ × الحدّ الأوّل × الحدّ الثاني
- $ب^{٢}$: مربّع الحدّ الثاني

تحليل المربّع الكامل

$أ^{٢} \pm ٢أب + ب^{٢} = (أ \pm ب)^{٢}$

- الجذر التربيعي الموجَب للحدّ الأوّل
- إشارة الحدّ الأوسط
- الجذر التربيعي الموجَب للحدّ الثالث

∴ لتحليل الحدودية $س^{٢} + ٤س + ٤$ بالطريقة الجبرية :

- الجذر التربيعي الموجَب للحدّ الأوّل = س
- الجذر التربيعي الموجَب للحدّ الثالث = ٢

∴ $س^{٢} + ٤س + ٤ = (س + ٢)^{٢}$

وهذا المقدار $(س^{٢} + ٤س + ٤)$ يُسمّى **مربّعًا كاملًا** .

وستقتصر دراستنا في هذا الكتاب على الطريقة الجبرية فقط .

مثال (١) :

حدِّد ما إذا كانت الحدودية الثلاثية الآتية مربّعًا كاملًا أم لا ، ثمّ حلِّل الحدودية إذا كانت مربّعًا كاملًا .

$س^{٢} + ١٠س + ٢٥$

الحلّ :

- هل $س^{٢}$ مربّع كامل ؟ **الإجابة :** نعم ، وجذره التربيعي الموجَب = س
- هل ٢٥ مربّع كامل ؟ **الإجابة :** نعم ، وجذره التربيعي الموجَب = ٥
- هل الحدّ الأوسط **ضعف** حاصل ضرب س × ٥

الإجابة : نعم ، حيث ٢ × س × ٥ = ١٠ س (الحدّ الأوسط)

∴ الحدودية الثلاثية $س^{٢} + ١٠س + ٢٥$ مربّع كامل

∴ $س^{٢} + ١٠س + ٢٥ = (س + ٥)^{٢}$

دورك الآن (١)

أيّ من الحدوديات الثلاثية الآتية تمثّل مربعًا كاملًا :

(أ) $س^{٢} - ١٤ س + ٤٩$

.....

.....

.....

(ب) $ص^{٢} + ٣ ص + ٩$

.....

.....

.....

(ج) $٩ س^{٢} - ٦ س - ١$

.....

.....

.....

(د) $٤ س^{٢} + ٣٦ س + ٩$

.....

.....

.....

دورك الآن (٢)

حلِّل كلًّا ممّا يلي تحليلًا تامًّا :

(أ) $ص^{٢} + ٨ ص + ١٦$

$= (\ldots\ldots + \ldots\ldots)^{٢}$

(ب) $١٦ ب^{٢} - ٢٤ ب + ٩$

$= (\ldots\ldots - \ldots\ldots)^{٢}$

(ج) $ص^{٢} + ١٦ ص + ٦٤$

.....

(د) $١ - ١٠ س + ٢٥ س^{٢}$

.....

مثال (٢) :

حلِّل تحليلًا تامًّا : $٢٠ س^{٢} - ٢٠ س + ٥$

الحلّ :

$٢٠ س^{٢} - ٢٠ س + ٥$

$= ٥ (٤ س^{٢} - ٤ س + ١)$ (بأخذ العامل المشترَك)

$= ٥ (٢ س - ١)^{٢}$

تذكَّر

إخراج العامل المشترَك الأكبر إن وُجد .

دورك الآن (٣)

حلِّل كلًّا ممّا يلي تحليلًا تامًّا :

(أ) $٩ س^{٣} - ٦ س^{٢} ص + س ص^{٢}$

.....

.....

(ب) $٤ ب^{٣} جـ + ٨ ب^{٢} جـ^{٢} + ٤ ب جـ^{٣}$

.....

.....

مثال (٣) :

أوجِد قيمة جـ التي تجعل الحدودية الثلاثية الآتية مربعًا كاملًا :

٩ س^{٢} + جـ س ص + ٤٩ ص^{٢}

الحلّ :

الجذر التربيعي الموجَب للحدّ الأوّل = ٣ س ،

الجذر التربيعي الموجَب للحدّ الثالث = ٧ ص ،

الحدّ الأوسط = ± ٢ × ٣ س × ٧ ص

جـ س ص = ± ٤٢ س ص

∴ جـ = ٤٢ أو جـ = -٤٢

دورك الآن (٤)

وظِّف مفهوم المربّع الكامل لإيجاد قيمة كلّ ممّا يلي :

(١٠١)^{٢} = (١٠٠ + ...)^{٢}

= (١٠٠)^{٢} + ٢ × ١٠٠ × ..... + (.....)^{٢}

= ١٠٠٠٠ + ... + ... = ...

عبِّر عن فهمك

ليكن المقدار س^{٢} + ٦س + جـ مربّعًا كاملًا، هل يمكن إيجاد قيمة جـ ؟ فسِّر إجابتك .

إكمال المربّع

تعلم أنّ الحدودية س^{٢} + ب س + جـ مربّع كامل إذا كان :

س^{٢} + ب س + جـ = (س + $\sqrt{\text{جـ}}$)^{٢}

لكنّ الحدودية س^{٢} + ب س ليست مربّعًا كاملًا

لنفترِض عند إضافة جـ يصبح مربّعًا كاملًا

س^{٢} + ب س + جـ = (س + $\sqrt{\text{جـ}}$)^{٢}

= س^{٢} + ٢ $\sqrt{\text{جـ}}$ س + جـ

∴ ب = ٢ $\sqrt{\text{جـ}}$

$\sqrt{\text{جـ}} = \left(\frac{\text{ب}}{٢}\right)$ نربّع الطرفَين

∴ جـ = $\left(\frac{\text{ب}}{٢}\right)^{٢}$ ماذا تلاحظ ؟

وبصورة عامّة :

لإكمال الحدودية $س^{٢} + ب\ س$ إلى مربّع كامل ، نُضيف إليها مربّع نصف معامل س أي $\left(\frac{ب}{٢}\right)^{٢}$

$س^{٢} + ب\ س + \left(\frac{ب}{٢}\right)^{٢} = \left(س + \frac{ب}{٢}\right)^{٢}$ وهو مربّع كامل .

مثال (٤) :

أكمِل $س^{٢} + ٤\ س$ إلى مربّع كامل .

الحلّ :

معامل س = ٤

نصف معامل س = $\frac{٤}{٢}$

مربّع نصف معامل س = $\left(\frac{٤}{٢}\right)^{٢} = (٢)^{٢} = ٤$

نُضيف مربّع نصف معامل س

$س^{٢} + ٤\ س + ٤ = (س + ٢)^{٢}$

دورك الآن (٥)

أكمِل: $س^{٢} + ١٤\ س$ إلى مربّع كامل .

مربّع نصف معامل س = ...

$س^{٢} + ١٤\ س + ... = (.....)^{٢}$

مثال (٥) :

حلِّل الحدودية الآتية بطريقة إكمال المربّع :

$س^{٢} - ٦\ س + ٨$

الحلّ :

$س^{٢} - ٦\ س + ٨$ ليست مربّعًا كاملًا

حتّى يصبح $(س^{٢} - ٦\ س)$ مربّعًا كاملًا ، نُضيف مربّع نصف معامل س

مربّع نصف معامل س = $\left(\frac{-٦}{٢}\right)^{٢} = (-٣)^{٢} = ٩$

وحتّى لا تتغيّر الحدودية المطلوب تحليلها يلزم طرح ٩

$س^{٢} - ٦\ س + ٨ = س^{٢} - ٦\ س + ٩ - ٩ + ٨$

$= (س - ٣)^{٢} - ١$ (فرق بين مربّعَين)

$= (س - ٣ - ١)(س - ٣ + ١)$

$= (س - ٤)(س - ٢)$

مثال (٦) :

حلِّل الحدودية الآتية بطريقة إكمال المربّع :

س^{٢} – ٥ س + ٦

الحلّ :

س^{٢} – ٥ س + ٦ ليست مربّعًا كاملًا

حتّى يصبح (س^{٢} – ٥ س) مربّعًا كاملًا، نُضيف مربّع نصف معامل س

مربّع نصف معامل س = $\left(\frac{-٥}{٢}\right)^{٢} = \frac{٢٥}{٤}$

وحتّى لا تتغيّر الحدودية المطلوب تحليلها يلزم طرح $\frac{٢٥}{٤}$

س^{٢} – ٥س + ٦ = س^{٢} – ٥س + $\frac{٢٥}{٤}$ – $\frac{٢٥}{٤}$ + ٦

$= \left(س - \frac{٥}{٢}\right)^{٢} - \frac{١}{٤}$ (فرق بين مربّعَين)

$= \left(س - \frac{٥}{٢} - \frac{١}{٢}\right)\left(س - \frac{٥}{٢} + \frac{١}{٢}\right)$

= (س – ٣) (س – ٢)

انتبه

$\left(\frac{أ}{ب}\right)^{٢} = \left(-\frac{أ}{ب}\right)^{٢}$

دورك الآن (٦)

حلِّل الحدودية الآتية بطريقة إكمال المربّع :

٢س^{٢} + ٨ س – ١٠

= ٢ (.....) بأخذ العامل المشترَك

مربّع نصف معامل س = ...

٢س^{٢} + ٨ س – ١٠ = ٢ (س^{٢} + ٤ س + ... – ..... – ٥)

= ٢[(.....)^{٢} – .....]

= ٢ (..... + ...) (..... – .....)

= ٢ (..... + ...) (..... – .....)

تمارين ذاتية :

١ أيّ من الحدوديات الثلاثية الآتية تمثّل مربعًا كاملًا ؟

(أ) $س^{٢} + ٢ س ص + ص^{٢}$

.....

.....

(ب) $ع^{٢} - ٤ ع - ٤$

.....

.....

(ج) $١ + ١٠ س + ٢٥ س^{٢}$

.....

.....

(د) $٩ ب^{٢} + ١٢ ب + ١٦$

.....

.....

٢ حلِّل كلًّا ممّا يلي تحليلًا تامًّا :

(أ) $ص^{٢} - ٢ ص + ١$

.....

(ب) $١ + ٦ ب + ٩ ب^{٢}$

.....

(ج) $س - ٤ س^{٢} + ٤ س^{٣}$

.....

.....

(د) $س^{٢} + ٢٤ س + ١٤٤$

.....

.....

(هـ) $س^{٣} - ٦ س^{٢} + ٩ س$

.....

.....

(و) $١٢ س^{٢} + ٣٦ س ص + ٢٧ ص^{٢}$

.....

.....

٣ وظِّف مفهوم المربّع الكامل لإيجاد قيمة كلّ ممّا يلي :

(أ) $(١٠٣)^{٢}$

.....

.....

.....

(ب) $(٥٩)^{٢}$

.....

.....

.....

٤ أوجِد قيمة جـ التي تجعل كلًّا من الحدوديات الثلاثية الآتية مربعًا كاملًا :

(أ) $س^{٢}$ + جـ س + ٨١

.....

.....

.....

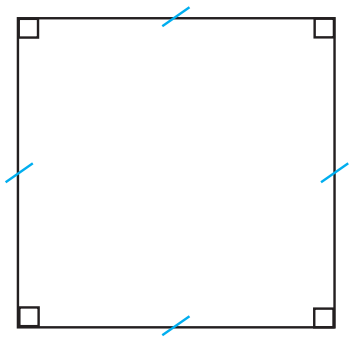
(ب) ٤ $س^{٢}$ - جـ س ص + ٩ $ص^{٢}$

.....

.....

.....

٥ ما طول ضلع المربّع الذي مساحة منطقته ($س^{٢}$ + ٢٢ س + ١٢١) وحدة مربّعة .



.....

.....

.....

٦ أكمِل كلًّا ممّا يلي إلى مربّع كامل :

(أ) $س^{٢}$ + ١٨ س

.....

.....

.....

.....

(ب) $س^{٢}$ - ٧ س

.....

.....

.....

.....

٧ حلِّل كلًّا ممّا يلي بطريقة إكمال المربّع :

(أ) $س^{٢}$ + ٦ س - ٧

.....

.....

.....

.....

(ب) ٢ $س^{٢}$ - ٨ س - ٢٤

.....

.....

.....

.....

٢ ـ ٥ تحليل الحدودية الرباعية
Factorising Quadrinomial Polynomial

سوف تتعلّم : تحليل الحدودية الرباعية .

العبارات والمفردات :

حدودية رباعية	Quadrinomial Polynomial

حلّ وناقِش

الحدودية الرباعية هي حدودية مكوَّنة من أربعة حدود غير متشابهة .

فمثلًا : $أ^{٢}س + أ^{٢}ص + ب س + ب ص$ حدودية رباعية

- هل يمكنك تحليل الحدودية الرباعية باستخدام طرق التحليل التي درستها من قبل ؟
- هل يوجد عامل مشترَك بين الحدود الأربعة ؟

$أ^{٢}س + أ^{٢}ص + ب س + ب ص$ — هل يوجد عامل مشترَك بين حدَّين من الحدود ؟

$= (أ^{٢}س + أ^{٢}ص) + (ب س + ب ص)$ — أخرِج العامل المشترَك لكلّ حدَّين .

$= أ^{٢}(..... + ...) + ب (..... + ...)$ — هل يوجد عامل مشترَك بين الحدَّين ؟

$= (..... + ...)(..... + ...)$ (تحقَّق جبريًّا)

جرِّب ، الآن ، تحليل الحدودية الرباعية بأخذ عوامل مشترَكة أخرى

$أ^{٢}س + أ^{٢}ص + ب س + ب ص$

تحقَّق ، هل حصلت على التحليل نفسه ؟

تذكَّر

- الجمع عملية إبدالية
- الضرب عملية إبدالية.

مثال (١) :

حلِّل الحدودية الآتية تحليلًا تامًّا :

هـ جـ + هـ د + ب جـ + ب د

الحلّ :

هـ جـ + هـ د + ب جـ + ب د

$= (هـ جـ + هـ د) + (ب جـ + ب د)$ (جزِّىء)

$= هـ (جـ + د) + ب (جـ + د)$ (بأخذ العامل المشترَك)

$= (جـ + د)(هـ + ب)$ (بأخذ العامل المشترَك)

دورك الآن (١)

حلِّل كلًّا ممّا يلي تحليلًا تامًّا :

(أ) $س^{٢} هـ - س^{٢} د + ص^{٢} هـ - ص^{٢} د$

$= (س^{٢} هـ - س^{٢} د) + (\ldots\ldots\ldots\ldots)$

$= س^{٢} (\ldots\ldots - \ldots\ldots) + ص^{٢} (\ldots\ldots - \ldots\ldots)$

$= (\ldots\ldots - \ldots\ldots) (س^{٢} + ص^{٢})$

(ب) $٢ س + جـ س + ٢ جـ + جـ^{٢}$

.....

.....

.....

مثال (٢) :

حلِّل تحليلًا تامًّا :

$س^{٣} - ٣ س^{٢} + ٢ س - ٦$

الحلّ :

$س^{٣} - ٣ س^{٢} + ٢ س - ٦ = (س^{٣} - ٣ س^{٢}) + (+ ٢ س - ٦)$

$= س^{٢} (س - ٣) + ٢ (س - ٣)$

$= (س - ٣) (س^{٢} + ٢)$

دورك الآن (٢)

حلِّل كلًّا ممّا يلي تحليلًا تامًّا :

(أ) $س^{٢} - ٣ س - س ص + ٣ ص$

.....

.....

.....

(ب) $٢٠ س^{٢} ص + ١٠ ب س^{٢} - ٤ أ ص - ٢ أ ب$

$= ٢ (\ldots\ldots\ldots\ldots)$

.....

.....

.....

.....

تذكَّر

$(س - ص) = - (- س + ص)$

$= - (ص - س)$

مثال (٣) :

حلِّل تحليلًا تامًّا :

$س^{٣} - ٢ س^{٢} - س + ٢$

الحلّ :

$س^{٣} - ٢ س^{٢} - س + ٢ = (س^{٣} - ٢ س^{٢}) + (- س + ٢)$

$= س^{٢} (س - ٢) - (س - ٢)$

$= (س - ٢) (س^{٢} - ١)$ (حلِّل الفرق بين مربّعَين)

$= (س - ٢) (س - ١) (س + ١)$

انتبِه

أكمِل الحلّ حتّى تصل إلى تحليل تامّ .

دورك الآن (٣)

حلِّل كلًّا ممّا يلي تحليلًا تامًّا :

(أ) $س^{٣} - ٣ س^{٢} - ٤ س + ١٢$

.....

.....

.....

.....

(ب) $ص^{٣} + ٤ ص^{٢} - ٩ ص - ٣٦$

.....

.....

.....

.....

تمارين ذاتية :

حلِّل كلًّا ممّا يلي تحليلًا تامًّا :

١ $م هـ - س م + هـ ص - س ص$

.....

.....

.....

٢ $٢ أ^{٢} س + ٢ س ب + أ^{٢} ص + ب ص$

.....

.....

.....

٣ $٤ س^{٢} + ٢ أ س + ٨ ب س + ٤ أ ب$

.....

.....

.....

٤ $٦ س^{٢} - ٨ س ص - ٣ س ب + ٤ ب ص$

.....

.....

.....

٥ $س^{٣} - ٢ س^{٢} - ٩ س + ١٨$

.....

.....

.....

٦ $س^{٣} + ٢ س^{٢} - ٢٥ س - ٥٠$

.....

.....

.....

٦ - ٢ حلّ معادلة من الدرجة الثانية في متغيّر واحد

Solving Second Degree Equation in One Variable

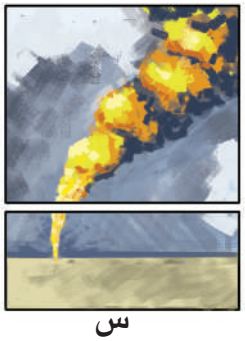
سوف تتعلّم : حلّ معادلة من الدرجة الثانية في متغيّر واحد على صورة واحدة: أ س^{٢} + ب س + جـ = ٠ ، أ ≠ ٠

العبارات والمفردات :

معادلة من الدرجة الثانية في متغيّر واحد	Second Degree Equation with One Variable
حلّ معادلة	Solving an Equation

حُلّ وناقِش

تشارك أمل في مسابقة رسم لوحة فنّية بمناسبة إطفاء آخر بئر نفطية ، وكان من شروط المسابقة أن تكون مساحة اللوحة ١٥٠ سم^{٢} .



فلم تجد في المكتبة إلّا لوحتان إحداهما مربّعة الشكل والأخرى مستطيلة الشكل كما هو موضّح في الشكل المقابل . ساعِد أمل على إيجاد قِيَم س التي تجعل مجموع مساحتَي اللوحتَين يساوي ١٥٠ سم^{٢} .

١ أُكتب مساحة اللوحة المربّعة بدلالة س : .....

٢ أُكتب مساحة اللوحة المستطيلة بدلالة س : .....

٣ أوجِد قِيَم س التي تجعل مجموع المساحتَين يساوي ١٥٠ سم^{٢}

- **نكتب المعادلة :** ..... + ... = ١٥٠

نبحث عن عدد موجَب مجموع مربّعه وخمسة أمثاله يساوي ١٥٠

- **نضع المعادلة في صورة أ س^{٢} + ب س + جـ = ٠**

..... + ... - ..... = ٠

- **نحلّل بطريقة مناسِبة لإيجاد قِيَم س :**

(..... + ...) (..... - .....) = ٠

- **نوجِد قِيَم س** .....
- **هل تقبل القيمتان؟ لماذا؟** .....

.....

لاحِظ أنّ

المعادلة من الدرجة الثانية في متغيّر واحد تُسمّى المعادلة التربيعية .

تذكّر

حلّ المعادلة يعني إيجاد قِيَم المتغيّر التي تحقّق المعادلة .

معلومة مفيدة :

تحتفل الكويت سنويًّا في ٦ نوفمبر بذكرى إطفاء آخر بئر نفطية إثر العدوان العراقي الغاشم .

خاصّية الضرب الصفري

لكلّ أ ، ب عددان حقيقيان ، إذا كان أ × ب = ٠ ، فإنّ أ = ٠ أو ب = ٠

مثال (١) :

أوجِد مجموعة حلّ المعادلة : (س + ٥) (س − ٦) = ٠ ،
حيث س ∈ ح ، ثمّ تحقَّق من صحّة الحلّ .

الحلّ :

(س + ٥) (س − ٦) = ٠

س + ٥ = ٠ أو س − ٦ = ٠

س = − ٥ أو س = ٦

∴ مجموعة الحلّ = { − ٥ ، ٦ }

(اِستخدِم خاصّية الضرب الصفري)

لاحِظ أنّ

عند حلّ المعادلة التربيعية ، سنعتبر أنّ قِيَم المتغيّر تنتمي إلى مجموعة الأعداد الحقيقية ما لم يُذكر غير ذلك .

تحقَّق :

عوِّض عن س بالعدد − ٥

(− ٥ + ٥) (− ٥ − ٦) ≟ ٠

٠ × − ١١ ≟ ٠

٠ = ٠ ✓

عوِّض عن س بالعدد ٦

(٦ + ٥) (٦ − ٦) ≟ ٠

١١ × ٠ ≟ ٠

٠ = ٠ ✓

مثال (٢) :

أوجِد مجموعة حلّ كلّ من المعادلات الآتية في ح :

(أ) ص^{٢} − ٥ ص = ٠

الحلّ :

ص^{٢} − ٥ ص = ٠

ص (ص − ٥) = ٠

ص = ٠ أو ص − ٥ = ٠

ص = ٥

∴ مجموعة الحلّ = { ٠ ، ٥ }

تذكَّر

خطوات حلّ معادلة تربيعية :

١ ضَع المعادلة في الصورة العامّة .

٢ حلِّل .

٣ استخدِم خاصّية الضرب الصفري.

(ب) $س^{٢} = ٩$

الحلّ :

$س^{٢} = ٩$

$س^{٢} - ٩ = ٠$

$(س - ٣) (س + ٣) = ٠$

$س - ٣ = ٠$ أو $س + ٣ = ٠$

$س = ٣$ $س = - ٣$

∴ **مجموعة الحلّ = { ٣ ، -٣ }**

(ج) $ص^{٢} - ٦ ص + ٥ = ٠$

الحلّ :

$ص^{٢} - ٦ ص + ٥ = ٠$

$(ص - ٥) (ص - ١) = ٠$

$ص - ٥ = ٠$ أو $ص - ١ = ٠$

$ص = ٥$ $ص = ١$

∴ **مجموعة الحلّ = { ٥ ، ١ }**

(د) $س^{٢} + ٨ س + ١٦ = ٠$

الحلّ :

$س^{٢} + ٨ س + ١٦ = ٠$

$س^{٢} + ٨ س + ١٦ = ٠$

$(س + ٤)^{٢} = ٠$

$(س + ٤) = ٠$

$س = - ٤$

∴ **مجموعة الحلّ = { -٤ }**

لاحِظ أنّ

إذا كانت $س^{٢} = ٠$

فإنّ $س = ٠$

عبِّر عن فهمك (١)

ما مجموعة حلّ المعادلة $س^{٢} + ١ = ٠$ ؟ حيث $س \in ح$.

مثال (٣) :

أوجِد مجموعة حلّ كلّ من المعادلات الآتية في ح :

(أ) $٦ص^{٢} + ٩ص = ٢ + ص^{٢}$

الحلّ :

$٦ص^{٢} + ٩ص = ٢ + ص^{٢}$

$٦ص^{٢} + ٩ص - ٢ - ص^{٢} = ٠$

$٥ص^{٢} + ٩ص - ٢ = ٠$

$(٥ص - ١)(ص + ٢) = ٠$

$٥ص - ١ = ٠$ أو $ص + ٢ = ٠$

$٥ص = ١$ $ص = -٢$

$ص = \frac{١}{٥}$

∴ مجموعة الحلّ $= \{\frac{١}{٥}، -٢\}$

انتبِه

اِجمع الحدود المتشابهة .

(ب) $ع(ع - ٦) = ٧$

الحلّ :

$ع(ع - ٦) = ٧$

$ع^{٢} - ٦ع = ٧$

$ع^{٢} - ٦ع - ٧ = ٠$

$(ع - ٧)(ع + ١) = ٠$

$ع - ٧ = ٠$ أو $ع + ١ = ٠$

$ع = ٧$ $ع = -١$

∴ مجموعة الحلّ $= \{٧، -١\}$

(ج) $(س + ٢)^{٢} = ١٤٤$

الحلّ :

$(س + ٢)^{٢} = ١٤٤$

$(س + ٢)^{٢} - ١٤٤ = ٠$

$[(س + ٢) - ١٢][(س + ٢) + ١٢] = ٠$

$(س - ١٠)(س + ١٤) = ٠$

$س - ١٠ = ٠$ أو $س + ١٤ = ٠$

$س = ١٠$ $س = -١٤$

∴ مجموعة الحلّ $= \{١٠، -١٤\}$

عبِّر عن فهمك (٢)

هل يمكنك حلّ مثال (٣) : (ج) بطريقة أخرى ؟

مثال (٤) :

ما العدد الحقيقي الذي يزيد مربّعه عن أربعة أمثاله بمقدار ٥ ؟

الحلّ :

نفرض أنّ العدد الحقيقي هو س

$س^{٢} - ٤س = ٥$ (كوِّن المعادلة التربيعية)

$س^{٢} - ٤س - ٥ = ٠$ (ضَع المعادلة في الصورة العامّة)

$(س + ١) (س - ٥) = ٠$ (حلِّل)

إمّا $(س + ١) = ٠$ أو $(س - ٥) = ٠$

$س = -١$ $س = ٥$

العدد الحقيقي هو -١ أو ٥

تذكّر

بفرض أنّ س عدد حقيقي ، فإنّ :

ضعفه هو ٢ س

مربّعه هو $س^{٢}$

ثلاثة أمثاله هو ٣ س

مثال (٥) :

أوجِد مجموعة حلّ المعادلة الآتية في ح بإكمال المربّع :

$س^{٢} + ٤س + ٢ = ٠$

الحلّ :

$س^{٢} + ٤س + ٤ - ٤ + ٢ = ٠$ (أكمِل إلى مربّع كامل)

$(س + ٢)^{٢} - ٢ = ٠$ (حلِّل الفرق بين مربّعَين)

$(س + ٢ - \sqrt{٢}) (س + ٢ + \sqrt{٢}) = ٠$

إمّا $س + ٢ - \sqrt{٢} = ٠$ أو $س + ٢ + \sqrt{٢} =$

$س = -٢ + \sqrt{٢}$ $س = -٢ - \sqrt{٢}$

∴ مجموعة الحلّ = $\{ -٢ + \sqrt{٢} ، -٢ - \sqrt{٢} \}$

انتبِه

$\sqrt{٢} \times \sqrt{٢} = ٢$

دورك الآن

أوجِد مجموعة حلّ المعادلة الآتية في ح بإكمال المربّع :

$س^{٢} + ٦س - ٢ = ٠$

الحلّ :

$س^{٢} + ٦س + ... - ..... - ٢ = ٠$

$(س + ...)^{٢} - ..... = ٠$

$(س + ٣ - .....) (س + ٣ + ...) = ٠$

إمّا س + ٣ = ... – ٣ = ... + ٣ – س = ...

أو

س + ٣ = ٠ = ... + ٣ + س = ...

∴ مجموعة الحلّ = { ..... ، ..... }

تمارين ذاتية :

١ أوجِد مجموعة حلّ كلّ من المعادلات الآتية في ح :

(أ) (س – ٣) (٢ س + ١) = ٠

.....

.....

.....

(ب) ص^{٢} – ٣٦ = ٠

.....

.....

.....

(ج) ص^{٢} – ١٠ ص – ١١ = ٠

.....

.....

.....

(د) ن^{٢} – ٦ ن + ٩ = ٠

.....

.....

.....

(هـ) ك^{٢} + ٧ ك + ١٢ = ٠

.....

.....

.....

.....

(و) ل^{٢} = ٧ ل

.....

.....

.....

.....

(ز) ٣ ن^{٢} + ن – ١٠ = ٠

.....

.....

.....

.....

(ح) ٧ س^{٢} – ١٢ س – ٨ = ٥ س^{٢} – ٦ س

.....

.....

.....

.....

(ط) ٢ ص^{٢} = ١٥ ص – ١٨

.....

.....

.....

.....

(ي) س (س + ١) = ٢

.....

.....

.....

.....

الدرس السادس

ك (س + ٣)^{٢} − ٤٩ = ٠

.....

.....

.....

.....

ل ٩ م^{٢} = ١٢ م − ٤

.....

.....

.....

.....

٢ أوجِد مجموعة حلّ المعادلة الآتية في ح بإكمال المربّع : س^{٢} − ٢س − ٤ = ٠

.....

.....

.....

.....

٣ يُنتج مصنع للحديد والصلب قطعة على شكل شبه مكعّب أبعاده :
٤ سم ، (س + ٢) سم ، (س + ٢) سم وحجمه يساوي ١٠٠ سم^{٣} . أوجِد قيمة س .

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

٤ لدى مخزن أحد المصانع أرضية مستطيلة الشكل يزيد طولها ٢٠ مترًا عن عرضها ، وكانت مساحتها ٣٠٠ م^{٢} . أوجِد بعدَي أرضية المخزن .

.....

.....

.....

.....

.....

.....

٥ ما العدد الحقيقي الذي ينقص مربّعه عن خمسة أمثاله بمقدار ٤ ؟

.....

.....

.....

.....

.....

.....

مهارات تفكير عليا :

٦ أوجِد مجموعة حلّ المعادلة ، حيث س ∈ ح

$(س + ٥)^{٢} + ٥(س + ٥) + ٤ = ٠$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

تقويم الوحدة التعليمية الثانية
Unit Two Assessment

أوّلًا : البنود المقالية

١ حلِّل كلًّا ممّا يلي تحليلًا تامًّا :

(أ) $س^{٢} + ١٤ س + ٤٩$

.....

.....

(ب) $١٢٥ + س^{٣}$

.....

.....

(ج) $٣٢ س^{٣} - ٤$

.....

.....

(د) $س^{٦} - \frac{٢٧}{٦٤} ص^{٣}$

.....

.....

(هـ) $س^{٢} + ٨ س + ٧$

.....

.....

(و) $س^{٢} - ٣ س - ١٨$

.....

.....

(ز) $٢ س^{٢} - ١٤ س + ٢٤$

.....

.....

(ح) $ص^{٤} + ١١ ص^{٣} + ٢٨ ص^{٢}$

.....

.....

(ط) $ب^{٢} - ٩ ب ك - ١٠ ك^{٢}$

.....

.....

(ي) $٢ س^{٢} - ٨ س + ٦$

.....

.....

(ك) $٦ س^{٢} + ٢١ س - ١٢$

.....

.....

(ل) $١٢ ل^{٢} + ١١ ل م - ١٥ م^{٢}$

.....

.....

(م) $٤ س^{٢} + ٤ س + ١$

.....

.....

(ن) $٩ س^{٢} ص - ٥٤ س ص + ٨١ ص$

.....

.....

(س) $س^{٣} + ٢ س^{٢} - س - ٢$

.....

.....

.....

.....

(ص) $س ص^{٢} + ٢ س^{٢} - ٣ ص^{٣} - ٦ س ص$

.....

.....

٢ حلِّل الحدودية الآتية بطريقة إكمال المربّع :

$س^{٢} - ٢س - ٣$

.....

.....

.....

٣ أوجِد مجموعة حلّ كلّ من المعادلات الآتية :

(أ) $س^{٢} - ٦ س = ٠$

.....

.....

.....

.....

(ب) $٩ص^{٢} - ١١ = ١٤$

.....

.....

.....

.....

(ج) $س^{٢} - ٤ س = ٢١$

.....

.....

.....

.....

(د) $٩ ن^{٢} + ١٢ ن + ٤ = ٠$

.....

.....

.....

.....

(هـ) $(س - ٧)^{٢} - ٨١ = ٠$

.....

.....

.....

.....

(و) $٩ س^{٢} - ٥ س = ٦ س^{٢} - ٣ س + ٥$

.....

.....

.....

.....

ز) س (س + ٢) = ٣

.....

.....

.....

.....

ح) (٣ س - ٢)^{٢} - س^{٢} = ٠

.....

.....

.....

.....

٤ أوجِد مجموعة حلّ المعادلة في ح بطريقة إكمال المربّع :

س^{٢} + ٨ س + ١٤ = ٠

.....

.....

٥ وظِّف مفهوم المربّع الكامل لإيجاد قيمة : (٦١)^{٢}

.....

.....

ثانيًا : البنود الموضوعية

في البنود (١ - ١٠) ، ظلِّل [أ] إذا كانت العبارة صحيحة ، وظلِّل [ب] إذا كانت العبارة غير صحيحة .

١ $س^{٣} - \frac{١}{٢٧} = (س - \frac{١}{٣})(س^{٢} + \frac{١}{٣} س + \frac{١}{٩})$	أ	ب
٢ المقدار الثلاثي $س^{٢} + س + \frac{١}{٤}$ مربّع كامل	أ	ب
٣ $س^{٢} + س + ١ = (س + ١)^{٢}$	أ	ب
٤ مجموعة حلّ المعادلة $س^{٢} + ٣ س = ٠$ ، $س \in ح$ هي $\{٠ ، ٣\}$	أ	ب
٥ $(س + ص)^{٢} = س^{٢} + ص^{٢}$	أ	ب
٦ إذا كان $٤ ص^{٢} + جـ ص + ٩$ مربّعًا كاملًا ، فإنّ إحدى قِيَم جـ هي ١٢	أ	ب
٧ إذا كان $٢ س^{٢} - س - ١٠ = ل (س + ٢)$ ، فإنّ $ل = (٢س - ٥)$	أ	ب
٨ $(س + ص)^{٣} = س^{٣} + ص^{٣}$	أ	ب
٩ $٠,٠٠١ + أ^{٣} = (٠,١ + أ)(أ^{٢} - ٠,١ أ + ٠,٠١)$	أ	ب
١٠ إذا كان $س - ص = ٥$ ، $س^{٢} + س ص + ص^{٢} = ٦$ ، فإنّ $س^{٣} - ص^{٣} = ٣٠$	أ	ب

في البنود (١١ - ١٩) لكلّ بند أربعة اختيارات ، واحد فقط منها صحيح ، ظلِّل الإجابة الصحيحة .

١١ إذا كان $أ^{٣} = ١٠$ ، $ب^{٣} = ٢$ ، فإنّ $(أ + ب)(أ^{٢} - أب + ب^{٢}) =$

[أ] -٨ [ب] ٨ [ج] ١٢ [د] ٢٠

١٢ $س (س - ٣) - ٣ س + ٩ =$

[أ] $(س - ٣)(س + ٣)$ [ب] $(س - ٣)^{٢}$

[ج] $(س - ٣)(س + ١)$ [د] $(س + ٣)^{٢}$

١٣ إذا كان ل + م = ٣ ، ل^{٣} + م^{٣} = ٥١ ، فإنّ ل^{٢} - ل م + م^{٢} =

أ ١٧ ب ٤٨ ج ٥٤ د ١٥٣

١٤ (س - ١)^{٢} - ٤ =

أ (س - ٢) (س + ١) ب (س + ٢) (س - ١)

ج (س - ١) (س + ٣) د (س + ١) (س - ٣)

١٥ إذا كان ٢ س^{٢} + م س - ٧ = (٢ س - ١) (س + ٧) ، فإنّ م =

أ -١٣ ب ١٣ ج ١٤ د ١٥

١٦ مجموعة حلّ المعادلة س (س - ١٢) = ١٣ في ح هي :

أ { ١٢ ، -١٣ } ب { ١ ، -١٣ }

ج { -١٢ ، ٠ } د { -١ ، ١٣ }

١٧ ص^{٤} + ٠,٠٢٧ ص =

أ ص (ص + ٠,٣) (ص^{٢} + ٠,٣ ص + ٠,٠٩)

ب ص (ص - ٠,٣) (ص^{٢} - ٠,٣ ص - ٠,٠٩)

ج ص (ص + ٠,٣) (ص^{٢} - ٠,٣ ص + ٠,٠٩)

د ص (ص + ٠,٣) (ص^{٢} - ٠,٦ ص + ٠,٠٩)

١٨ (س - ١)^{٣} + ١ =

أ س (س^{٢} - ٣س + ٣)

ب س (س^{٢} + ٣س + ٣)

ج س (س^{٢} + ٣س - ٣)

د س (س^{٢} - ٣س - ٣)

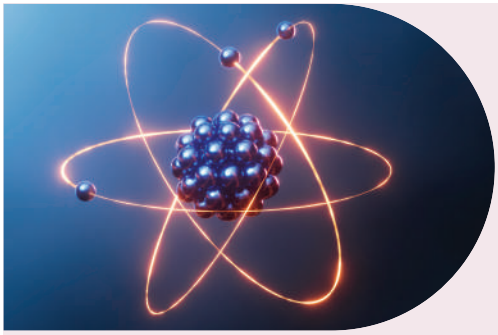
١٩ قيمة جـ التي تجعل الحدودية الثلاثية س^{٢} - ٦ س + جـ مربّعًا كاملًا هي :

أ -٩ ب ٣ ج ٩ د ٣٦

في البنود (٢٠ - ٢٣) ، اِختر من القائمة (٢) ما يناسب كلّ بند من القائمة (١) لتحصل على عبارة صحيحة .

القائمة (١)	القائمة (٢)
٢٠ ٦ س^{٢} - ١١ س + ٤ = ☐	أ (٣ س - ١) (س + ٢)
٢١ ٦ س^{٢} - ٥ س - ٤ = ☐	ب ٣ (٣ س - ٢) (س + ١)
٢٢ ٩ س^{٢} + ٣ س - ٦ = ☐	ج (٢ س - ١) (٣ س - ٤)
٢٣ س (٣ س + ٥) - ٢ = ☐	د (٢ س + ١) (٣ س - ٤)
	هـ (٢ س - ١) (٣ س + ٤)

المشروع الأوّل:
الرياضيات والعلوم

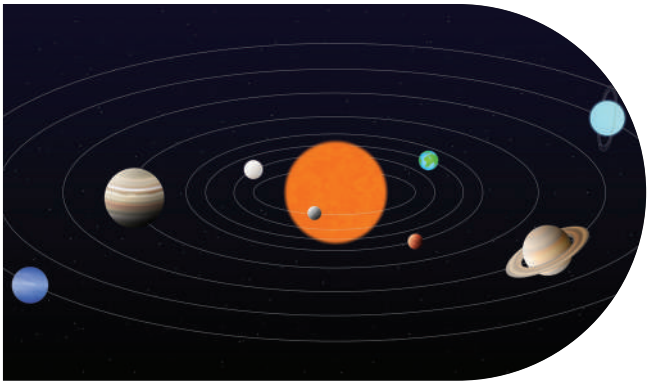


تُستخدم الصورة العلمية لكتابة الأعداد الكبيرة جدًّا أو الصغيرة جدًّا، ما يفيد في الكثير من المجالات العلمية والحياتية .

خطّة العمل :

توظّف كلّ مجموعة من المتعلّمين الصورة العلمية لكتابة الأعداد الكبيرة جدًّا أو الصغيرة جدًّا ، ثمّ ترتّبها ترتيبًا تصاعديًّا .

خطوات تنفيذ المشروع :



- اِجمع البيانات وسجِّل ملاحظاتك .

قُم بجمع البيانات الآتية من الشبكة المعلوماتية (internet) أو بالبحث في الكتب العلمية:

أ حجم الميكروبات .

ب وزن ذرّة الأكسجين .

ج مساحة سطح الأرض .

د وزن حبّة الأرزّ .

- صمِّم جدولًا منظَّمًا بورقة جذّابة من ٣ أعمدة توضّح فيها دلالة كلّ عدد ورمز العدد بالصورة النظامية وصورته العلمية .
- رتِّب الأعداد تصاعديًّا أو تنازليًّا .

علاقات وتواصل :

تتبادل المجموعات الأوراق وتتأكّد من صحّة كتابة وترتيب الأعداد .

عرض العمل :

تعرض كلّ مجموعة عملها وتناقش خطوات تنفيذ العمل.

المراجع

- الرياضيات ، الصف التاسع ، الطبعة الأولى ٢٠٢٤ - ٢٠٢٥ م ،
  وزارة التربية ، قطاع البحوث التربوية والمناهج .
- الرياضيات ، الصف التاسع ، الطبعة التجريبية ٢٠٢٣ - ٢٠٢٤ م ،
  وزارة التربية ، قطاع البحوث التربوية والمناهج .

مصادر بعض الصور

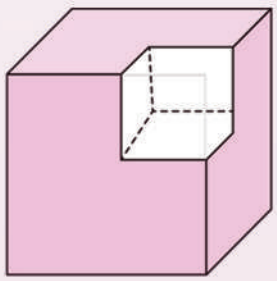
- صفحة ٩٨ : صورة لإطفاء بئر نفط – المصدر : وكالة الأنباء الكويتية (KUNA) ، وقت مراسم إطفاء آخر بئر بتاريخ ٦ نوفمبر ١٩٩١

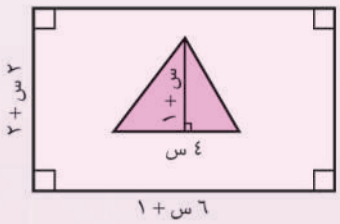
وزارة التربية
Ministry of Education
State of Kuwait | دولـــة الكويـت

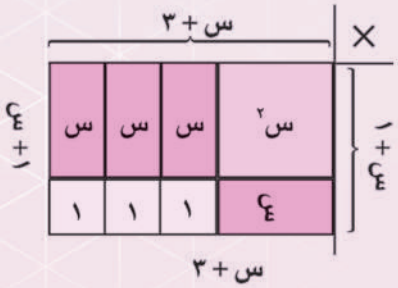
الرياضيات

الصفّ التاسع

الفصل الدراسي الأوّل ـ القسم الثاني







دورك الآن | استكشف | تمارين ذاتيّة | حلّ وناقش | عبّر عن فهمك | مهارات تفكير عليا

2/1

المرحلة المتوسّطة

وزارة التربية
Ministry of Education
State of Kuwait | دولـــة الكويـت

الرياضيات

الصفّ التاسع

الفصل الدراسي الأوّل ـ القسم الثاني

تأليف
أ. دلال مبارك فلاح الحجرف (رئيسًا)
أ.نـوره عبـد الله أبورقبـة العتيبـي
أ. سـاره زايـد شـيـنـان الـعـجـمي
أ. وسـميه بـادي هادي الرشـيدي
أ. عصـام عبـد الهـادي السـيد حسـن
أ. منى فـرج سـعد المطـيري

الطبعة الثانية
١٤٤٨ هـ
٢٠٢٦ - ٢٠٢٧ م

حقوق التأليف والطبع والنشر محفوظة لوزارة التربية - الإدارة العامة للتواجيه والبحوث والمناهج
إدارة البحوث التربوية والمناهج

الطبعة الأولى: ٢٠٢٥ / ٢٠٢٦ م
الطبعة الثانية: ٢٠٢٦ / ٢٠٢٧ م

المراجعة العلمية

أ. سمير عبدالله مرسي

فريق الشروحات التعليمية المعززة بالذكاء الاصطناعي

أ . ايمان محمد عبداللطيف

د. راندا موسى برغش

أ . حوراء سالم عطيه

أودع في مكتبة الكويت الوطنية – ردمك: 978-9921-33-112-7

ذات السلاسل – الكويت

أودع بمكتبة الوزارة تحت رقم (٤٠٨) بتاريخ ١٣/ ٧/ ٢٠٢٦ م

بسم الله الرحمن الرحيم

حضرة صاحب السمو الشيخ مشعل الأحمد الجابر الصباح

أمير دولة الكويت

H.H. Sheikh Meshal AL-Ahmad Al-Jaber Al-Sabah
Amir Of The State Of Kuwait

سمو الشيخ صباح خالد الحمد الصباح
ولي عهد دولة الكويت

H. H. Sheikh Sabah Khaled Al-Hamad Al-Sabah
Crown Prince Of The State Of Kuwait

المحتويات

الجزء الأوّل :

الوحدة التعليمية الأولـــــى : الأعداد الحقيقية والعمليات عليها

الوحدة التعليمية الثانية : التحليل والمعادلات

الوحدة التعليمية الثالثـة : الحدوديات النسبية - الهندسة الإحداثية

الوحدة التعليمية الرابعة : هندسة التحويلات - الإحصاء والاحتمال

الجزء الثاني :

الوحدة التعليمية الخامسة : العلاقات والدوالّ

الوحدة التعليمية السادسة : المعادلات الخطّية والمتباينات الخطّية

الوحدة التعليمية السابعة : هندسة المثلّث

الوحدة التعليمية الثامنة : النسبة المئوية - الهندسة والقياس

الوحدة التعليمية الثالثة

الحدوديات النسبية - الهندسة الإحداثية

المحتوى	رقم الصفحة
معايير المنهج ومؤشّرات الأداء للوحدة التعليمية الثالثة	١١٦
مخطّط تنظيمي للوحدة التعليمية الثالثة	١١٧
هل أنت مستعدّ ؟ للوحدة التعليمية الثالثة	١١٨
(٣ - ١) الحدوديات النسبية وتبسيطها	١٢٠
(٣ - ٢) ضرب الحدوديات النسبية	١٢٤
(٣ - ٣) قسمة الحدوديات النسبية	١٢٨
(٣ - ٤) جمع الحدوديات النسبية وطرحها	١٣٢
(٣ - ٥) المسافة بين نقطتَين في المستوى الإحداثي	١٤١
(٣ - ٦) إحداثيا نقطة منتصف قطعة مستقيمة في المستوى الإحداثي	١٤٩
تقويم الوحدة التعليمية الثالثة	١٥٤

الوحدة التعليمية الرابعة

هندسة التحويلات - الإحصاء والاحتمال

المحتوى	رقم الصفحة
معايير المنهج ومؤشّرات الأداء للوحدة التعليمية الرابعة	١٦٢
مخطّط تنظيمي للوحدة التعليمية الرابعة	١٦٣
هل أنت مستعدّ ؟ للوحدة التعليمية الرابعة	١٦٤
(٤ - ١) الدوران في المستوى	١٦٦
(٤ - ٢) التكبير	١٧٧
(٤ - ٣) المدرَّج التكراري	١٨٧
(٤ - ٤) المضلّع التكراري	١٩١
(٤ - ٥) مخطّط الصندوق ذي العارضتَين	١٩٨
(٤ - ٦) الترجيح والعدالة - الاحتمال	٢٠٤
تقويم الوحدة التعليمية الرابعة	٢١١
المشروع الثاني	٢١٨

الوحدة التعليمية
الثالثة

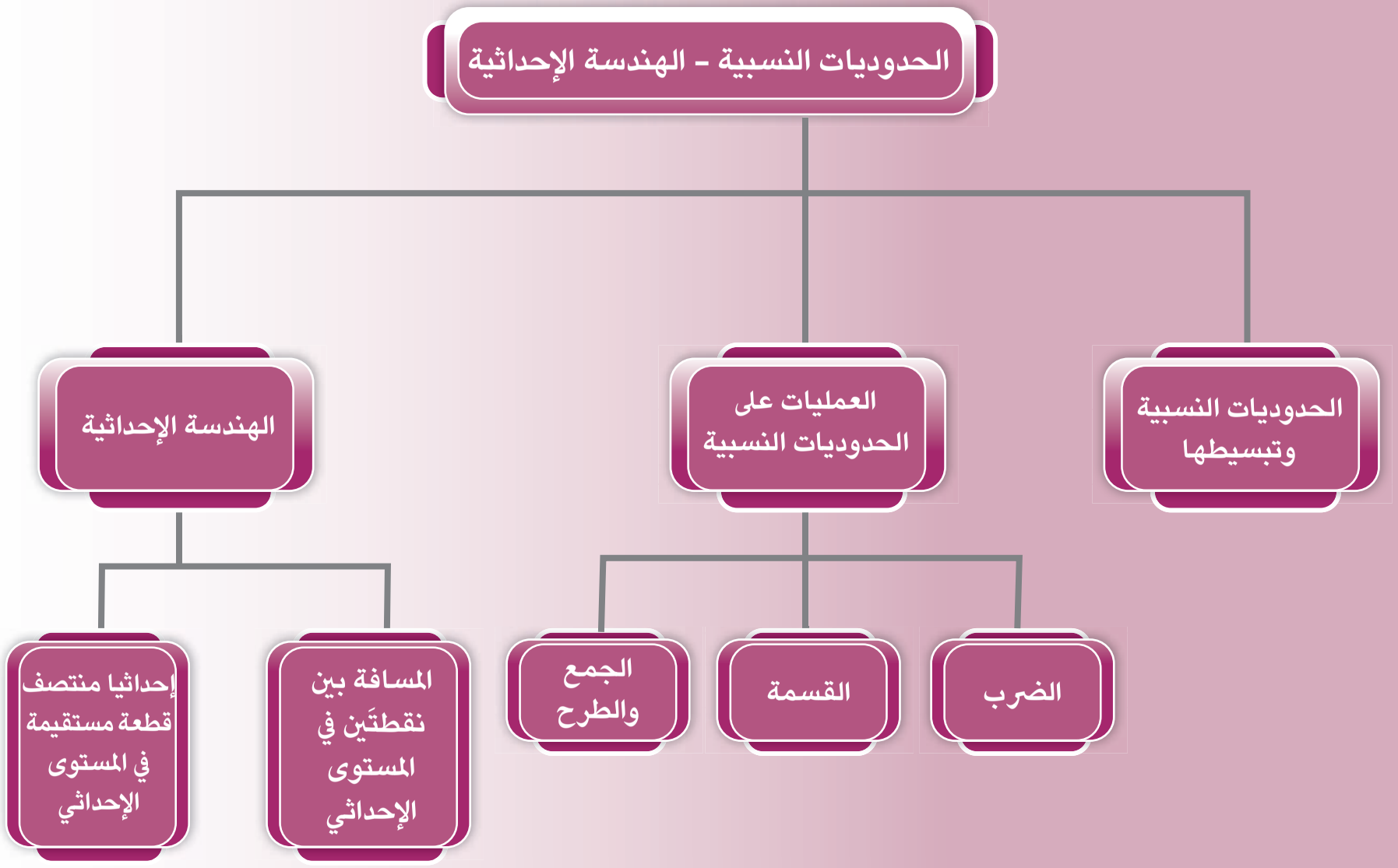
الحدوديات النسبية – الهندسة الإحداثية

الرياضة

تهتمّ دولة الكويت بالنشء والشباب ، وتحرص على أن يمارسوا الرياضة في جوّ صحّي ، وتحت أيدي خبراء ، وتوفّر لهم الأماكن المناسِبة لممارسة رياضاتهم المفضَّلة ، ومن هذه الأماكن إستاد جابر الأحمد الدولي وهو : إستاد رياضي كويتي متعدّد الأغراض يقع في محافظة الفروانية جنوب مدينة الكويت . أُفتُتح الإستاد رسميًّا في ١٨ ديسمبر ٢٠١٥ م ، وتبلغ الطاقة الاستيعابية للإستاد حوالي ٦٠ ٠٠٠ متفرّج ، ويُعتبر أكبر إستاد رياضي في الكويت ، والسابع عربيًّا ، والخامس والعشرين عالميًّا من حيث السعة .

المجال	معايير المنهج	مؤشّر الأداء
العدّ والجبر	اِستخدام التمثيلات البيانية والجداول والتمثيلات الجبرية للقيام بالتوقّعات وحلّ المسائل.	العمل الجَماعي - التذكّر - التعرّف - الفهم - التمثيل - الاستنتاج - حلّ المشكلات - العلاقات - الاستدلال - الوسائط - الاستكشاف والتقصّي - المقارنة والتمييز - التعاون
	تمثيل وتحليل المواقف والبنى الرياضية باستخدام الرموز الجبرية.	العمل الجَماعي - الاستكشاف والتقصّي - التذكّر - التعرّف - الفهم - المقارنة والتمييز - التمثيل - النمذجة - التحليل والتركيب - القوانين
الهندسة والقياس	اِستخدام التصوّر البصري والتعليل المكاني والنمذجة الهندسية؛ لتمثيل العالم المادّي، ووصفه وحلّ مشكلاته.	العمل الجَماعي- التذكّر - الفهم - التعرّف - الاستنتاج - حلّ المشكلات - الاستدلال -التمثيل - الاستكشاف والتقصّي - القوانين

مخطّط تنظيمي للوحدة التعليمية الثالثة



هل أنت مستعدّ؟

١ أوجِد العامل المشترَك الأكبر (ع . م . أ) لكلّ ممّا يلي :

(أ) ١٨ ، ٢٤

ع . م . أ = ...

(ب) ١٥ ، ٣

ع . م . أ = ...

٢ أوجِد المضاعَف المشترَك الأصغر (م . م. أ) لكلّ ممّا يلي :

(أ) ٧ ، ١٤

م . م . أ = ...

(ب) ٨ ، ٦

م . م . أ = ...

ضَع في أبسط صورة كلًّا ممّا يلي :

(أ) $\frac{-١٥}{٢٥}$ = ...

(ب) $\frac{٦٣}{٣٦}$ = ...

٣ أوجِد ناتج كلّ ممّا يلي في أبسط صورة :

(أ) $\frac{٣}{٤} \times \frac{-٢}{١٥}$

.....

(ب) $-٩ س^{٣} \times ٣ س^{٢}$

.....

(ج) أوجِد ناتج : ٣ س × ($س^{٢}$ − ٢ س + ١)

.....

٤ أوجِد ناتج كلّ ممّا يلي في أبسط صورة :

أ) $\frac{٢٢}{٣٥} \div \frac{٦}{٧}$

.....

ب) $-٩ س^{٢} \div ٣ س^{٢}$

.....

ج) $\frac{١}{٦} + \frac{٣}{٤}$

.....

د) $-٩ س^{٢} + ٣ س^{٢}$

.....

٥ اِقسم (٣ س^{٤} - ١٥ س^{٣} + ٢١ س^{٢}) على ٣ س^{٣}

.....

.....

.....

٦ حلِّل كلًّا ممّا يلي تحليلًا تامًا :

أ) ٣ س^{٢} ص - ٩ س ص^{٢}

.....

ب) س^{٢} - ٣٦

.....

ج) س^{٢} + ٥ س + ٦

.....

د) ٢ س^{٢} - ١١ س + ١٢

.....

هـ) س^{٣} + ٦٤

.....

و) ٨ س^{٣} - ١

.....

هل أنتَ مستعدّ ؟

٣ - ١ الحدوديات النسبية وتبسيطها
Simplifying Rational Expressions

سوف تتعلّم : الحدوديات النسبية وتبسيطها .

العبارات والمفردات :

تبسيط	Simplify	حدودية نسبية	Rational Expression

حُلّ وناقِش

صمّم مهندس حوضَي سباحة كلاهما على شكل شبه مكعّب أحدهما كبير حجمه ٢٧ س^{٥} ص وحدة مكعّبة والآخر صغير حجمه ٩ س^{٢} ص^{٣} وحدة مكعّبة ، ساعِد المهندس في إيجاد النسبة بين الحجمَين .

١ أكمِل ما يلي :

النسبة بين الحجمَين = $\frac{\text{حجم الحوض الكبير}}{\text{حجم الحوض الصغير}}$ = $\frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots}$

- يُسمّى الناتج « حدودية نسبية » .

حيث إنّ كلًّا من البسط والمقام يمثّل حدودية ، والمقام لا يساوي صفرًا .

٢ إختصِر الحدودية النسبية بالقسمة على العامل المشترَك الأكبر (ع . م . أ) .

.....

.....

عند تبسيط الحدودية النسبية ، نقوم بقسمة كلّ من الحدوديتَين في البسط والمقام على العامل المشترَك الأكبر (ع . م . أ) بينهما .

أمثلة لحدوديات نسبية

- $\frac{ص^{٣}}{٢ س^{٣}}$ ، $\frac{س + ٢}{ص}$ ، $\frac{س + ٢}{س - ٣}$ ، $\frac{س^{٢} - ٦ س + ٥}{س^{٢} - ٢٥}$

معلومة مفيدة :

عمق حوض السباحة هو الارتفاع الرأسي للماء من القاع إلى السطح .

يُستخدم الارتفاع في حساب حجم الماء ، وتوزيع الميل أو الانحدار في أرضية الحوض لضمان تصريف الماء ، وأمان السبّاحين.

تذكَّر

المقام أينما وُجد لا يساوي صفرًا .

مثال (١) :

ضَع في أبسط صورة كلًّا ممّا يلي :

(أ) $\frac{١٨ س^{٥}}{٩ س^{٢}}$

(ب) $\frac{٤ س^{٢} ص}{١٢ س ص^{٣}}$

(ج) $\frac{ع + ٢}{٣ ع + ٦}$

(د) $\frac{٢ س - ٤}{س^{٢} - ٤}$

الحلّ :

(أ) $\frac{\cancel{١٨}^{٢} س^{٥}}{\cancel{٩} س^{٢}} = ٢ س^{٣}$

(ب) $\frac{\cancel{٤} س^{٢} ص}{\cancel{١٢} س ص^{٣}} = \frac{س}{٣ ص^{٢}}$

(ج) $\frac{ع + ٢}{٣ ع + ٦} = \frac{\cancel{(ع + ٢)}}{٣ \cancel{(ع + ٢)}} = \frac{١}{٣}$

(د) $\frac{٢ س - ٤}{س^{٢} - ٤} = \frac{٢ \cancel{(س - ٢)}}{\cancel{(س - ٢)} (س + ٢)} = \frac{٢}{س + ٢}$

تذكَّر

$س^{م} \times س^{ن} = س^{م+ن}$

$\frac{س^{م}}{س^{ن}} = س^{م-ن}$

خطوات الحلّ:

١ حلِّل كلًّا من البسط والمقام إلى عواملهما باستخدام طرق التحليل المختلفة .

٢ قسِّم كلًّا من البسط والمقام على (ع. م. أ) .

٣ يكون الناتج هو أبسط صورة للحدودية النسبية .

عبِّر عن فهمك (١)

بسّط سالم الحدودية $\frac{س - ٢}{س + ٣}$ كما يلي : $\frac{\cancel{س} - ٢}{\cancel{س} + ٣} = \frac{-٢}{٣}$ ، فهل طريقته صحيحة ؟ ولماذا ؟

مثال (٢) :

ضَع في أبسط صورة كلًّا ممّا يلي :

(أ) $\frac{م + ٦}{م^{٢} - م - ٤٢}$

(ب) $\frac{٢ س^{٢} + ٢ س}{س^{٢} + ٣ س + ٢}$

الحلّ :

(أ) $\frac{م + ٦}{م^{٢} - م - ٤٢}$

$= \frac{م + ٦}{(م + ٦)(م - ٧)}$

$= \frac{\cancel{(م + ٦)}}{\cancel{(م + ٦)}(م - ٧)}$

$= \frac{١}{م - ٧}$

(ب) $\frac{٢ س^{٢} + ٢ س}{س^{٢} + ٣ س + ٢}$

$= \frac{٢ س (س + ١)}{(س + ٢)(س + ١)}$

$= \frac{٢ س \cancel{(س + ١)}}{(س + ٢) \cancel{(س + ١)}}$

$= \frac{٢ س}{س + ٢}$

دورك الآن

ضَع في أبسط صورة كلًّا ممّا يلي :

أ) $\frac{س^{٢} - ٦ س + ٥}{س^{٢} - ٢٥}$

.....

.....

.....

ب) $\frac{س - ٣}{س^{٢} - ٦ س + ٩}$

.....

.....

.....

ج) $\frac{س - ٢}{٢ - س}$

.....

.....

.....

مثال (٣) :

ضَع في أبسط صورة كلًّا ممّا يلي :

أ) $\frac{٢ س^{٢} + ١٣ س - ٧}{س^{٢} + ٤ س - ٢١}$

الحلّ :

$$\frac{٢ س^{٢} + ١٣ س - ٧}{س^{٢} + ٤ س - ٢١}$$

$$= \frac{(٢ س - ١)(س + ٧)}{(س - ٣)(س + ٧)}$$

$$= \frac{٢ س - ١}{س - ٣}$$

ب) $\frac{٤ س - ٢}{١ - ٢ س}$

الحلّ :

$$\frac{٤ س - ٢}{١ - ٢ س} = \frac{٢ (٢ س - ١)}{(١ - ٢ س)}$$

$$= \frac{٢ (٢ س - ١)}{-(٢ س - ١)}$$

$$= -٢$$

ج) $\frac{س^{٣} + ٨}{س^{٢} - ٢ س + ٤}$

الحلّ :

$$\frac{س^{٣} + ٨}{س^{٢} - ٢ س + ٤}$$

$$= \frac{(س + ٢)(س^{٢} - ٢ س + ٤)}{(س^{٢} - ٢ س + ٤)}$$

$$= س + ٢$$

د) $\frac{س^{٢} - ٩}{س^{٣} - ٢٧}$

الحلّ :

$$\frac{س^{٢} - ٩}{س^{٣} - ٢٧}$$

$$= \frac{(س - ٣)(س + ٣)}{(س - ٣)(س^{٢} + ٣ س + ٩)}$$

$$= \frac{س + ٣}{س^{٢} + ٣ س + ٩}$$

تذكَّر

$أ - س = -(س - أ)$

اِنتبِه

$(س^{٢} + ٣ س + ٩)$

لا يمكن تحليلها إلى حاصل ضرب عاملَين.

عبِّر عن فهمك (٢)

أُكتب حدودية نسبية تصبح بعد تبسيطها $\frac{٥}{س + ٥}$

تمارين ذاتية :

١ ضَع في أبسط صورة كلًّا ممّا يلي :

أ) $\frac{٥ \text{ س}^{٣}}{٢٥ \text{ س}^{٧}}$

.....

.....

ب) $\frac{١٠ \text{ أ} + ١٥}{٢٠}$

.....

.....

ج) $\frac{\text{س}^{٢} - ٨ \text{ س} + ١٥}{\text{س}^{٢} - ٩}$

.....

.....

د) $\frac{٦ \text{ س}^{٢} + ١٧ \text{ س} - ٢٨}{\text{س}^{٢} - \text{س} - ٢٠}$

.....

.....

هـ) $\frac{\text{س}^{٣} + ٢٧}{\text{س}^{٢} - ٣ \text{ س} + ٩}$

.....

.....

و) $\frac{\text{س}^{٢} - ١٦}{\text{س}^{٣} - ٦٤}$

.....

.....

ز) $\frac{٤ \text{ س}^{٣} + ١٦ \text{ س}^{٢} + ١٢ \text{ س}}{٢ \text{ س}^{٣} - ١٤ \text{ س}^{٢} - ١٦ \text{ س}}$

.....

.....

ح) $\frac{\text{س} - ٣}{٣ - \text{س}}$

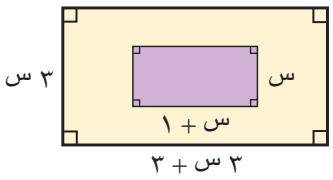
.....

.....

مهارات تفكير عليا :

٢ في الشكل المقابِل :

أُكتب نسبة مساحة منطقة المستطيل الأصغر إلى مساحة منطقة المستطيل الأكبر في صورة حدودية نسبية ، ثمّ ضَعها في أبسط صورة .



.....

.....

٣ - ٢ ضرب الحدوديات النسبية
Multiplying Rational Expressions

سوف تتعلّم : ضرب الحدوديات النسبية .

العبارات والمفردات :

ضرب	Multiplying

حُلّ وناقِش

١ **أُكتب كلًّا مما يلي في أبسط صورة :**

أ) $\frac{٣}{٤} \times \frac{١}{٥} =$ .....

ب) $\frac{-٣}{١٦} \times \frac{٨}{٩} =$ .....

ج) $\frac{٢}{١٥} \times (-٣) =$ .....

٢ **طبِّق الخطوات السابقة لإيجاد ناتج** $\frac{٣}{س} \times \frac{س}{٩}$ **في أبسط صورة .**

$$\frac{٣}{س} \times \frac{س}{٩} = \frac{..... \times .....}{..... \times .....}$$

$$= \frac{.....}{.....}$$

ضرب الحدوديات النسبية يشبه ضرب الأعداد النسبية

إذا كانت $\frac{أ}{ب}$ ، $\frac{جـ}{د}$ تمثّل حدوديتَين نسبيتَين ،

فإنّ : $\frac{أ}{ب} \times \frac{جـ}{د} = \frac{أ جـ}{ب د}$

مثال (١) :

أوجِد ناتج كلّ ممّا يلي في أبسط صورة :

(أ) $\frac{ع^{٣}}{٣٥} \times \frac{٧}{ع^{٢}}$

الحلّ :

$$\frac{ع^{٣}}{٣٥} \times \frac{٧}{ع^{٢}} = \frac{ع^{٣} \times ٧}{٣٥ \times ع^{٢}}$$

$$= \frac{ع}{٥}$$

(ب) $\frac{٥ ل^{٣}}{ل^{٢}} \times \frac{٣ ل^{٤}}{٦ ل}$

الحلّ :

$$\frac{٥ ل^{٣}}{ل^{٢}} \times \frac{٣ ل^{٤}}{٦ ل} = \frac{٥ ل^{٣} \times ٣ ل^{٤}}{ل^{٢} \times ٦ ل}$$

$$= \frac{٥ ل^{٤}}{٢}$$

(ج) $\frac{٢ س + ١}{٣} \times \frac{٦ س}{٤ س^{٢} - ١}$

الحلّ :

$$\frac{٢ س + ١}{٣} \times \frac{٦ س}{٤ س^{٢} - ١}$$

$$= \frac{(٢ س + ١) \times ٦ س}{٣ (٤ س^{٢} - ١)}$$

$$= \frac{(٢ س + ١) \times ٦ س}{٣ (٢ س + ١)(٢ س - ١)}$$

$$= \frac{٢ س}{٢ س - ١}$$

(د) $\frac{٤ م}{م + ١} \times \frac{م + ١}{م - ١}$

الحلّ :

$$\frac{٤ م}{م + ١} \times \frac{م + ١}{م - ١}$$

$$= \frac{٤ م (م + ١)}{(م + ١)(م - ١)}$$

$$= \frac{٤ م}{م - ١}$$

تذكّر

$س^{م} \times س^{ن} = س^{م+ن}$

$\frac{س^{م}}{س^{ن}} = س^{م-ن}$

مثال (٢) :

أوجِد ناتج كلّ ممّا يلي في أبسط صورة :

$$\frac{ن^{٢} + ن - ١٢}{٢ ن^{٢} + ٣ ن - ٢٠} \times \frac{٢ ن - ٥}{ن - ٣}$$

الحلّ :

$$\frac{ن^{٢} + ن - ١٢}{٢ ن^{٢} + ٣ ن - ٢٠} \times \frac{٢ ن - ٥}{ن - ٣}$$

$$= \frac{(ن^{٢} + ن - ١٢)(٢ ن - ٥)}{(٢ ن^{٢} + ٣ ن - ٢٠)(ن - ٣)}$$

$$= \frac{(ن + ٤)(ن - ٣)(٢ ن - ٥)}{(٢ ن - ٥)(ن + ٤)(ن - ٣)}$$

$$= ١$$

دورك الآن

أوجِد ناتج كلّ ممّا يلي في أبسط صورة :

(أ) $\frac{س^{٣} - ٢٧}{س^{٢} - ٩} \times (س + ٣)$

.....

.....

.....

.....

.....

(ب) $\frac{ص + ٢}{٢ ص^{٢} + ١٤ ص} \times \frac{ص^{٢} - ٤٩}{ص^{٢} - ص - ٦}$

.....

.....

.....

.....

.....

انتبه

$س + ٣ = \frac{س + ٣}{١}$

تمارين ذاتية :

١ أوجِد ناتج كلّ ممّا يلي في أبسط صورة :

(أ) $\frac{س^{٣}}{ص^{٢}} \times \frac{٥ ص}{س^{٢}}$

.....

.....

.....

.....

(ب) $\frac{٣ ص}{ص - ٢} \times \frac{٣ ص - ٦}{ص^{٢}}$

.....

.....

.....

.....

(ج) $\frac{م - ١}{م + ٢} \times \frac{٤ م + ٨}{م^{٢} - ١}$

.....

.....

.....

.....

(د) $\frac{١}{٦ - س} \times \frac{س^{٢} - ٣٦}{س + ٦}$

.....

.....

.....

.....

هـ $\frac{٣}{ص - ٥} \times (ص^{٣} - ٢٥ ص)$

.....

.....

.....

.....

و $\frac{١}{س^{٢} - ٢ س + ١} \times \frac{س^{٢} - ٦ س + ٥}{س - ٥}$

.....

.....

.....

.....

ز $\frac{٧ س^{٢} - ٢٨ س}{٢ س^{٢} - ٥ س - ١٢} \times \frac{٢ س + ٣}{١٤ س^{٣}}$

.....

.....

.....

.....

ح $\frac{س^{٣} - ٦٤}{س^{٢} + ٤ س + ١٦} \times \frac{٥ س}{س^{٢} - ١٦}$

.....

.....

.....

.....

٣ - ٣ قسمة الحدوديات النسبية
Dividing Rational Expressions

سوف تتعلّم : قسمة الحدوديات النسبية .

العبارات والمفردات :

قسمة	Dividing

حُلّ وناقِش

أكمِل ما يلي :

١ $\frac{٨}{٢١} \div \frac{٤}{٣}$

$= \frac{٨}{٢١} \times \frac{\ldots\ldots\ldots}{\ldots\ldots\ldots}$

$= \frac{٨ \times \ldots\ldots\ldots}{\ldots\ldots\ldots \times \ldots\ldots\ldots}$

$= \frac{\ldots\ldots\ldots}{\ldots\ldots\ldots}$

٢ $\frac{٨ \text{ س}^{٢}}{٢١ \text{ ص}} \div \frac{٤ \text{ س}}{٣ \text{ ص}}$

$= \frac{٨ \text{ س}^{٢}}{\ldots\ldots\ldots} \times \frac{\ldots\ldots\ldots}{٤ \text{ س}}$

$= \frac{٨ \text{ س}^{٢} \times \ldots\ldots\ldots}{\ldots\ldots\ldots \times \ldots\ldots\ldots}$

$= \frac{\ldots\ldots\ldots}{\ldots\ldots\ldots}$

عند قسمة حدودية نسبية على أخرى :

١ نبدأ بضرب الحدودية النسبية الأولى في المعكوس الضربي للحدودية النسبية الثانية .

٢ نوجِد ناتج الضرب في أبسط صورة (كما في درس ضرب الحدوديات النسبية) .

إذا كانت $\frac{أ}{ب}$ ، $\frac{جـ}{د}$ حدوديتَين نسبيتَين حيث جـ $\neq$ ٠ ،

فإنّ : $\frac{أ}{ب} \div \frac{جـ}{د}$

$= \frac{أ}{ب} \times \frac{د}{جـ}$

$= \frac{أ د}{ب جـ}$

تذكَّر

المعكوس الضربي للحدودية النسبية $\frac{جـ}{د}$ هو $\frac{د}{جـ}$ ، جـ $\neq$ ٠

مثال (١) :

أوجِد ناتج كلّ ممّا يلي في أبسط صورة :

(أ) $\frac{١٤}{س} \div \frac{٧}{س}$

الحلّ :

$$\frac{١٤}{س} \div \frac{٧}{س} = \frac{١٤}{س} \times \frac{س}{٧}$$

$$= \frac{١٤^{٢} \times \cancel{س}^{١}}{\cancel{س}^{١} \times ٧^{١}}$$

$$= ٢$$

(ب) $\frac{م + ٣}{م - ٢} \div (م + ٣)$

الحلّ :

$$\frac{م + ٣}{م - ٢} \div (م + ٣) = \frac{م + ٣}{م - ٢} \times \frac{١}{م + ٣}$$

$$= \frac{١ \times \cancel{(م + ٣)}^{١}}{(م - ٢)\cancel{(م + ٣)}^{١}}$$

$$= \frac{١}{(م - ٢)}$$

انتبِه

المعكوس الضربي للحدودية م هو $\frac{١}{م}$ ، م ≠ ٠

مثال (٢) :

أوجِد ناتج كلّ ممّا يلي في أبسط صورة :

(أ) $\frac{س - ١}{س + ٤} \div \frac{س + ٣}{س + ٤}$

الحلّ :

$$\frac{س - ١}{س + ٤} \div \frac{س + ٣}{س + ٤} = \frac{س - ١}{س + ٤} \times \frac{س + ٤}{س + ٣}$$

$$= \frac{(س - ١)\cancel{(س + ٤)}^{١}}{\cancel{(س + ٤)}^{١}(س + ٣)}$$

$$= \frac{س - ١}{س + ٣}$$

(ب) $\frac{٥م + ١٠}{م - ٣} \div \frac{م + ٢}{م - ٣}$

الحلّ :

$$\frac{٥م + ١٠}{م - ٣} \div \frac{م + ٢}{م - ٣} = \frac{٥م + ١٠}{م - ٣} \times \frac{م - ٣}{م + ٢}$$

$$= \frac{٥\cancel{(م + ٢)}^{١}\cancel{(م - ٣)}^{١}}{\cancel{(م - ٣)}^{١}\cancel{(م + ٢)}^{١}}$$

$$= ٥$$

(ج) $\frac{ن^{٣} - ١}{٢ن^{٢} + ن - ٣} \div \frac{ن - ١}{٤ن + ٦}$

الحلّ :

$$\frac{ن^{٣} - ١}{٢ن^{٢} + ن - ٣} \div \frac{ن - ١}{٤ن + ٦} = \frac{ن^{٣} - ١}{٢ن^{٢} + ن - ٣} \times \frac{٤ن + ٦}{ن - ١}$$

$$= \frac{(ن^{٣} - ١)(٤ن + ٦)}{(٢ن^{٢} + ن - ٣)(ن - ١)}$$

$$= \frac{\cancel{(ن - ١)}^{١}(ن^{٢} + ن + ١) \times ٢\cancel{(٢ن + ٣)}^{١}}{\cancel{(٢ن + ٣)}^{١}\cancel{(ن - ١)}^{١}(ن - ١)}$$

$$= \frac{٢(ن^{٢} + ن + ١)}{(ن - ١)}$$

انتبِه

$ن^{٢} + ن + ١$

لا يمكن تحليلها إلى حاصل ضرب عاملَين.

دورك الآن

أوجِد ناتج كلّ ممّا يلي في أبسط صورة :

(أ) $\frac{٤ س^{٣} - ٤ س}{س + ١} \div (س - ١)$

.....

.....

.....

(ب) $\frac{م^{٢} + ١١ م + ١٨}{م^{٢} - ٨ م + ٧} \div \frac{م + ٢}{م - ٧}$

.....

.....

.....

تمارين ذاتية :

١ أوجِد ناتج كلّ ممّا يلي في أبسط صورة :

(أ) $\frac{٣ م}{م - ١} \div \frac{٦ م}{م - ١}$

.....

.....

.....

(ب) $\frac{٢ س}{٢ س^{٢} + ٥ س - ٣} \div \frac{س - ٣}{س^{٢} - ٩}$

.....

.....

.....

(ج) $\frac{٣ س + ٩}{س} \div (س + ٣)$

.....

.....

.....

(د) $\frac{٥ س^{٢} + ١٠ س - ١٥}{س^{٢} + ٦ س - ٧} \div \frac{س^{٢} - ١٤ س + ٤٩}{س^{٢} - ٤٩}$

.....

.....

.....

(هـ) $\frac{س^{٣} + ٢٧}{س^{٢} - ٥ س - ٢٤} \div \frac{س^{٢} - ٣ س + ٩}{٢ س - ١٦}$

.....

.....

.....

٢ أوجِد ناتج قسمة $\frac{س^{٢} + ٣ س + ٢}{٤ س}$ على (٥ $س^{٢}$ + ٥ س) في أبسط صورة .

.....

.....

.....

.....

٣ إذا كانت م = $\frac{س^{٢} + ٢ س}{س^{٢} + س - ٢}$ ، ن = $\frac{س^{٢} - ٢ س + ١}{س^{٢} + ٤ س - ٥}$ ، فأوجِد :

(أ) م × ن

.....

.....

.....

.....

(ب) م ÷ ن

.....

.....

.....

.....

مهارات تفكير عليا :

٤ أوجِد الناتج في أبسط صورة :

$\frac{س^{٣} + ٨}{س^{٢} - س - ٦} \times \frac{س^{٢} - ٩}{س^{٢} - ٢ س + ٤} \div \frac{س^{٢} + ٦ س + ٩}{٣ س + ٩}$

.....

.....

.....

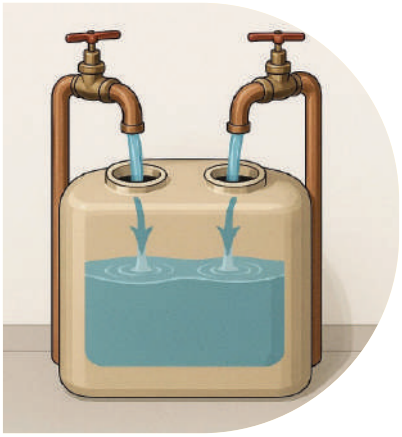
٣ - ٤ جمع الحدوديات النسبية وطرحها
Adding and Subtracting Rational Expressions

سوف تتعلّم : جمع الحدوديات النسبية وطرحها.

العبارات والمفردات :

جمع	Adding	طرح	Subtracting

حُلّ وناقِش



لدينا خزّان ماء يمكن تعبئته باستخدام أنبوبَين :

- الأنبوب الأوّل يملأ $\frac{٣}{٧ س}$ من سعة الخزّان في دقيقة واحدة .
- الأنبوب الثاني يملأ $\frac{٢}{٧ س}$ من سعة الخزّان في دقيقة واحدة .

ما كمّية الماء التي يمكن تعبئتها في دقيقة واحدة عند تشغيل الأنبوبَين معًا ؟

كمّية الماء التي يمكن تعبئتها في دقيقة واحدة للأنبوبَين معًا

$= \frac{٣}{٧ س} + \frac{٢}{٧ س} = \frac{\ldots\ldots + \ldots\ldots}{٧ س} =$ من سعة الخزّان $\frac{\ldots\ldots}{٧ س}$

أوّلًا : جمع الحدوديات النسبية ذات المقامات الموحَّدة

جمع الحدوديات النسبية ذات المقامات الموحَّدة يشبه جمع الأعداد النسبية ذات المقامات الموحَّدة .

إذا كانت $\frac{أ}{جـ}$ ، $\frac{ب}{جـ}$ حدوديتَين نسبيتَين ، فإنّ : $\frac{أ}{جـ} + \frac{ب}{جـ} = \frac{أ + ب}{جـ}$

دورك الآن (١)

أوجِد ناتج كلّ ممّا يلي في أبسط صورة :

(أ) $\frac{٣}{س + ٥} + \frac{٤}{س + ٥}$

$= \frac{\ldots\ldots + \ldots\ldots}{س + ٥}$

$= \frac{\ldots\ldots}{س + ٥}$

(ب) $\frac{ص}{ص - ٢} + \frac{٣ ص}{ص - ٢}$

$= \frac{\ldots\ldots + \ldots\ldots}{\ldots\ldots}$

$= \frac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots}$

(ج) $\frac{٥ ن}{ن + ١} + \frac{٥}{ن + ١}$

$= \frac{\ldots\ldots + \ldots\ldots}{\ldots\ldots}$

$= \frac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots} = \ldots\ldots$

ثانيًا : جمع الحدوديات النسبية ذات المقامات المختلفة

لجمع الحدوديات النسبية ذات المقامات المختلفة :

١ أوجِد المضاعَف المشترَك الأصغر للمقامات (م . م . أ) .

٢ أُكتب الحدوديات النسبية بعد توحيد مقاماتها .

٣ اِجمع الحدوديات النسبية ذات المقامات الموحَّدة .

٤ ضَع الناتج في أبسط صورة .

- لاحِظ لإيجاد م . م . أ (المضاعَف المشترَك الأصغر) للعددَين ٨ ، ١٢ ، نتّبع ما يلي :

٨ = ٢ × ٢ × ٢

١٢ = ٢ × ٢ × ٣

∴ م . م . أ للعددَين = ٢ × ٢ × ٢ × ٣ = ٢٤

- وكذلك لإيجاد م . م . أ للحدَّين ٦ س ، ٤ س ، نتّبع الطريقة السابقة نفسها :

٦س = ٢ × ٣ × س

٤س = ٢ × ٢ × س

∴ م . م . أ للحدَّين = ٢ × ٢ × ٣ × س = ١٢ س

- وأيضًا لإيجاد م . م . أ للحدوديتَين (س٢ - ٤) ، (س٢ - ٥ س + ٦)

س٢ - ٤ = (س - ٢) (س + ٢)

س٢ - ٥ س + ٦ = (س - ٢) (س - ٣)

∴ م . م . أ للحدوديتَين = (س - ٢) (س + ٢) (س - ٣)

دورك الآن (٢)

أوجِد م . م . أ في كلّ ممّا يلي :

	الحدوديات	م . م . أ
١	س ، ص	
٢	٢ أ ، ٦ ب	
٣	٣ ص ، ٢ ص٢	٦ ص٢
٤	ص ، (ص - ٥)	
٥	(س - ١) ، (س - ٢)	

	الحدوديات	م . م . أ
٦	(٤ س^{٢} – ١) ، (٢ س – ١)	(٢ س – ١)(٢ س + ١)
٧	(ص – ٣) ، (–٦ + ٢ص)	
٨	(ص – ٢)^{٢} ، (ص – ٢)(ص + ٢)	
٩	(س^{٣} – ١) ، (س – ١)	
١٠	(س^{٢} – ٦ س + ٩) ، (س^{٢} – ٩)	

مثال (١) :

أوجِد الناتج في أبسط صورة : $\frac{١}{٦ س^{٢}} + \frac{٣}{٤ س}$

الحلّ :

$\frac{١}{٦ س^{٢}} + \frac{٣}{٤ س}$ (م . م . أ للمقامات هو ١٢ س^{٢})

$= \frac{١ \times ٢}{٦ س^{٢} \times ٢} + \frac{٣ \times ٣ س}{٤ س \times ٣ س}$

$= \frac{٢}{١٢ س^{٢}} + \frac{٩ س}{١٢ س^{٢}} = \frac{٢ + ٩ س}{١٢ س^{٢}}$

مثال (٢) :

أوجِد الناتج في أبسط صورة : $\frac{٢}{ب - ٢} + \frac{ب}{ب + ٣}$

الحلّ :

$\frac{٢}{ب - ٢} + \frac{ب}{ب + ٣}$ (م . م . أ للمقامات هو (ب – ٢)(ب + ٣))

$= \frac{٢ (ب + ٣)}{(ب - ٢)(ب + ٣)} + \frac{ب \times (ب - ٢)}{(ب + ٣)(ب - ٢)}$

$= \frac{٢ ب + ٦}{(ب - ٢)(ب + ٣)} + \frac{ب^{٢} - ٢ ب}{(ب - ٢)(ب + ٣)}$

$= \frac{٢ ب + ٦ + ب^{٢} - ٢ ب}{(ب - ٢)(ب + ٣)}$ اِجمع الحدود المتشابهة

$= \frac{ب^{٢} + ٦}{(ب - ٢)(ب + ٣)}$

اِنتبِه

٢ ب + (–٢ب) = صفرًا
خاصّية المعكوس الجمعي

مثال (٣) :

أوجِد الناتج في أبسط صورة : $\frac{١٢}{س^{٢} - ٤} + \frac{٣}{س + ٢}$

الحلّ :

$$\frac{١٢}{س^{٢} - ٤} + \frac{٣}{س + ٢}$$

$$= \frac{١٢}{(س - ٢)(س + ٢)} + \frac{٣}{س + ٢}$$ (م . م . أ للمقامات هو (س + ٢)(س - ٢))

$$= \frac{١٢}{(س - ٢)(س + ٢)} + \frac{٣(س - ٢)}{(س + ٢)(س - ٢)}$$

$$= \frac{١٢ + ٣س - ٦}{(س - ٢)(س + ٢)}$$ اِجمع الحدود المتشابهة

$$= \frac{٣س + ٦}{(س - ٢)(س + ٢)}$$

$$= \frac{٣(\cancel{س} + ٢)}{(س - ٢)(\cancel{س} + ٢)}$$

$$= \frac{٣}{س - ٢}$$

دورك الآن (٣)

أوجِد الناتج في أبسط صورة :

$$\frac{٤}{س^{٢} + ٤س + ٣} + \frac{٣}{س + ١}$$

$$= \frac{٤}{(\ldots\ldots)(\ldots\ldots)} + \frac{٣}{\ldots\ldots\ldots\ldots}$$

$$= \frac{\ldots\ldots\ldots\ldots}{(\ldots\ldots)(\ldots\ldots)} + \frac{\ldots\ldots \times (س + ٣)}{(\ldots\ldots) \times (س + ٣)}$$ (م . م . أ للمقامات هو (س + ١)(س + ٣))

$$= \frac{\ldots\ldots\ldots\ldots}{\ldots\ldots\ldots\ldots}$$

$$= \frac{\ldots\ldots\ldots\ldots}{\ldots\ldots\ldots\ldots}$$

دورك الآن (٤)

أوجِد الناتج في أبسط صورة :

$$\frac{س + ٣}{س^{٢} - ٩} + \frac{٢س + ٤}{س^{٢} - س - ٦}$$

$$= \frac{(\quad س + ٣ \quad)}{(\quad س \ldots\ldots\ldots\ldots)(\quad س \ldots\ldots\ldots\ldots)} + \frac{٢(\quad \ldots\ldots\ldots\ldots)}{(\quad س \ldots\ldots\ldots\ldots)(\quad س \ldots\ldots\ldots\ldots)}$$

$$= \frac{١}{\ldots\ldots\ldots\ldots} + \frac{٢}{\ldots\ldots\ldots\ldots} = \frac{\ldots\ldots\ldots\ldots}{\ldots\ldots\ldots\ldots}$$

انتبه

يمكنك تبسيط الحدودية النسبية قبل البدء بعملية الجمع .

طرح الحدوديات النسبية

أوّلًا : طرح الحدوديات النسبية ذات المقامات الموحَّدة

طرح الحدوديات النسبية ذات المقامات الموحَّدة يماثل طرح الأعداد النسبية ذات المقامات الموحَّدة .

فمثلًا ، إذا كانت $\frac{أ}{جـ}$ ، $\frac{ب}{جـ}$ حدوديتَين نسبيتَين ، فإنّ : $\frac{أ}{جـ} - \frac{ب}{جـ} = \frac{أ - ب}{جـ}$

مثال (٤) :

أوجِد ناتج كلّ ممّا يلي في أبسط صورة :

(أ) $\frac{٢س}{س + ١} - \frac{س}{س + ١}$

الحلّ :

$$\frac{٢س}{س + ١} - \frac{س}{س + ١}$$

$$= \frac{٢س - (\quad س \quad)}{س + ١}$$

$$= \frac{٢س - س}{س + ١} = \frac{س}{س + ١}$$

(ب) $\frac{٣ص}{ص - ٢} - \frac{ص - ١}{ص - ٢}$

الحلّ :

$$\frac{٣ص}{ص - ٢} - \frac{ص - ١}{ص - ٢}$$

$$= \frac{٣ص - (\quad ص - ١ \quad)}{ص - ٢}$$

$$= \frac{٣ص - ص + ١}{ص - ٢} = \frac{٢ص + ١}{ص - ٢}$$

انتبه

المعكوس الجمعي للحدودية ص - ١ هو :

- (ص - ١) = - ص + ١

دورك الآن (٥)

أوجِد ناتج كلّ ممّا يلي في أبسط صورة :

(أ) $\frac{٣م}{م - ١} - \frac{م}{م - ١}$

$$= \frac{٣م - \ldots\ldots\ldots\ldots}{م - ١}$$

$$= \frac{\ldots\ldots\ldots\ldots}{\ldots\ldots\ldots\ldots}$$

(ب) $\frac{٢هـ + ١}{هـ - ١} - \frac{هـ + ٢}{هـ - ١}$

$$= \frac{(\quad ٢هـ + ١ \quad) - (\ldots\ldots\ldots\ldots)}{هـ - ١}$$

$$= \frac{\ldots\ldots\ldots\ldots}{هـ - ١}$$

$$= \frac{\ldots\ldots\ldots\ldots}{هـ - ١} = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

ثانيًا : طرح الحدوديات النسبية ذات المقامات المختلفة

لطرح حدوديات نسبية ذات مقامات مختلفة ، أعِد كتابة هذه الحدوديات باستخدام المضاعَف المشترَك الأصغر م . م . أ للمقامات، ثمّ اطرح.

(راجِع جمع الحدوديات النسبية ذات المقامات المختلفة) .

اِنتبِه

يمكنك تبسيط الحدودية النسبية قبل البدء بعملية الطرح .

مثال (٥) :

أوجِد ناتج كلّ ممّا يلي في أبسط صورة :

(أ) $\frac{١}{س + ١} - \frac{١}{س - ١}$

الحلّ :

$\frac{١}{س + ١} - \frac{١}{س - ١}$

(م . م . أ للمقامَين هو $(س + ١)(س - ١)$)

$= \frac{(س - ١)}{(س + ١)(س - ١)} - \frac{(س + ١)}{(س + ١)(س - ١)}$

$= \frac{(س - ١) - (س + ١)}{(س + ١)(س - ١)}$

$= \frac{س - ١ - س - ١}{(س + ١)(س - ١)}$ اِجمع الحدود المتشابهة

$= \frac{-٢}{(س + ١)(س - ١)}$

(ب) $\frac{ن + ٣}{ن^٢ + ن - ٦} - \frac{ن - ٣}{ن^٢ - ٩}$

الحلّ :

$\frac{ن + ٣}{ن^٢ + ن - ٦} - \frac{ن - ٣}{ن^٢ - ٩}$

$= \frac{(ن + ٣)}{(ن + ٣)(ن - ٢)} - \frac{(ن - ٣)}{(ن + ٣)(ن - ٣)}$

$= \frac{\cancel{(ن + ٣)}^{١}}{(ن + ٣)\cancel{(ن - ٢)}_{١}} - \frac{\cancel{(ن - ٣)}^{١}}{(ن + ٣)\cancel{(ن - ٣)}_{١}}$ بسِّط

$= \frac{١}{(ن - ٢)} - \frac{١}{(ن + ٣)}$

(م . م . أ للمقامَين هو $(ن - ٢)(ن + ٣)$)

$= \frac{١ \times (ن + ٣)}{(ن - ٢)(ن + ٣)} - \frac{١ \times (ن - ٢)}{(ن + ٣)(ن - ٢)}$

$= \frac{(ن + ٣) - (ن - ٢)}{(ن - ٢)(ن + ٣)}$

$= \frac{ن + ٣ - ن + ٢}{(ن - ٢)(ن + ٣)}$ اِجمع الحدود المتشابهة

$= \frac{٥}{(ن - ٢)(ن + ٣)}$

دورك الآن (٦)

أوجِد الناتج في أبسط صورة :

(أ) $\frac{٦}{س - ٣} - \frac{٥}{س + ٢}$

(م . م . أ للمقامات هو .....)

$= \frac{٦ \times (س + ٢)}{(س - ٣)(س + ٢)} - \frac{٥ \times (.....)}{(س + ٢)(س - ٣)}$

$= \frac{٦ س + ...}{(س - ٣)(س + ٢)} - \frac{٥ س - .....}{(س - ٣)(س + ٢)}$

$= \frac{(٦ س + ...) - (٥ س - .....)}{(س - ٣)(س + ٢)}$

$= \frac{.....}{(س - ٣)(س + ٢)}$

$= \frac{.....}{(س - ٣)(س + ٢)}$

(ب) $\frac{٢}{٣ م - ١} - \frac{٧}{١ - ٣ م}$

$= \frac{٢}{٣ م - ١} - \frac{٧}{-(.....)}$

$= \frac{٢}{٣ م - ١} + \frac{٧}{.....}$

$= \frac{..... + ...}{٣ م - ١}$

$= \frac{.....}{٣ م - ١}$

تذكَّر

$أ - ب = - (ب - أ)$

تمارين ذاتية :

أوجِد ناتج كلّ ممّا يلي في أبسط صورة :

١ $\frac{٥}{٢ م} + \frac{٣}{٢ م}$

.....

.....

.....

.....

٢ $\frac{٤}{٦ س - ١} - \frac{٣}{٦ س - ١}$

.....

.....

.....

.....

٣ $\frac{س^٢}{س + ٣} - \frac{٩}{س + ٣}$

.....

.....

.....

.....

٤ $\frac{١}{٢ ب - ١} - \frac{٣}{١ - ٢ ب}$

.....

.....

.....

.....

٥ $\frac{٥}{٧ ل} - \frac{٣}{٥ ل^{٢}}$

.....

.....

.....

.....

٦ $\frac{٤}{س} + \frac{٣}{٢ + س}$

.....

.....

.....

.....

٧ $\frac{٥}{٢ س - ٦} - \frac{١}{٣ - س}$

.....

.....

.....

.....

٨ $\frac{٤}{٣ س + ٦} + \frac{٣}{٢ س + ٤}$

.....

.....

.....

.....

٩ $\frac{ص - ٦}{ص^{٢} - ٣ ص - ١٨} - \frac{٣}{ص + ٣}$

.....

.....

.....

.....

١٠ $\frac{س^{٣} + ١}{٣ س^{٢} + ٨ س + ٥} + \frac{٧ س}{٣ س^{٢} + ٥ س}$

.....

.....

.....

.....

١١ $\frac{س}{س^{٢} - ٩} - \frac{س}{س^{٢} + ٦ س + ٩}$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

١٢ $\frac{س + ٤}{س + ٣} - \frac{١}{س - ٣} + \frac{٦}{س^{٢} - ٩}$

.....

.....

.....

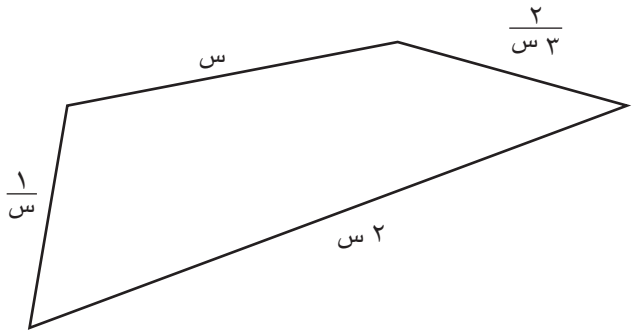
.....

.....

.....

مهارات تفكير عليا :

١٣ أوجِد محيط الشكل الرباعي التالي في أبسط صورة :



.....

.....

.....

.....

٣ - ٥ المسافة بين نقطتَين في المستوى الإحداثي

Distance Between Two Points In a Plane

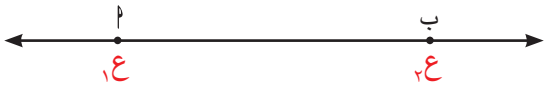
سوف تتعلّم : إيجاد المسافة (البعد) بين نقطتَين في المستوى الإحداثي .

العبارات والمفردات :

المسافة	Distance	المستوى	Plane

إستكشِف

١ **المسافة (البعد) بين نقطتَين على خطّ الأعداد هي :** القيمة المطلَقة للفرق بين إحداثيَّي هاتَين النقطتَين .



$$أ ب = |ع_٢ - ع_١|$$

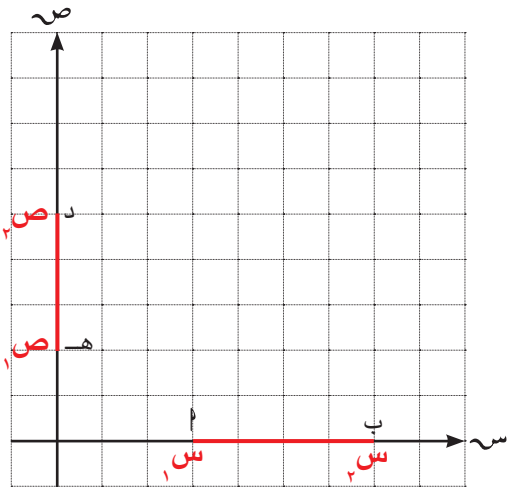
- $أ ب$: طول $\overline{أ ب}$
- $ع_٢$: إحداثي النقطة ب
- $ع_١$: إحداثي النقطة أ

٢ **البعد بين نقطتَين على محورَي الإحداثيات :**

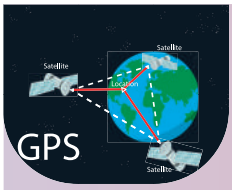
من الشكل المرسوم ، أكمِل ما يلي :

$أ ب = |س_٢ - س_١|$

$هـ د = |\ldots\ldots - \ldots\ldots|$



معلومة مفيدة :



في الكويت ومعظم دول العالم ، تعتمد غرف العمليات المركزية (مثل الإسعاف والطوارئ والشرطة) على أنظمة GPS مدمَجة مع الخرائط الذكية لتحديد موقع البلاغ بدقّة وسرعة .

لاحِظ أنّ

$|ع_٢ - ع_١| = |ع_١ - ع_٢|$

٣ البعد بين النقطتَين أ (س١ ، ص١) ، ب (س٢ ، ص٢) في المستوى الإحداثي .

من الشكل المقابِل ، أكمِل ما يلي : أ جـ = | س٢ − س١ |

جـ ب = ...

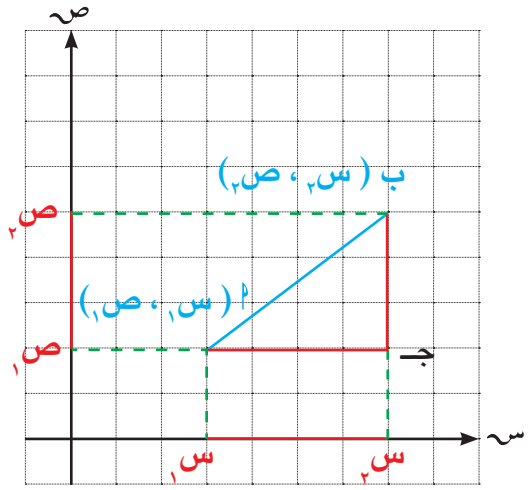
∵ المثلّث أ ب جـ قائم الزاوية في جـ

∴ (أ ب)٢ = ... + ...

= (| ..... |)٢ + (| ص٢ − ص١ |)٢

= (س٢ − س١)٢ + (ص٢ − ص١)٢

أ ب = √ ٢



لاحِظ أنّ

| س٢ | = | س |٢ = س٢

أي أنّ :

البعد بين النقطتَين أ (س١ ، ص١) ، ب (س٢ ، ص٢) هو :

أ ب = √ (س٢ − س١)٢ + (ص٢ − ص١)٢

مثال (١) :

أوجِد البعد بين النقطتَين أ (١ ، ٣) ، ب (٥ ، ٦)

الحلّ :

أ ب = √ (س٢ − س١)٢ + (ص٢ − ص١)٢

= √ (٥ − ١)٢ + (٦ − ٣)٢

= √ (٤)٢ + (٣)٢

= √ ١٦ + ٩

= √ ٢٥

= ٥ وحدات طول

لاحِظ أنّ

(س٢ − س١)٢ = (س١ − س٢)٢

دورك الآن (١)

إذا كانت أ (٢ ، ٦) ، ب (٤ ، ٩) ، فأوجِد أ ب .

أ ب = $\sqrt{(\text{س}_2 - \text{س}_1)^2 + (\ldots\ldots - \ldots\ldots)^2}$

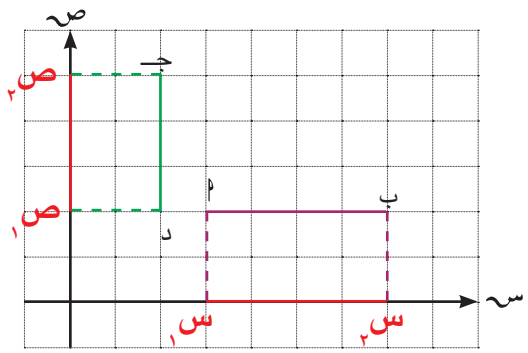
أ ب = $\sqrt{(\ldots\ldots - \ldots\ldots)^2 + (\ldots\ldots - \ldots\ldots)^2}$

أ ب = $\sqrt{(\ldots\ldots)^2 + (\ldots\ldots)^2}$

أ ب = $\sqrt{\ldots\ldots + \ldots\ldots}$

أ ب = $\sqrt{\ldots\ldots}$ وحدة طول

من الرسم المقابِل ، نلاحظ أن:



إذا كانت القطعة المستقيمة موازِية لأحد المحاور ، يمكن إيجاد طولها دون استخدام القانون العامّ .

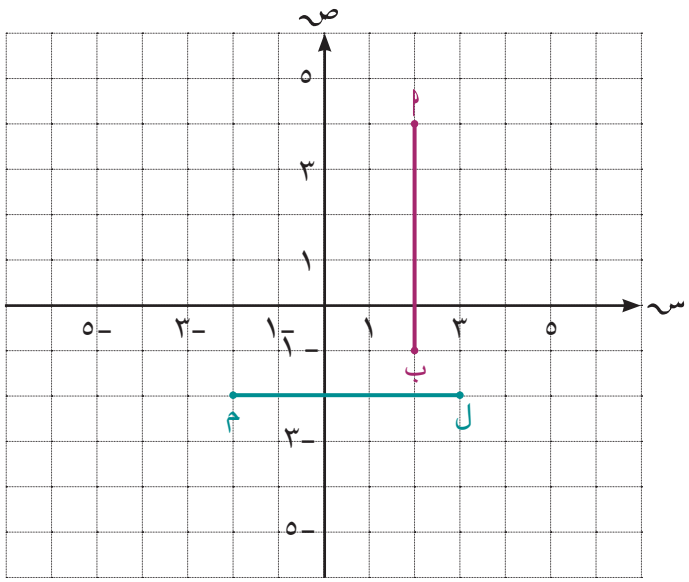
$\overline{\text{أ ب}}$ موازِية للمحور السيني : أ ب = | س٢ − س١ |

$\overline{\text{جـ د}}$ موازِية للمحور الصادي : جـ د = | ص٢ − ص١ |

مثال (٢) :

اِستخدِم الشكل المقابِل لإيجاد النقطتَين أ ، ب ، ثمّ أوجِد البعد بين النقطتَين أ ، ب .

ماذا تلاحظ ؟



الحلّ :

أ (٢ ، ٤) ، ب (٢ ، ١-)

لاحِظ أنّ الإحداثي السيني متساوٍ

∴ $\overline{\text{أ ب}}$ موازِية للمحور الصادي

إذًا أ ب = | ص٢ − ص١ |

= | ١- − ٤ |

= | ٥- |

= ٥ وحدات طول

دورك الآن (٢)

اِستخدِم الشكل في المثال (٢) لإيجاد البعد بين النقطتَين ل ، م . ماذا تلاحظ ؟

.....

.....

عبِّر عن فهمك

قام مشاري بحلّ مثال (٢) باستخدام البعد بين نقطتَين كما في المثال (١)، فهل حلّه صحيح؟ فسِّر ذلك.

.....

دورك الآن (٣)

أوجِد البعد بين النقطتَين الآتيتَين :

(أ) أ (٧ ، -٦) ، ب (٧ ، -٢)

.....

.....

(ب) ل (٠ ، -٤) ، ن (٣ ، ٠)

.....

.....

مثال (٣) :

المثلّث أ ب جـ الذي رؤوسه أ (٨ ، ٥) ، ب (٤ ، ١) ، جـ (١ ، ٤)

- **بيِّن نوع المثلّث بالنسبة إلى أضلاعه ؟**
- **بيِّن نوع المثلّث بالنسبة إلى زواياه ؟**

الحلّ :

$أ جـ = \sqrt{(س_٢ - س_١)^٢ + (ص_٢ - ص_١)^٢}$

$أ جـ = \sqrt{(١ - ٨)^٢ + (٤ - ٥)^٢}$

$أ جـ = \sqrt{(-٧)^٢ + (-١)^٢}$

$أ جـ = \sqrt{٤٩ + ١}$

$أ جـ = \sqrt{٥٠}$ وحدة طول

تذكَّر

أيّ مثلّث أ ب جـ ، حيث $\overline{أ جـ}$ هو الضلع الأطول ، يكون المثلّث :

قائم الزاوية إذا كان :

$(أ جـ)^٢ = (أ ب)^٢ + (ب جـ)^٢$

منفرج الزاوية إذا كان :

$(أ جـ)^٢ > (أ ب)^٢ + (ب جـ)^٢$

حادّ الزوايا إذا كان :

$(أ جـ)^٢ < (أ ب)^٢ + (ب جـ)^٢$

$أ ب = \sqrt{(س_2 - س_1)^2 + (ص_2 - ص_1)^2}$

$أ ب = \sqrt{(٨ - ٤)^2 + (١ - ٥)^2}$

$أ ب = \sqrt{(-٤)^2 + (-٤)^2}$

$أ ب = \sqrt{١٦ + ١٦}$

$أ ب = \sqrt{٣٢}$ وحدة طول

$ب جـ = \sqrt{(س_2 - س_1)^2 + (ص_2 - ص_1)^2}$

$ب جـ = \sqrt{(٤ - ١)^2 + (٤ - ١)^2}$

$ب جـ = \sqrt{(-٣)^2 + (٣)^2}$

$ب جـ = \sqrt{٩ + ٩}$

$ب جـ = \sqrt{١٨}$ وحدة طول

∴ نوع المثلّث أ ب جـ بالنسبة إلى أضلاعه هو مثلّث مختلف الأضلاع

$(أ جـ)^2 = (\sqrt{٥٠})^2 = ٥٠$

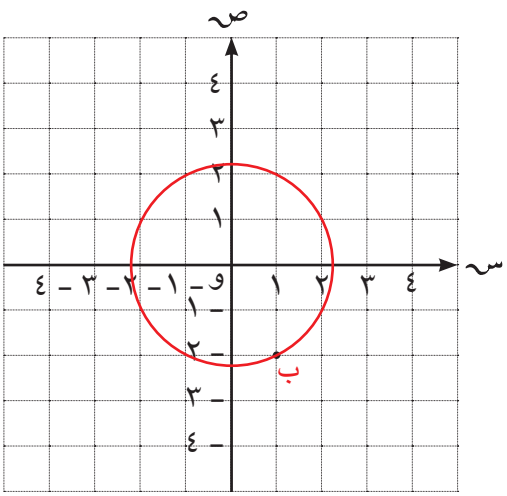
$(أ ب)^2 + (ب جـ)^2 = (\sqrt{٣٢})^2 + (\sqrt{١٨})^2 = ٣٢ + ١٨ = ٥٠$

∵ $(أ جـ)^2 = (أ ب)^2 + (ب جـ)^2$ (عكس نظرية فيثاغورث)

∴ نوع المثلّث أ ب جـ بالنسبة إلى زواياه هو مثلّث قائم الزاوية .

دورك الآن (٤)

لتكن ب نقطة تنتمي إلى دائرة مركزها نقطة الأصل و .
أوجِد طول نصف قطر الدائرة .



$\overline{ب و}$ تمثّل ..... الدائرة

إحداثيا النقطتَين ب ، و هما :

ب (..... ، .....) ، و (..... ، .....)

ب و = ...

= .....

= .....

= .....

تمارين ذاتية :

١ أوجِد البعد بين النقطتَين أ (٦ ، ٣) ، ب (٩ ، ٧) .

.....

.....

.....

.....

٢ إذا كانت أ (١٠ ، -٥) ، ب (٤ ، ٣) ، فأوجِد طول $\overline{أب}$.

.....

.....

.....

.....

.....

٣ أوجِد البعد بين النقطتَين ع (-٣ ، ٢) ، ك (-١ ، ٢) .

.....

.....

.....

.....

٤ أوجِد البعد بين النقطتَين ل (٤ ، ٠) ، ن (٠ ، -٢) .

.....

.....

.....

.....

.....

٥ $\overline{ط\,ل}$ قطر في دائرة ، حيث ط (٠ ، ٢) ، ل (٨ ، -٤) . أوجِد طول نصف قطر الدائرة .

.....

.....

.....

.....

.....

٦ أوجِد طول قطر المستطيل أ ب جـ د الذي إحداثيات رؤوسه هي :
أ (٦ ، ٢) ، ب (٦ ، ٨) ، جـ (-١ ، ٨) ، د (-١ ، ٢)

.....

.....

.....

.....

.....

.....

٧ المثلّث ل م ن إحداثيات رؤوسه هي :
ل (٢ ، ٥) ، م (٤ ، -١) ، ن (٦ ، ٥) .

(أ) بيِّن نوع المثلّث بالنسبة إلى أضلاعه .

(ب) بيِّن نوع المثلّث بالنسبة إلى زواياه .

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

مهارات تفكير عليا :

٨ هل تمثّل النقاط أ (٨ ، ٥) ، ب (٥ ، ١) ، جـ (٢ ، - ٣) رؤوس مثلّث ؟

.....

.....

.....

.....

.....

.....

٩ اِختر الإجابة الصحيحة .

في المستوى الإحداثي ، إذا كان أ ب = ٥ وحدات طول

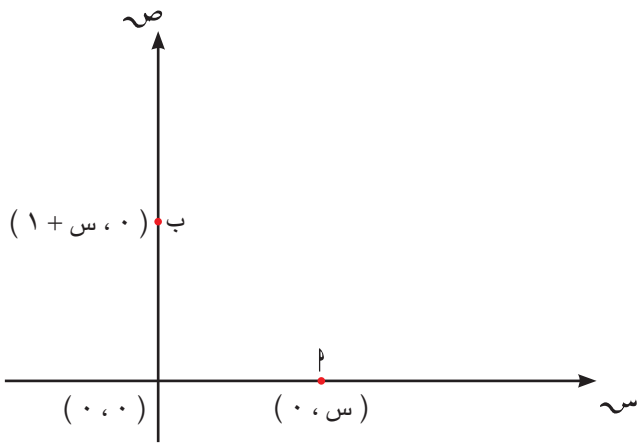
فإنّ قيمة س هي :

(أ) ١

(ب) ٢

(ج) ٣

(د) ٤



٣ - ٦ إحداثيا نقطة منتصف قطعة مستقيمة في المستوى الإحداثي

Midpoint Coordinates in a Plane

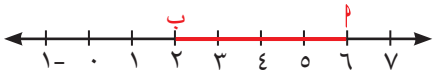
سوف تتعلّم : إيجاد إحداثيَّي نقطة منتصف قطعة مستقيمة في المستوى الإحداثي .

العبارات والمفردات :

منتصف قطعة مستقيمة	Midpoint of a Segment
إحداثيات	Coordinates

اِستكشِف (١)

في الجدول التالي، أكمِل ما يلي :

حدّد جـ منتصف $\overline{أب}$	إحداثي أ	إحداثي ب	إحداثي أ + إحداثي ب	إحداثي جـ
				

قارِن إحداثي جـ بمجموع إحداثيَّي النقطتَين أ ، ب

ماذا تلاحظ ؟ .....

أي أنّ :

إذا كانت $س_١$ إحداثي النقطة أ ، $س_٢$ إحداثي النقطة ب ،

حيث أ ، ب نقطتان على خطّ الأعداد وكانت جـ نقطة منتصف $\overline{أب}$ ، فإنّ :

إحداثي النقطة جـ هو $\frac{س_١ + س_٢}{٢}$.

دورك الآن (١)

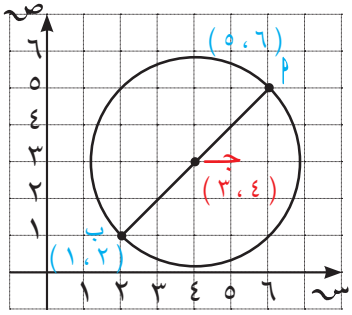
أوجِد إحداثي النقطة د منتصف $\overline{ل ع}$ على خطّ الأعداد ، إذا كان إحداثي النقطة ل هو - ١٢ ، وإحداثي النقطة ع هو ٦

.....

.....

.....

اِستكشِف (٢)



في الشكل المقابِل، دائرة مركزها جـ ، $\overline{أ ب}$ قطر فيها .

أكمِل ما يلي :

إحداثيا النقطة أ (..... ، .....) ،

إحداثيا النقطة ب (..... ، .....)

∵ جـ مركز الدائرة ∴ إحداثيا النقطة جـ (..... ، .....)

قارِن الإحداثي السيني في النقطة جـ بمجموع الإحداثي السيني في كلّ من النقطتَين أ ، ب .

قارِن الإحداثي الصادي في النقطة جـ بمجموع الإحداثي الصادي في كلّ من النقطتَين أ ، ب .

ماذا تلاحظ ؟

.....

.....

تذكَّر

مركز الدائرة هو نقطة المنتصف لأيّ قطر فيها .

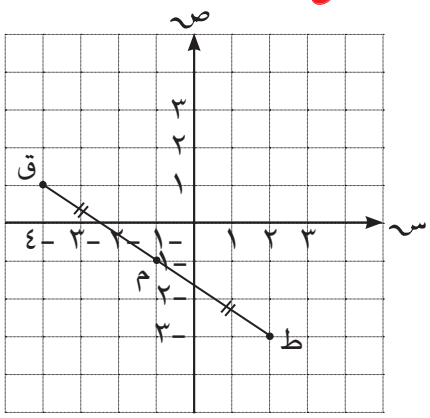
في المستوى الإحداثي إذا كانت أ (س١ ، ص١) ، ب (س٢ ، ص٢) ، فإنّ :

النقطة جـ منتصف $\overline{أ ب}$ هي :

$$جـ \left(\frac{س_١ + س_٢}{٢} ، \frac{ص_١ + ص_٢}{٢} \right)$$

مثال (١) :

إذا كانت ط (٢ ، -٣) ، ق (-٤ ، ١) ، فأوجِد النقطة م التي تنصّف $\overline{ط\,ق}$.



الحلّ :

إحداثيا نقطة المنتصف م $\left(\frac{س_١ + س_٢}{٢} ، \frac{ص_١ + ص_٢}{٢} \right)$

$= \left(\frac{١ + (-٣)}{٢} ، \frac{٢ + (-٤)}{٢} \right)$

$= \left(\frac{(-٢)}{٢} ، \frac{(-٢)}{٢} \right)$

$= (-١ ، -١)$

دورك الآن (٢)

أوجِد النقطة ف منتصف $\overline{ع\,ل}$ في كلّ ممّا يلي :

(أ) ع (٣ ، -٥) ، ل (-٣ ، ١)

.....

.....

.....

.....

(ب) ع (-٢ ، ٧) ، ل (-١ ، -٤)

.....

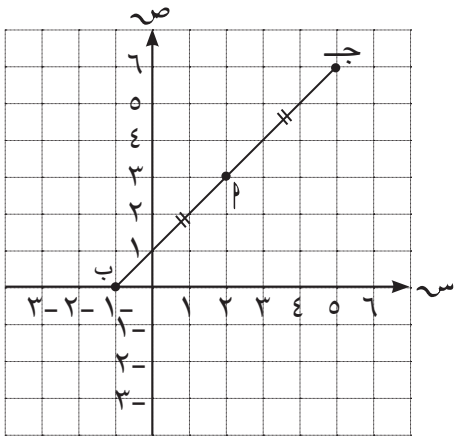
.....

.....

.....

مثال (٢) :

إذا كانت أ (٢ ، ٣) تنصّف $\overline{ب\,جـ}$ حيث ب (-١ ، ٠) ، جـ ($س_٢$ ، $ص_٢$) ، فأوجِد النقطة جـ .



الحلّ :

∵ إحداثيا نقطة المنتصف أ $\left(\frac{س_١ + س_٢}{٢} ، \frac{ص_١ + ص_٢}{٢} \right)$

∴ $\left(\frac{-١ + س_٢}{٢} ، \frac{٠ + ص_٢}{٢} \right) = (٢ ، ٣)$

$\frac{-١ + س_٢}{٢} = ٢$

$-١ + س_٢ = ٤$

$س_٢ = ٤ + ١ = ٥$

$\frac{٠ + ص_٢}{٢} = ٣$

$٠ + ص_٢ = ٦$

$ص_٢ = ٦$

∴ النقطة جـ (٥ ، ٦)

دورك الآن (٣)

إذا كانت م (-٢ ، -١) نقطة منتصف $\overline{أب}$ حيث أ (٢ ، -٣) ، فأوجِد النقطة ب .

.....

.....

.....

.....

.....

تمارين ذاتية :

١ أوجِد النقطة م منتصف $\overline{أب}$ حيث أ (-٢ ، ٥) ، ب (٨ ، -٣) .

.....

.....

.....

٢ أوجِد النقطة ن منتصف $\overline{جـد}$ حيث جـ (٧ ، -٣) ، د (-٦ ، -٩) .

.....

.....

.....

٣ أوجِد النقطة ع منتصف $\overline{ف ق}$ حيث ف (-١١ ، ٨) ، ق (٤ ، ٨) .

.....

.....

.....

٤ أوجِد النقطة ت منتصف $\overline{ح ز}$ حيث ح (١٧ ، -١٠) ، ز (١٣ ، -٤) .

.....

.....

.....

.....

٥ إذا كانت ك (٩ ، ٣) تنصّف $\overline{\text{د ف}}$ حيث د (-٣ ، -١) ، فأوجِد النقطة ف .

.....

.....

.....

.....

٦ $\overline{\text{أ ب}}$ قطر في الدائرة التي مركزها م حيث أ (٥ ، -١) ، ب (-١ ، ٧) ، أوجِد :

(أ) النقطة م مركز الدائرة .

.....

.....

.....

(ب) طول نصف قطر الدائرة .

.....

.....

.....

.....

مهارات تفكير عليا :

٧ أ ب جـ د متوازي أضلاع إحداثيات رؤوسه هي أ (١ ، ٦) ، ب (-١ ، ٤) ، جـ (١ ، ٠) ، د (س ، ص) . أوجِد إحداثيَّي النقطة د .

.....

.....

تقويم الوحدة التعليمية الثالثة
Unit Three Assessment

أوّلاً : البنود المقالية

١ ضَع في أبسط صورة كلًّا ممّا يلي :

(أ) $\frac{٦ أ^{٢} + ٩}{١٢}$

.....

.....

.....

(ب) $\frac{٢ س - ٥}{٦ س - ١٥}$

.....

.....

.....

(ج) $\frac{٢ س^{٢} + ٢ س}{٣ س^{٢} + ٣ س}$

.....

.....

.....

(د) $\frac{٨ - ٢ ب}{ب^{٢} - ١٦}$

.....

.....

.....

(هـ) $\frac{ل^{٢} - ٦ ل + ٨}{ل^{٢} + ل - ٦}$

.....

.....

.....

(و) $\frac{٢ ر^{٢} + ٩ ر - ٥}{ر^{٢} + ١٠ ر + ٢٥}$

.....

.....

.....

ز) $\frac{٧ ص^{٢} - ١٣ ص + ٦}{ص^{٢} + ٢ ص - ٣}$

.....

.....

.....

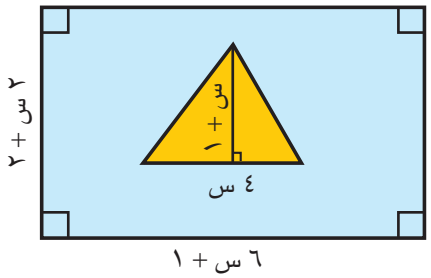
ح) $\frac{٢٧ س^{٣} + ١٢٥}{٣ س^{٢} - س - ١٠}$

.....

.....

.....

٢ أُكتب نسبة مساحة المنطقة المثلّثة إلى مساحة المنطقة المستطيلة في صورة حدودية نسبية ، وضَعها في أبسط صورة .



.....

.....

.....

.....

٣ أوجِد ناتج كلّ ممّا يلي في أبسط صورة .

أ) $\frac{٤ س + ٤}{س - ٣} \times (س^{٢} - س - ٦)$

.....

.....

.....

ب) $\frac{٣ س^{٢} + ١٢ س}{٢ س^{٢} + ٧ س - ٤} \times \frac{٦ س^{٢} - ١٣ س + ٥}{٩ س^{٣}}$

.....

.....

.....

ج) $\frac{س^{٢} - س ص + ص^{٢}}{س^{٣} + ص^{٣}} \times \frac{س + ص}{س - ص}$

.....

.....

.....

د) $\frac{٨ س^{٣}}{س^{٣} - ص^{٣}} \div \frac{٤ س^{٢}}{س^{٢} + س ص + ص^{٢}}$

.....

.....

.....

هـ) $\frac{٥ س^{٢} + ١٠ س - ١٥}{س^{٢} - ٦ س + ٥} \div \frac{٢ س^{٢} + ٧ س + ٣}{٤ س^{٢} - ٨ س - ٥}$

.....

.....

.....

و) $\frac{ص^{٢} + ٥ ص + ٦}{ص - ٣} \div \frac{ص^{٢} + ٣ ص + ٢}{ص^{٢} - ٢ ص - ٣}$

.....

.....

.....

٤ أوجِد ناتج كلّ ممّا يلي في أبسط صورة:

أ) $\frac{٥}{٨ م} + \frac{٣}{٨ م}$

.....

.....

.....

ب) $\frac{س}{س + ٦} + \frac{٢}{س + ٣}$

.....

.....

.....

ج) $\frac{٢ س - ٤}{س^{٢} - ٤} + \frac{س^{٢} - س}{س^{٢} + س - ٢}$

.....

.....

.....

د) $\frac{٤}{س + ٣} - \frac{٦}{س - ٢}$

.....

.....

.....

هـ $\frac{٦}{س^{٢} + ٣ س + ٢} - \frac{٤}{س + ٢}$

.....

.....

.....

و $\frac{٢ ن - ١}{٢ ن^{٢} + ٥ ن - ٣} - \frac{ن + ٣}{ن^{٢} - ٩}$

.....

.....

.....

٥ أوجِد الناتج في أبسط صورة :

$(س^{٢} - ص^{٢}) \div (س^{٣} - ص^{٣}) \times \frac{س^{٢} + س ص + ص^{٢}}{س + ص}$

.....

.....

.....

٦ إذا كانت ل (٣ ، ٨) ، م (-٢ ، ٣) :

أ أوجِد طول $\overline{ل م}$.

.....

.....

.....

ب أوجِد إحداثيَّي النقطة هـ منتصف $\overline{ل م}$.

.....

.....

.....

٧ إذا كانت ل (٢ ، -١) ، ن (-١ ، -٣) ، م (٠ ، -٤) ، فبيِّن نوع Δ ل ن م بالنسبة إلى أضلاعه .

.....

.....

.....

ثانيًا : البنود الموضوعية

في البنود (١ - ٦) ، ظلِّل [أ] إذا كانت العبارة صحيحة ، وظلِّل [ب] إذا كانت العبارة غير صحيحة .

١ $\frac{\text{س} - \text{ص}}{\text{ص} - \text{س}} = -١$	أ	ب
٢ $\frac{٢}{\text{س} + ١} + \frac{٣}{\text{س} + ٣} = \frac{٥}{٢\text{س} + ٤}$	أ	ب
٣ $\frac{٥\text{س}}{٣\text{س} - ٢} - \frac{٢\text{س}}{٣\text{س} - ٢} = \frac{٣\text{س}}{٣\text{س} - ٢}$	أ	ب
٤ $\frac{\text{ص} + ٢}{\text{ص} + ٣} \div (\text{ص} + ٢) = \frac{١}{\text{ص} + ٣}$	أ	ب
٥ إذا كانت جـ منتصف $\overline{أب}$ وكانت جـ (٣ ، ٥) ، أ (-١ ، ٣) فإنّ ب (١ ، ٤) .	أ	ب
٦ إذا كانت أ (١ ، ٣) ، ب (١ ، -٥) ، فإنّ $\overline{أب}$ توازي محور السينات .	أ	ب

في البنود (٧ - ١٤) لكلّ بند أربعة اختيارات ، واحد فقط منها صحيح ، ظلِّل الإجابة الصحيحة .

٧ $\frac{٣\text{م}}{\text{م} - ١} \div \frac{٦\text{م}}{٢ - \text{م}} =$

أ $\frac{٢ - \text{م}}{\text{م} - ١}$ ب $\frac{١٨\text{م}^{٢}}{(\text{م} - ١)(\text{م} - ٢)}$ ج $\frac{٢ - \text{م}}{٢(\text{م} - ١)}$ د $\frac{\text{م} - ١}{٢(٢ - \text{م})}$

٨ $\frac{\text{س}^{٢}}{\text{س} - ٢} - \frac{٤}{\text{س} - ٢} =$

أ س - ٢ ب س + ٢ ج $\text{س}^{٢} - ٤$ د ١

٩ الحدودية النسبية التي في أبسط صورة هي :

أ $\frac{ص + ١}{ص^{٢} - ١}$ ب $\frac{٢ ن - ١}{ن^{٢} + ٤}$ ج $\frac{س - ٧}{٧ - س}$ د $\frac{٣ م - ٣}{م - ١}$

١٠ $\frac{٢ س}{س + ٢} + \frac{٤}{س + ٢} =$

أ $\frac{٦ س}{س + ٢}$ ب ٢ س ج ٢ د ١

١١ $\frac{٢ س}{س + ٢} \times \frac{٣ س + ٦}{س^{٢}} =$

أ $\frac{٦}{س}$ ب $\frac{س}{٦}$ ج ٦ س د $\frac{٣}{س}$

١٢ $\frac{٢ ص}{ص + ١} - \frac{ص}{ص + ١} + \frac{١}{ص + ١} =$

أ ص + ١ ب $\frac{ص + ١}{٣ ص + ٣}$ ج $\frac{٣ ص + ١}{ص + ١}$ د ١

١٣ $\frac{س}{س - ١} + \frac{١}{١ - س}$

أ صفر ب ١ ج -١ د $\frac{س + ١}{س - ١}$

١٤ إذا كانت ق (٣ ، ٠) ، ك (١ ، ٠) ، فإنّ : ق ك = ... وحدة طول .

أ ٤ ب ٢ ج $\sqrt{٧}$ ٢ د -٢

الوحدة التعليمية
الرابعة

هندسة التحويلات – الإحصاء والاحتمال

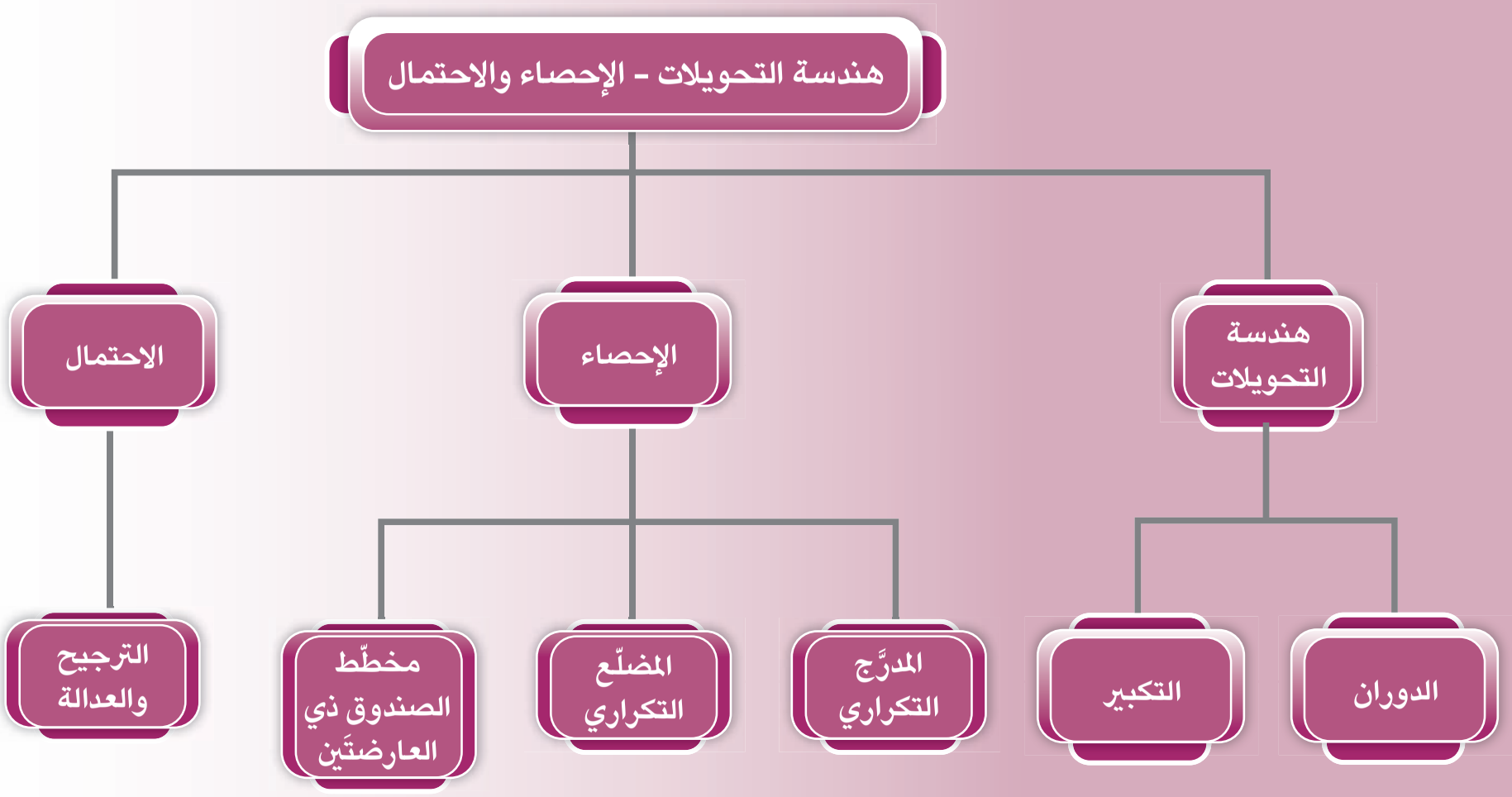
معالم حضارية

تهتمّ دولتنا الحبيبة الكويت بمعالمها الحضارية اهتمامًا واضحًا ، فقد زخرت بالعديد من المظاهر العمرانية العصرية والمباني الشاهقة ذات التصاميم الجميلة ومجمَّعات التسوّق الضخمة والتي شُيِّدت على أحدث طراز .

اِهتمّت دولة الكويت بالتخطيط العلمي ، باعتباره الأسلوب الأمثل ؛ لكشف آفاق المستقبل ولتحقيق التنمية الاقتصادية والاجتماعية الشاملة ، ويُعتبر الجهاز الإحصائي من أولى المؤسَّسات التي واكبت إنشاء دولة الكويت ، عشية الاستقلال في مطلع الستّينيات . ولكي يتمكّن هذا الجهاز من تأدية عمله على أكمل وجه لا بدّ له أن يبحث عن البيانات المناسِبة . والبيانات بمفهومها العامّ هي : مجموعة من الأحرف أو الكلمات أو الأرقام أو الرموز أو الصور المتعلّقة بموضوع ما ، يتمّ جمعها ومعالجتها وتحويلها إلى معلومات مفيدة لاتّخاذ القرارات المناسِبة .

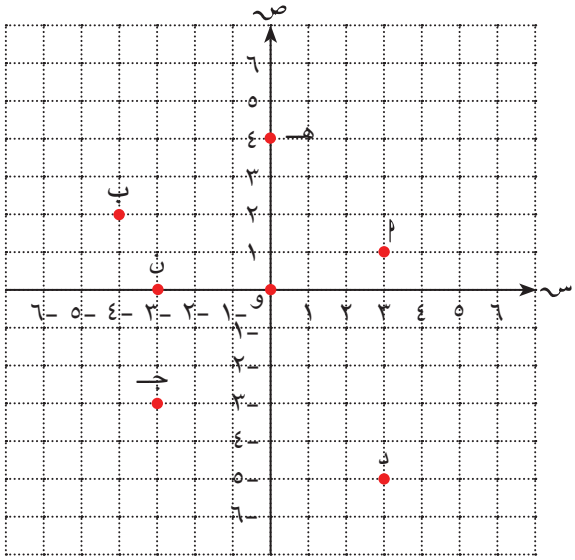
المجال	معايير المنهج	مؤشّر الأداء
الهندسة والقياس	تطبيق التحويلات الهندسية ، واستخدامها في تطوير الحسّ المكاني واستخدام التماثل في تحليل مواقف رياضية .	العمل الجَماعي - التذكّر - التعرّف - الفهم - التحويل - العلاقات - الاستدلال - القوانين - الوسائط - التمثيل
	تحديد المواقع ووصف العلاقات المكانية باستخدام هندسة الإحداثيات وأنظمة تمثيل أخرى .	العمل الجَماعي - التذكّر - التعرّف - الفهم - التحويل - العلاقات - الاستدلال - القوانين
الإحصاء والاحتمال	تجميع البيانات وتنظيمها وعرضها وتحليلها وتفسيرها ، باستخدام تمثيلات ومقاييس وإجراءات إحصائية .	عمل جَماعي- التذكّر - الفهم - معالجة البيانات - القوانين - الوسائط - التمثيل
	تطبيق مفاهيم الاحتمال النظري والتجريبي للقيام بالتوقّعات والاستنتاجات .	العمل الجَماعي - التذكّر - الفهم - التعرّف - الاستشراف - القوانين - حلّ المشكلات

مخطّط تنظيمي للوحدة التعليمية الرابعة



هل أنت مستعد؟

١ في المستوى الإحداثي ،
أُكتب إحداثيات النقاط الآتية :



أ (..... ، .....)

ب (..... ، .....)

جـ (..... ، .....)

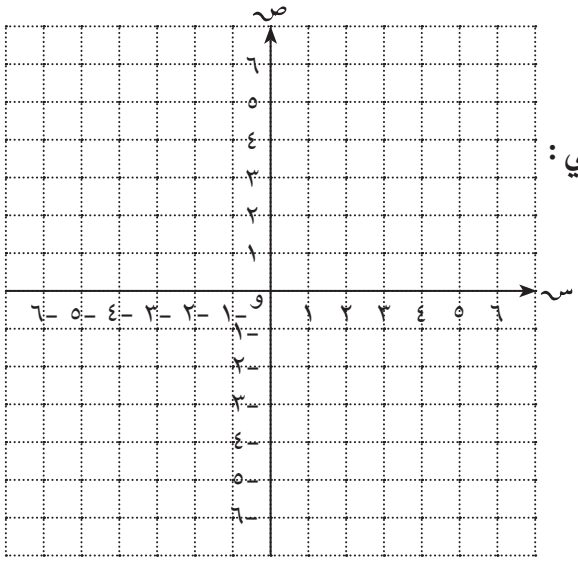
د (..... ، .....)

هـ (..... ، .....)

ن (..... ، .....)

و (..... ، .....)

٢ عيِّن النقاط الآتية على المستوى الإحداثي :



ع (٥ ، -١) ، ك (-٢ ، -٦) ،

ف (٢ ، ٠) ، ط (٠ ، -٣) ،

م (-٥ ، ٥) ، ي (٤ ، ٣) ،

٣ حُلَّ التناسب في كلّ ممّا يلي :

أ) $\frac{س}{٤} = \frac{٦}{٨}$

.....

.....

.....

ب) $\frac{٣}{٥} = \frac{٩}{ص}$

.....

.....

.....

٤ أوجِد المدى والوسيط لقِيَم البيانات الآتية :

أ) ٣ ، ٥ ، ٩ ، ٧ ، ٥ ، ٨ ، ٥

المدى = ...

الوسيط = ...

ب) ١٥ ، ١٩ ، ١٧ ، ١٤ ، ١٨ ، ١٥

المدى = ...

الوسيط = ...

٥ أكمِل الجدول التكراري الآتي بإيجاد مراكز الفئات ، ثمّ أجِب عمّا يلي :

الفئة	التكرار	مركز الفئة
٤-	٢	
٦-	٤	
٨-	٢	
١٠-	٣	

أ طول الفئة = ...

ب الحدّ الأدنى للفئة الثالثة = ...

ج الحدّ الأعلى للفئة الأخيرة = ...

٦ أُكتب جميع النواتج الممكنة لكلّ تجربة ممّا يلي :

أ رمي قطعة نقود مرّة واحدة وملاحظة الوجه العلوي.

.....

.....

ب سحب كرة عشوائيًّا من كيس فيه ٤ كرات صفراء ، ٣ كرات حمراء وملاحظة لونها.

.....

.....

٧ عند رمي مكعّب منتظم مرقَّم من ١ إلى ٦ مرّة واحدة وملاحظة الرقم الظاهر على الوجه العلوي . أوجِد ما يلي :

أ اِحتمال (ظهور عدد أوّلي) = ...

ب اِحتمال (ظهور عدد غير أوّلي) = ...

ج اِحتمال (ظهور عدد أكبر من ٥) = ...

د اِحتمال (ظهور عدد أصغر من ٧) = ...

هـ اِحتمال (ظهور عدد أكبر من ٦) = ...

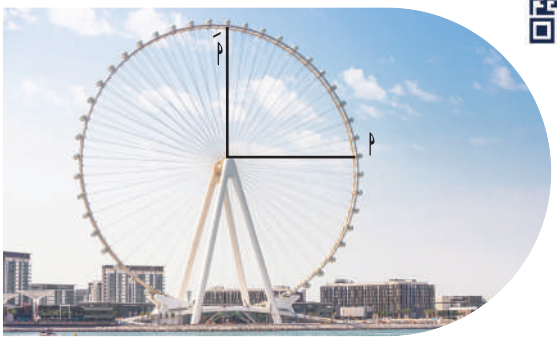
٤ - ١ الدوران في المستوى
Rotation in the Plane

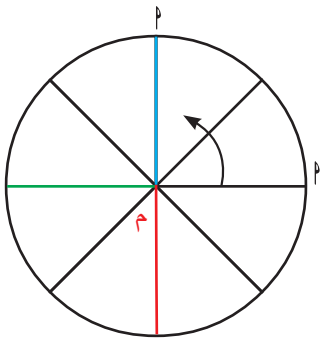
سوف تتعلّم : الدوران في المستوى وإيجاد صورة شكل هندسي بالدوران .

العبارات والمفردات :

التحويل الهندسي	Geometric Transformation	الدوران	Rotation

إستكشِف (١) :





من الشكل المرسوم : يوضّح السهم اتّجاه حركة عجلة المشاهدة ، وهي تدور حول نقطة ثابتة ، ولتكن مركز الدائرة (م) .

أكمِل كلًّا ممّا يلي :

$\overline{م أ}$ هو ..... للدائرة

$\overline{م أ'}$ هو ..... آخر للدائرة

∴ م أ = ... م أ'

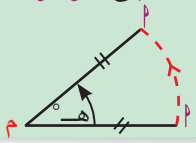
معلومة مفيدة :

عجلة المشاهدة في دبيّ تُعتبر أكبر عجلة مشاهدة في العالم يصل ارتفاعها إلى ٢٥٠ م ، ويمكن من خلالها الاستمتاع بأروع الإطلالات البانورامية على مدينة دبيّ .

الدوران حول نقطة ثابتة م هو تحويل هندسي يعيّن لكلّ نقطة أ في المستوى نقطة أخرى أ' في المستوى نفسه بحيث : أ ⟵ أ' ، م ⟵ م (م نقطة ثابتة ، تُسمّى مركز الدوران) ،

م أ = م أ' ، (أ $\hat{م}$ أ') هي زاوية الدوران وقياسها هـ° .

ويُرمز إليه بالرمز د (م ، هـ°)



و بذلك نستخلص عناصر الدوران الأساسية :

- مركز الدوران (م)
- قياس زاوية الدوران (هـ°)
- اِتّجاه الدوران :
  - **مع اتّجاه حركة عقارب الساعة**
  - **عكس اتّجاه حركة عقارب الساعة**

اللوازم

أدوات هندسية

ورق شفّاف

الدوران الذي مركزه (م) وقياس زاويته (هـ°) ورمزه د (م ، هـ°) :

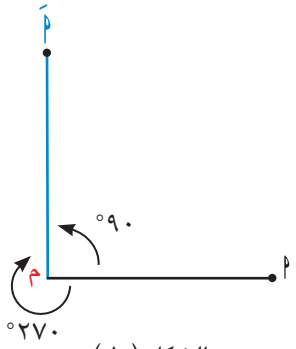
- يكون **موجَبًا** إذا كان **عكس** اتّجاه حركة عقارب الساعة ،
- يكون **سالبًا** إذا كان **مع** اتّجاه حركة عقارب الساعة .
- م مركز الدوران ، نقطة صامدة .

تذكَّر

- إذا كانت صورة النقطة تحت تأثير أيّ تحويل هندسي هي النقطة نفسها ، فإنّها تُسمّى **نقطة صامدة** .

بالرجوع إلى « اِستكشِف (١) » السابق :

في الشكل (١) :



الشكل (١)

عندما تدور العجلة من ا إلى أَ

يتعيّن دوران **موجَب** اتّجاهه ..... اتّجاه حركة عقارب الساعة

مركزه : ..... قياس زاويته : .....

نعبّر عنه بالرمز ..... وهو دوران $\frac{١}{٤}$ دورة

أو عندما تدور العجلة من ا إلى أَ بالاتّجاه الآخر

يتعيّن دوران **سالب** اتّجاهه ..... اتّجاه حركة عقارب الساعة

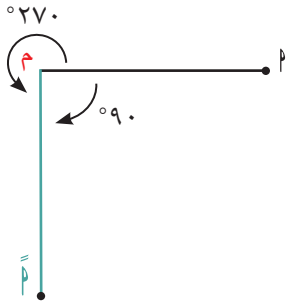
مركزه : ..... قياس زاويته : .....

نعبّر عنه بالرمز ..... وهو دوران $\frac{٣}{٤}$ دورة

ماذا تلاحظ ؟

..... يكافئ .....

في الشكل (٢) :



الشكل (٢)

عندما تدور العجلة من ا إلى أً

يتعيّن دوران **موجَب** اتّجاهه ..... اتّجاه حركة عقارب الساعة

مركزه : ..... قياس زاويته : .....

نعبّر عنه بالرمز ..... وهو دوران $\frac{٣}{٤}$ دورة

أو عندما تدور العجلة من ا إلى أً بالاتّجاه الآخر

يتعيّن دوران **سالب** اتّجاهه ..... اتّجاه حركة عقارب الساعة

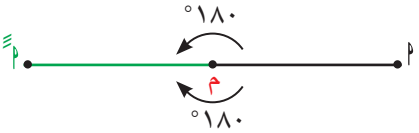
مركزه : ..... قياس زاويته : .....

نعبّر عنه بالرمز ..... وهو دوران $\frac{١}{٤}$ دورة

ماذا تلاحظ ؟

..... يكافئ .....

في الشكل (٣) :



الشكل (٣)

عندما تدور العجلة من أ إلى أً

يتعيّن دوران **موجَب** اتّجاهه ..... اتّجاه حركة عقارب الساعة

مركزه : ..... قياس زاويته : .....

نعبّر عنه بالرمز ..... وهو دوران $\frac{١}{٢}$ دورة

أو عندما تدور العجلة من أ إلى أً بالاتّجاه الآخر

يتعيّن دوران **سالب** اتّجاهه ..... اتّجاه حركة عقارب الساعة

مركزه : ..... قياس زاويته : .....

نعبّر عنه بالرمز ..... وهو دوران $\frac{١}{٢}$ دورة

ماذا تلاحظ ؟

..... يكافئ .....

دورك الآن (١)

أكمِل كلًّا ممّا يلي :

(أ) د (م ، ٣٠°) هو :

دوران حول ..... في اتّجاه ..... حركة عقارب الساعة بزاوية قياسها .....

(ب) د (م ، −١٢٠°) هو :

دوران حول ..... في اتّجاه ..... حركة عقارب الساعة بزاوية قياسها .....

اِنتبِه

د (م ، −١٢٠°)

← قياس زاوية الدوران

← اِتّجاه الدوران

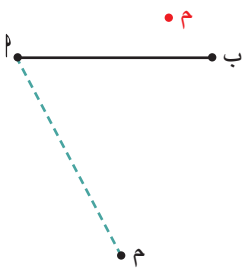
مثال توضيحي :

أُرسم صورة $\overline{أب}$ تحت تأثير الدوران : د (م ، -٧٥°)

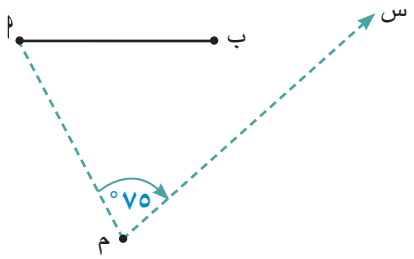
الحلّ :

١ نعيّن $أ'$ صورة النقطة أ كالآتي :

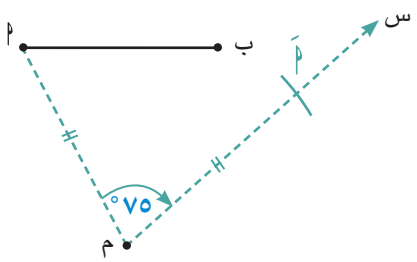
أ نرسم القطعة المستقيمة م أ



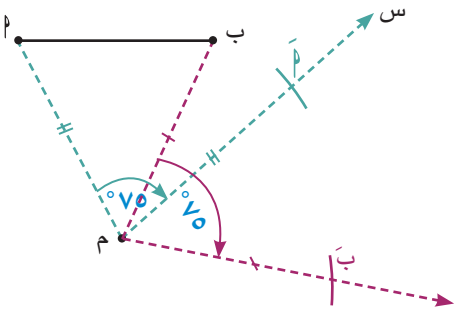
ب باستخدام المنقلة نرسم زاوية قياسها ٧٥° (الاتّجاه مع حركة عقارب الساعة)
رأسها النقطة م ، وضلعاها م أ ، $\overleftarrow{م س}$



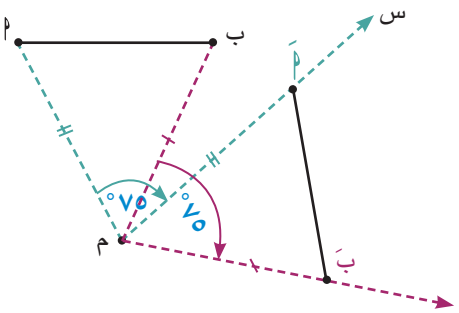
ج باستخدام الفرجار نعيّن $أ'$ على $\overleftarrow{م س}$
حيث م أ = م $أ'$



٢ نعيّن $ب'$ صورة النقطة ب بالطريقة نفسها .



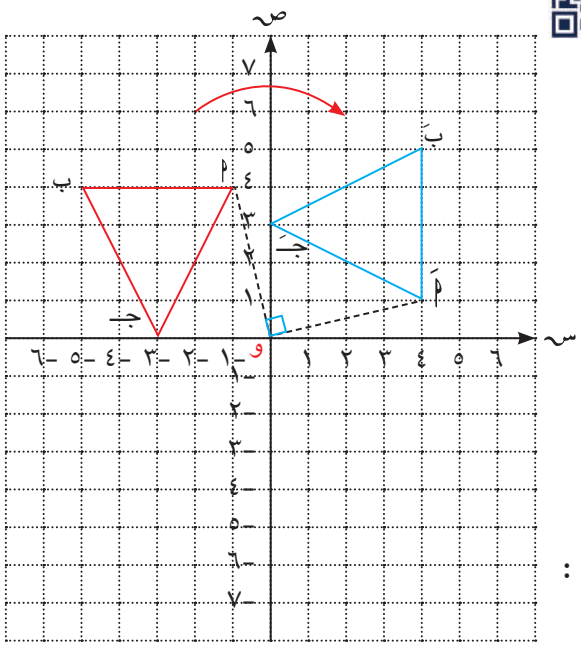
٣ نرسم $\overline{أ'ب'}$ صورة $\overline{أب}$.



الدوران في المستوى الإحداثي :

اِستكشِف (٢) :

أُرسم المثلّث أ ب جـ على شبكة المستوى الإحداثي
حيث أ (-١ ، ٤) ، ب (-٥ ، ٤) ، جـ (-٣ ، ٠)



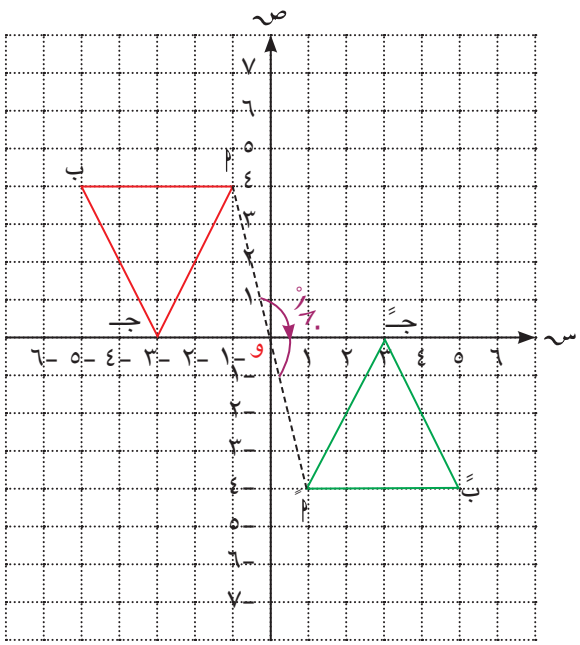
- ثبِّت ورقة شفّافة على المستوى ، وقُم برسم المثلّث أ ب جـ والمحاور على الورقة الشفّافة.
- ثبِّت سنّ دبّوس عند نقطة الأصل (و) ، وقُم بتدوير الورقة الشفّافة بزاوية قياسها ٩٠° مع اتّجاه حركة عقارب الساعة ؛ لتحصل على المثلّث أَ بَ جَـ صورة المثلّث أ ب جـ بدوران مركزه و ، وقياس زاوية ٩٠° باتّجاه مع حركة عقارب الساعة ، ونعبّر عن ذلك كما يلي :

Δ أ ب جـ $\xrightarrow{\text{د (و ، - ٩٠°)}}$ Δ .....

- وباستخدام الورقة الشفّافة السابقة نفسها، دوِّر وارسم صورة Δ أ ب جـ :

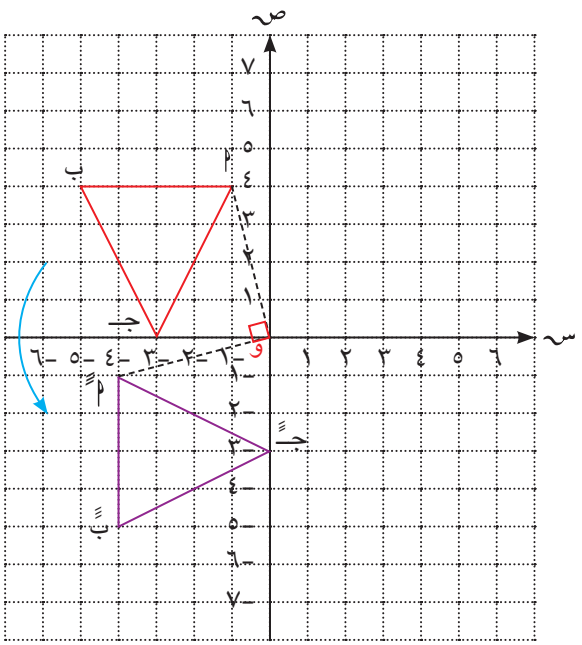
١ حول نقطة الأصل (و) بزاوية قياسها ١٨٠° مع اتّجاه حركة عقارب الساعة

Δ أ ب جـ $\xrightarrow{\text{د (و ، - ١٨٠°)}}$ Δ .....



٢ حول نقطة الأصل (و) بزاوية قياسها ٩٠° عكس اتّجاه حركة عقارب الساعة

Δ أ ب جـ $\xrightarrow{\text{د (و ، ٩٠°)}}$ Δ .....



٣ أكمِل الجدول الآتي وفقًا للخطوات السابقة :

الدوران / الرؤوس	أ (-١ ، ٤)	ب (-٥ ، ٤)	جـ (-٣ ، ٠)
د (و ، -٩٠°)	أَ (١ ، ٤)	بَ (..... ، .....)	جـَ (..... ، .....)
د (و ، -١٨٠°)	أً (..... ، .....)	بً (٥ ، -٤)	جـً (..... ، .....)
د (و ، ٩٠°)	أً (..... ، .....)	بً (..... ، .....)	جـً (٠ ، -٣)
د (و ، -٢٧٠°)			
د (و ، ٢٧٠°)			
د (و ، ١٨٠°)			

ماذا تلاحظ ؟

د (و ، -٩٠°) يكافئ .....

د (و ، -١٨٠°) يكافئ .....

د (و ، ٩٠°) يكافئ .....

ممّا سبق نستنتج أنّه :

إذا كانت (س ، ص) نقطة في المستوى الإحداثي ، فإنّ :

(١) (س ، ص) ← د (و ، -٩٠°) ← (ص ، -س) يُسمّى دوران ربع دورة ($\frac{١}{٤}$ دورة) .

(س ، ص) ← د (و ، ٩٠°) ← (-ص ، س) يُسمّى دوران ربع دورة ($\frac{١}{٤}$ دورة) .

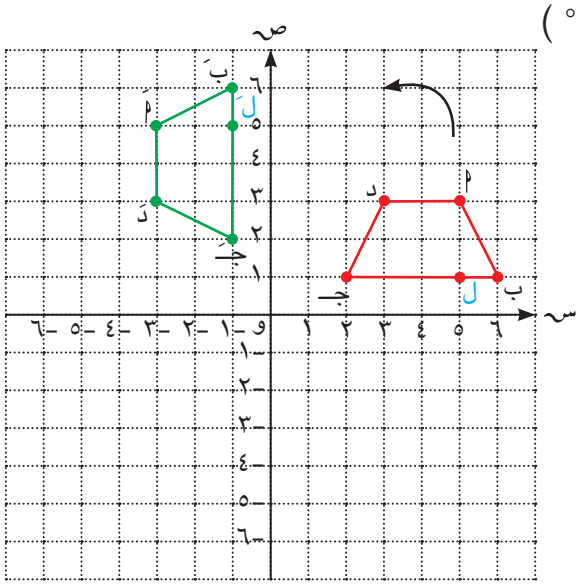
(٢) (س ، ص) ← د (و ، -١٨٠°) ← (-س ، -ص) يُسمّى دوران نصف دورة ($\frac{١}{٢}$ دورة) .

(س ، ص) ← د (و ، ١٨٠°) ← (-س ، -ص) يُسمّى دوران نصف دورة ($\frac{١}{٢}$ دورة) .

(٣) (س ، ص) ← د (و ، -٢٧٠°) ← (-ص ، س) يُسمّى دوران $\frac{٣}{٤}$ دورة .

(س ، ص) ← د (و ، ٢٧٠°) ← (ص ، -س) يُسمّى دوران $\frac{٣}{٤}$ دورة .

خواصّ الدوران



أَبَ جَـ دَ صورة الشكل أ ب جـ د تحت تأثير د (و ، ٩٠°)

باستخدام الشكل المقابِل تحقَّق من الخواصّ الآتية :

(١) الدوران يحافظ على الاستقامة .

(٢) الدوران يحافظ على البينية .

(٣) الدوران يحافظ على قياسات الزوايا .

(٤) الدوران يحافظ على التوازي .

(٥) الدوران يحافظ على الأبعاد .

(٦) الدوران يحافظ على الاتّجاه الدوراني .

دورك الآن (٢)

أكمِل كلًّا ممّا يلي حيث (و) نقطة الأصل :

أ (٢ ، ٤) ← د (و ، ٩٠°) ← (..... ، .....)

ب (٣ ، −٥) ← د (و ، −٩٠°) ← (..... ، .....)

ج (٣ ، ٠) ← د (و ، ١٨٠°) ← (..... ، .....)

د (−٤ ، −٣) ← د (و ، −١٨٠°) ← (..... ، .....)

هـ (٠ ، −٢) ← د (و ، ٢٧٠°) ← (..... ، .....)

و (−٦ ، ٢) ← د (و ، −٢٧٠°) ← (..... ، .....)

عبِّر عن فهمك (١)

هل د (و ، ١٠٠°) يكافئ د (و ، −٢٦٠°) ؟ فسِّر إجابتك .

مثال (١) :

أُرسم المثلّث أ ب و ، الذي رؤوسه : أ (٥ ، ٢) ، ب (٢ ، ٤) ، و (٠ ، ٠) ،
ثمّ ارسم صورته بدوران حول نقطة الأصل وبزاوية قياسها ٩٠° مع اتّجاه حركة عقارب الساعة .

الحلّ :

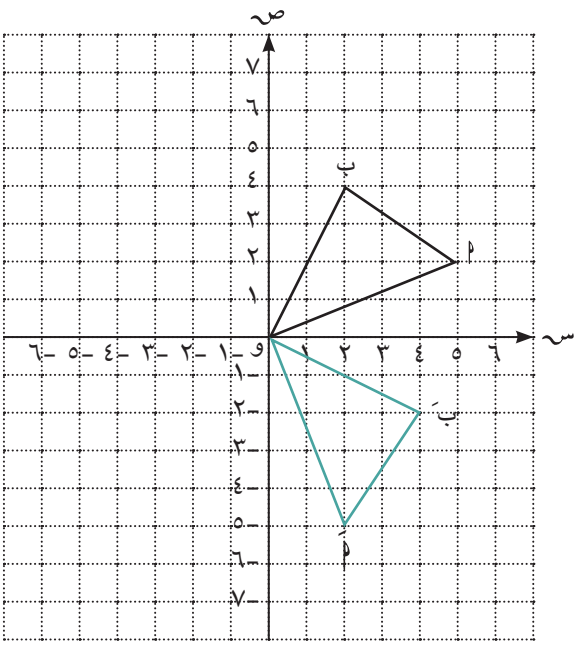
(س ، ص) $\xleftarrow{\text{د (و ، −٩٠°)}}$ (ص ، −س)

أ (٥ ، ٢) $\xleftarrow{\text{د (و ، −٩٠°)}}$ أَ (٢ ، −٥)

ب (٢ ، ٤) $\xleftarrow{\text{د (و ، −٩٠°)}}$ بَ (٤ ، −٢)

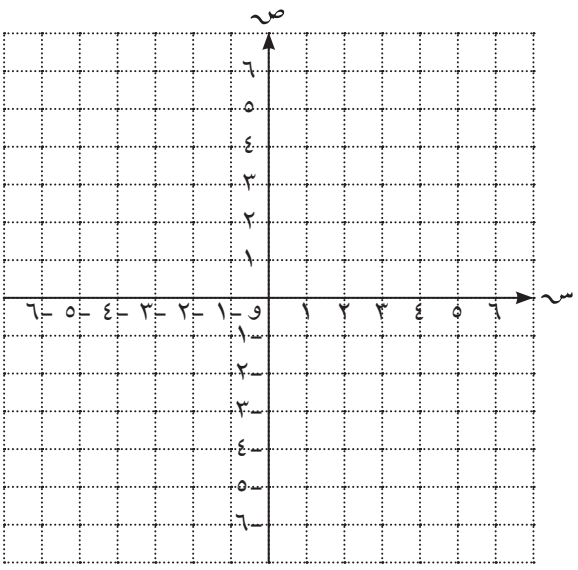
و (٠ ، ٠) $\xleftarrow{\text{د (و ، −٩٠°)}}$ و (٠ ، ٠) نقطة صامدة

∴ Δ أ ب و $\xleftarrow{\text{د (و ، −٩٠°)}}$ Δ أَ بَ و



دورك الآن (٣)

أُرسم المثلّث ل م ن الذي إحداثيات رؤوسه :
ل (-٢ ، ٠) ، م (٣ ، ٤) ، ن (-٦ ، ٣) ،
ثمّ ارسم صورته بدوران حول نقطة
الأصل وبزاوية قياسها ١٨٠° عكس
اتّجاه حركة عقارب الساعة .



.....

.....

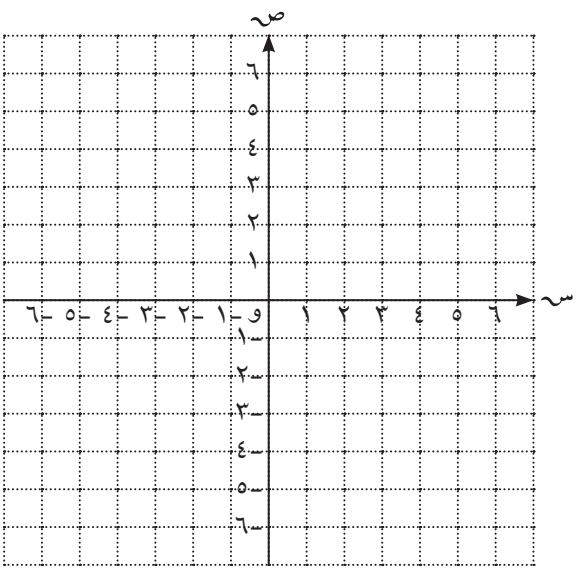
.....

.....

.....

دورك الآن (٤)

أُرسم المربّع أ ب جـ هـ الذي إحداثيات
رؤوسه : أ (٢ ، ٢) ، ب (٢ ، ٦) ،
جـ (٦ ، ٦) ، هـ (٦ ، ٢) ،
ثمّ ارسم صورته تحت تأثير
د (و ، -٢٧٠°) حيث (و) نقطة الأصل .



.....

.....

.....

.....

.....

عبِّر عن فهمك (٢)

إذا كان قياس زاوية الدوران ٣٦٠° لشكل ما ، فما العلاقة بين الشكل وصورته ؟

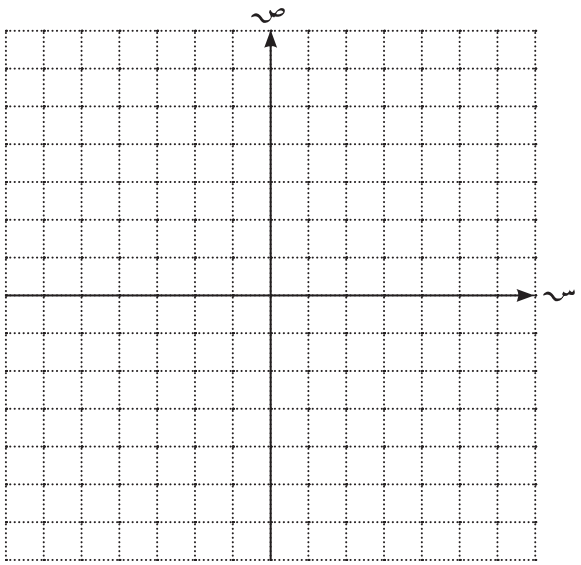
.....

تمارين ذاتية :

١ أكمِل كلًّا ممّا يلي حيث (و) نقطة الأصل :

(٣ ، ٧)	د (و ، ٩٠°) ←	(..... ، .....)
(١ ، -٩)	د (و ، -٩٠°) ←	(..... ، .....)
(٤ ، ٠)	د (و ، ١٨٠°) ←	(..... ، .....)
(-٢ ، ٥)	د (و ، -١٨٠°) ←	(..... ، .....)
(٠ ، -٨)	د (و ، ٢٧٠°) ←	(..... ، .....)
(-٣ ، ١٠)	د (و ، -٢٧٠°) ←	(..... ، .....)

٢ أُرسم المثلّث ك م ل الذي إحداثيات رؤوسه : ك (٥ ، ٣) ، م (٢ ، ٢) ، ل (٣ ، ٥) ، ثمّ ارسم صورته بدوران حول نقطة الأصل وبزاوية قياسها ٩٠° عكس اتّجاه حركة عقارب الساعة .



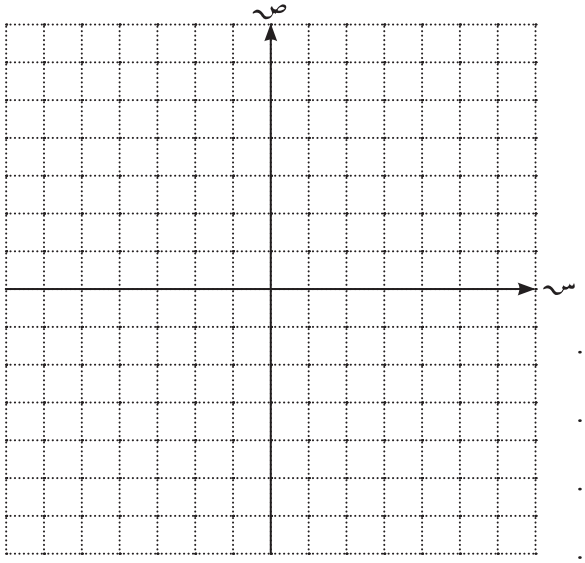
.....

.....

.....

.....

٣ أُرسم المثلّث أ ب جـ الذي إحداثيات رؤوسه : أ (-٢ ، -٣) ، ب (-٤ ، ٤) ، جـ (٥ ، ٢) ، ثمّ ارسم صورته بدوران حول نقطة الأصل وبزاوية قياسها ١٨٠° مع اتّجاه حركة عقارب الساعة .



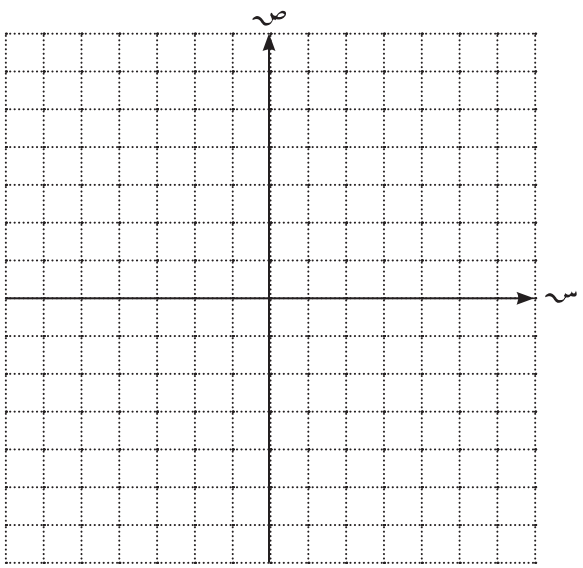
.....

.....

.....

.....

٤ أُرسم المستطيل ف هـ ي م الذي إحداثيات رؤوسه : ف (٣ ، ١) ، هـ (٣ ، -١) ، ي (-٣ ، -١) ، م (-٣ ، ١) ، ثمّ ارسم صورته تحت تأثير د (و ، ٢٧٠°) حيث (و) نقطة الأصل .



.....

.....

.....

.....

.....

مهارات تفكير عليا :

٥ اِختر الإجابة الصحيحة .

إذا كانت صورة النقطة (١ ، ٢) تحت تأثير د (و ، -٩٠°) هي (٣ + س ، ص - ٤) ، فإنّ قيمة كلّ من س ، ص هي :

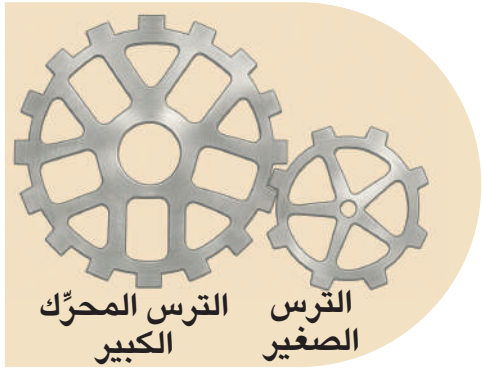
(أ) س = ١ ، ص = ٣

(ب) س = -١ ، ص = ٣

(ج) س = -١ ، ص = -٣

(د) س = ٣ ، ص = -١

٦ الدوران الذي يجب أن يُجريه الترس الكبير المحرِّك ليدور الترس الصغير بزاوية ١٨٠° مع اتّجاه حركة عقارب الساعة هو :



(أ) ٩٠° مع اتّجاه حركة عقارب الساعة

(ب) ٩٠° عكس اتّجاه حركة عقارب الساعة

(ج) ١٨٠° مع اتّجاه حركة عقارب الساعة

(د) ١٨٠° عكس اتّجاه حركة عقارب الساعة

٤ - ٢ التكبير Enlargement

سوف تتعلّم : التكبير وإيجاد صورة شكل هندسي بالتكبير .

العبارات والمفردات :

تكبير	Enlargement	تصغير	Reduction

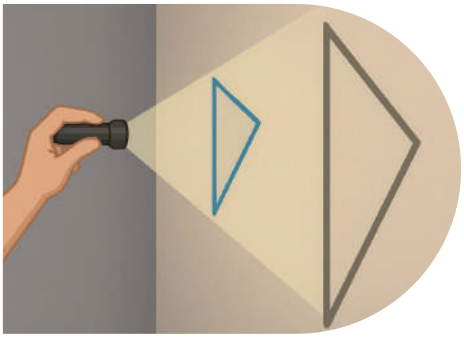
درست فيما سبق ثلاثة أنواع من التحويلات الهندسية هي : الانعكاس والإزاحة والدوران ، وتُسمّى **تحويلات متقايسة** (تحافظ على الأبعاد) .
ويكون الشكل وصورته تحت تأثير هذه التحويلات المتقايسة متطابقَين .
هل يوجد تحويل **غير متقايس** (لا يحافظ على الأبعاد) ؟

اللوازم

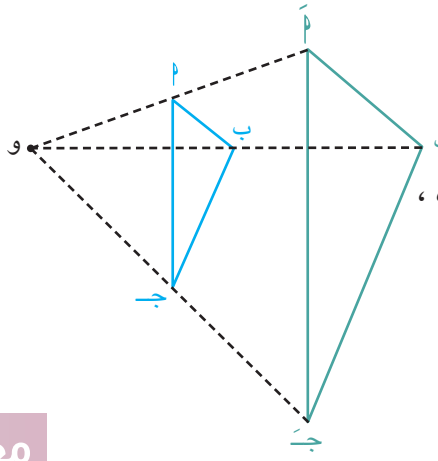
مسطرة

إستكشِف

قام نايف بإجراء تجربة عملية من خلال تسليط الضوء على مثلّث ، حيث حصل على صورة مكبَّرة للمثلّث على الحائط .



في الشكل المقابِل وتحت تأثير هذا التحويل :



و ⟵ و ، أ ⟵ أَ

ب ⟵ بَ ، جـ ⟵ جـَ

حيث $\frac{\text{و أَ}}{\text{و أ}} = \frac{\text{و بَ}}{\text{و ب}} = \frac{\text{و جـَ}}{\text{و جـ}}$ = عدد ثابت ،

نلاحظ أنّ :

$\overline{\text{أ ب}} \longleftarrow \overline{\text{أَبَ}}$

$\overline{\text{ب جـ}} \longleftarrow \overline{\text{بَ جـَ}}$

$\overline{\text{أ جـ}} \longleftarrow \overline{\text{أَجـَ}}$

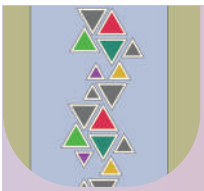
١ أوجِد بالقياس :

أ ب = ... ، أَ بَ = ...

ب جـ = ... ، بَ جـَ = ...

أ جـ = ... ، أَ جـَ = ...

∴ هذا التحويل غير متقايس (لا يحافظ على الأبعاد) .



معلومة مفيدة :

التكبير هو من المبادئ الأساسية في هندسة الديكور والتصميم الداخلي ، ويمكن الاستفادة منه بعدّة طرق لتحسين جمالية الأشكال واللوحات .

٢ أكمِل ما يلي :

$\frac{أ'ب'}{أب} = \ldots\ldots = \ldots\ldots$

$\frac{ب'جـ'}{ب جـ} = \ldots\ldots = \ldots\ldots$

$\frac{أ'جـ'}{أجـ} = \ldots\ldots = \ldots\ldots$

$\therefore \frac{أ'ب'}{أب} = \frac{ب'جـ'}{ب جـ} = \frac{أ'جـ'}{أجـ} = \ldots\ldots$

نلاحظ أنّ :

- $أ'ب' = ٢ أب$ ، $و أ' = ٢ و أ$
  $ب'جـ' = ٢ ب جـ$ ، $و ب' = ٢ و ب$
  $أ'جـ' = ٢ أجـ$ ، $و جـ' = ٢ و جـ$
- النقطة وصورتها ومركز التحويل تقع على استقامة واحدة .

يُسمّى هذا التحويل تكبيرًا .

- وتُسمّى النقطة الثابتة (و) مركز التكبير ، ويُسمّى العدد ٢ (هنا) معامل التكبير .

وعمومًا :

التكبير الذي مركزه النقطة الثابتة (و) هو تحويل هندسي يُعيِّن لكلّ نقطة أ غير (و) صورة أ' ∋ $\overleftarrow{و أ}$ ،
أ ⟵ أ' ، و ⟵ و ، وتُسمى النقطة الثابتة (و) مركز التكبير .
ويكون $\frac{و أ'}{و أ}$ = عددًا ثابتًا .
ويُسمّى العدد الثابت معامل التكبير ويُرمز إليه بالرمز م .
ويُرمز إلى هذا التحويل بالرمز ت (و ، م) ويُقرأ ت تكبير مركزه النقطة (و) ومعامله م .

لاحِظ أنّ :

(١) $\frac{\text{و أ}'}{\text{و أ}} = \text{م} \Leftrightarrow \text{و أ}' = \text{م} \times \text{و أ}$

(٢) (و) مركز التكبير نقطة صامدة .

(٣) ستقتصر دراستنا على التكبير الذي معامله م $>$ صفر .

(٤) يُقصد بالتكبير (تكبير أو تصغير) :

- إذا كان م $>$ ١ فالتحويل يمثّل تكبيرًا .
- إذا كان صفر $<$ م $<$ ١ فالتحويل يمثّل تصغيرًا .

مثال توضيحي :

عيِّن صورة Δ أ ب جـ تحت تأثير تكبير مركزه النقطة و ، ومعامله = ٣ .

الحلّ :

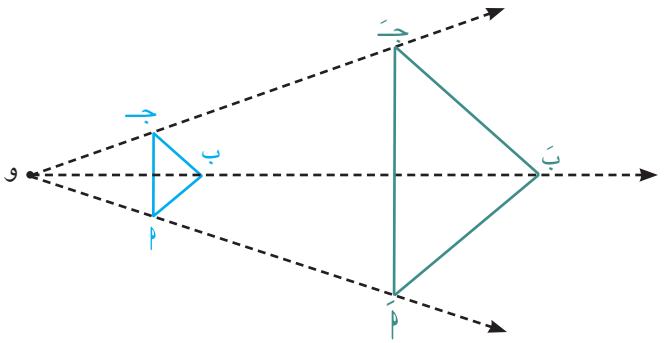
نرمز إلى هذا التكبير بالرمز ت (و ، ٣)

رسمنا $\overleftarrow{\text{و أ}}$ ، $\overleftarrow{\text{و ب}}$ ، $\overleftarrow{\text{و جـ}}$ وعيّنّا النقاط أَ ، بَ ، جـَ باستخدام الفرجار بحيث يكون :

و أَ = ٣ و أ

و بَ = ٣ و ب

و جـَ = ٣ و جـ



فيكون :

Δ أ ب جـ $\xleftarrow{\text{ت (و ، ٣)}}$ Δ أَ بَ جـَ

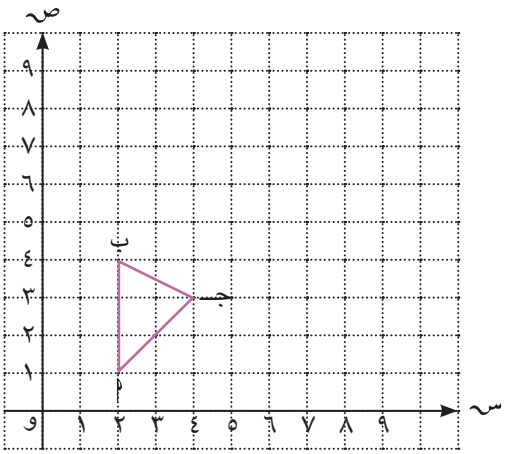
التكبير في المستوى الإحداثي

إذا كانت (س ، ص) نقطة في المستوى الإحداثي حيث (و) نقطة الأصل ، م معامل التكبير ، فإنّ :

(س ، ص) $\xleftarrow{\text{ت (و ، م)}}$ (م س ، م ص) .

مثال (١) :

أُرسم صورة المثلّث أ ب جـ مستخدِمًا التكبير الذي مركزه نقطة الأصل ومعامله ٢ .



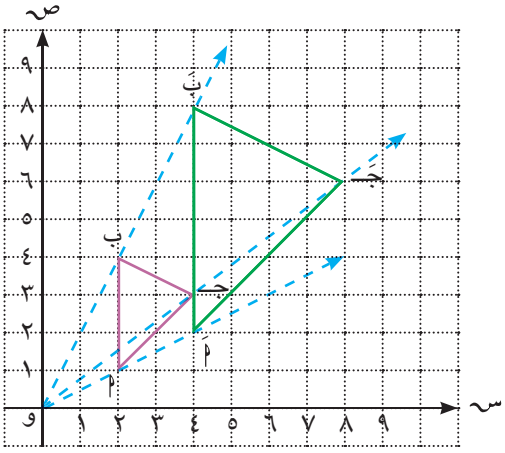
الحلّ :

(س ، ص) $\xleftarrow{\text{ت (و ، ٢)}}$ (٢ س ، ٢ ص)

أ (٢ ، ١) $\xleftarrow{\text{ت (و ، ٢)}}$ أَ (٢ × ٢ ، ٢ × ١) = أَ (٤ ، ٢)

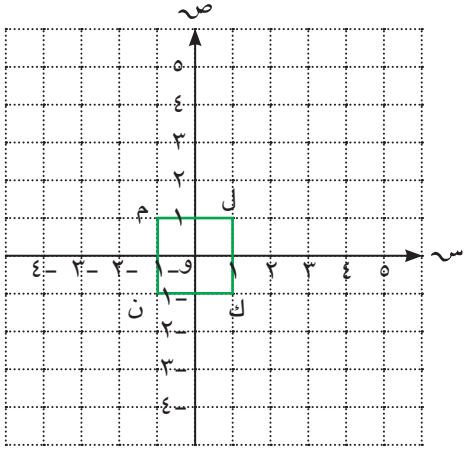
ب (٤ ، ٢) $\xleftarrow{\text{ت (و ، ٢)}}$ بَ (٢ × ٢ ، ٢ × ٤) = بَ (٨ ، ٤)

جـ (٣ ، ٤) $\xleftarrow{\text{ت (و ، ٢)}}$ جَـ (٢ × ٢ ، ٢ × ٣) = جَـ (٦ ، ٨)



دورك الآن (١)

أُرسم صورة المربّع ل م ن ك مستخدِمًا التكبير ت (و ، ٤) .



(س ، ص) $\xleftarrow{\text{ت (و ، ٤)}}$ (٤ س ، ٤ ص)

ل (١ ، ١) $\xleftarrow{\text{ت (و ، ٤)}}$ لَ (..... ، .....)

م (-١ ، ١) $\xleftarrow{\text{ت (و ، ٤)}}$ مَ (..... ، .....)

ن (-١ ، -١) $\xleftarrow{\text{ت (و ، ٤)}}$ نَ (..... ، .....)

ك (١ ، -١) $\xleftarrow{\text{ت (و ، ٤)}}$ كَ (..... ، .....)

∴ المربّع ل م ن ك $\xleftarrow{\text{ت (و ، ٤)}}$ المربّع لَ مَ نَ كَ .

عبِّر عن فهمك

إذا كان معامل التكبير يساوي ١ ، فما هي العلاقة بين الشكل وصورته ؟

خواصّ التكبير

بالرجوع إلى « دورك الآن (١) » ، تحقَّق من الخواصّ الآتية :

(١) التكبير يحافظ على الاستقامة .

(٢) التكبير يحافظ على البينية .

(٣) التكبير يحافظ على قياسات الزوايا .

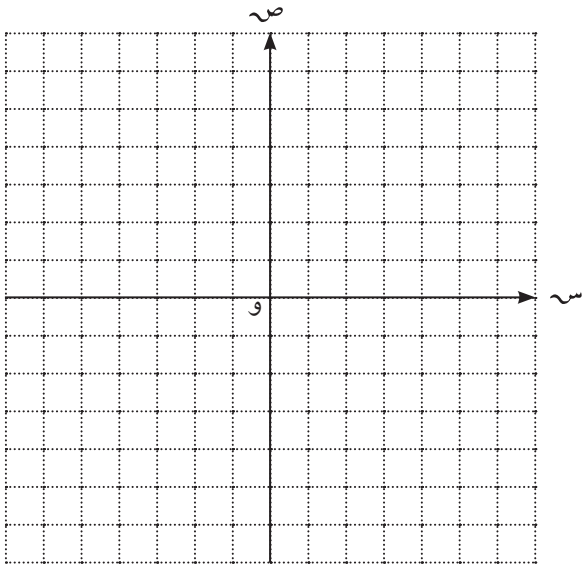
(٤) التكبير يحافظ على التوازي .

(٥) التكبير يحافظ على الاتّجاه الدوراني .

(٦) التكبير لا يحافظ على الأبعاد (تحويل غير متقايس)

دورك الآن (٢)

أُرسم المثلّث أ ب جـ حيث أ (٢ ، ٠) ، ب (٠ ، ٢) ، جـ (-٢ ، -٢) ، ثمّ ارسم صورته تحت تأثير ت (و ، ٣) حيث (و) نقطة الأصل .



.....

.....

.....

.....

.....

.....

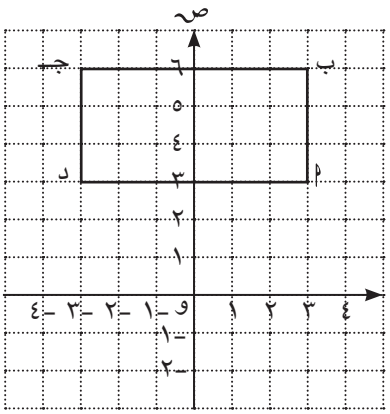
.....

.....

دورك الآن (٣)

١ **أُكتب النقاط التي تمثّل رؤوس الشكل أ ب جـ د ، ثمّ ارسم صورة الشكل مستخدِمًا التصغير الذي مركزه نقطة الأصل ومعامله $\frac{١}{٣}$.**

$(س ، ص) \xleftarrow{ت(و ، \frac{١}{٣})} (\frac{١}{٣} س ، \frac{١}{٣} ص)$



أ (..... ، .....) $\xleftarrow{ت(و ، \frac{١}{٣})}$ أَ (..... ، .....)

ب (..... ، .....) $\xleftarrow{ت(و ، \frac{١}{٣})}$ بَ (..... ، .....)

جـ (..... ، .....) $\xleftarrow{ت(و ، \frac{١}{٣})}$ جـَ (..... ، .....)

د (..... ، .....) $\xleftarrow{ت(و ، \frac{١}{٣})}$ دَ (..... ، .....)

∴ الشكل أ ب جـ د $\xleftarrow{ت(و ، \frac{١}{٣})}$ الشكل أَ بَ جـَ دَ

٢ **أكمِل من الرسم في الشكل السابق :**

(أ) نسبة محيط المستطيل أَ بَ جـَ دَ إلى محيط المستطيل أ ب جـ د

= .....

(ب) نسبة مساحة المستطيل أَ بَ جـَ دَ إلى مساحة المستطيل أ ب جـ د

= .....

إذا كان ت (و ، م) ، فإنّ :

- **نسبة محيط صورة الشكل الهندسي إلى محيطه تساوي معامل التكبير (م) .**
- **نسبة مساحة صورة الشكل الهندسي إلى مساحته تساوي مربّع معامل التكبير (م^{٢}) .**

مثال (٢) :

شكل هندسي مساحته ٢٥ م^{٢} ومساحة صورته تحت تأثير تكبير ما ، هي ١٠٠ م^{٢}
أوجِد معامل التكبير .

الحلّ :

$$\frac{\text{مساحة صورة الشكل}}{\text{مساحة الشكل}} = (\text{م})^{٢}$$

$$(\text{م})^{٢} = \frac{١٠٠}{٢٥}$$

$$\text{م}^{٢} = ٤ \longleftarrow \text{م} = ٢$$

∴ معامل التكبير يساوي ٢

دورك الآن (٤)

ليكن ت (و ، م) تكبيرًا حيث (و) نقطة الأصل ، أ ⟵ أَ ، ب ⟵ بَ .

أوجِد معامل التكبير أو التصغير (م) في كلّ من الحالات الآتية :

(أ) أ (٢ ، -١) ، أَ (٨ ، -٤)

م = $\frac{٨}{٢}$ = ...

أو م = $\frac{-٤}{-١}$ = ...

(ب) أ (٦ ، ٩) ، أَ (٢ ، ٣)

.....

(ج) أ ب = ٦ سم ، أَبَ = ٣٠ سم

.....

دورك الآن (٥)

شكل هندسي محيطه ١٢ م ومحيط صورته تحت تأثير تكبير ما هي ٤٨ م ، أوجِد معامل التكبير .

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

تمارين ذاتية :

١ أكمِل كلًّا ممّا يلي حيث (و) نقطة الأصل :

أ) أ (٣ ، ١) ⟵ ت (و ، ٥) .....

ب) ب (٠ ، -٢) ⟵ ت (و ، ٦) .....

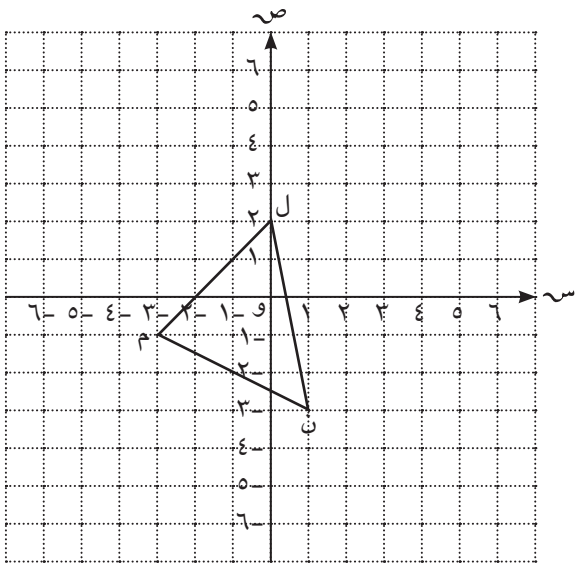
ج) جـ (٤ ، ٨) ⟵ ت (و ، $\frac{١}{٤}$) .....

د) د (-٤ ، ٦) ⟵ ت (و ، $\frac{١}{٢}$) .....

هـ) ك (-١٠ ، -١٢) ⟵ ت (و ، $\frac{٣}{٢}$) .....

و) ل (٩ ، -٧) ⟵ ت (و ، ١) .....

٢ أُكتب النقاط التي تمثّل رؤوس المثلّث ل م ن ، ثمّ ارسم المثلّث لَ مَ نَ صورة المثلّث ل م ن تحت تأثير ت (و ، ٢) .



.....

.....

.....

.....

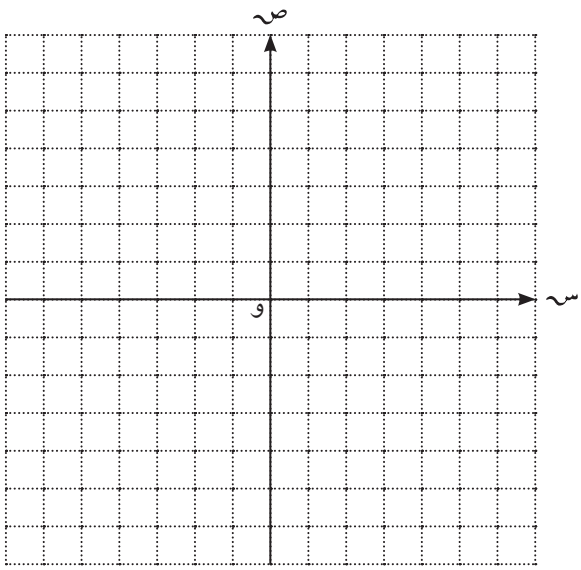
.....

.....

.....

.....

٣ أُرسم $\overline{أب}$ إذا كانت أ (٢ ، ١) ، ب (-١ ، -٢) ، ثمّ أُرسم $\overline{أَبَ}$ صورة $\overline{أب}$ بتكبير مركزه نقطة الأصل ومعامله ٣ .



.....

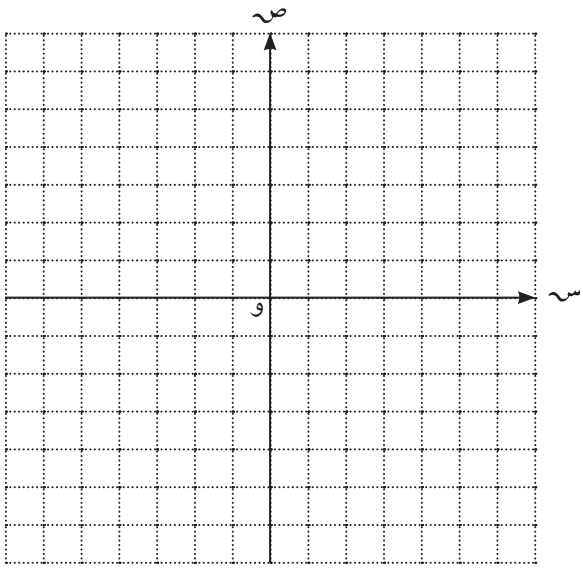
.....

.....

.....

.....

٤ أُرسم الشكل الرباعي ف هـ ي د الذي فيه ف (٦ ، ٠) ، هـ (٠ ، ٦) ، ي (-٦ ، ٠) ، د (٠ ، -٦) ، ثمّ ارسم الشكل فَ هَـ يَ دَ صورة الشكل ف هـ ي د تحت تأثير ت (و ، $\frac{١}{٢}$) .



.....

.....

.....

.....

.....

٥ أوجِد معامل التكبير أو التصغير (م) في كلّ من الحالات الآتية حيث النقطة أَ صورة النقطة أ ، والنقطة بَ صورة النقطة ب .

أ) أ (٤ ، ١) ، أَ (١٢ ، ٣)

.....

ب) أ (٠ ، ٥) ، أَ (٠ ، ١٠)

.....

ج) أ (-٢ ، -٦) ، أَ (-١ ، -٣)

.....

د) أ ب = ٨ سم ، أَ بَ = ١ سم

.....

٦ مستطيل بعداه ٣ سم ، ٥ سم . أوجِد محيط ومساحة صورته تحت تأثير تكبير ت (و ، ٣) .

.....

.....

.....

.....

مهارات تفكير عليا :

٧ اِختر الإجابة الصحيحة .

إذا كانت النسبة بين محيط صورة مثلّث إلى محيطه يساوي ٢ .

وكانت مساحة المثلّث تساوي (س + ٣) وحدة مربّعة ، فإنّ مساحة صورة المثلّث = ...

أ) (س + ٣)^{٢}

ب) ٢(س + ٣)

ج) ٤س + ١٢

د) س + ٦

٤ - ٣ المدرَّج التكراري

Histogram Frequency

سوف تتعلّم : الدوران في المستوى وإيجاد صورة شكل هندسي بالدوران .

العبارات والمفردات :

المدرَّج التكراري	Histogram Frequency

حُلّ وناقِش

سبق لك دراسة الجدول التكراري ذي الفئات ، والذي يُعتبر وسيلة مهمّة في تنظيم عدد كبير من البيانات ، ويمكن تمثيل البيانات الواردة في الجداول التكرارية بواسطة المدرَّج التكراري .

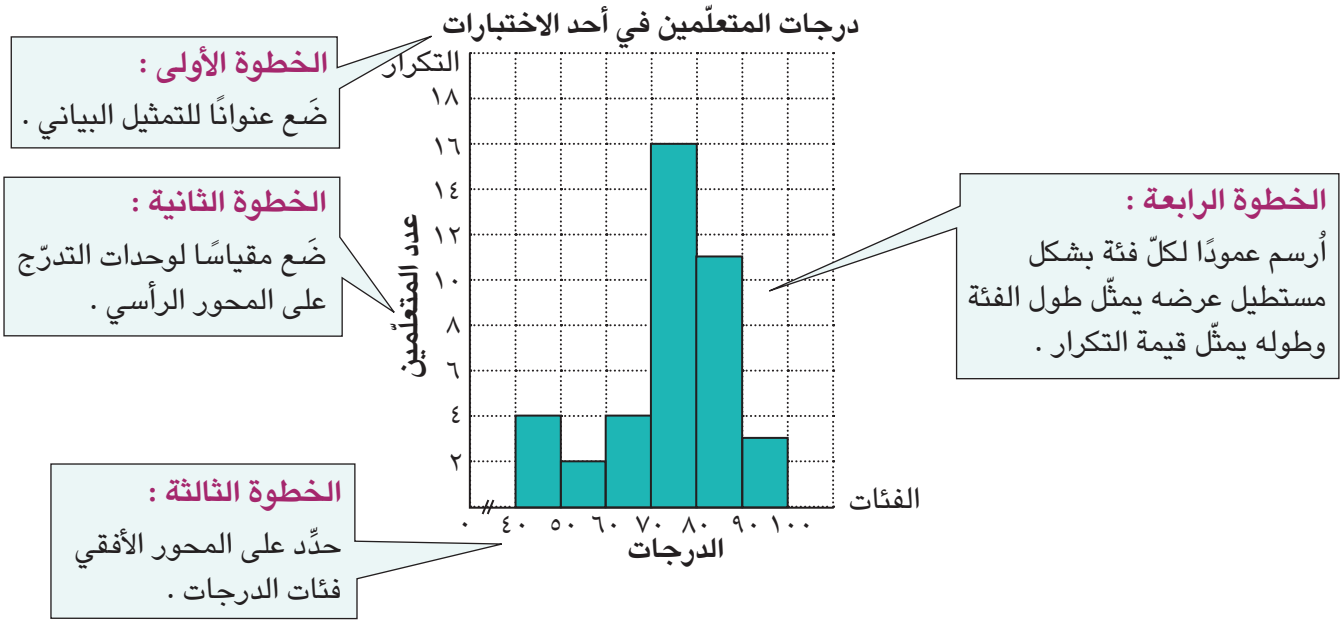
اللوازم

مسطرة

يوضّح الجدول الآتي الدرجات النهائية التي حصل عليها ٤٠ متعلّمًا في أحد الاختبارات (النهاية العظمى ١٠٠) .

الفئات	٤٠-	٥٠-	٦٠-	٧٠-	٨٠-	٩٠-
التكرار	٤	٢	٤	١٦	١١	٣

لتمثيل بيانات الجدول التكراري من خلال المدرَّج التكراري ، اِتّبِع الخطوات الآتية :



اِستخدِم المدرَّج التكراري للإجابة عمّا يلي :

١ كم عدد المتعلّمين الذين حصلوا على أقلّ من ٧٠ درجة ؟

.....

٢ بكم يزيد عدد المتعلّمين في الفئة الرابعة عن عدد المتعلّمين في الفئة الخامسة ؟

.....

المدرَّج التكراري : هو تمثيل بياني بالأعمدة المتلاصقة لمجموعة بيانات منظَّمة في جدول تكراري ذي فئات .

دورك الآن (١)

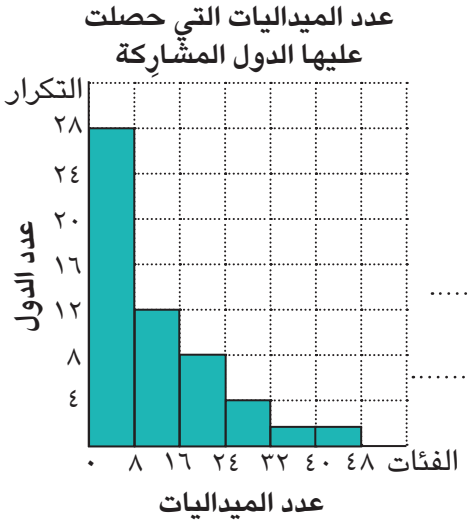
يمثّل المدرَّج التكراري المقابِل عدد الميداليات التي حصدتها الدول المشارِكة في إحدى الدورات الأولمبية .

أجِب عمّا يلي :

أ ما طول الفئة ؟ .....

ب كم عدد الدول التي حصلت على ٣٢ ميدالية فأكثر ؟ .....

ج كم عدد الدول التي حصلت على أقلّ من ٢٤ ميدالية ؟ .....



دورك الآن (٢)

السرعة القصوى في أحد الشوارع التجارية في مدينة الكويت العاصمة ٤٥ كم / س ، يبيّن الجدول أدناه عدد المخالفات المسجَّلة بحقّ عدد من سائقي المركبات الذين لم يلتزموا بالقانون .

مثِّل البيانات الواردة في الجدول باستخدام المدرَّج التكراري ،

الفئات	٤٥-	٥٠-	٥٥-	٦٠-	٦٥-
التكرار	٥	٨	١٠	٦	٣

ثمّ أجِب عما يلي :

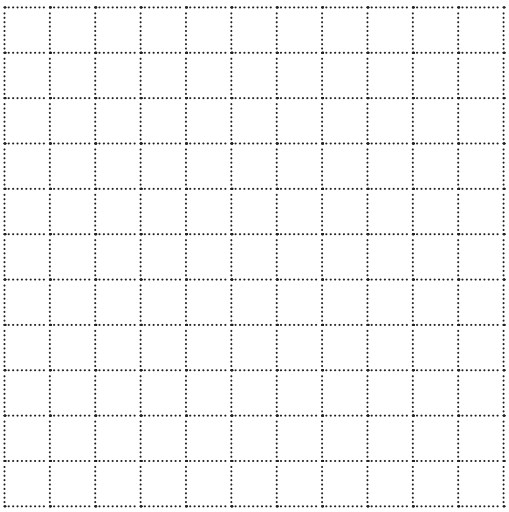
كم عدد مخالفات سائقي المركبات الذين بلغت سرعتهم ٥٥ كم / س فأكثر ؟ .....

دورك الآن (٣)

يوضّح الجدول التكراري المقابِل فئات أسعار أسهم بعض الشركات والمؤسَّسات التجارية المدرَجة في إحدى الأسواق المالية بالدولار الأميركي .

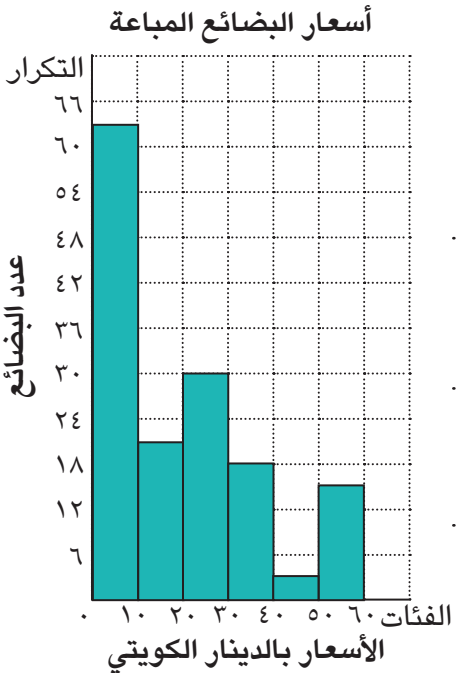
الفئات	-٦٠	-٧٠	-٨٠	-٩٠
التكرار	٢٨	٣٤	١٦	١٠

اِصنع مدرَّجًا تكراريًّا لهذه البيانات .



تمارين ذاتية :

١ يمثّل المدرَّج التكراري المقابِل أسعار مختلف البضائع المباعة في إحدى الجمعيات التعاونية بالدينار الكويتي .



أجِب عمّا يلي :

(أ) ما طول الفئة ؟

.....

(ب) كم عدد البضائع التي بلغ سعرها ٣٠ دينارًا فأكثر ؟

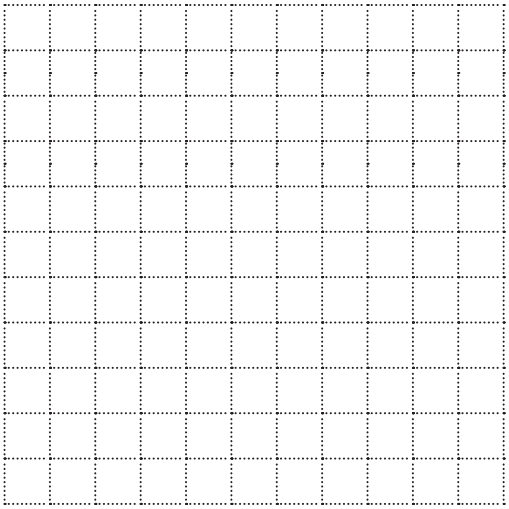
.....

(ج) ما الفئة الأكثر مبيعًا ؟

.....

٢ يبيّن الجدول الآتي الزمن بالدقائق الذي استغرقه ٤٠ متعلّمًا للوصول من المنزل إلى المدرسة ، اِصنع مدرَّجًا تكراريًّا لهذه البيانات .

الفئة (الزمن بالدقائق)	١٠-	١٥-	٢٠-	٢٥-	٣٠-
التكرار	١٤	١١	٦	٥	٤



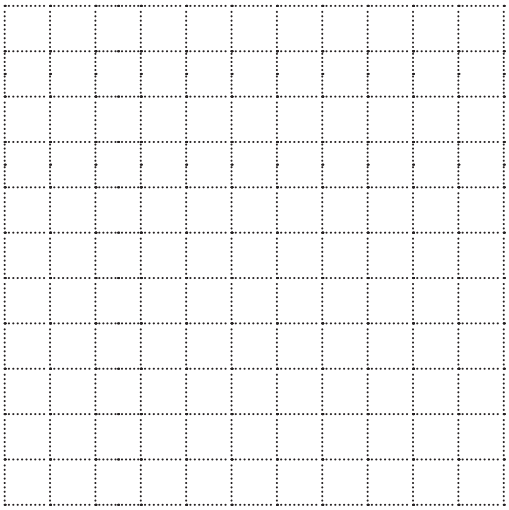
أجِب عمّا يلي :

(أ) كم عدد المتعلّمين الذين يصلون إلى المدرسة في أقلّ من ٢٠ دقيقة ؟ .....

(ب) كم عدد المتعلّمين الذين يصلون إلى المدرسة في ٢٥ دقيقة فأكثر ؟ .....

٣ يوضّح الجدول التكراري أطوال بعض المتعلّمين في إحدى المدارس ، اِصنع مدرَّجًا تكراريًّا لتمثيل البيانات .

الفئة (أطوال المتعلّمين)	١١٥-	١٢٥-	١٣٥-	١٤٥-	١٥٥-
التكرار	٨	١٢	٢٠	١٩	١٥



٤ - ٤ المضلّع التكراري

Polygon Frequency

سوف تتعلّم : الدوران في المستوى وإيجاد صورة شكل هندسي بالدوران .

العبارات والمفردات :

المضلّع التكراري	Polygon Frequency

حُلّ وناقِش

يعرض الجدول الآتي فئات الرواتب الشهرية (بالدينار) للموظَّفين في إحدى الشركات وتمّ تمثيلها بمدرَّج تكراري في الشكل (١) .

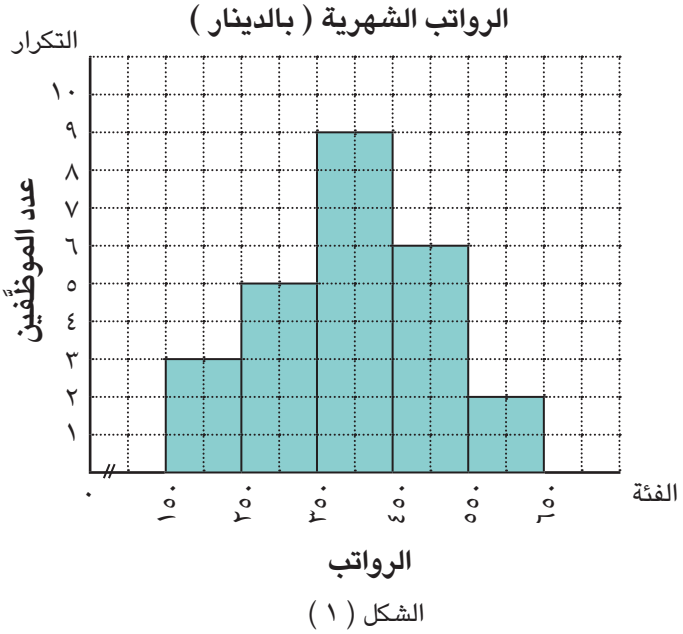
الفئة	١٥٠-	٢٥٠-	٣٥٠-	٤٥٠-	٥٥٠-
التكرار	٣	٥	٩	٦	٢
مركز الفئة					

تذكّر

مركز الفئة = (الحدّ الأعلى للفئة + الحدّ الأدنى للفئة) ÷ ٢

اللوازم

مسطرة



الشكل (١)

١ أكمِل الجدول السابق (أُكتب مراكز الفئات) .

٢ في الشكل (٢) ، اِتّبِع الخطوات الآتية :

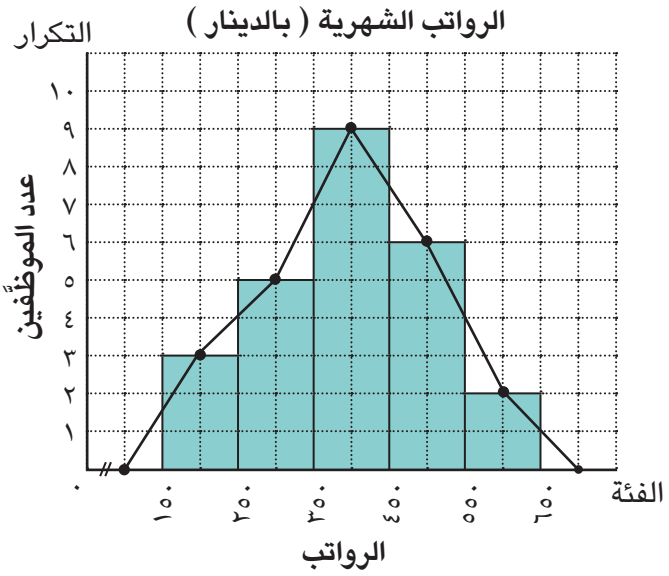
أ مثِّل مراكز الفئات على المحور الأفقي .

ب عيِّن النقاط التي تمثّل :
(مركز الفئة ، التكرار) .

ج صِل بين النقاط السابقة على التوالي مستخدِمًا حافّة المسطرة .

د أكمِل رسم المضلّع بتمثيل النقطتَين (١٠٠ ، ٠) ، (٧٠٠ ، ٠) ثمّ صِل .

(هاتان النقطتان ليستا من ضمن هذه البيانات)



الشكل (٢)

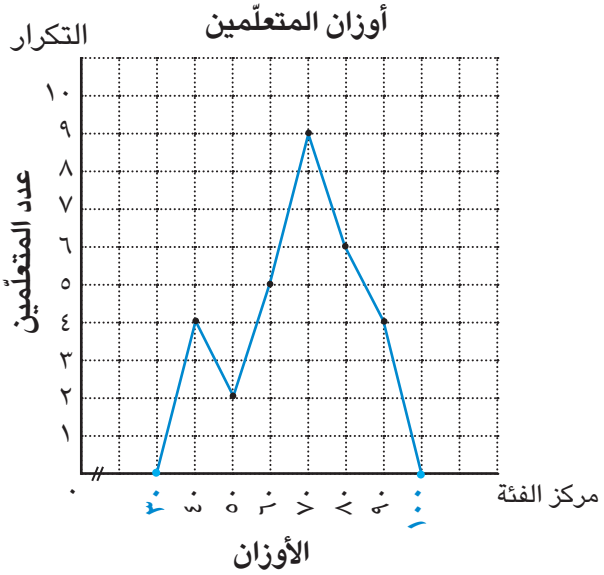
لاحِظ أنّ :

يُسمّى الشكل الناتج في النشاط السابق **مضلّعًا تكراريًّا** ، ويُعبَّر بوجه عامّ عن مقدار واتّجاه التغيّر في مجموعة من القِيَم .

دورك الآن (١)

يمثّل الشكل الآتي أوزان متعلّمي أحد فصول الصفّ التاسع .

تأمَّل الشكل ، ثمّ أجِب عمّا يلي :



أ ماذا يُسمّى التمثيل البياني ؟ .....

ب ما مركز الفئة الأكثر تكرارًا ؟ .....

ج ما مركز الفئة الأقلّ تكرارًا ؟ .....

مثال :

يبيّن الجدول المقابِل المسافة المقطوعة بالكيلومتر من قبل ٨٤ سائقًا في إحدى شركات سيّارات الأجرة في يوم من الأيّام .

الفئة	-١٠٠	-١٥٠	-٢٠٠	-٢٥٠	-٣٠٠	-٣٥٠
التكرار	٦	٩	١٦	٢٤	١٨	١١

مثِّل البيانات في الجدول السابق بمضلّع تكراري .

الحلّ :

(أ) نُكمل الجدول بإيجاد مراكز الفئات .

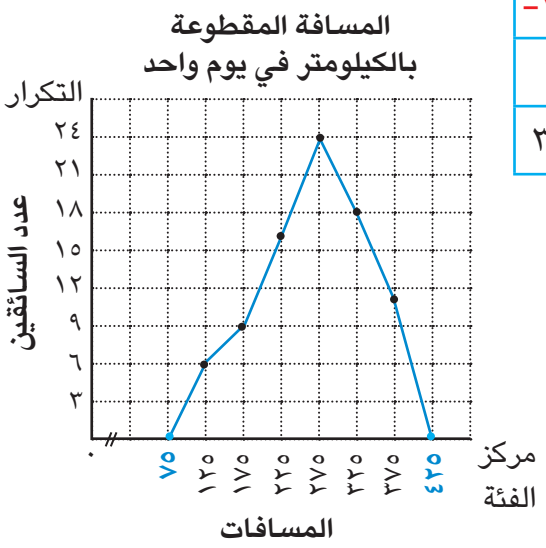
الفئة	-١٠٠	-١٥٠	-٢٠٠	-٢٥٠	-٣٠٠	-٣٥٠
التكرار	٦	٩	١٦	٢٤	١٨	١١
مركز الفئة	١٢٥	١٧٥	٢٢٥	٢٧٥	٣٢٥	٣٧٥

(ب) نمثّل مراكز الفئات على المحور الأفقي ، والتكرار على المحور الرأسي .

(ج) نعيّن النقاط التي تمثّل : (مركز الفئة ، التكرار) .

(د) نصل بين النقاط السابقة على التوالي مستخدِمين حافّة المسطرة .

(هـ) نُكمل رسم المضلّع .



دورك الآن (٢)

يبيّن الجدول الآتي أطوال متعلّمي الصفّ التاسع بالسنتيمتر في إحدى المدارس :

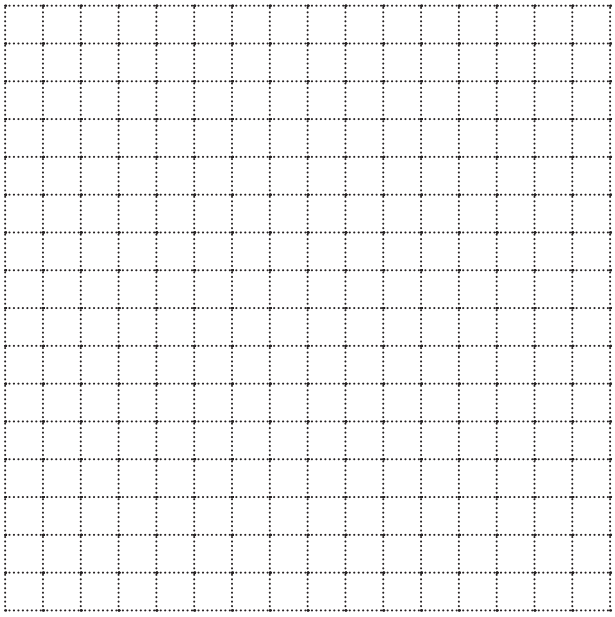
الفئة	-١٤٠	-١٥٠	-١٦٠	-١٧٠	-١٨٠
التكرار	٣	٧	٩	٤	٢
مركز الفئة	١٤٥		١٦٥		١٨٥

(أ) أكمِل الجدول السابق بإيجاد مراكز الفئات .

(ب) كم عدد المتعلّمين الذين تقلّ أطوالهم عن ١٦٠ سم ؟ .....

(ج) ما مركز الفئة الأكثر تكرارًا ؟ .....

(د) مثِّل البيانات في الجدول السابق بمضلّع تكراري .



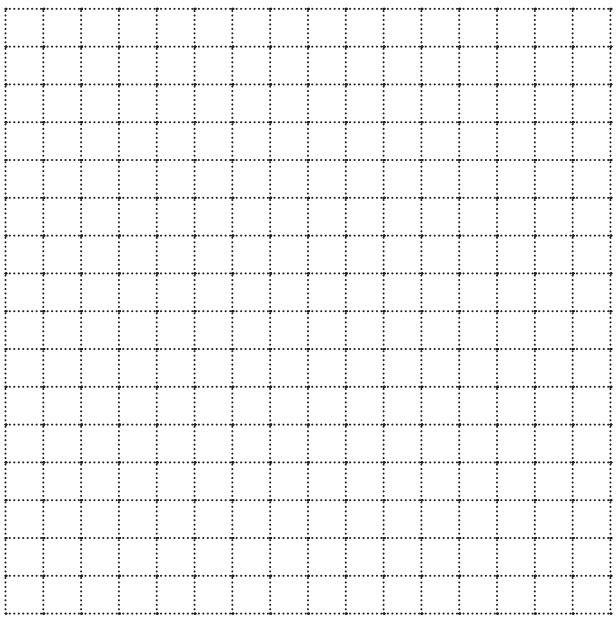
دورك الآن (٣)

يوضّح الجدول الآتي فئات الأعمار لمشاهدة برنامج تلفزيوني :

الفئة	١٤-	١٩-	٢٤-	٢٩-	٣٤-	٣٩-	٤٤-
التكرار	٨	١٦	٢٠	٢٦	٣٦	٢١	١٢
مركز الفئة	١٦,٥			٣١,٥			

(أ) أكمِل الجدول السابق بإيجاد مراكز الفئات .

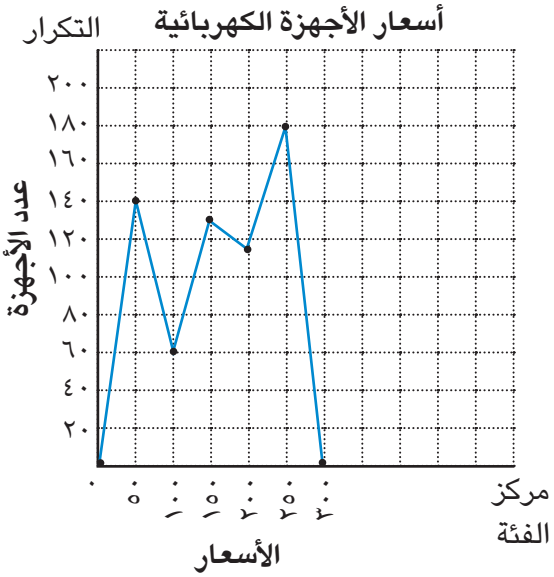
(ب) مثِّل البيانات في الجدول السابق بمضلّع تكراري .



تمارين ذاتية :

١ يمثّل الشكل الآتي أسعار الأجهزة الكهربائية التي بيعت خلال شهر في أحد المحلّات .

تأمَّل الشكل ، ثمّ أجِب عمّا يلي :



(أ) ماذا يُسمّى التمثيل البياني ؟

.....

(ب) ما مركز الفئة الأكثر تكرارًا ؟

.....

(ج) ما التكرار المقابِل لمركز الفئة ١٥٠ ؟

.....

٢ يوضّح الجدول الآتي درجات الحرارة المسجَّلة لبعض دول العالم خلال أحد الأشهر.

الفئة	-١٠	-٢٠	-٣٠	-٤٠	-٥٠
التكرار	٣	٦	٩	٧	٥
مركز الفئة					

(أ) أكمِل الجدول السابق بإيجاد مراكز الفئات .

(ب) مثِّل البيانات في الجدول السابق بمضلّع تكراري .

٣ يوضّح الجدول الآتي كتل أجسام بعض متعلّمي الصفّ التاسع بالكيلوجرام .

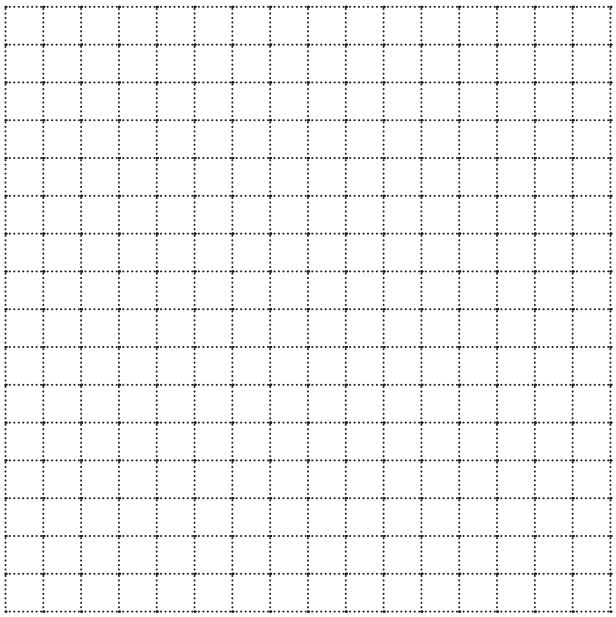
الفئة	٤٥-	٥٥-	٦٥-	٧٥-	٨٥-	٩٥-
التكرار	٦	٧	٢١	٢٧	١١	٣
مركز الفئة						

(أ) تأمَّل الجدول السابق ، ثمّ أجِب عمّا يلي :

- ما طول الفئة ؟ .....
- كم عدد المتعلّمين الذين تبلغ كتلة أجسامهم ٦٥ كيلوجرامًا فأكثر ؟ .....

(ب) أكمِل الجدول السابق بإيجاد مراكز الفئات .

(ج) مثِّل البيانات في الجدول السابق بمضلّع تكراري .



٤ يوضّح الجدول الآتي أعمار بعض زوّار مركز الشيخ جابر الأحمد الثقافي في أحد الأيّام .

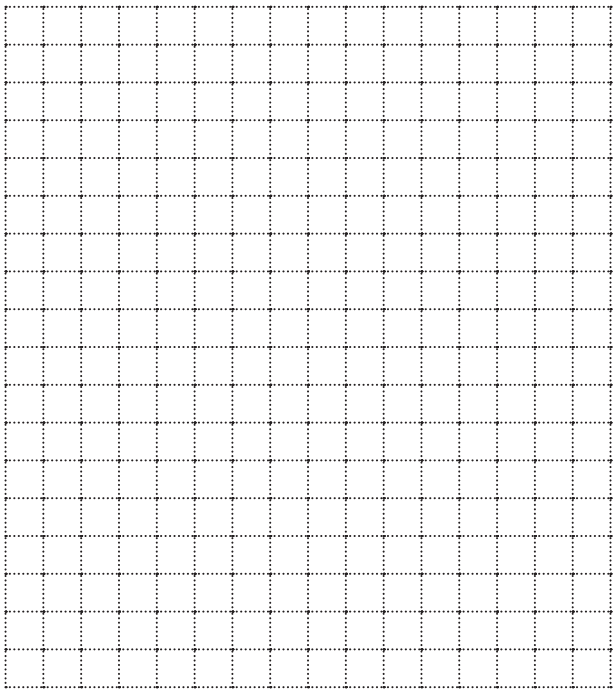
الفئة	-٦	-١٢	-١٨	-٢٤	-٣٠	-٣٦	-٤٢
التكرار	٥٠	٨٥	٦٠	٧٢	٤٥	٣٨	٢٠
مركز الفئة							

(أ) تأمَّل الجدول السابق ، ثمّ أجِب عمّا يلي :

- ما طول الفئة ١٢- ؟ .....
- ما الحدّ الأعلى للفئة الأخيرة ؟ .....

(ب) أكمِل الجدول السابق بإيجاد مراكز الفئات .

(ج) مثِّل البيانات في الجدول السابق بمضلّع تكراري .



٤ - ٥

مخطّط الصندوق ذي العارضتَين
Box and Whisker Plot

سوف تتعلّم : الدوران في المستوى وإيجاد صورة شكل هندسي بالدوران .

العبارات والمفردات :

مخطّط الصندوق ذي العارضتَين	Box and Wisker plot
الأرباعيات	Quartils
الأرباعي الأدنى	Lower Quartil
الأرباعي الأعلى	Upper Quartil

اِستكشِف

لديك البيانات الآتية : ٨٢ ، ٧٧ ، ٨٥ ، ٧٦ ، ٨٠ ، ٧٥ ، ٨٤

لاحِظ أنّ

الوسيط يقسم البيانات المرتَّبة إلى نصفَين متساويَين ، نصف أدنى ونصف أعلى .

١ رتِّب البيانات تصاعديًّا .....

٢ أوجِد المدى .....

٣ أوجِد الوسيط .....

٤ أوجِد الوسيط للنصف الأدنى للبيانات .....

٥ أوجِد الوسيط للنصف الأعلى للبيانات .....

٦ مثِّل على خطّ الأعداد كلًّا ممّا يلي :

أكبر قيمة ، أصغر قيمة ، الوسيط ، الوسيط للنصف الأدنى للبيانات ، الوسيط للنصف الأعلى للبيانات .

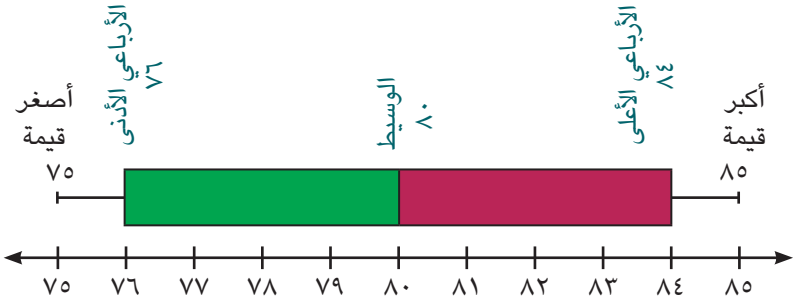
الأرباعيات هي ثلاثة أعداد تقسّم مجموعة البيانات إلى أربعة أجزاء متساوية من عدد البيانات .
الأرباعي الأوسط هو الوسيط .
الأرباعي الأدنى هو الوسيط للنصف الأدنى من مجموعة البيانات .
الأرباعي الأعلى هو الوسيط للنصف الأعلى من مجموعة البيانات .
مخطّط الصندوق ذي العارضتَين هو طريقة لعرض توزيع مجموعة بيانات باستخدام خمس قِيَم رئيسية لها .

لعرض البيانات السابقة بمخطّط الصندوق ذي العارضتَين ، اِتّبِع الخطوات الآتية :

١ أُرسم خطّ الأعداد بحيث يتضمّن القيمتَين الكبرى والصغرى للبيانات .

٢ حدِّد الوسيط والأرباعي الأعلى والأرباعي الأدنى على خطّ الأعداد .

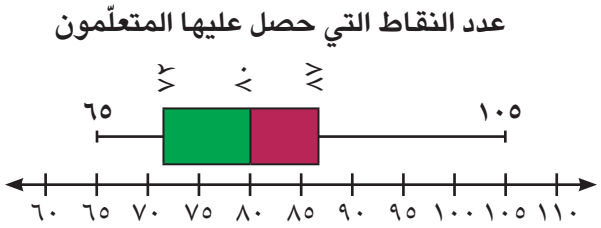
٣ أُرسم الصندوق ذا العارضتَين كما في الشكل .



مثال (١) :

يبيّن مخطّط الصندوق ذي العارضتَين عدد النقاط التي حصل عليها بعض متعلّمي الصفّ التاسع في إحدى المسابقات .

أكمِل كلًّا ممّا يلي :



(أ) أصغر قيمة من البيانات هي ٦٥ وأكبر قيمة من البيانات هي ١٠٥

(ب) الأرباعي الأوسط (الوسيط) هو ٨٠

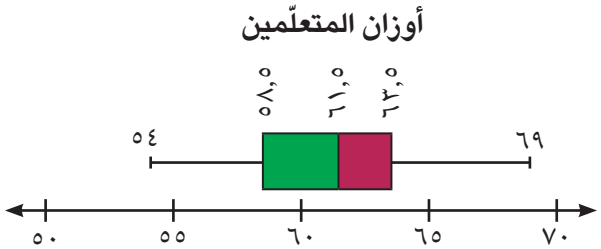
(ج) الأرباعي الأدنى هو ٧٢

(د) الأرباعي الأعلى هو ٨٧

دورك الآن (١)

يبيّن مخطّط الصندوق ذي العارضتَين أوزان بعض متعلّمي الصفّ التاسع بالكيلوجرامات .

أكمِل كلًّا ممّا يلي :



(أ) القيمة الصغرى للبيانات هي .....
والقيمة الكبرى للبيانات هي .....

(ب) الأرباعي الأوسط (الوسيط) هو .....

(ج) الأرباعي الأدنى هو .....

(د) الأرباعي الأعلى هو .....

مثال (٢) :

يتغيّر سعر الإعلان في الصحف الكبرى وفقًا ليوم الإعلان وعدد أسطره ومساحته ، إليك بعض هذه الأسعار بالدينار : ٥ ، ٤ ، ٣ ، ١٥ ، ٦ ، ٧ ، ١٢ ، ٨ ، ٢٥ ، ٩ ، ١٠ ، ١٤ ، ٢٧ ، ١٦

اِصنع مخطّطًا لصندوق ذي عارضتَين لهذه الأسعار .

الحلّ :

١ رتِّب القيم تصاعديًّا :
٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨ ، ٩ ، ١٠ ، ١٢ ، ١٤ ، ١٥ ، ١٦ ، ٢٥ ، ٢٧

٢ المدى = ٢٧ - ٣ = ٢٤

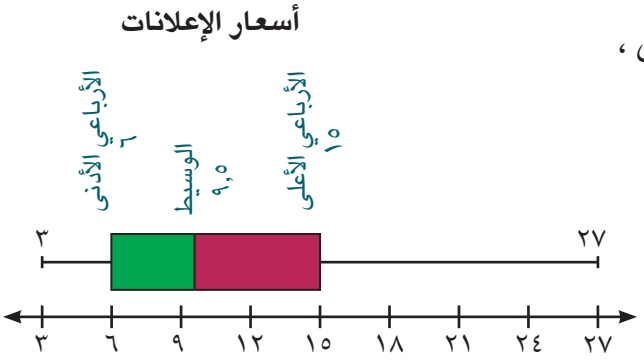
٣ الوسيط = $\frac{٩ + ١٠}{٢}$ = ٩,٥ دنانير

٤ نحدّد النصف الأدنى للبيانات : ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨ ، ٩
الأرباعي الأدنى = ٦

٥ نحدّد النصف الأعلى للبيانات : ١٠ ، ١٢ ، ١٤ ، ١٥ ، ١٦ ، ٢٥ ، ٢٧
الأرباعي الأعلى = ١٥

٦ أُرسم خطًّا يتضمّن القيمتَين الكبرى والصغرى ،
ثمّ عيِّن عليه موقع كلّ من : الوسيط ،
الأرباعي الأدنى ، الأرباعي الأعلى .

٧ أُرسم صندوقًا يبيّن الأرباعيات ،
ثمّ اكتب عنوانًا .



دورك الآن (٢)

في مسابقة مادّة الرياضيات ، حصل أعضاء فريق إحدى المدارس المحلّية على الدرجات التالية (مرتَّبة ترتيبًا تصاعديًّا) : ٩٠ ، ٩٣ ، ٩٤ ، ٩٥ ، ٩٦ ، ٩٩ ، ١٠٠ أوجِد كلًّا ممّا يلي :

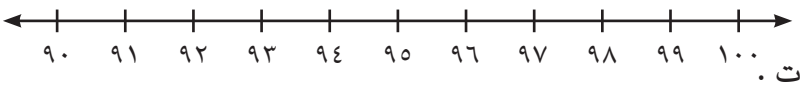
أ القيمة الصغرى للبيانات هي ..... والقيمة الكبرى للبيانات هي .....

ب الأرباعي الأوسط (الوسيط) هو .....

ج الأرباعي الأدنى هو .....

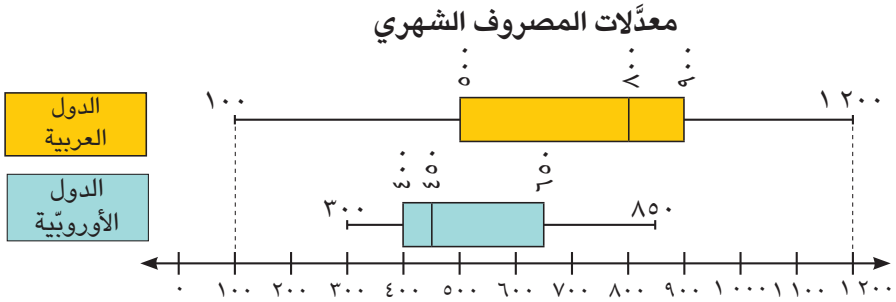
د الأرباعي الأعلى هو .....

هـ أُرسم مخطّط الصندوق ذي العارضتَين لهذه المجموعة من البيانات .



دورك الآن (٣)

في الشكل الآتي يوضّح مخطّط الصندوق ذي العارضتَين (العلوي) بيانات معدَّل مصروف المنزل الشهري على الطعام بالدولار الأميركي في ١٢ دولة عربية ، ويمثّل مخطّط الصندوق ذي العارضتَين (السفلي) بيانات معدَّل مصروف المنزل الشهري على الطعام بالدولار الأميركي في ١٢ دولة أوروبّية .



أكمِل الجدول الآتي :

	الدول العربية	الدول الأوروبّية
المدى		
الوسيط		
الأرباعي الأدنى		
الأرباعي الأعلى		
الوسيط أقرب إلى الأرباعي		
الوسيط أبعد عن الأرباعي		

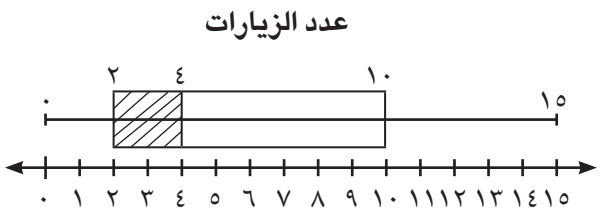
نلاحِظ أنّ :

١ الدول العربية تُنفق أكثر على الطعام من الدول الأوروبّية .

٢ التفاوت في الإنفاق على الطعام في الدول العربية أكبر من التفاوت في الإنفاق على الطعام في الدول الأوروبّية .

تمارين ذاتية :

١ **سُئل عدد من المتعلّمين في أحد فصول الصفّ التاسع عن عدد مرّات زياراتهم لمحلّات بيع الملابس الرياضية خلال فترة ما ، والنتائج موضَّحة في مخطّط الصندوق ذي العارضتَين في الشكل المقابِل .**



أوجِد كلًّا ممّا يلي :

(أ) مدى البيانات .....

(ب) الوسيط .....

(ج) الأرباعي الأدنى .....

(د) الأرباعي الأعلى .....

٢ **في مجموعة البيانات الآتية : ٤ ، ٨ ، ٥ ، ٣ ، ١ ، ٧ ، ٦**

(أ) أوجِد كلًّا ممّا يلي :

(١) القيمة الصغرى للبيانات هي .....

(٢) القيمة الكبرى للبيانات هي .....

(٣) المدى هو .....

(٤) الوسيط هو .....

(٥) الأرباعي الأدنى هو .....

(٦) الأرباعي الأعلى هو .....

(ب) أُرسم مخطّط الصندوق ذي العارضتَين لهذه المجموعة من البيانات .

٣ تصفّحت حصّة كتيّبًا دعائيًّا لأحد متاجر الملابس . سجّلت أسعار الفساتين فيه (بالدينار) كالآتي : ٢٥ ، ١٦ ، ٢٠ ، ٢٣ ، ٢٢ ، ٢٥ ، ٢٤ ، ٢٠

أُرسم مخطّط الصندوق ذي العارضتَين لمجموعة البيانات السابقة .

.....

.....

.....

.....

٤ أُرسم مخطّط الصندوق ذي العارضتَين لمجموعة البيانات الآتية :

٩٠٠ ، ٧٠٠ ، ٧٧٥ ، ٦٢٤ ، ٦٨٨ ، ٧٦٠ ، ٧٢٠ ، ٧٨٩ ، ٦٤٤ ، ٦٠٠

.....

.....

.....

.....

٤ - ٦

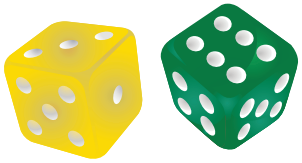
الترجيح والعدالة - الاحتمال
Odds and Fairness - Probability

سوف تتعلّم : إيجاد ترجيح وقوع حدث ما ، واحتمال وقوع حدث ما .

العبارات والمفردات :

تجربة	Experiment	ترجيح	Odds
تجربة عشوائية	Random Experiment	ألعاب عادلة	Fair Games
حدث	Event	الاحتمال	Probability
عدد نواتج	Number of Outcomes		

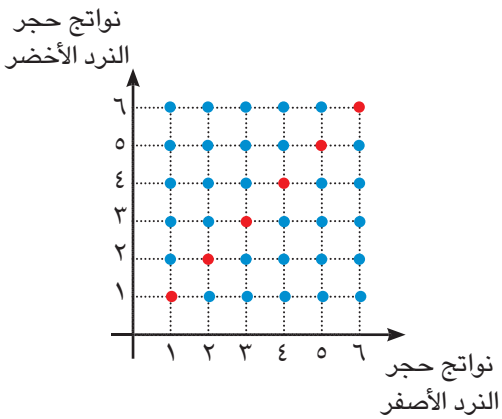
حُلّ وناقِش



يلعب عبدالله وعمر لعبة من ألعاب الفرص وهي رمي مكعّبَين متمايزَين منتظمَين مرقَّمَين من ١ إلى ٦ ، وملاحظة العددَين الظاهرَين على الوجه العلوي .

- يربح عبدالله نقطة إذا كان العددان الظاهران متساويَين .
- يربح عمر نقطة إذا كان العددان الظاهران مختلفَين .

١ مستعينًا بالتمثيل البياني لفضاء العيّنة المقابِل ، أكمِل الجدول التالي :



	عبدالله	عمر
عدد نواتج الفوز	.....	.....
عدد نواتج عدم الفوز	.....	.....
عدد نواتج الفوز / عدد نواتج عدم الفوز	..... /	..... / .....

٢ حدِّد أيّهما لديه فرصة أكبر للفوز ؟
اِشرح ذلك .

.....

.....

يمكننا استخدام كلمة ترجيح لوصف فرصة وقوع حدث ما إلى عدم وقوعه .

ترجيح حدث ما : هو نسبة عدد نواتج وقوع الحدث إلى عدد نواتج عدم وقوعه .

$$\text{ترجيح حدث ما} = \frac{\text{عدد نواتج وقوع الحدث}}{\text{عدد نواتج عدم وقوع الحدث}}$$

مثال (١) :

عند رمي مكعّب منتظم مرقَّم من ١ إلى ٦ مرّة واحدة ، وملاحظة الرقم الظاهر على الوجه العلوي .

أ) أُكتب فضاء العيّنة .

ب) أوجِد ترجيح ظهور العدد ٢ .

الحلّ :

أ) ف = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ }

ب) عدد نواتج (ظهور العدد ٢) = ١

عدد نواتج (عدم ظهور العدد ٢) = ٥

$$\text{ترجيح (ظهور العدد ٢)} = \frac{\text{عدد نواتج (ظهور العدد ٢)}}{\text{عدد نواتج (عدم ظهور العدد ٢)}}$$

$= \frac{١}{٥}$ أو ١ : ٥

تذكَّر

فضاء العيّنة (ف) : هو مجموعة كلّ النواتج الممكنة عند إجراء تجربة عشوائية .

دورك الآن (١)

أوجِد ترجيح سحب قرص أزرق من حقيبة تحتوي على قرصَين أزرقَي اللون ، و ٥ أقراص حمراء اللون ، و ٤ أقراص بيضاء اللون .

عدد نواتج (سحب قرص أزرق) = ...

عدد نواتج (عدم سحب قرص أزرق) = ...

ترجيح (سحب قرص أزرق) = ...

= .....

دورك الآن (٢)

أوجِد ترجيح كلّ حدث ممّا يلي :

(أ) ظهور صورة عند رمي قطعة نقود معدنية مرّة واحدة .

.....

.....

(ب) ظهور العدد (٢ أو ٥) عند رمي مكعّب منتظم مرقَّم من ١ إلى ٦ مرّة واحدة .

.....

.....

بالرجوع إلى حُلّ وناقِش السابق ، هل هذه اللعبة عادلة ؟ فسِّر إجابتك .

.....

.....

تذكَّر

عند رمي قطعة نقود مرّة واحدة وملاحظة الوجه العلوي ، فإنّ : ف = { ص ، ك }

اللعبة التي يكون ترجيح الفوز فيها متساويًا لجميع اللاعبين (تكافؤ الفرص) تُسمّى لعبة عادلة .

مثال (٢) :

يلعب كلّ من عبدالله وخالد وعيسى لعبة المكعّبات المرقَّمة من ١ إلى ٦ .
يحصل عبدالله على نقطة إذا ظهر على المكعّب العدد ١ .
يحصل خالد على نقطة إذا ظهر على المكعّب عدد زوجي .
يحصل عيسى على نقطة إذا ظهر على المكعّب العدد (٣ أو ٥) .
أوجِد ترجيح الفوز لكلّ لاعب ، ثمّ اذكر ما إذا كانت اللعبة عادلة أم غير عادلة .

الحلّ :

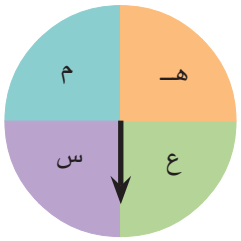
ترجيح فوز عبدالله = ١ : ٥

ترجيح فوز خالد = ٣ : ٣ = ١ : ١

ترجيح فوز عيسى = ٢ : ٤ = ١ : ٢

∴ اِختلف ترجيح الفوز من لاعب إلى آخر ، لذلك تكون اللعبة غير عادلة .

دورك الآن (٣)



تتبادل كلّ من عائشة وهناء ومنيرة وساره تدوير المؤشّر في الشكل المقابِل ، على أن تحصل كلّ لاعبة على نقطة إذا توقّف المؤشّر عند الحرف الأوّل من اسمها ، أوجِد ترجيح الفوز لكلّ لاعبة ، ثمّ اذكر ما إذا كانت اللعبة عادلة أم غير عادلة .

.....

.....

دورك الآن (٤)

في كلّ لعبة ، حدِّد ترجيح فوز كلّ لاعب ، ثمّ اذكر ما إذا كانت اللعبة عادلة أم غير عادلة .

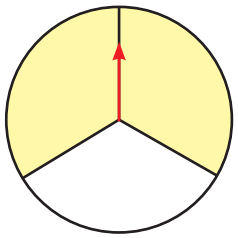
(أ) ترمي نوف وحنان قطعة نقود معدنية . تفوز نوف بنقطة إذا ظهرت صورة ، وتفوز حنان بنقطة إذا ظهرت كتابة .

ترجيح فوز نوف = ...

ترجيح فوز حنان = ...

∴ اللعبة .....

(ب) في الدوّارة التالية يُدير سالم ونايف المؤشّر الدوّار . يفوز سالم بنقطة إذا توقّف المؤشّر في المنطقة الصفراء ، ويفوز نايف بنقطة إذا توقّف المؤشّر في المنطقة البيضاء .



ترجيح فوز سالم = ...

ترجيح فوز نايف = ...

∴ اللعبة .....

(ج) عند رمي مكعّب منتظم مرقَّم من ١ إلى ٦ . إذا ظهر عدد زوجي تفوز منى بنقطة ، وإذا ظهر عدد أوّلي تفوز أمل بنقطة ، وإذا ظهر عدد يقبل القسمة على ٣ ، تفوز إيمان بنقطة .

ترجيح فوز منى = ...

ترجيح فوز أمل = ...

ترجيح فوز إيمان = ...

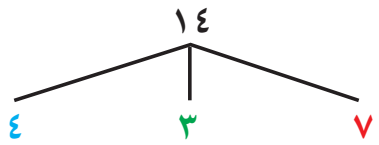
∴ اللعبة .....

لأيّ تجربة عشوائية ، اِحتمال وقوع حدث (أ) :

$$ل(أ) = \frac{\text{عدد نواتج وقوع الحدث } (أ)}{\text{عدد كلّ النواتج الممكنة}}$$

مثال (٣) :

يحتوي صندوق على ٧ أقلام حمراء ، ٣ أقلام خضراء ، ٤ أقلام زرقاء . إذا تمّ اختيار قلم واحد عشوائيًّا ، فأوجِد كلًّا ممّا يلي :



(أ) ل (أزرق) = عدد نواتج وقوع الحدث / عدد كلّ النواتج الممكنة = ٤/١٤ = ٢/٧

(ب) ل (ليس أخضر) = عدد نواتج وقوع الحدث / عدد كلّ النواتج الممكنة = ١١/١٤

(ج) ل (أصفر) = عدد نواتج وقوع الحدث / عدد كلّ النواتج الممكنة = صفرًا/١٤ = صفرًا

(د) ترجيح الحدث أزرق = عدد نواتج وقوع الحدث / عدد نواتج عدم وقوع الحدث = ٤/١٠ = ٢/٥

دورك الآن (٥)

في تجربة إلقاء مكعّب منتظم مرقَّم من ١ إلى ٦ مرّة واحدة ، أكمِل كلًّا ممّا يلي :

(أ) عدد النواتج الممكنة = ٦

(ب) عدد نواتج الحدث أ (ظهور عدد فردي) = ...

(ج) عدد نواتج الحدث ب (ظهور عامل من عوامل العدد ٦) = ...

(د) ل (أ) = .../..... = ...

(هـ) ل (ب) = .../..... = ...

(و) ترجيح الحدث أ = ...

(ز) ترجيح الحدث ب = ...

انتبه

إذا كان ترجيح الحدث هو ٣/١٠ ، فهذا لا يعني أنّ عدد نواتج وقوع الحدث هو ٣ وعدد نواتج عدم وقوعه هي ١٠ فقد تكون هذه النسبة مبسَّطة .

مثال (٤) :

إذا كان ترجيح حدث ما هو ٣ : ١٠ ، فأوجِد احتمال وقوع هذا الحدث .

الحلّ :

ترجيح (الحدث) = عدد نواتج وقوع الحدث / عدد نواتج عدم وقوعه = ٣ك/١٠ك ؛ ك عدد ثابت ، ك ≠ صفرًا

إذًا عدد كلّ النواتج الممكنة = عدد نواتج وقوع الحدث + عدد نواتج عدم وقوعه

= ٣ك + ١٠ك = ١٣ك

اِحتمال (الحدث) = عدد نواتج وقوع الحدث / عدد كلّ النواتج الممكنة = ٣ك/١٣ك

∴ اِحتمال وقوع هذا الحدث = ٣/١٣

عبِّر عن فهمك

١ إذا كان ترجيح حدث ما هو ٧ : ١ ، فما هو احتمال وقوع هذا الحدث ؟

٢ إذا كان احتمال وقوع حدث ما يساوي $\frac{١}{٢}$ ، فما ترجيح هذا الحدث ؟

٣ هل يمكن أن يتساوى ترجيح حدث ما مع احتمال هذا الحدث ؟

تمارين ذاتية :

١ أوجِد ترجيح كلّ حدث ممّا يلي :

أ (ظهور كتابة) عند رمي قطعة نقود معدنية مرّة واحدة

.....

ب الحصول على (عدد أكبر من أو يساوي ٢) عند رمي مكعّب منتظم مرقَّم من ١ إلى ٦ مرّة واحدة .....

ج (سحب كرة خضراء) من حقيبة تحتوي على ٤ كرات خضراء و٣ كرات حمراء

.....

٢ أوجِد ترجيح الفوز في كلّ حالة ، ثمّ اذكر ما إذا كانت اللعبة عادلة أم لا :

أ عند رمي قطعة نقود معدنية ، يحصل سالم على نقطة إذا ظهرت صورة ويحصل سعود على نقطة إذا ظهرت كتابة .

.....

.....

ب عند رمي مكعّب منتظم مرقَّم من ١ إلى ٦ ، تحصل حصّة على نقطة إذا ظهر العدد ١ وتحصل عبير على نقطة إذا ظهر العدد (٢ أو ٣ أو ٤ أو ٥) وتحصل هدى على نقطة إذا ظهر العدد ٦ .

.....

.....

٣ يحوي صندوق بطاقات متماثلة مرقَّمة من ١ إلى ١٠ ، إذا سحبت بطاقة عشوائيًّا ، فأوجِد كلًّا ممّا يلي :

(أ) ل (ظهور عدد أوّلي) .....

(ب) ل (ظهور عامل من عوامل العدد ٤) .....

(ج) ترجيح (ظهور عامل من عوامل العدد ٤) .....

(د) ترجيح (ظهور عدد زوجي) .....

(هـ) ترجيح (ظهور العدد ١٠) .....

٤ يمارس ٢٥ متعلّمًا في الصفّ التاسع رياضات مختلفة ، منهم ١٠ يمارسون رياضة كرة السلّة فقط ، ٨ يمارسون رياضة كرة القدم فقط والباقون يمارسون رياضة الجري فقط .
اِختير متعلّم عشوائيًّا . ما احتمال أن يكون هذا المتعلّم :

(أ) ممارِسًا كرة السلّة ؟ .....

(ب) لا يمارس رياضة الجري ؟ .....

(ج) ممارِسًا كرة القدم أو رياضة الجري ؟ .....

٥ إذا كان ترجيح حدث ما هو ٣ : ٢ ، فما احتمال هذا الحدث ؟ .....

٦ إذا كان احتمال وقوع حدث ما هو $\frac{٥}{٩}$ ، فما ترجيح هذا الحدث ؟ .....

تقويم الوحدة التعليمية الرابعة
Unit Four Assessment

أوّلًا : البنود المقالية

١ أكمِل كلًّا ممّا يلي :

أ) أ (٣ ، -٤) ← د (و ، ٩٠°) ← .....

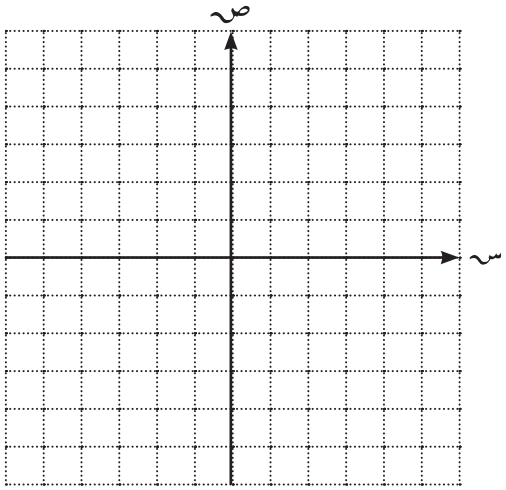
ب) أ (٣ ، -٤) ← د (و ، -٩٠°) ← .....

ج) أ (٣ ، -٤) ← د (و ، ١٨٠°) ← .....

د) أ (-٣ ، ٥) ← ت (و ، ٤) ← .....

هـ) أ (٠ ، -١٠) ← ت (و ، $\frac{١}{٥}$) ← .....

٢ أُرسم المثلّث ع م ل الذي رؤوسه : ع (٠ ، -٤) ، م (-٣ ، ٠) ، ل (٢ ، ١) ، ثمّ ارسم صورته بدوران حول نقطة الأصل وبزاوية قياسها ٢٧٠° عكس اتّجاه حركة عقارب الساعة .



.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

٣ ليكن ت (و ، م) تكبيرًا حيث (و) نقطة الأصل ، ب ← بَ ، جـ ← جـَ .
أوجِد معامل التكبير أو التصغير (م) في كلّ من الحالات الآتية :

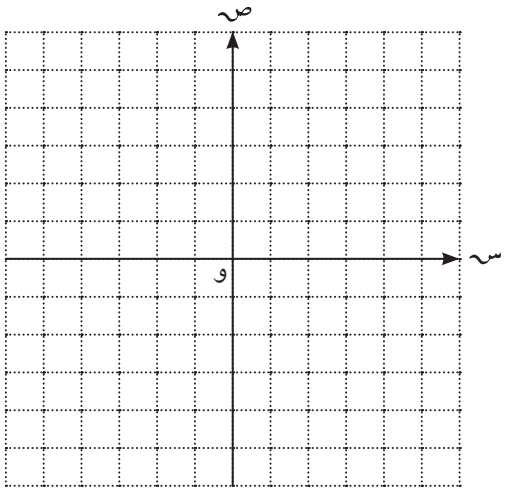
أ) ب (٤ ، ٨) ، بَ (١ ، ٢)

.....

ب) ب جـ = ٣ سم ، بَ جـَ = ٢٧ سم

.....

٤ أُرسم Δ أ ب جـ الذي رؤوسه هي : أ (٠ ، ٥) ، ب (٥ ، ٠) ، جـ (- ٥ ، ٥) ،
ثمّ ارسم صورته بتكبير ت (و ، $\frac{٢}{٥}$) .



.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

٥ من الجدول التكراري الآتي :

الفئة	-٤	-٨	-١٢	-١٦	-٢٠
التكرار	٨	٥	٤	٧	٣
مركز الفئة					

(أ) أكمِل الجدول السابق بإيجاد مراكز الفئات .

(ب) مثِّل البيانات السابقة بمدرَّج تكراري .

(ج) مثِّل البيانات السابقة بمضلّع تكراري .

٦ من الجدول التكراري الآتي :

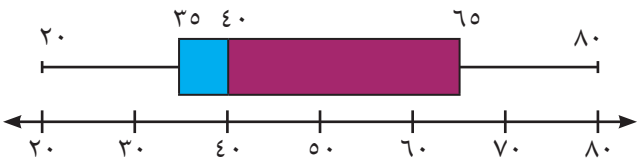
الفئة	-١٠	-٢٠	-٣٠	-٤٠	-٥٠
التكرار	٥	١٠	٢٠	١٠	٥
مركز الفئة					

(أ) أكمِل الجدول السابق بإيجاد مراكز الفئات .

(ب) مثِّل البيانات السابقة بمدرَّج تكراري .

(ج) مثِّل البيانات السابقة بمضلّع تكراري .

٧ يبيّن مخطّط الصندوق ذي العارضتَين مجموعة من البيانات ، أوجد كلًّا ممّا يلي :



(أ) المدى = ...

(ب) الوسيط = ...

(ج) الأرباعي الأدنى = ...

(د) الأرباعي الأعلى = ...

٨ البيانات التالية توضّح كتل أجسام عدد من متعلّمي الصفّ التاسع بالكيلوجرام كما يلي :

٦٥ ، ٥٧ ، ٥٩ ، ٦١ ، ٥٠ ، ٦٧ ، ٦٤ ، ٦٦ ، ٦٠ ، ٦٣ ، ٦٩

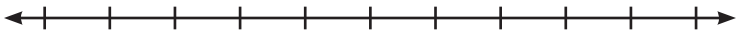
أوجِد كلًّا من :

(أ) الوسيط = ...

(ب) الأرباعي الأدنى = ...

(ج) الأرباعي الأعلى = ...

(د) أُرسم مخطّط الصندوق ذي العارضتَين .



٩ أوجِد احتمال وقوع الأحداث التي ترجيحها كالآتي :

(أ) ١ : ٧

.....

.....

(ب) ٦ : ٥

.....

.....

١٠ يحتوي كيس على ٨ كرات زرقاء و٣ كرات خضراء و٤ كرات حمراء وكرة واحدة بيضاء .
سُحبت كرة واحدة عشوائيًّا.
أوجِد كلًّا ممّا يلي :

(أ) ل (زرقاء) .....

(ب) ل (بيضاء) .....

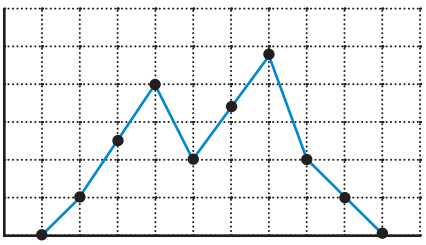
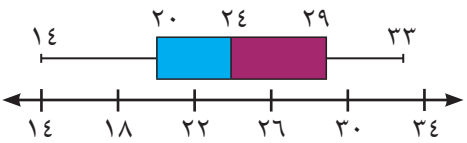
(ج) ل (ليست خضراء) .....

(د) ترجيح (سحب كرة زرقاء) .....

(هـ) ترجيح (سحب كرة حمراء) .....

ثانيًا : البنود الموضوعية

في البنود (١ – ٨) ، ظلِّل [أ] إذا كانت العبارة صحيحة ، وظلِّل [ب] إذا كانت العبارة غير صحيحة .

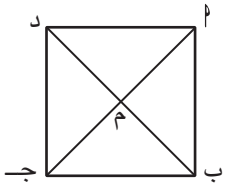
١ د (و ، -٣٠°) يكافئ د (و ، ٣٣٠°)	[أ]	[ب]
٢ الدوران تحويل هندسي لا يحافظ على الأبعاد .	[أ]	[ب]
٣ التكبير تحويل هندسي لا يحوي نقاطًا صامدة .	[أ]	[ب]
٤ مثلّث أطوال أضلاعه ٥ سم ، ٦ سم ، ٣ سم ، فإنّ محيط صورته تحت تأثير تكبير ت (و ، ٢) هو ٢٨ سم .	[أ]	[ب]
٥ طول الفئة (٤ – ٩) هو ٥	[أ]	[ب]
٦ أسلوب التمثيل في الشكل المجاور هو : المدرَّج التكراري . 	[أ]	[ب]
٧ في مخطّط الصندوق ذي العارضتَين المقابِل ، الأرباعي الأعلى لهذه البيانات هو ٢٠ 	[أ]	[ب]
٨ عند رمي مكعّب منتظم مرقَّم من ١ إلى ٦ ، يفوز عيد بنقطة إذا ظهر عدد أوّلي ، ويفوز فهيد بنقطة إذا ظهر عدد زوجي ، فإنّ هذه اللعبة عادلة .	[أ]	[ب]

في البنود (٩ – ١٨) ، لكلّ بند أربعة اختيارات ، واحد فقط منها صحيح ، ظلِّل الإجابة الصحيحة .

٩ شكل هندسي مساحته ٢ سم^{٢} ومساحة صورته تحت تأثير تكبير ما هي ٥٠ سم^{٢} ، فإنّ معامل التكبير هو :

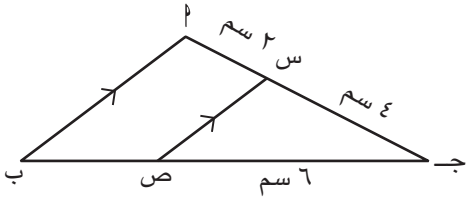
[أ] ٢٥ [ب] ١٢,٥ [ج] ٥ [د] ١٠٠

١٠ ﺃ ب جـ د مربّع تقاطع قطرَيه في النقطة م ، صورة Δ ﺃ ب م بدوران د (م ، - ٢٧٠°) هي :



أ Δ ب جـ م
ب Δ ﺃ ب م
ج Δ جـ د م
د Δ د ﺃ م

١١ في الشكل المقابِل : إذا كانت $\overline{\text{س ص}}$ صورة $\overline{\text{ﺃ ب}}$ بتكبير مركزه جـ ، فإنّ معامله هو :



أ $\frac{٢}{٣}$
ب $\frac{٣}{٢}$
ج $\frac{١}{٢}$
د ٢

١٢ إذا كانت النقطة جـ (١ ، ٢) هي صورة النقطة ﺃ بتصغير ت (و ، $\frac{١}{٣}$) ، فإنّ ﺃ هي :

أ $(\frac{١}{٣} ، \frac{٢}{٣})$
ب (١ ، ٣)
ج (٣ ، ٦)
د (٣ ، ٥)

١٣ مركز الفئة الثالثة هو :

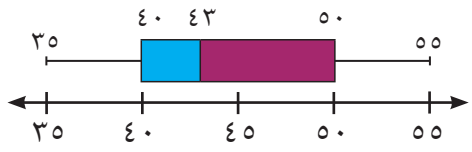
الفئة	-١٤	-١٨	-٢٢	-٢٦
التكرار	٦	١٨	١٨	١٠

أ ١٨
ب ٢٠
ج ٢٢
د ٢٤

١٤ في البيانات الإحصائية ، إذا كان مركزا فئتَين متتاليتَين هما ١٥ ، ٢٥ على الترتيب ، فإنّ طول الفئة يساوي :

أ ١٠
ب ١٥
ج ٢٠
د ٢٥

١٥ في مخطّط الصندوق ذي العارضتَين التالي ، المدى لهذه البيانات هو :



أ ٥٠
ب ٤٣
ج ٤٠
د ٢٠

١٦ إذا كان الترجيح لحدث ما يساوي ٢ : ٣ ، فإنّ احتمال وقوع هذا الحدث يساوي :

أ $\frac{٢}{٥}$ ب $\frac{٢}{٣}$ ج $\frac{٣}{٢}$ د $\frac{٣}{٥}$

١٧ إذا كان احتمال وقوع حدث ما $\frac{٥}{١٣}$ ، فإنّ ترجيح هذا الحدث هو :

أ ٨ : ١٣ ب ٥ : ١٨ ج ٨ : ٥ د ٥ : ٨

١٨ ترجيح ظهور عدد يقبل القسمة على ٣ عند رمي مكعّب منتظم مرقَّم من ١ إلى ٦ مرّة واحدة هو :

أ ١ : ٣ ب ١ : ٢ ج ٢ : ١ د ٣ : ١

المشروع الثاني :
الفسيفساء والرياضيات

في الرياضيات ، يساعد التكبير في تصميم الفسيفساء على تكوين الشكل الهندسي نفسه بحجم مختلف ، دون أن تتغيّر الزوايا أو نسب الأضلاع ، وهذا ما يستخدمه فنّانو الفسيفساء لتغطية مساحات واسعة بها ، مع الحفاظ على جمالية التصميم وتناسق الأشكال . وبهذا المشروع سوف تربط فنّ الفسيفساء بمفهوم التكبير .

خطّة العمل :

تقوم كلّ مجموعة من المتعلّمين بتصميم زخرفة فسيفسائية باستخدام أشكال هندسية بسيطة (مربّعات ، مثلّثات ، مسدّسات ...) ، ثمّ تطبيق عملية التكبير على التصميم بمعامل معيَّن واستخدامها في عمل لوحة فنّية جذّابة .

خطوات تنفيذ المشروع :

- **تصميم الفسيفساء :** يرسم المتعلّمون شكل (مربّع أو مثلّث أو مسدّس) على ورق رسم بياني .
- **تطبيق التكبير :** يحدّد المتعلّمون معامل (التكبير / التصغير) ويرسمون صورة الشكل .
- **قُصّ ولوِّن :** يقوم المتعلّمون بقصّ الشكل وصورته وتلوينهما بألوان جذّابة ومتناسقة .
- **صمِّم لوحتك :** اِعتمِد على الشكل الذي اخترته وصورته بالتكبير لتكوّن لوحتك الخاصّة .
- **ملاحظة هامّة :** يمكنك رسم الشكل لعدّة مرّات أو استخدام شكلَين أو أكثر في تصميم اللوحة حسب حاجتك .

علاقات وتواصل :

تتبادل المجموعات الأوراق وتتأكّد من صحّة ودقّة تطبيق المشروع .

عرض العمل :

تعرض كلّ مجموعة عملها وتناقش خطوات تنفيذ العمل .

المراجع

- الرياضيات ، الصف التاسع ، الطبعة الأولى ٢٠٢٤ - ٢٠٢٥ م ،
  وزارة التربية ، قطاع البحوث التربوية والمناهج .
- الرياضيات ، الصف التاسع ، الطبعة التجريبية ٢٠٢٣ - ٢٠٢٤ م ،
  وزارة التربية ، قطاع البحوث التربوية والمناهج .

9

الكتاب كاملًا

قيِّم مناهجنا