أجابة نماذج نصار ورق عمل أول فصل ثانى

((مذكره مجانية ... المرجع: الكتاب المدرسى وكراسة التمارين وزارة التربية والتعليم الكويتية))

عمل / أ . أحمد نصار

(1)

$$\int \cot x \, dx$$

الحل:

$$\int \cot x \, dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx$$

$$u = \sin x \Longrightarrow du = \cos x \, dx$$

$$\int \cot x \, dx = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C = \ln|\sin x| + C$$

(2)

$$\int \frac{3t^2 - 6t}{t^3 - 3t^2 + 8} dt$$

نفرض أن $u = t^3 - 3t^2 + 8 \longrightarrow du = (3t^2 - 6t)\ dt$

$$\int \frac{3t^2 - 6t}{t^3 - 3t^2 + 8} dx = \int \frac{1}{u} du = \ln|u| + C$$
$$= \ln\left|t^3 - 3t^2 + 8\right| + C$$

....

$$\int \frac{x^3 + 4}{x} dx$$
$$= \int \left(\frac{x^3}{x} + \frac{4}{x}\right) dx$$
$$= \int \left(x^2 + \frac{4}{x}\right) dx$$
$$= \frac{x^3}{3} + 4 \ln|x| + C$$

(3)

أوجد: $\int (x^2-2)e^{x^3-6x}\,dx$

الحل

$I = \int e^{x^3-6x} \cdot (x^2-2)\,dx$

$= \int e^u \cdot \frac{1}{3}\,du$

$= \frac{1}{3}e^u + c$

$= \frac{1}{3}e^{x^3-6x} + c$

$u = x^3-6x$

$du = (3x^2-6)\,dx$

$du = 3(x^2-2)\,dx$

$\frac{1}{3}du = (x^2-2)\,dx$

(4)

أوجد: $\int \frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}\,dx$

الحل

$I = \int e^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{1}{x^2}\,dx$

$= -\int e^u \cdot du$

$= -e^u + c = -e^{\frac{1}{x}} + c$

$u = \frac{1}{x}$

$du = -\frac{1}{x^2}\,dx$

$-du = \frac{1}{x^2}\,dx$

(5)

أوجد: $\int \frac{e^x}{e^x+1}dx$

الحل

$u = e^x + 1$

$du = e^x \, dx$

$I = \int \frac{1}{u} du$

$= \ln|u| + c$

$= \ln|e^x + 1| + c$

(6)

$\int (2\tan x - \csc^2 x)\, dx$

$u = \cos x$

$du = -\sin x \, dx$

$$\int tanx\, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx$$

$$= -\int \frac{du}{u}$$

$$= -\ln|u| + C$$

$$= -\ln|\cos x| + C$$

$$\therefore I = -2\ln|\cos x| + \cot x + C$$

(7)

أوجد: $\int \frac{x^2-2}{2x^3-5x^2-3x}\,dx$

حلل المقام

$$2x^3-5x^2-3x = x(2x^2-5x-3) = x(2x+1)(x-3)$$

اصفار المقام $\boxed{0}$ $\boxed{-\frac{1}{2}}$ $\boxed{3}$

بالضرب في $x(2x+1)(x-3)$

$$\frac{x^2-2}{x(2x+1)(x-3)} = \frac{A}{x}+\frac{B}{(2x+1)}+\frac{C}{(x-3)}$$

$$x^2-2 = A(2x+1)(x-3)+Bx(x-3)+Cx(2x+1) \quad (1)$$

التعويض بأصفار المقام

بالتعويض في 1 بـ $x=0$

$$-2 = A(2(0)+1)(0-3)+\cancel{B(0)}+\cancel{C(0)} \qquad A=\frac{2}{3}$$

بالتعويض في 1 بـ $x=-0.5$

$$(-0.5)^2-2 = \cancel{A(0)}+B(-0.5)(-0.5-3)+\cancel{C(0)} \qquad B=-1$$

بالتعويض في 1 بـ $x=3$

$$(3)^2-2 = \cancel{A(0)}+\cancel{B(0)}+C(3)(2(3)+1) \qquad C=\frac{1}{3}$$

تابع الحل

أوجد: $\int \frac{x^2-2}{2x^3-5x^2-3x}\,dx$

$$\frac{x^2-2}{x(2x+1)(x-3)} = \frac{A}{x}+\frac{B}{(2x+1)}+\frac{C}{(x-3)}$$

$A=\frac{2}{3}$

$B=-1$

$C=\frac{1}{3}$

$$\int \frac{x^2-2}{2x^3-5x^2-3x}\,dx = \int\left(\frac{\frac{2}{3}}{x}+\frac{-1}{2x+1}+\frac{\frac{1}{3}}{x-3}\right)dx =$$

$$= \frac{2}{3}\ln|x| - \frac{1}{2}\ln|2x+1| + \frac{1}{3}\ln|x-3| + C$$

(8)

أوجد: $\int \frac{4x^2-4x+1}{x^3-2x^2+x}\,dx$

حلل المقام $x^3-2x^2+x = x(x^2-2x+1) = x\,(x-1)^2$

اصفار المقام: $\boxed{0}$ ، مكرر $\boxed{1}$

الأصفار	0	1	1
المقامات	x	$x-1$	$(x-1)^2$

بالضرب في $x(x-1)^2$

$$\frac{4x^2-4x+1}{x(x-1)^2} = \frac{A}{x}+\frac{B}{(x-1)}+\frac{C}{(x-1)^2}$$

$$4x^2-4x+1 = A(x-1)^2+Bx(x-1)+Cx \quad (1)$$

التعويض بأصفار المقام

بالتعويض في 1 بـ $x=0$

$$1 = A(0-1)^2+\cancel{B(0)}+\cancel{C(0)} \qquad A=1$$

بالتعويض في 1 بـ $x=1$

$$4(1)^2-4(1)+1 = \cancel{A(0)}+\cancel{B(0)}+C(1) \qquad C=1$$

بالتعويض في 1 بـ $x=2,\ A=1,\ C=1$

x قيمة اختيارية لا تساوي أصفار المقام و A, C من الحل

$$4(2)^2-4(2)+1 = (1)(2-1)^2+B(2)(2-1)+(1)(2) \qquad B=3$$

تابع الحل

أوجد: $\int \frac{4x^2-4x+1}{x^3-2x^2+x}\,dx$

$$\frac{4x^2-4x+1}{x(x-1)^2} = \frac{A}{x}+\frac{B}{(x-1)}+\frac{C}{(x-1)^2}$$

$$\frac{4x^2-4x+1}{x(x-1)^2} = \frac{1}{x}+\frac{3}{(x-1)}+\frac{1}{(x-1)^2}$$

A = 1

B = 3

C = 1

$$\int \frac{4x^2-4x+1}{x(x-1)^2}\,dx = \int \frac{1}{x}+\frac{3}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}\,dx$$

$$= \int \frac{1}{x}\,dx + \int \frac{3}{x-1}\,dx + \int \frac{1}{(x-1)^2}\,dx =$$

$$= \ln|x| + 3\ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + C$$

(9)

$$\int \frac{x^2+1}{x^3+4x^2}\,dx$$

حلل المقام

$$x^3+4x^2 = x^2(x+4)$$

اصفار المقام: 0 مكرر ، -4

الأصفار	0	0	-4
المقامات	x	x^2	$x+4$

بالضرب في $x^2(x+4)$

$$\frac{x^2+1}{x^2(x+4)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x+4}$$

$$x^2+1 = Ax(x+4) + B(x+4) + Cx^2$$

1

التعويض بأصفار المقام

بالتعويض في 1 بـ $x=0$

$$0^2+1 = \cancel{A(0)} + B(0+4) \cancel{+C(0)} \qquad B=\frac{1}{4}$$

بالتعويض في 1 بـ $x=-4$

$$(-4)^2+1 = \cancel{A(0)} \cancel{+B(0)} + C(-4)^2 \qquad C=\frac{17}{16}$$

بالتعويض في 1 بـ $x=1, B=\frac{1}{4}, C=\frac{17}{16}$

x قيمة اختيارية لا تساوي أصفار المقام و B, C من الحل

$$(1)^2+1 = A(1)(1+4) + \frac{1}{4}(1+4) + \frac{17}{16}(1)^2 \qquad A=\frac{-1}{16}$$

تابع الحل

$$\frac{x^2+1}{x^2(x+4)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x+4}$$

$$\frac{x^2+1}{x^2(x+4)} = \frac{\frac{-1}{16}}{x} + \frac{\frac{1}{4}}{x^2} + \frac{\frac{17}{16}}{x+4} \qquad A=\frac{-1}{16}$$

$$B=\frac{1}{4} \qquad C=\frac{17}{16}$$

$$\int \frac{x^2+1}{x(x+4)^2}\,dx = \int \frac{\frac{-1}{16}}{x} + \frac{\frac{1}{4}}{x^2} + \frac{\frac{17}{16}}{x+4}\,dx =$$

$$= \int \frac{\frac{-1}{16}}{x}\,dx + \int \frac{\frac{1}{4}}{x^2}\,dx + \int \frac{\frac{17}{16}}{x+4}\,dx =$$

$$= -\frac{1}{16}\ln|x| - \frac{1}{4x} + \frac{17}{16}\ln|x+4| + C$$

(10)

$$\int \frac{x^2-3x+7}{x^2-4x+4}\,dx$$

∵ درجة البسط = درجة المقام

∴ نبدأ بقسمة البسط على المقام باستخدام القسمة المطولة

$$\begin{array}{r|l} & 1 \leftarrow \text{ناتج القسمة} \\ x^2-4x+4 & x^2-3x+7 \\ & -\ (x^2-4x+4) \\ \hline & x+3 \leftarrow \text{الباقي} \end{array}$$

$$\frac{x^2-3x+7}{x^2-4x+4} = 1+\frac{x+3}{(x-2)^2}$$

الحدودية النسبية

$$\frac{x+3}{(x-2)^2} = \frac{A_1}{x-2}+\frac{A_2}{(x-2)^2}$$

نضرب كلًّا من طرفي المعادلة في $(x-2)^2$ ثم نبسّط

$$x+3 = A_1(x-2)+A_2$$

عوّض عن x بـ 2

$$2+3 = A_1(0)+A_2$$

$$\therefore\ A_2 = 5$$

نعوّض في المعادلة عن $A_2 = 5$ وإحدى قيم x ولتكن $x = 1$ لإيجاد قيمة A_1 .

$$1+3 = -A_1+5$$

$$\therefore\ A_1 = 1$$

$$\int \frac{x^2-3x+7}{x^2-4x+4}dx = \int\left(1+\frac{1}{x-2}+\frac{5}{(x-2)^2}\right)dx$$

$$= x+\ln|x-2|-\frac{5}{x-2}+C$$

(11)

بأستخدام القسمه المطولة:

A)

$$\frac{x^2+3x+2}{(x-3)^2}=1+\frac{9x-7}{(x-3)^2}$$

$$\frac{9x-7}{(x-3)^2}=\frac{A_1}{x-3}+\frac{A_2}{(x-3)^2}$$

$$9x-7=A_1(x-3)+A_2$$

عوّض عن x بـ 3 $\therefore\ A_2=20$

عوّض عن A_2 بـ 20 ولتكن $x=1$ لإيجاد قيمة A_1.

$$\therefore\ A_1=9$$

$$\frac{x^2+3x+2}{(x-3)^2}=1+\frac{9}{x-3}+\frac{20}{(x-3)^2}$$

$$\int\frac{x^2+3x+2}{(x-3)^2}dx=x+9\ln|x-3|-\frac{20}{x-3}+C$$

B)

$$\frac{2x^2+x+3}{x^2-1}=2+\frac{x+5}{x^2-1}$$

$$\frac{x+5}{x^2-1}=\frac{A_1}{x-1}+\frac{A_2}{x+1}$$

$$x+5=A_1(x+1)+A_2(x-1)$$

عوّض عن x بـ 1 $\therefore\ A_1=3$

عوّض عن x بـ -1 $\therefore\ A_2=-2$

$$\frac{2x^2+x+3}{x^2-1}=2+\frac{3}{x-1}-\frac{2}{x+1}$$

$$\int\frac{2x^2+x+3}{x^2-1}dx=\int\left(2+\frac{3}{x-1}-\frac{2}{x+1}\right)dx$$

$$=2x+3\ln|x-1|-2\ln|x+1|+C$$

(12)

$$\int x\cos x\,dx$$

الحل:

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

$$\int x\cos x\,dx = x\sin x - \int \sin x\,dx$$

$$= x\sin x + \cos x + C$$

$u = x$ $\qquad dv = \cos x\,dx$

$du = dx$ $\qquad v = \sin x$

(13)

$$\int (4x-1)\ln x\ \,dx$$

الحل :

$u = \ln x$ $\qquad dv = (4x-1)dx$

$du = \frac{1}{x}dx$ $\qquad v = 2x^2 - x = x(2x-1)$

$$\int u\,dv = u\,.v - \int v\,du$$

$$\int (4x-1)\ln x\ \,dx$$

$$= x(2x-1)\ln x - \int \frac{1}{x}\,.\,x(2x-1)dx$$

$$= x(2x-1)\ln x - \int (2x-1)dx$$

$$= x(2x-1)\ln x - (x^2 - x) + c$$

$$= x(2x-1)\ln x - x^2 + x + c$$

(14)

$$\int 4xe^{-5x}\,dx$$

الحل :

$$u = 4x \qquad dv = e^{-5x}dx$$
$$du = 4dx \qquad v = -\frac{1}{5}e^{-5x}$$

$$\int udv = uv - \int vdu$$
$$\int 4xe^{-5x}\,dx = 4x\left(-\frac{1}{5}e^{-5x}\right) - \int -\frac{4}{5}e^{-5x}dx$$
$$= -\frac{4}{5}x\,e^{-5x} - \frac{4}{25}e^{-5x} + C$$

(15)

$$\int \ln x\,dx$$

الحل :

$$u = \ln x \qquad dv = dx$$
$$du = \frac{1}{x}dx \qquad v = x$$

$$\int udv = uv - \int vdu$$
$$\int \ln x\,dx = x\ln x - \int x.\frac{1}{x}dx$$
$$= x\ln x - \int dx = x\ln(x) - x + C$$

(16)

$$\int x^2 \sin x \; dx$$

الحل :

$$u = x^2 \qquad dv = \sin x\, dx$$
$$du = 2xdx \qquad v = -cosx$$

$$\int udv = uv - \int vdu$$

$$\int x^2 \sin x \; dx = -x^2 \cos x + \int 2xcos\; x\, dx$$

$$u = 2x \qquad dv = \cos x\, dx$$
$$du = 2\; dx \qquad v = \sin x$$

$$\int 2xcos\; x\; dx = 2xsin\; x \; - \int 2 \sin x\, dx$$
$$= 2xsin\; x + 2cos\; x + C$$

$$\therefore \int x^2 \sin x \; dx = -x^2 \cos x + 2x\; sin\; x + 2 \cos x + C$$

(17)

$$\int x\, sin(5x)dx$$

$$u = x \qquad dv = sin(5x)dx$$
$$du = dx \qquad v = \frac{-cos(5x)}{5}$$

$$\int udv = uv - \int vdu$$

$$\int x\, sin(5x)dx$$
$$= \frac{-1}{5} x\, cos(5x) - \int \frac{-cos(5x)}{5} dx$$
$$= \frac{-1}{5} x\, cos(5x) + \frac{1}{5} \int cos(5x)\; dx$$
$$= \frac{-1}{5} x\, cos(5x) + \frac{1}{5} \left(\frac{sin(5x)}{5} \right) + c$$
$$= \frac{-1}{5} x\, cos(5x) + \frac{1}{25} (sin(5x)) + c$$

(18)

أوجد: $\int x^2 \ln x^2 \, dx$

الحل

$I = \int 2x^2 \cdot \ln x \, dx$

$u = \ln x \qquad dv = 2x^2 \, dx$

$du = \frac{1}{x} dx \qquad \int V = \frac{2}{3} x^3$

$\int u\,dv = uv - \int v\,du$

$I = \ln x \cdot \frac{2}{3}x^3 - \int \frac{2}{3}x^{\cancel{3}\,2} \cdot \frac{1}{\cancel{x}} dx$

$I = \frac{2}{3}x^3 \cdot \ln x - \frac{2}{3}\int x^2 dx$

$I = \frac{2}{3}x^3 \cdot \ln x - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3}x^3 + C$

$I = \frac{2}{3}x^3 \cdot \ln x - \frac{2}{9}x^3 + C$

(19)

$$\int x^2 e^{2x-3} dx$$

$u = x^2 \qquad dv = e^{2x-3}\,dx$

$du = 2x\,dx \qquad v = \frac{1}{2}e^{2x-3}$

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

$$\int x^2 e^{2x-3} dx = \frac{1}{2}x^2 e^{2x-3} - \int x e^{2x-3} dx \ldots\ldots\ldots(1)$$

نستخدم قاعدة التجزيء مرة أخرى لإيجاد تكامل

$$\int x e^{2x-3}\, dx$$

$u = x \qquad dv = e^{2x-3}\,dx$

$du = dx \qquad v = \frac{1}{2}e^{2x-3}$

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

$$\int x e^{2x-3} dx = \frac{1}{2}x e^{2x-3} - \frac{1}{2}\int e^{2x-3} dx$$

$$= \frac{1}{2}x e^{2x-3} - \frac{1}{4}e^{2x-3} + c \qquad (2)$$

من (2) ، (1) نحصل على

$$\therefore \int x^2 e^{2x-3} dx$$

$$= \frac{1}{2}x^2 e^{2x-3} - \frac{1}{2}x e^{2x-3} + \frac{1}{4}e^{2x-3} + c$$

$$= \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\right)e^{2x-3} + c$$