① أثبت أن $F(x)=5-\frac{1}{3}x^3$ هي مشتقة عكسية للدالة $f(x)=-x^2$ ثم اكتب مشتقة عكسية أخرى لها.

الحل

$$F(x)=5-\frac{1}{3}x^3$$
$$F'(x)=-\frac{1}{3}\cdot 3x^2=-x^2=f(x)$$

∴ F هي مشتقة عكسية للدالة f مشتقة عكسية أخرى

$$T(x)=9-\frac{1}{3}x^3$$

② أثبت أن $F(x)=\frac{x^3+1}{x^2}$ هي مشتقة عكسية للدالة $f(x)=1-\frac{2}{x^3}$

الحل

$$F(x)=\frac{x^3+1}{x^2}=\frac{x^3}{x^2}+\frac{1}{x^2}=x+x^{-2}$$
$$F'(x)=1-2x^{-3}$$
$$F'(x)=1-\frac{2}{x^3}=f(x)$$

∴ F هي مشتقة عكسية للدالة f

③ أوجد:

(a) $\int 15dx$

الحل

$$=15x+c$$

(b) $\int 5x^4dx$

الحل

$$=\frac{5x^5}{5}+c=x^5+c$$

④ احسب: $\int(3x^2-4x-1)dx$

الحل

$$\int 3x^2dx-\int 4xdx-\int 1dx=$$
$$\frac{3x^3}{3}+c_1-\frac{4x^2}{2}+c_2-1x+c_3=$$

أدمج الثوابت الثلاثة فى ثابت واحد

$$x^3-2x^2-x+c+4$$

⑤ أوجد التكاملات غير المحددة التالية:

(a) $\int(2x-3)(x+4)dx$

الحل

$$\int(2x^2+8x-3x-12)dx=$$
$$\int(2x^2+5x-12)dx=$$
$$\frac{2x^3}{3}+\frac{5x^2}{2}-12x+C$$

(b) $\int\frac{x^2+5x+4}{x+1}dx$

الحل

$$=\int\frac{(x+4)(x+1)}{x+1}dx=$$
$$\int(x+4)dx=\frac{x^2}{2}+4x+C$$

(c) $\int \left(\frac{3x^2-x}{x}\right)^2 dx$

الحل

$$= \int \frac{(3x^2-x)^2}{(x)^2} dx = \int \frac{9x^4-6x^3+x^2}{x^2} dx =$$

$$\int \left(\frac{9x^4}{x^2} - \frac{6x^3}{x^2} + \frac{x^2}{x^2}\right) dx = \int (9x^2 - 6x + 1) dx =$$

$$\frac{9x^3}{3} - \frac{6x^2}{2} + x + C = 3x^3 - 3x^2 + x + C$$

---

⑥ **أوجد:**

(a) $\int x\sqrt{x}dx$

الحل

$$= \int x \cdot x^{\frac{1}{2}} dx = \int x^{\frac{3}{2}} dx = \frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} + C$$
$$= \frac{2}{5}\sqrt{x^5} + C = \frac{2}{3} x^2\sqrt{x} + C$$

(b) $\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx$

الحل

$$= \int x^{\frac{-1}{2}} dx = \frac{2}{1} x^{\frac{1}{2}} + C = 2\sqrt{x} + C$$

(c) $\int \frac{x^2-3x}{\sqrt[3]{x}} dx$

الحل

$$= \int \frac{x^2-3x}{x^{\frac{1}{3}}} dx = \int \frac{x^2}{x^{\frac{1}{3}}} - \frac{3x}{x^{\frac{1}{3}}} dx =$$

$$\int x^{\frac{5}{3}} - 3x^{\frac{2}{3}} dx = \frac{3}{8} x^{\frac{8}{3}} - 3 \cdot \frac{3}{5} x^{\frac{5}{3}} + C$$

$$= \frac{3}{8}\sqrt[3]{x^8} - \frac{9}{5}\sqrt[3]{x^5} + C = \frac{3}{8} x^2\sqrt[3]{x^2} - \frac{9}{5} x\sqrt[3]{x^2} + C$$

---

⑦ **إذا كان :** $F(x) = \int (2x + 5) dx$, $F(-1) = 0$ **فأوجد** $F(x)$

الحل

$$F(x) = x^2 + 5x + c$$
$$F(-1) = 0$$
$$F(-1) = 1 - 5 + c = 0$$
$$c = 4$$
$$\therefore F(x) = x^2 + 5x + 4$$

---

⑧ **القيت كرة إلى الأعلى بسرعة ابتدائية 12m/s من على سطح أحد الأبنية ارتفاعه 80m عن سطح الأرض.**

(a) في أي زمن t سوف تصل الكرة إلى أعلى ارتفاع ؟

(b) في أي زمن t سوف تصل الكرة إلى الأرض؟

(علما بأن عجلة الجاذبية الأرضية $(a(t) = 9.8\text{m/s}^2$

الحـل

A(t) العجلة ، v(t) السرعة ، t الزمن ، s(t) المسافة

$a(t) = \frac{dv}{dt} = -9.8$ " سالب بسبب القذف لأعلى "

$$V(t) = \int a(t)dt = \int -9.8dt = -9.8t + c$$

$$V(0) = 12 \Rightarrow 12 = 0 + c \Rightarrow c = 12$$

$$V(t) = -9.8t + 12$$

(a) عند أقصى ارتفاع $v(t) = 0$

$$0 = -9.8t + 12$$
$$t = \frac{12}{9.8} = 1.22$$

(b) $S(t) = \int v(t)dt = \int (-9.8t + 12)dt$

لحظة القذف : $= -\frac{9.8}{2}t^2 + 12t + c$

لحظة القذف : $80 = 0 + 0 + c \Rightarrow c = 80$

L=0 , S=80

$\therefore 4.9t^2 - 12t - 80 = 0$

T=5.45 أو مرفوض t= -3

∴ تصل الكرة إلى الأرض بعد 5.45 ثانية

① أوجد :

(a) $\int (x^3+4x^2+x)^7(3x^2+8x+1)dx$

الحل

نفرض أن : $u = x^3+4x^2+x$

تفاضل : $du = (3x^2+8x+1)dx$

$\int (x^3+4x^2+x)^7(3x^2+8x+1)dx =$

$\int (u)^7 du = \frac{u^8}{8} + C = \frac{1}{8}(x^3+4x^2+x)^8 + C$

(b) $\int \sqrt[3]{x^2-5x+2}(2x-5)dx$

الحل

$\int (x^2-5x+2)^{\frac{1}{3}}(2x-5)dx =$

نفرض أن : $u = x^2-5x+2$

تفاضل : $du = (2x-5)dx$

$\int (x^2-5x+2)^{\frac{1}{3}}(2x-5)dx = \int u^{\frac{1}{3}}du$

$= \frac{3}{4}u^{\frac{4}{3}} + C = \frac{3}{4}(x^2-5x+2)^{\frac{4}{3}} + C$

$= \frac{3}{4}\sqrt[3]{(x^2-5x+2)^4} + C$

② أوجد :

(a) $\int \sqrt[5]{(3x+7)}dx$

الحل

$\int (3x+7)^{\frac{1}{5}}dx =$

نفرض أن : $u = 3x+7$

تفاضل : $\frac{1}{3}du = dx \leftarrow du = 3dx$

$\int (3x+7)^{\frac{1}{5}}dx = \int u^{\frac{1}{5}} \cdot \frac{1}{3}du = \frac{1}{3}\int u^{\frac{1}{5}}du$

$= \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{6}u^{\frac{6}{5}} + C = \frac{5}{18}(3x+7)^{\frac{6}{5}+C}$

$= \frac{5}{18}\sqrt[5]{(3x+7)^6} + C$

(b) $\int \frac{3(\sqrt[3]{x}-5)dx}{\sqrt[3]{x^2}}$

الحل

$= \int \frac{3\left(x^{\frac{1}{3}}-5\right)}{x^{\frac{2}{3}}}dx$

$= 3\int \left(x^{\frac{1}{3}}-5\right)x^{\frac{-2}{3}}dx$

نفرض أن : $u = x^{\frac{1}{3}} - 5$

تفاضل : $3du = x^{\frac{-2}{3}}dx \leftarrow du = \frac{1}{3}x^{\frac{-2}{3}}dx$

$3\int \left(x^{\frac{1}{3}}-5\right) \cdot x^{\frac{-2}{3}}dx = 3\int u \cdot 3du = 9\int udu$

$= 9 \cdot \frac{u^2}{2} + C = \frac{9}{2}u^2 + C = \frac{9}{2}(\sqrt[3]{x}-5)^2 + C$

③ أوجد : $\int x(2x-1)^3dx$

الحل نفرض أن : $u = 2x-1 \leftarrow u+1 = 2x \leftarrow \frac{1}{2}(u+1) = x$

تفاضل : $du = 2dx \leftarrow \frac{1}{2}du = dx$

$\int (2x-1)^3 xdx = \int u^3 \cdot \frac{1}{2}(u+1) \cdot \frac{1}{2}du = \int \frac{1}{4}u^3(u+1)du$

$= \int \left(\frac{1}{4}u^4 + \frac{1}{4}u^3\right)du = \frac{1}{4}\frac{u^5}{5} + \frac{1}{4} \cdot \frac{u^4}{4} + C$

$= \frac{1}{20}(2x-1)^5 + \frac{1}{16}(2x-1)^4 + C$

④ **أوجد:** $\int x^5\sqrt{3+x^2}dx$

الحـل

$$\int x^5\sqrt{3+x^2}dx =$$

$$u = 3 + x^2$$
$$du = 2xdx$$
$$x^2 = u - 3$$

$$= \int \frac{1}{2}x^4(3+x^2)^{\frac{1}{2}}2xdx$$
$$= \int \frac{1}{2}(x^2)^2(3+x^2)^{1/2}2xdx$$
$$= \int \frac{1}{2}(4-3)^2(4)^{1/2}du$$
$$= \int \frac{1}{2}(u^2-6u+9)u^{\frac{1}{2}}du = \frac{1}{2}\int \left(u^{\frac{5}{2}} - 6u^{\frac{3}{2}} + 9u^{\frac{1}{2}}\right)du$$
$$= \frac{1}{2}\left[\frac{2}{7}u^{\frac{7}{2}} - 6\times\frac{2}{5}u^{\frac{5}{2}} + 9\times\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\right] + c$$
$$= \frac{1}{7}(3+x^2)^{\frac{7}{2}} - \frac{6}{5}(3+x^2)^{\frac{3}{2}} + 3(3+x^2)^{\frac{3}{2}} + c$$

① أوجد التكاملات غير المحددة التالية:

(a) $\int (\cos x + \csc^2 x)dx$

الحل

$\sin x - \cot x + c$

(b) $\int \sec x(\tan x + \sec x)dx$

الحل

$\int (\sec x\tan x + \sec^2 x)dx =$
$\sec x + \tan x + c$

(c) $\int \frac{dx}{\sin^2 x}$

الحل

$= \int \csc^2 xdx =$
$-\cot x + c$

② أوجد:

(a) $\int \sin 5xdx$

الحل

$= -\frac{1}{5}\cos x + C$

(b) $\int (x^2 + \cos 2x)dx$

الحل

$\frac{x^3}{3} + \frac{1}{2}\sin 2x + C$

(c) $\int x\sec^2(x^2 + 2)dx$

الحل

$u = x^2 + 2$
$du = 2xdx$
$= \frac{1}{2}\int 2x\sec^2(x^2 + 2)dx$
$= \frac{1}{2}\int \sec^2 4du$
$= \frac{1}{2}\tan 4 + c = \frac{1}{2}\tan(x^2 + 2) + c$

③ أوجد:

(a) $\int \sin^3 x \cdot \cos x\, dx$

الحل

$\int (\sin x)^3 \cdot \cos xdx =$
$u = \sin x$ **نفرض أن :**
$du = \cos xdx$ **تفاضل :**
$\int (\sin x)^3 \cdot \cos xdx =$
$\int u^3 du = \frac{u^4}{4} + C$
$= \frac{1}{4}(\sin t)^4 + C = \frac{1}{4}\sin^4 x + C$

(b) $\int \csc^2 x \cdot \cot x\, dx$

الحل

$\int \cot x\csc^2 xdx =$
$u = \cot x$ **نفرض أن :**
$du = -\csc^2 xdx$ **تفاضل :**
$-du = \csc^2 xdx$
$\int \cot x\csc^2 xdx = \int -u \cdot du$

$= \frac{-u^2}{2} + C = \frac{-1}{2}u^2 + C = \frac{-1}{2}\cot^2 x + C$

④ أوجد:

(a) $\cos^3 \int (2x - 3) \cdot \sin(2x - 3)\, dx$

الحل

$= -\frac{1}{2}\int (\cos^3(2x - 3))[-2\sin(2x - 3)]dx$
$= -\frac{1}{2}\int u^3 du = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}u^4 + C$
$= -\frac{1}{8}(\cos(2x - 3))^4 + c$

$u = \cos(2x - 3)$
$du = -\sin(2x - 3)(2)dx$

(b) $\int x^2 \cdot \sin(x^3-1)dx$

الحل

$$u = x^3 - 1$$
$$du = 3x^2 dx$$
$$= \frac{1}{3}\int 3x^2 \sin(x^3-1)dx$$
$$= \frac{1}{3}\int \sin u du = -\frac{1}{3}\cos u + c$$
$$= -\frac{1}{3}\cos(x^3-1) + c$$

(c) $\int (3+\sin 2x)^5 \cos 2x\, dx$

الحل

$$u = 3 + \sin 2x$$
$$du = 2\cos 2x dx$$
$$= \frac{1}{2}\int (3+\sin 2x)^3 (2\cos 2x)dx$$
$$= \frac{1}{2}\int u^3 du = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}u^4 + c$$
$$= \frac{1}{8}(3+\sin 2x)^4 + c$$

---

⑤ **أوجد:** $\int \csc^5 x\cot x dx$

الحل

نفرض أن : $u = \csc x$

تفاضل :
$$du = -\csc x\cot x dx$$
$$-du = \csc x\cot x dx$$
$$\int \csc^4 x\csc x\cot x dx = \int -u^4 du$$
$$= \frac{-u^5}{5} + C = \frac{-1}{5}\csc^5 x + C$$

① أوجد مشتقة كل من الدوال التالية :

(a) $f(x) = 10^x$

الحل

$f'(x) = 10^x \cdot \ln 10 \cdot (x)' =$
$10^x \cdot \ln 10 \cdot (1) = 10^x \ln 10$

(b) $f(x) = 3^{\frac{1}{x}}$

الحل

$f'(x) = 3^{\frac{1}{x}} \cdot \ln 3 \cdot \left(\frac{1}{x}\right)' =$
$3^{\frac{1}{x}} \cdot \ln 3 \cdot \left(\frac{-1}{x^2}\right) = \frac{-3^{\frac{1}{x}} \ln 3}{x^2}$

(c) $f(x) = 5^{\cos x}$

الحل

$f'(x) = 5^{\cos x} \cdot \ln 5 \cdot (\cos x)'$
$= 5^{\cos x} \cdot \ln 5 \cdot (-\sin x)$
$= -5^{\cos x} \ln 5 \sin x$

② أوجد مشتقة كل من الدوال التالية :

(a) $f(x) = e^{\sqrt{x}}$

الحل

$f'(x) = e^{\sqrt{x}} \cdot (\sqrt{x})' =$
$e^{\sqrt{x}} \cdot \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) = \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$

(b) $g(x) = e^{x^2-4}$

الحل

$g'(x) = e^{x^2-4} . (x^2 - 4)'$
$= e^{x^2-4} \cdot (2x) = (2x)e^{x^2-4}$

(c) $h(x) = e^{\tan x}$

الحل

$h'(x) = e^{\tan x} \cdot (\tan x)'$
$= e^{\tan x} \cdot (\sec^2 x)$

③ أوجد مشتقات كل من الدوال التالية :

(a) $f(x) = \ln(2x + x^3)$

الحل

$f'(x) = \frac{(2x + x^3)'}{2x + x^3} = \frac{2 + 3x^2}{2x + x^3}$

(b) $g(x) = \ln \frac{1}{2x + 1}$

الحل

$g(x) = \ln \frac{1}{2x+1} = \ln(2x + 1)^{-1} = -1\ln(2x + 1)$
$g'(x) = -1 \cdot \frac{(2x+1)'}{2x+1} = -1 \cdot \frac{2}{2x+1} = \frac{-2}{2x+1}$

(c) $h(x) = \ln(1 + \sqrt{3}x)$

الحل

$h'(x) = \frac{(1 + \sqrt{3}x)'}{1 + \sqrt{3}x} = \frac{\sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}x}$

(d) $h(x) = \ln(\sin x)$

الحل

$h'(x) = \frac{(\sin x)'}{\sin x} = \frac{\cos x}{\sin x} = \cot x$

④ أوجد:

(a) $\int e^{3x} dx$

الحل

$= \frac{1}{3} e^{3x} + C$

(b) $\int (2x - 1)e^{x^2-x+3} dx$

الحل

$= \int e^{x^2-x+3} \cdot (2x - 1)dx$

نفرض أن : $u = x^2 - x + 3 \rightarrow du = (2x - 1)dx$

$\int e^{x^2-x+3} \cdot (2x - 1)dx = \int e^u \cdot du = e^u + C$
$= e^{x^2-x+3} + C$

⑤ أوجد:

(a) $\int \frac{-5}{3x-2}dx$

الحل

$$= \int \frac{-5}{3x-2}dx$$

نفرض أن : $u = 3x-2 \leftarrow du = 3dx \leftarrow \frac{1}{3}du = dx$

$$\int \frac{-5}{3x-2}dx = \int \frac{-5}{u}\cdot\frac{1}{3}du = \frac{-5}{3}\int \frac{1}{u}du$$

$$= \frac{-5}{3}\ln|u| + C = \frac{-5}{3}\ln|3x-2| + C$$

(b) $\int \frac{3t^2-6t}{t^3-3t^2+8}dt$

الحل

نفرض أن : $u = t^3-3t^2+8 \leftarrow du = (3t^2-6t)dt$

$$\int \frac{3t^2-6t}{t^3-3t^2+8}dx = \int \frac{1}{u}du = \ln|u| + C = \ln|t^3-3t^2+8| + C$$

(c) $\int \frac{x^3+4}{x}dx$

الحل

$$= \int \left(\frac{x^3}{x} + \frac{4}{x}\right)dx = \int \left(x^2 + \frac{4}{x}\right)dx = \frac{x^3}{3} + 4\ln|x| + C$$

---

⑥ أوجد: $\cot \int x\,dx$

الحل

$$= \int \frac{\cos x}{\sin x}dx$$

$$= \int \frac{du}{u} = \ln|u| + c$$

$$u = \sin x$$
$$du = \cos x dx$$

$$= \ln|\sin x| + c$$

① أوجد: $\int x\cos x dx$

الحل

نفرض أن : $u = x, dv = \cos x dx \leftarrow v = \sin x, \leftarrow du = dx$

$$\int udv = u\cdot v - \int vdu$$
$$\int x\cos x dx = x\cdot \sin x - \int \sin x dx$$
$$= x\sin x - (-\cos x) + C$$
$$= x\sin x + \cos x + C$$

---

② أوجد:

(a) $\int (x-3)e^{x-3}dx$

الحل

$$u = x - 3, dv = e^{x-3}dx \leftarrow v = e^{x-3}, \leftarrow du = dx$$
$$\int udv = u\cdot v - \int vdu$$
$$\int (x-3)e^{x-3}dx = (x-3)\cdot e^{x-3} - \int e^{x-3}dx$$
$$= (x-3)e^{x-3} - e^{x-3} + C$$

(b) $\int 4xe^{-5x}dx$

الحل

نفرض أن : $u = 4x, dv = e^{-5x}dx$

$$du = 4dx, v = -\frac{1}{5}e^{-5x}$$
$$\int udv = u\cdot v - \int vdu$$
$$\int 4xe^{-5x}dx = 4x\cdot\frac{-1}{5}e^{-5x} - \int 4\cdot\frac{-1}{5}e^{-5x}dx$$
$$= -\frac{4}{5}xe^{-5x} + \frac{4}{5}\cdot\frac{-1}{5}e^{-5x} + C = -\frac{4}{5}xe^{-5x} - \frac{4}{25}e^{-5x} + C$$

---

③ أوجد: $\int \ln x dx$

الحل

$$u = \ln x \quad dv = dx$$
$$du = \frac{1}{x}dx \quad v = x$$
$$= x\ln x - \int \frac{1}{x}\cdot x dx$$
$$= x\ln x - \int 1dx = x\ln x - x + c$$

④ أوجد: $\int (x+1)\ln(x+1)dx$

الحل

$$t = x + 1$$
$$dt = dx$$
$$u = \ln t dv = tdt$$
$$du = \frac{dt}{t} v = \frac{t^2}{2}$$
$$= \int t\ln t dt$$
$$= \frac{t^2}{2}\cdot\ln t - \int \frac{t^2}{2}\frac{dt}{t}$$
$$= \frac{t^2}{2}\cdot\ln|t| + \frac{1}{4}t^2 + c$$
$$= \frac{t^2}{2}\ln|x+1| + \frac{1}{4}(x+1)^2 + c$$

---

⑤ **أوجد:** $\int x^2 \sin x dx$

الحـــل

$$u = x^2 \quad dv = \sin x dx$$
$$du = 2x dx \quad v = -\cos x$$
$$= -x^2 \cos x + \int 2x \cos x dx$$

$$u = 2x \quad dv = \cos x dx$$
$$du = 2dx \quad v = \sin x$$
$$= -x^2 \cos x + 2x \sin x - \int 2 \sin x dx$$
$$= -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + c$$

⑥ **أوجد:** $\int x^2 e^{x+2} dx$

الحـــل

$$u = x^2 \quad dv = e^{x+2} dx$$
$$du = 2x dx \quad v = e^{x+2}$$
$$I = x^2 (e^{x+2}) - \int 2x e^{x+2} dx$$

$$u = 2x \quad dv = e^{x+2} dx$$
$$du = 2dx \quad v = e^{x+2}$$
$$I = x^2 e^{x+2} - \left[2x e^{x+2} - \int 2 e^{x+2} dx\right]$$
$$= x^2 e^{x+2} - 2x e^{x+2} + 2e^{x+2} + c$$

⑦ **أوجد:** $\int e^x \cos x dx$

الحـــل

$$u = e^x \quad dv = \cos x dx$$
$$du = e^x dx \quad v = \sin x$$
$$= e^x \sin x - \int e^x \sin x dx$$

$$u = e^x \quad dv = \sin x dx$$
$$du = e^x dx \quad v = -\cos x$$
$$I = e^x \sin x - \left[-e^x \cos x + \int e^x \cos x dx\right]$$
$$= e^x \sin x + e^x \cos x - \int e^x \cos x dx$$
$$I = e^x \sin x + e^x \cos x - I$$
$$2I = e^x \sin x + e^x \cos x$$
$$I = \frac{1}{2}[e^x \sin x + e^x \cos x] + c$$

① لتكن الدالة : $f(x)=\frac{2x-1}{x^2-4x+3}$ فأوجد: (a) الكسور الجزئية (b) $\int f(x)dx$

الحل

حلل المقام : $x^2-4x+3=(x-3)(x-1)$

أصفار المقام : 1 3

$$\frac{2x-1}{(x-3)(x-1)}=\frac{A}{(x-3)}+\frac{B}{(x-1)}$$

بالضرب في : $(x-3)(x-1)$

$$2x-1=A(x-1)+\mathrm{B}(x-3)$$

بالتعويض ب x=3 : $2\times3-1=A(3-1)+B(3-3)\leftarrow$ A=2.5

بالتعويض ب x=1 : $2\times1-1=A(1-1)+B(1-3)\leftarrow$ B= -0.5

$$f(x)=\frac{2x-1}{x^2-4x+3}=\frac{2.5}{(x-3)}+\frac{-0.5}{(x-1)}$$

$$\int f(x)dx=\int\left(\frac{2.5}{x-3}+\frac{-0.5}{x-1}\right)dx=\int\frac{2.5}{x-3}dx+\int\frac{-0.5}{x-1}dx$$
$$=2.5\ln|x-3|-0.5\ln|x-1|+C$$

---

② أوجد : $\int\frac{x^2-2}{2x^3-5x^2-3x}dx$

الحل

حلل المقام : $2x^3-5x^2-3x=x(2x^2-5x-3)=x(2x+1)(x-3)$

أصفار المقام : 0 $-\frac{1}{2}$ **3**

بالضرب في : $x(2x+1)(x-3)$

$$\frac{x^2-2}{x(2x+1)(x-3)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{(2x+1)}+\frac{C}{(x-3)}$$

$$x^2-2=A(2x+1)(x-3)+\mathrm{B}x(x-3)+\mathrm{C}x(2x+1)$$

بالتعويض بـ x=0 : $-2=A(2(0)+1)(0-3)+D(0)+C(0)\leftarrow$ A=$\frac{2}{3}$

بالتعويض بـ x=-0.5 : $(-0.5)^2-2=\Lambda(0)+B(-0.5)(-0.5-3)+C(0)\leftarrow$ B= -1

بالتعويض بـ x=3 : $(3)^2 - 2 = A(3) + B(0) + C(3)(2(3)+1) \leftarrow C = \frac{1}{3}$

$$\frac{x^2-2}{x(2x+1)(x-3)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{(2x+1)} + \frac{C}{(x-3)}$$

$$\int \frac{x^2-2}{2x^3-5x^2-3x}dx = \int \left(\frac{\frac{2}{3}}{x} + \frac{-1}{2x+1} + \frac{\frac{1}{3}}{x-3}\right)dx =$$

$$= \frac{2}{3}\ln|x| - \frac{1}{2}\ln|2x+1| + \frac{1}{3}\ln|x-3| + C$$

---

③ **أوجد :** $\int \frac{4x^2-4x+1}{x^3-2x^2+x}dx$

الحـــل

حلل المقام : $x^3 - 2x^2 + x = x(x^2 - 2x + 1) = x(x-1)^2$

أصفار المقام : 1 0

بالضرب في : $x(x-1)^2$

$$\frac{4x^2-4x+1}{x(x-1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{(x-1)} + \frac{C}{(x-1)^2}$$

$$4x^2 - 4x + 1 = A(x-1)^2 + Bx(x-1) + Cx$$

بالتعويض بـ x=0 : $1 = A(0-1)^2 + D(0) + C(0) \leftarrow$ A=1

بالتعويض بـ x=1 : $4(1)^2 - 4(1) + 1 = n(0) + B(0) + C(1) \leftarrow$ C=1

بالتعويض بـ A=1 , C=1 , x=2 " x قيمة اختياريه لا تساوي أصفار المقام "

$$4(2)^2 - 4(2) + 1 = (1)(2-1)^2 + B(2)(2-1) + (1)(2) \leftarrow \text{B=1}$$

$$\frac{4x^2-4x+1}{x(x-1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{(x-1)} + \frac{C}{(x-1)^2}$$

$$\frac{4x^2-4x+1}{x(x-1)^2} = \frac{1}{x} + \frac{3}{(x-1)} + \frac{1}{(x-1)^2}$$

$$\int \frac{4x^2-4x+1}{x(x-1)^2}dx = \int \frac{1}{x} + \frac{3}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}dx$$

$$= \int \frac{1}{x}dx + \int \frac{3}{x-1}dx + \int \frac{1}{(x-1)^2}dx =$$

$$= \ln|x| + 3\ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + C$$

---

④ **أوجد :** $\int \frac{x^2+1}{x^3+4x^2}dx$

الحـــل

حلل المقام : $x^3+4x^2=x^2(x+4)$

أصفار المقام : 0 -4

بالضرب في : $x^2(x+4)$

$$\frac{x^2+1}{x^2(x+4)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x+4}$$
$$x^2+1=Ax(x+4)+\mathrm{B}(x+4)+\mathrm{C}x^2$$

بالتعويض بـx=0 : $0^2+1=A(0)+B(0+4)+C(0)\leftarrow$ B=$\frac{1}{4}$

بالتعويض بـ x=-4 : $(-4)^2+1=A(0)+B(0)+C(-4)^2\leftarrow$ **C=$\frac{17}{16}$**

بالتعويض بـ : $\mathbf{C}=\frac{17}{16}$ ، B=$\frac{1}{4}$ ، **x=1 " قيمة x اختياريه لا تساوى أصفار المقام "**

$$A=\frac{-1}{16}\leftarrow\ (1)^2+1=A(1)(1+4)+\frac{1}{4}(1+4)+\frac{17}{16}(1)^2$$

$$\frac{x^2+1}{x^2(x+4)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x+4}$$
$$\frac{x^2+1}{x^2(x+4)}=\frac{\frac{-1}{16}}{x}+\frac{\frac{1}{4}}{x^2}+\frac{\frac{17}{16}}{x+4}$$
$$\int\frac{x^2+1}{x(x+4)^2}dx=\int\frac{\frac{-1}{16}}{x}+\frac{\frac{1}{4}}{x^2}+\frac{\frac{17}{16}}{x+4}dx=$$
$$=\int\frac{\frac{-1}{16}}{x}dx+\int\frac{\frac{1}{4}}{x^2}dx+\int\frac{\frac{17}{16}}{x+4}dx=$$
$$=-\frac{1}{16}\ln|x|-\frac{1}{4x}+\frac{17}{16}\ln|x+4|+C$$

---

⑤ **(a)هل يمكن حل مثال (5) بطريقة أخرى. (b) أوجد :** $\int\frac{x^3-2x^2-4}{x^3-2x^2}dx$

الحـــل

$$I=\int 1dx+\int\frac{-4}{x^3-2x^2}dx$$
$$\frac{-4}{x^3-2x^2}=\frac{-4}{x^2(x-2)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x-2}$$
$$=\frac{Ax(x-2)+B(x-2)+Cx^2}{x^2(x-2)}$$
$$-4=Ax(x-2)+B(x-2)+Cx^2$$

بوضع x=0 :

$$-4 = A(0)(0-2) + B(0-2) + C(0)^2$$
$$-4 = -2B \Rightarrow B = 2$$

بوضع x=2 :

$$-4 = A(2)(2-2) + B(2-2) + C(2)^2$$
$$-4 = 4C \Rightarrow C = -1$$

بوضع x=1 :

$$-4 = A(1)(1-2) + 2(1-2) + -1(1)^2$$
$$-4 = -A - 2 - 1 \Rightarrow A = 1$$
$$I = \int 1dx + \int \frac{dx}{x} + \int 2x^{-2}dx - \int \frac{1}{x-2}dx$$
$$= x + \ln|x| - \frac{2}{x} - \ln|x-2| + C$$

---

⑥ **أوجد :** $\int \frac{x^3-7x+9}{x^2-3x+2}dx$

الحـل

$$= \int (x+3)dx + \int \frac{3dx}{x^2-3x+2}$$
$$\frac{3}{x^2-3x+2} = \frac{3}{(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2}$$
$$= \frac{A(x-2)+B(x-1)}{(x-1)(x-2)}$$
$$\therefore 3 = A(x-2) + B(x-1)$$

بوضع x=1 : $3 = A(1-2) + B(0) \leftarrow$ A= -3

بوضع x=2 : $3 = A(0) + B(2-1) \leftarrow$ B=3

$$I = \int (x+3)dx + (-3)\int \frac{1}{x-1}dx + 3\int \frac{1}{x-2}dx$$
$$= \frac{1}{2}x^2 + 3x - 3\ln|x-1| + 3\ln|x-2| + c$$

---

⑦ **أوجد :** $\int \frac{2x^4+3x^2-7}{x^3-6x^2+9x}dx$

الحـل

$$= \int (2x+12)dx + \int \frac{57x^2-108x-7}{x^3-6x^2+9x}dx$$

$$\frac{57x^2-108x-7}{x^3-6x^2+9x} = \frac{57x^2-108x-7}{x(x^2-6x+9)} = \frac{57x^2-108x-7}{x(x-3)^2}$$

$$= \frac{A}{x} + \frac{B}{x-3} + \frac{C}{(x-3)^2}$$

$$= \frac{A(x-3)^2+Bx(x-3)+Cx}{x(x-3)^2}$$

$$\therefore 57x^2 - 108x - 7 = A(x-3)^2 + Bx(x-3) + Cx$$

بوضع x=0 :

$$-7 = 9A \Rightarrow A = \frac{-7}{9}$$

بوضع x=3 :

$$513 - 324 - 7 = 3c \Rightarrow c = \frac{182}{3}$$

بوضع x=1 :

$$57 - 108 - 7 = 4\left(-\frac{7}{9}\right) + (-2B) + \frac{182}{3} \Rightarrow B = \frac{520}{9}$$

$$I = \int (2x+12)dx + \left(\frac{-7}{9}\right)\int \frac{1}{x}dx + \frac{520}{9}\int \frac{dx}{x-3} + \frac{182}{3}\int \frac{dx}{(x-3)^2}$$

$$= x^2 + 12x - \frac{7}{9}\ln|x| + \frac{520}{9}\ln|x-3| + \frac{182}{3(x-3)} + C$$

① أوجد : $\int_2^7 (x^3 - 2x^2 + 2)dx$

الحل

$$\int_2^7 (x^3 - 2x^2 + 2)dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} + 2x\right]_2^7$$
$$= \left[\frac{7^4}{4} - \frac{2(7)^3}{3} + 2(7)\right] - \left[\frac{2^4}{4} - \frac{2(2)^3}{3} + 2(2)\right] =$$
$$\frac{4627}{12} - \frac{8}{3} = \frac{4595}{12}$$

② أوجد :

(a) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2}\sin 2x - \csc^2 x\right) dx$

الحل

$$= \left[\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}(-\cos 2x) - (-\cot x)\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} =$$
$$= \left[-\frac{1}{4}\cos(2x) + \cot x\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} =$$
$$= \left[-\frac{1}{4}\cos\left(2\times\frac{\pi}{2}\right) + \cot\frac{\pi}{2}\right] - \left[-\frac{1}{4}\cos\left(2\times\frac{\pi}{4}\right) + \cot\frac{\pi}{4}\right]$$
$$= \left[-\frac{1}{4}(-1) + 0\right] - \left[-\frac{1}{4}(0) + 1\right]$$
$$= \frac{1}{4} - 1 = -\frac{3}{4}$$

(b) $\int_2^{-3} 5dx$

الحل

$$= -\int_{-3}^{2} 5dx =$$
$$-5[2 - (-3)] = -25$$

(c) $\int_3^3 (-2x^3 + x^2)dx$

الحل

=0

(d) $\int_2^4 \frac{dx}{x-1}$

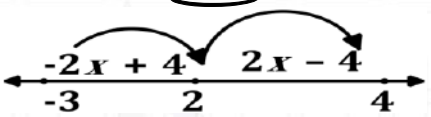
الحل

$$= [\ln|x-1|]_2^4 =$$
$$= [\ln|4-1|] - [\ln|2-1|]$$
$$= \ln|3| - \ln|1|$$
$$= \ln|3|$$
$$= \ln 3$$

③ أوجد :

(a) $\int_{-3}^{4} |2x-4|dx$

الحل



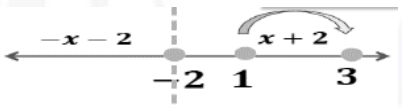
$$\int_{-3}^{2} |2x-4|dx + \int_{2}^{4} |2x-4|dx =$$
$$\int_{-3}^{2} (-2x+4)dx + \int_{2}^{4} (2x-4)dx =$$
$$= \left[-\frac{2x^2}{2} + 4x\right]_{-3}^{2} + \left[\frac{2x^2}{2} - 4x\right]_{2}^{4} =$$
$$= [-x^2 + 4x]_{-3}^{2} + [x^2 - 4x]_{2}^{4} =$$

$$2x - 4 = 0$$
$$2x = 4$$
$$x = 2$$

$$[-(2)^2 + 4(2)] - [-(-3)^2 + 4(-3)] + [4^2 - 4(4)] - [2^2 - 4(2)]$$
$$= 29$$

(b) $\int_{1}^{3} |x+2|dx$

الحل

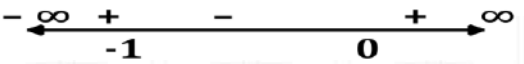


$$\int_{1}^{3} (x+2)dx =$$
$$= \left[\frac{x^2}{2} + 2x\right]_{1}^{3}$$
$$= \left[\frac{(3)^2}{2} + 2(3)\right] - \left[\frac{(1)^2}{2} + 2(1)\right] = 8$$

---

④ دون حساب قيمة التكامل أثبت أن: $\int_{-1}^{0} (x^2+x)dx \leqslant 0$

الحل



بفرض أن: $f(x) = x^2 + x$

$$x^2 + x = 0 \Rightarrow x(x+1) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ or } x = -1$$

$$f(x) \leqslant 0 \forall x \in [-1,0]$$

$$\therefore \int_{-1}^{0} (x^2+x)dx \leqslant 0$$

⑤ **دون حساب قيمة التكامل أثبت أن:** $\int_{-1}^{2}(x^2+1)dx \geqslant \int_{-1}^{2}(x-1)dx$

الحـــل

بفرض : $f(x)=x^2+1, g(x)=x-1$

$$f(x)-g(x)=x^2+1-(x-1)=x^2+1-x+1$$
$$=x^2-x+2$$
$$x^2-x+2=0 \Rightarrow$$
$$\Delta = b^2-4ac$$
$$= (-1)^2-4(1)(2)=-7<0$$

∴ لا توجد للمعادلة جذور حقيقية

∴ $f(x)-g(x)$ **وحيدة الإشارة**

و بأخذ قيمة إختيارية نجد أن :

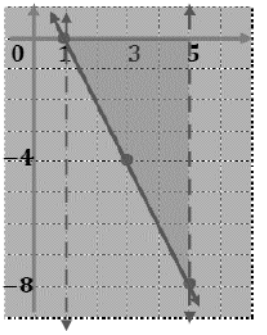
$$f(x)-g(x) \geqslant 0 \forall x \in \mathbb{R}$$
$$\therefore \quad f(x)-g(x) \geqslant 0 \forall x \in [-1,2]$$
$$\therefore \quad x^2+1-(x-1) \geqslant 0 \forall x \in [-1,2]$$
$$\therefore \quad x^2+1 \geqslant x-1 \forall x \in [-1,2]$$
$$\therefore \quad \int_{-1}^{2}(x^2+1)dx \geqslant \int_{-1}^{2}(x-1)dx$$

---

⑥ **أوجد قيمة** $\int_{1}^{5}(2-2x)dx$ **بيانيا**

الحـــل

x	1	3	5
$f(x)$	0	-4	-8



$\because f(x)=2-2x$

$f(x) \leq 0 \forall x \in [1,5]$

$\int_{1}^{5} f(x)dx =$ **سالب مساحة المنطقة المثلثة**

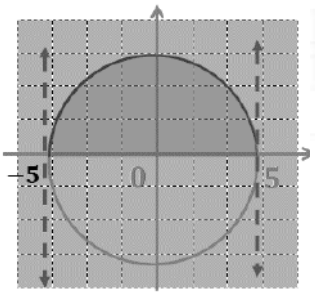
سالب نصف طول القاعدة × الارتفاع $= -\frac{1}{2} \times 4 \times 8 = -16$

---

⑦ أوجد :

(a) $\int_{-5}^{5} \sqrt{25-x^2}dx$

الحل



نفرض أن : $y = \sqrt{25-x^2}$

بتربيع الطرفين : $y^2 = 25 - x^2$

$x^2 + y^2 = 25$

هي معادلة دائرة مركزها (0 ، 0)

و نصف قطرها : $r = \sqrt{25} = 5$

$y = \sqrt{25-x^2}$

تمثل معادلة النصف العلوى من الدائرة

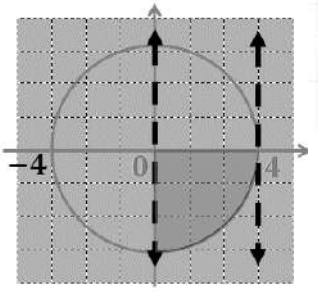
$\therefore \int_{-5}^{5} \sqrt{25-x^2}dx =$

مساحة المنطقة المظللة = مساحة نص الدائرة

$= \frac{1}{2}\pi(5)^2 = 12.5\pi$

(b) $\int_{0}^{4} -\sqrt{16-x^2}dx$

الحل



نفرض أن : $y = -\sqrt{16-x^2}$

بتربيع الطرفين : $y^2 = 16 - x^2$

$x^2 + y^2 = 16$

هي معادلة دائرة مركزها (0 ، 0)

و نصف قطرها : $r = \sqrt{16} = 5$

$y = -\sqrt{16-x^2}$

تمثل معادلة النصف السفلى من الدائرة

$\therefore \int_{0}^{4} -\sqrt{16-x^2}dx =$

مساحة المنطقة المظللة = مساحة ربع الدائرة

$\therefore \int_{0}^{4} -\sqrt{16-x^2}dx = -\frac{1}{4}\pi(4)^2 = -4\pi$

---

⑧ (a)هل يمكن حل مثال (8) بطريقة أخرى ؟ فسر إجابتك.

الحل

$I = \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \tan x \sec^2 x dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \sec x \cdot \sec x \tan x dx$

$u = \sec x du = \sec x \tan x dx$

$u = \sec 0 = 1 \Leftarrow x = 0$ عندما

$u = \sec \frac{\pi}{4} = \sqrt{2} \Leftarrow x = \frac{\pi}{4}$ عندما

$I = \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} u du = \left[\frac{u^2}{2}\right]_{1}^{\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{2})^2}{2} - \frac{(1)^2}{2} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

(b)أوجد: $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sin 2x\cos 2x dx$

الحـــل

$= \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sin 2x 2\cos 2x dx$

$= u = \sin 2x du = 2\cos 2x dx$

$u = \sin 2\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} = x = \frac{\pi}{3}$ **عندما**

$u = \sin 2\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftarrow x = \frac{\pi}{6}$

$I = \frac{1}{2}\int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} u du = 0$

---

⑨ **أوجد :**

(a) $\int_{-1}^{1} \left((x+1)\sqrt{x^2+2x+5}\right)dx$

الحـــل

$= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} 2(x+1)(x^2+2x+5)^{\frac{1}{2}} dx$

$u = x^2+2x+5 du = (2x+2)dx$

$u = (-1)^2 + 2(-1) + 5 = 4 \leftarrow x = -1$ **عندما**

$u = 1^2 + 2(1) + 5 = 8 \Leftarrow x = 1$ **عندما**

$I = \frac{1}{2}\int_4^8 u^{\frac{1}{2}} du = \frac{1}{2}\frac{2}{3}\left[u^{\frac{3}{2}}\right]_4^8$

$= \frac{1}{3}\left(8^{\frac{3}{2}} - 4^{\frac{3}{2}}\right) = 4.876$

(b) $\int_2^5 x\sqrt{x-1}dx$

الحـــل

$= \int_2^5 (x-1+1)(x-1)^2 dx$

$= \int_2^5 (x-1)^{\frac{3}{2}} + (x-1)^{\frac{1}{2}} dx$

$u = x-1 du = dx$

$= \int_1^4 u^{\frac{3}{2}} du + \int_1^4 u^{\frac{1}{2}} du$

$u = 2 - 1 = 1 \Leftrightarrow x = 2$ **عندما**

$u = 5 - 1 = 4 \Leftrightarrow x = 5$ **عندما**

$$I = \left[\frac{2}{5}u^{\frac{5}{2}}\right]_1^4 + \left[\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\right]_1^4$$
$$= \frac{2}{5}\left(4^{\frac{5}{2}} - 1^{\frac{5}{2}}\right) + \frac{2}{3}\left(4^{\frac{3}{2}} - 1^{\frac{3}{2}}\right)$$
$$= 17.067$$

---

⑩ **أوجد :** $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\sec^2 x dx$

الحـــل

تكامل **نفرض أن** **تفاضل**

$dv = \sec^2 x dx$ ← $u = x$ → $du = dx$

$v = \tan x$

$$\int udv = uv - \int vdu$$
$$x\sec^2 x dx = x\tan x - \int \tan x dx$$
$$= x\tan x + \ln|\cos x| + C$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\sec^2 x dx = [x\tan x + \ln|\cos x|]_0^{\frac{\pi}{4}}$$
$$= \left[\frac{\pi}{4}\tan\frac{\pi}{4} + \ln\left|\cos\frac{\pi}{4}\right|\right] - [(0)\tan(0) + \ln|\cos(0)|]$$
$$= \left[\frac{\pi}{4}(1) + \ln\left|\frac{\sqrt{2}}{2}\right|\right] - [(0)(0) + \ln|1|] = \frac{\pi}{4} + \ln\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx$$
$u = \cos x$
$du = -\sin x dx$
$-du = \sin x dx$
$$\int \tan x dx = \int -\frac{1}{u} du$$
$$= -\ln|u| + C$$
$$= -\ln|\cos x| + C$$

---

⑪ **أوجد :** $\int_4^7 \frac{3x^2-17}{x^2-x-6} dx$

الحـــل

حلل المقام : $x^2 + 4x + 3 = (x+1)(x+3)$

أصفار المقام : 3- 1-

$$\frac{2x+8}{(x+1)(x+3)} = \frac{A}{(x+1)} + \frac{B}{(x+3)}$$

بالضرب في عوامل المقام $(x+1)(x+3)$

$$2x + 8 = A(x+3) + B(x+1)$$

التعويض بأصفار المقام :

التعويض بـ x=-1 : $2 \times (-1) + 8 = A(-1+3) + B(-1+1) A = 3$

التعويض بـ x=-3 : $2 \times (-3) + 8 = A(-3+3) + B(-3+1) B = -1$

$$\int_1^5 \frac{2x+8}{x^2+4x+3} dx = \int_1^5 \frac{3}{x+1} + \frac{-1}{x+3} dx =$$

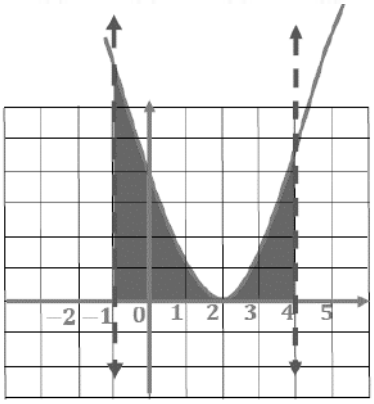
$$3\int_1^5 \frac{1}{x+1} dx - \int_1^5 \frac{1}{x+3} dx = 3[\ln|x+1|]_1^5 - 1[\ln|x+3|]_1^5$$

$$= 3([\ln|5+1|] - [\ln|1+1|]) - 1([\ln|5+3|] - [\ln|1+3|])$$

$$= 3([\ln|6|] - [\ln|2|]) - 1([\ln|8|] - [\ln|4|])$$

$$= 3\left[\ln\frac{6}{2}\right] - 1\left[\ln\frac{8}{4}\right] = 3\ln 3 - \ln 2$$

① في مثال (1) أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f ومحور السينات والمستقيمين
$x = -1, x = 4$



الحـــل

من الشكل : $f(x) \geq 0 \; \forall x \in [-1,4]$

$$A = \int_{-1}^{4} f(x)dx$$
$$= \int_{-1}^{4} (x^2 + 4 - 4x)dx$$
$$= \left[\frac{x^3}{3} + 4x - 4 \times \frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{4}$$
$$= \left[\frac{x^3}{3} + 4x - 2x^2\right]_{-1}^{4}$$
$$= \left[\frac{(4)^3}{3} + 4(4) - 2(4)^2\right] - \left[\frac{(-1)^3}{3} + 4(-1) - 2(-1)^2\right]$$
$$= \frac{35}{3} \text{ square units}$$

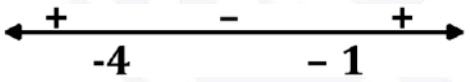
---

② أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة : $f(x) = x^2 + 5x + 4$ **ومحور السينات.**

الحـــل

نوجد الإحداثيات السينية لنقاط تقاطع منحنى الدالة f مع محور السينات بوضع f(x)=0

$$x^2 + 5x + 4 = 0$$
$$x = -4, x = -1$$



نبحث هل $f(x) \geq 0$ **أو** $f(x) \leq 0$ **في** [-4 , -1]

$$f(x) \leq 0 \forall x \in [-4, -1]$$
$$A = -\int_{-4}^{-1} f(x)dx = -\int_{-4}^{-1} (x^2 + 5x + 4)dx$$
$$= -\left[\frac{x^3}{3} + \frac{5}{2}x^2 + 4x\right]_{-4}^{-1}$$
$$= -\left(\left[\frac{(-1)^3}{3} + \frac{5}{2}(-1)^2 + 4(-1)\right] - \left[\frac{(-4)^3}{3} + \frac{5}{2}(-4)^2 + 4(-4)\right]\right)$$
$$= \frac{9}{2} \text{ square units}$$

③ أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f ومحور السينات في الفترة المبينة

(a) $f(x) = x^3 - 9x, [-2,1]$

الحـــل

نوجد قيم x بحيث :

$\boldsymbol{f(x) = 0}$

$x^3 - 9x = 0$

$x(x^2 - 9) = 0$

$x(x-3)(x+3) = 0$

$\boldsymbol{x = 0 \quad x = 3 \quad x = -3}$

$0 \in (-2,1) \quad 3 \notin (-2,1) \qquad -3 \notin (-2,1)$

$$A = \left|\int_{-2}^{0} f(x)dx\right| + \left|\int_{0}^{1} f(x)dx\right|$$

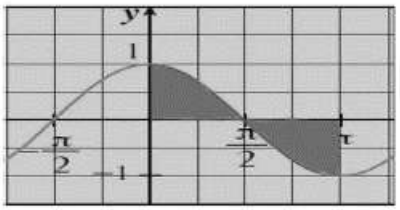
$$A = \left|\int_{-2}^{0} (x^3 - 9x)dx\right| + \left|\int_{0}^{1} (x^3 - 9x)dx\right|$$

$$= \left|\left[\frac{x^4}{4} - \frac{9}{2}x^2\right]_{-2}^{0}\right| + \left|\left[\frac{x^4}{4} - \frac{9}{2}x^2\right]_{0}^{1}\right|$$

$$= \left|\left[\frac{(0)^4}{4} - \frac{9}{2}(0)^2\right] - \left[\frac{(-2)^4}{4} - \frac{9}{2}(-2)^2\right]\right| + \left|\left[\frac{(1)^4}{4} - \frac{9}{2}(1)^2\right] - \left[\frac{(0)^4}{4} - \frac{9}{2}(0)^2\right]\right| = \frac{73}{4} \text{ square units}$$

(b) $f(x) = \cos x, [0,\pi]$

الحـــل



نرسم منحنى الدالة F ، نلاحظ أنه في الفترة $[0,\pi]$ ، تنقسم المنطقة المطلوبة إلى منطقتين حيث f(x)=0 عند $x = \frac{\pi}{2}$ فتكون المساحة المطلوبة كما يلي :

$$A = \left|\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx\right| + \left|\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(x)dx\right|$$

$$= \left|\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)dx\right|_{+} \left|\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (\cos x)dx\right|$$

$$= \left|[\sin x]_{0}^{\frac{\pi}{2}}\right| + \left|(\sin x)_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\right|$$

$$= \left|\left[\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right] - [\sin(0)]\right| + \left|[\sin(\pi)] - \left[\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]\right| = 2 \text{ square units}$$

---

④ أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة $f(x)=x^2+3$ ومنحنى الدالة $g(x)=x^2+1$ والمستقيمين $x=1,x=-1$ علما بأن $f(x)>g(x),\forall x\in[-1,1]$

$f(x)>g(x)\forall x\in[-1,1]$

$$A=\int_{-1}^{1}(f(x)-g(x))dx$$
$$=\int_{-1}^{1}\big((x^2+3)-(x^2+1)\big)dx$$
$$=\int_{-1}^{1}(x^2+3-x^2-1)\Big)dx$$
$$=\int_{-1}^{1}(2)dx$$
$$=[2x]_{-1}^{1}$$
$$=[2(1)]-[2(-1)]=4 \text{ square units}$$

⑤ أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة $f(x)=x^2+1$ ومنحنى الدالة $g(x)=-x^2-3$ والمستقيمين $x=1,x=-1$ علما بأن المنحنين للدالتين f,g غير متقاطعين

الحل المنحنيين غير متقاطعين لذلك نأخذ قيمة اختيارية تنتمي إلى الفترة (-1,1) ولتكن x=0

$f(0)=(0)^2+1=1, g(0)=-(0)^2-3=-3$

$f(x)>g(x)\forall x\in[-1,1]$

$$A=\int_{-1}^{1}(f(x)-g(x))dx$$
$$=\int_{-1}^{1}\big(x^2+1-(-x^2-3)\big)dx$$
$$=\int_{-1}^{1}(2x^2+4)dx$$
$$=\left[\frac{2}{3}x^3+4x\right]_{-1}^{1}$$
$$=\left[\frac{2}{3}(1)^3+4(1)\right]-\left[\frac{2}{3}(-1)^3+4(-1)\right]$$
$$=\frac{28}{3} \text{ square units}$$

---

⑥ أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحني الدالتين: $y_1=x^2+2\,,y_2=-2x+5$

الحل لإيجاد الاحداثيات السينية لنقطتى التقاطع نضع :

$$y_1=y_2$$
$$x^2+2=-2x+5$$
$$x^2+2x-3=0$$
$$x=-3,x=1$$

$$A=\left|\int_{-3}^{1}(y_1-y_2)dx\right|$$
$$=\left|\int_{-3}^{1}\big((x^2+2)-(-2x+5)\big)dx\right|$$
$$=\left|\int_{-3}^{1}(x^2+2x-3)dx\right|$$
$$=\left|\left[\frac{1}{3}x^3+x^2-3x\right]_{-3}^{1}\right|$$
$$=\left|\left[\frac{1}{3}(1)^3+(1)^2-3(1)\right]-\left[\frac{1}{3}(-3)^3+(-3)^2-3(-3)\right]\right|=\frac{32}{3} \text{ square units}$$

---

⑦ أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحني الدالتين : $f(x)=-2x^2+2, g(x)=x^2-1$

الحل لإيجاد الاحداثيات السينية لنقطتى التقاطع نضع :

$$f(x)=g(x)$$
$$-2x^2+2=x^2-1$$
$$3x^2-3=0$$
$$x=-1,x=1$$

$$A = \left|\int_{-1}^{1} (f(x) - g(x))dx\right|$$
$$= \left|\int_{-1}^{1} ((-2x^2 + 2) - (x^2 - 1))dx\right|$$
$$= \left|\int_{-1}^{1} (-3x^2 + 3)dx\right|$$
$$= |[-x^3 + 3x]_{-1}^{1}|$$
$$= |[-(1)^3 + 3(1)] - [-(-1)^3 + 3(-1)]| = 4 \text{ square unit}$$

---

⑧ أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f ومنحنى الدالة r في كل مما يلي:

$$f(x) = 1 - x^3, g(x) = -4x + 1$$

الحل لإيجاد الاحداثيات السينية لنقطتى التقاطع نضع :

$$f(x) = g(x) \Rightarrow 1 - x^3 = -4x + 1 \Rightarrow$$
$$x^3 - 4x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 4) = 0 \Rightarrow$$
$$x = 0, x = 2, x = -2$$
$$\therefore A = \left|\int_{-2}^{0} f(x) - g(x)dx\right| + \left|\int_{0}^{2} f(x) - g(x)dx\right|$$
$$= \left|\int_{-2}^{0} (1 - x^3 + 4x - 1)dx\right| + \left|\int_{0}^{2} 1 - x^3 + 4x - 1dx\right|$$
$$= \left|\left[-\frac{x^4}{4} + 2x^2\right]_{-2}^{0}\right| + \left|\left[-\frac{x^4}{4} + 2x^2\right]_{0}^{2}\right|$$
$$= |0 - (+4)| + |4 - 0| = 8 \text{ units square}$$

---

⑨ أوجد مساحة المنطقة المحددة بالمنحنيين: $f(x) = \sqrt{x}, g(x) = \frac{x}{2}$ و المستقيمين $x = 0, x = 9$

الحل لإيجاد الاحداثيات السينية لنقطتى التقاطع نضع :

$$f(x) = g(x) \Rightarrow \sqrt{x} = \frac{x}{2} \Rightarrow x = \frac{x}{4} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^2 - 4x = 0 \Rightarrow x(x - 4) = 0 \Rightarrow x = 0, x = 4$$
$$A = \left|\int_{0}^{4} \left(\sqrt{x} - \frac{x}{2}\right)dx\right| + \left|\int_{4}^{9} \sqrt{x} - \frac{x}{2}dx\right|$$
$$= \left|\left[2\frac{x^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{x^2}{4}\right]_{0}^{4}\right| + \left|\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^2}{4}\right]_{4}^{9}\right|$$
$$= \left|\left(\frac{2}{3}(8) - \frac{16}{4}\right) - 0\right| + \left|\left(\frac{2}{3}(27) - \frac{81}{4}\right) - \left(\frac{2}{3}(8) - \frac{16}{4}\right)\right|$$
$$= \left|\frac{4}{3}\right| + \left|\frac{-43}{12}\right| = \frac{59}{12} = 4.9 \text{ units square}$$

① أوجد حجم المجسم الناتج من دوران المنطقة المستوية دورة كاملة حول محور السينات والمحددة بمنحنى الدالة $f: f(x)=\sqrt{x-1}$ و محور السينات في الفترة $[1,5]$

الحل

$$V=\pi\int_1^5 (f(x))^2dx$$
$$=\pi\int_1^5 (\sqrt{x-1})^2dx$$
$$=\pi\int_1^5 (x-1)dx$$
$$=\pi\left[\frac{x^2}{2}-x\right]_1^5$$
$$=\pi\left(\left[\frac{(5)^2}{2}-(5)\right]-\left[\frac{(1)^2}{2}-(1)\right]\right)$$
$$=8\pi \text{ cubic units}$$

② باستخدام التكامل المحدد أوجد حجم المجسم الناتج من دوران المنطقة المستوية دورة كاملة حول محور السينات والمحددة بمنحنى الدالة $f: f(x)=r, r\neq 0$ في الفترة $[0,h]$

الحل

F(x)=r تمثل معادلة خط مستقيم يوازى محور السينات

المجسم الناتج من دوران المنطقة المستوية دورة كاملة حول محور السينات و المحدد بمنحنى الدالة f و محور السينات في الفترة [0,h] هو أسطوانة .

$$V=\pi\int_0^h (f(x))^2dx=\pi\int_0^h r^2dx$$
$$=\pi[r^2x]_0^h$$
$$=\pi([r^2(h)]-[r^2(0)])$$
$$=\pi r^2h \text{ cubic units}$$

③ أوجد حجم المجسم الناتج من دوران المنطقة المستوية دورة كاملة حول محور السينات والمحددة بين منحني الدالتين

$f(x)=\frac{x^2}{2}+1, g(x)=\frac{x}{2}+2$

الحل نوجد نقاط التقاطع

$$f(x)=g(x)$$
$$\frac{x^2}{2}+1=\frac{x}{2}+2$$
$$\frac{x^2}{2}+1-\frac{x}{2}-2=0$$
$$\frac{x^2}{2}-\frac{x}{2}-1=0$$
$$x=2, x=-1$$

نأخذ نقطة اختيارية في الفترة (2 , -1) ولتكن x=0

$$f(0)=\frac{(0)^2}{2}+1=1$$
$$g(0)=\frac{(0)}{2}+2=2$$
$$g(x)\geq f(x)\geq o\forall x\in[-1,2]$$
$$V=\pi\int_{-1}^{2}((g(x))^2-(f(x))^2)dx$$
$$=\pi\int_{-1}^{2}\left(\left(\frac{x}{2}+2\right)^2-\left(\frac{x^2}{2}+1\right)^2\right)dx$$
$$\pi\int_{-1}^{2}\left(\left(\frac{x^2}{4}+2x+4\right)-\left(\frac{x^4}{4}+x^2+1\right)\right)dx$$
$$\pi\int_{-1}^{2}\left(\frac{x^2}{4}+2x+4-\frac{x^4}{4}-x^2-1\right)dx$$
$$\pi\int_{-1}^{2}\left(-\frac{x^4}{4}-\frac{3x^2}{4}+2x+3\right)dx$$
$$\pi\left[-\frac{x^5}{20}-\frac{x^3}{4}+x^2+3x\right]_{-1}^{2}$$
$$\pi\left(\left[-\frac{32}{20}-2+4+6\right]-\left[\frac{1}{20}+\frac{1}{4}+1-3\right]\right)$$
$$\frac{81}{10}\pi \text{ cubic units}$$

④ أوجد حجم المجسم الناتج من دوران المنطقة دورة كاملة حول محور السينات والمحددة بمنحني الدالتين: $y_1=x+3, y_2=x^2+1$

الحل

نضع $y_1=f(x), y_2=g(x)$ و نوجد نقاط التقاطع

$$f(x)=g(x)$$
$$x+3=x^2+1$$
$$x^2+1-x-3=0$$
$$x^2-x-2=0$$
$$x=2, x=-1$$

نأخذ نقطة اختيارية في الفترة (2 , -1) ولتكن x=0

$$f(0)=(0)+3=3$$
$$g(0)=(0)^2+1=1$$
$$f(x)\geq g(x)\geq 0\forall x\in[-1,2]$$
$$=\pi\int_{-1}^{2}((f(x))^2-(g(x))^2)dx$$
$$\pi\int_{-1}^{2}((x+3)^2-(x^2+1)^2)dx$$
$$\pi\int_{-1}^{2}\left((x^2+6x+9)-(x^4+2x^2+1)\right)dx$$
$$\pi\int_{-1}^{2}(x^2+6x+9-x^4-2x^2-1)dx$$
$$\pi\int_{-1}^{2}(-x^4-x^2+6x+8)dx$$
$$\pi\left[-\frac{x^5}{5}-\frac{x^3}{3}+3x^2+8x\right]_{-1}^{2}$$
$$\pi\left(\left[-\frac{32}{5}-\frac{8}{3}+12+16\right]-\left[\frac{1}{5}+\frac{1}{3}+3-8\right]\right)$$
$$=\frac{117}{5}\pi \text{ cubic units}$$

① أوجد طول القوس من منحنى الدالة

$f: f(x) = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + 1$ **في الفترة** $[3,8]$

الحل

$$f(x) = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + 1 \Rightarrow f'(x) = \frac{2}{3} \times \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{2}}$$

$$L = \int_3^8 \sqrt{1 + (f'(x))^2}dx$$

$$= \int_3^8 \sqrt{1 + \left(x^{\frac{1}{2}}\right)^2}\,dx = \int_3^8 \sqrt{1+x}dx$$

$$= \frac{2}{3}\left[(1+x)^{\frac{3}{2}}\right]_3^8 = \frac{2}{3}\left[\sqrt{(1+x)^3}\right]_3^8$$

$$= \frac{2}{3}\left[\sqrt{9^3} - \sqrt{4^3}\right] = \frac{38}{3} \text{ units}$$

② أوجد طول القوس من منحنى الدالة

$f: f(x) = \frac{2}{9}(9+3x)^{\frac{3}{2}}$ **في الفترة** $[2,5]$

الحل

$$f(x) = \frac{2}{9}(9+3x)^{\frac{3}{2}} \Rightarrow f'(x) = \frac{2}{9} \times \frac{3}{2}(9+3x)^{\frac{1}{2}}(3)$$

$$= (9+3x)^{\frac{1}{2}}$$

$$L = \int_0^5 \sqrt{1 + (f'(x))^2}dx$$

$$= \int_2^5 \sqrt{1 + \left((9+3x)^{\frac{1}{2}}\right)^2}\,dx = \int_2^5 \sqrt{1+9+3x}dx$$

$$= \int_2^5 \sqrt{10+3x}dx = \frac{1}{3}\int_2^5 3(10+3x)^{\frac{1}{2}}dx$$

$$= \frac{1}{3}\left[\frac{2}{3}(10+3x)^{\frac{3}{2}}\right]_2^{5^2} = \frac{2}{9}\left[25^{\frac{3}{2}} - 16^{\frac{3}{2}}\right]$$

$$= \frac{2}{9}[125 - 64] = \frac{122}{9} \text{ units}$$

③ أوجد معادلة منحنى الدالة f الذي ميله عند أي نقطة $P(x,y)$ يساوي $3x^2 + x$ ويمر بالنقطة $(2,2)$

الحل

$$f'(x) = 3x^2 + x$$

$$f(x) = \int (3x^2 + x)dx$$

$$= \frac{3x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + C$$

$$= x^3 + \frac{x^2}{2} + C$$

لإيجاد قيمة الثابت C نعوض بالنقطة (2,2) في المعادلة السابقة فنجد :

$$2 = (2)^3 + \frac{(2)^2}{2} + C$$

$$2 = 8 + 2 + C$$

$$C = -8$$

معادلة منحنى الدالة f المطلوب هو : $f(x) = x^3 + \frac{x^2}{2} - 8$

④ أوجد معادلة منحنى الدالة f الذي ميله عند أي نقطة $P(x,y)$ يساوي $-8x^3 + 3x^2 - 2x + 4$ ويمر بالنقطة $(-1,-5)$

الحل

$$f'(x) = -8x^3 + 3x^2 - 2x + 4$$

$$f(x) = \int (-8x^3 + 3x^2 - 2x + 4)dx$$

$$= \frac{-8x^4}{4} + \frac{3x^3}{3} - \frac{2x^2}{2} + 4x + C$$

$$= -2x^4 + x^3 - x^2 + 4x + C$$

لإيجاد قيمة الثابت C نعوض بالنقطة (-5 , -1) في المعادلة السابقة فنجد :

$$-5 = -2(-1)^4 + (-1)^3 - (-1)^2 + 4(-1) + C$$

$$-5 = -2 - 1 - 1 - 4 + C$$

$$C = 3$$

معادلة منحنى الدالة f المطلوب هو :

$$f(x) = -2x^4 + x^3 - x^2 + 4x + 3$$

⑤ **إذا كان ميل العمودي لمنحنى الدالة f عند أي نقطة عليه (x,y) هو $2x-1$فأوجد معادلة المنحنى علما بأنه يمر بالنقطة$B(1,0)$**

الحـل

ميل العمودى : $\frac{-1}{f'(x)} = \qquad f'(x) \neq 0$

$$\frac{-1}{f'(x)} = 2x-1$$
$$f'(x) = \frac{-1}{2x-1}$$
$$f(x) = \int \frac{-1}{2x-1}dx$$
$$= \frac{-1}{2}\ln|2x-1| + C$$

لإيجاد قيمة C نعوض بالنقطة B(1,0) في الممعادلة السابقة فنجد :

$$0 = \frac{-1}{2}\ln|2(1)-1| + C$$
$$C = 0$$

معادلة منحنى الدالة f المطلوب هو : $f(x) = \frac{-1}{2}\ln|2x-1|$

---

⑥ **لتكن**$f''(x) = 5x-2$ **فأوجد معادلة الدالة f إذا كانت النقطة $P(2,-2)$ نقطة حرجة للدالة**

الحـل

$$f''(x) = 5x-2 \Rightarrow f'(x) = \int 5x-2dx = \frac{5}{2}x^2 - 2x + c$$

∵ $P(2,-2)$ نقطة حرجة للدالة إذن

$$f'(2) = 0 \Rightarrow \frac{5}{2}(2)^2 - 2(2) + c = 0 \Rightarrow c = -6$$
$$f'(x) = \frac{5}{2}x^2 - 2x - 6 \Rightarrow f(x) = \int \frac{5}{2}x^2 - 2x - 6dx \Rightarrow$$
$$f(x) = \frac{5}{6}x^3 - x^2 - 6x + c$$

∵ $P(2,-2)$ نقطة حرجة فهى تنتمى إلى منحنى f فهى تحقق معادلته أي :

$$f(2) = -2 \Rightarrow \frac{5}{6}(2)^3 - (2)^2 - 6(2) + c = -2 \Rightarrow c = \frac{22}{3}$$
$$f(x) = \frac{5}{6}x^3 - x^2 - 6x + \frac{22}{3}$$

① **أثبت أن الدالة:** $y = 2e^{3x} + 1$ **و هي حل للمعادلة:** $y' + 3 = 3y$

الحل

$y = 2e^{3x} + 1$

أوجد المشتقة الأولى : $y' = 2(3)e^{3x}$

$= 6e^{3x}$

عوض في الطرف الأيسر المعادلة التفاضلية

$6e^{3x} + 3 = 3(2e^{3x} + 1) = 3y$

الدالة $y = 2e^{3x} + 1$ **هي حل للمعادلة التفاضلية**

② **حل المعادلة:** $y' = 7x^2 + 9x - 1$

الحل

$y = \int y'dx$

$y = \int (7x^2 + 9x - 1)dx$

$= \frac{7x^3}{3} + \frac{9x^2}{2} - x + C$

③ **حل المعادلة:** $y' = 8x^3 - 3x^2 + 4$ **و التي تحقق** $y = 5$ **عند** $x = 1$

الحل

$y = \int y'dx$

$y = \int (8x^3 - 3x^2 + 4)dx$

$= \frac{8x^4}{4} - \frac{3x^3}{3} + 4x + C$

$= 2x^4 - x^3 + 4x + C$

$5 = 2(1)^4 - (1)^3 + 4(1) + C$

$5 = 5 + C$

$C = 0$

$y = 2x^4 - x^3 + 4x$

④ **حل المعادلة التفاضلية:** $\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x}$

الحل

$\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x}$

$\frac{dy}{y} = \frac{2dx}{x}$

$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{2dx}{x}$

$\ln|y| = 2\ln|x| + C$

$\ln|y| = \ln|x|^2 + C$

$\ln|y| = \ln x^2 + C$

$|y| = e^{\ln x^2 + C}$

$y = \pm e^C . e^{\ln x^2}$

$y = kx^2$

$: k = \pm e^C$

⑤ **أوجد حلا للمعادلة:** $y' = -2y$ **إذا كان** $y = 3$ **عند** $x = 0$

الحل

$y' = -2y$

$y = ke^{-2x}$

$3 = ke^{-2(0)}$

$k = 3$

$y = 3e^{-2x}$

⑥ **حل المعادلة** $3y' - 2y = 4$ **ثم أوجد الحل الذي يحقق** $y = 3$ **عند** $x = 0$

الحل

$3y' = 2y + 4$

$y' = \frac{2}{3}y + \frac{4}{3}$

$y = ke^{\frac{2}{3}x} + 2$

$3 = ke^{-\frac{1}{2}(0)} + 1$

$3 = k + 1$

$k = 2$

$y = 2e^{\frac{2}{3}x} + 2$

⑦ **حل المعادلة:** $y'' = -3x^2 + 6x$

الحـــل

$$y' = \int (-3x^2 + 6x)dx$$
$$y' = -x^3 + 3x^2 + C$$
$$y = \int (-x^3 + 3x^2 + C)dx$$
$$y = \frac{-x^4}{4} + x^3 + Cx + C_1$$

⑧ **حل المعادلة:** $2y'' - 5y' + 3y = 0$

الحـــل

المعادلة المميزة : $2r^2 - 5r + 3 = 0$

$$(2r - 3)(r - 1) = 0 \Rightarrow r = \frac{3}{2} \text{ or } r = 1$$

بتطبيق القاعدة : VI-(a)

$$y = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}$$

∴ الحل العام للمعادلة التفاضلية هو :

$$y = c_1 e^{x} + c_2 e^{\frac{3}{2}x}$$

⑨ **حل المعادلة:** $4y'' - 12y' + 9y = 0$

الحـــل

المعادلة المميزة : $(2r - 3)^2 = 0$

$$2r - 3 = 0 \Rightarrow r = \frac{3}{2} \Rightarrow r_1 = r_2 = \frac{3}{2}$$

بتطبيق VI-(b)

$$y = (c_1 x + c_2)e^{rx}$$

∴ الحل العام للمعادلة التفاضلية هو : $y =$

$$(c_1 x + c_2)e^{\frac{3}{2}x}$$

⑩ **حل المعادلة:** $y'' + 2y' + 8y = 0$

الحـــل

المعادلة المميزة : $r^2 + 2r + 8 = 0$

$$\Delta = (2)^2 - 4 \times 1 \times 8 = 4 - 32 = -28 = 28i^2$$
$$\therefore r_1 = \frac{-2-\sqrt{28}i}{2} = -\frac{2}{2} - \frac{2\sqrt{7}}{2}i = -1 - \sqrt{7}i$$
$$r_2 = \frac{-2+\sqrt{28}i}{2} = \frac{-2}{2} + \frac{2\sqrt{7}}{2}i = -1 + \sqrt{7}i$$
$$\alpha = -1 : \beta = \sqrt{7}$$

بتطبيق القاعدة VI-(c)

$$y = e^{\alpha x}(c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x)$$

يكون الحل العام للمعادلة التفاضلية هو : $y =$

$$e^{-x}\left(c_1 \cos \sqrt{7}x + c_2 \sin \sqrt{7}x\right)$$

①

(a) أوجد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل وبؤرته $F(-4,0)$

الحل

الرأس نقطة الأصل

∵ البؤرة F(-4 , 0) تنتمي إلى الجزء السالب من محور السينات P= -4 ، معادلة الدليل : x=4 (مستقيم رأسي) ، محور تماثل القطع هو محور السينات (فتحة القطعة لليسار)

∴ معادلة القطع المكافئ هي على الصورة $y^2 = 4\,P\,x$

معادلة القطع المكافئ هي : $y^2 = -16\,x$

(b)أوجد معادلة القطع المكافئ الذي بؤرته $F(0,2)$ ودليله المستقيم $y = -2$

الحل

∵ البؤرة F(0 , 2) تنتمي إلى الجزء الموجب من محور السينات ، P=2 (فتحة القطع لأعلى)، معادلة الدليل y = -2 (مستقيم أفقي)

رأس القطع في منتصف المسافة بين البؤرة و الدليل أي (0 , 0)

∴ معادلة القطع المكافئ هي على الصورة :

$x^2 = 4\,P\,y$

معادلة القطع المكافئ هي : $x^2 = 8y$

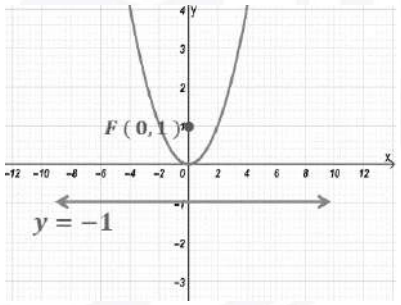
---

②أوجد البؤرة والدليل القطع مكافئ، لم ارسم شكلا تقريبا لهذا القطع في كل مما يلي:

(a) المعادلة: $y = \frac{x^2}{4}$

الحل

نضع المعادلة على الصورة $x^2 = 4y$ في الصورة $x^2 = 4py$



محور التماثل هو محور الصادات : $\therefore 4p = 4 \Rightarrow p = 1$

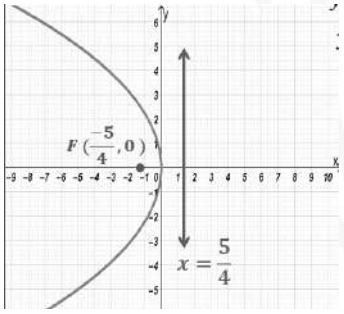
∴ البؤرة $F(0,p) = F(0,1)$

معادلة الدليل : $y = -p \Rightarrow y = -1$

(b)المعادلة: $x = -\frac{1}{5}y^2$

الحل

نضع المعادلة على الصورة $y^2 = -5x$ في الصورة $y^2 = 4px$



محور التماثل هو محور السينات : $\therefore 4p = -5 \Rightarrow p = \frac{-5}{4}$

∴ البؤرة $F(p,0) = F\left(\frac{-5}{4},0\right)$

معادلة الدليل : $x = -p \Rightarrow x = \frac{5}{4}$

③أوجد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل ويمر بالنقطة $A(1,1)$ وخط تماثله y-axis

الحل رأس القطع المكافئ نقطة الأصل ، و خط تماثله y-axis

المعادلة في الصورة : $x^2 = 4py$

القطع المكافئ يمر بالنقطة A(1 , 1) تحقق المعادلة أي أن :

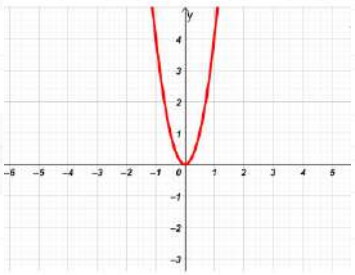
$$(1)^2 = 4p(1)$$

$$\therefore 1 = 4p \Rightarrow p = \frac{1}{4}$$

المعادلة هي : $x^2 = 4\left(\frac{1}{4}\right)y \leftarrow x^2 = y$

④أوجد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه (0,0) ويمر بالنقطتين $A(-1,4), B(1,4)$

الحل



منحنى القطع المكافئ يمر بالنقطتين A, B و راسه نقطة الأصل

∴ فتحة القطع لأعلى

المعادلة في الصورة : $x^2 = 4py$

وبالتعويض بأحد النقطتين و لتكن A

$$(-1)^2 = 4p(4)$$

$$\therefore 1 = 16p \Rightarrow p = \frac{1}{16}$$

المعادلة هي : $x^2 = 4\left(\frac{1}{16}\right)y \leftarrow x^2 = \frac{1}{4}y$

⑤أوجد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل ومعادلة دليله $y = 1$

الحل

معادلة الدليل y=1 (مستقيم أفقى) و الدليل متعامد مع خط التماثل

خط التماثل الرأسي (y – axis)

معادلة القطع المكافئ هي على الصورة $x^2 = 4py$

معادلة الدليل هي على الصورة $y = -p \leftarrow$

$$y = 1 \leftarrow p = -1$$

المعادلة :

$$x^2 = 4py$$

$$x^2 = 4(-1)y$$

$$x^2 = -4y$$

⑥تصنع إحدى الشركات الكشافات المكافئة لنوعيات عديدة من السيارات. إذا كان لأحد هذه الكشافات سطح مكافئ متولد من تدوير القطع المكافئ الذي معادلته $x^2 = 12y$ ، فأين سيكون موضع المصباح الكهربائي ؟

الحل

إذا نظرنا إلى سطح القطع المكافئ باعتبار رأسه (0 , 0) و خط تماثله محور الصادات

$$x^2 = 4py$$

$$x^2 = 12y \Rightarrow 4P = 12$$

$$\therefore P = 3$$

∴ البؤرة هي عند النقطة $F(0,P) = F(0,3)$

∴ سيكون موضع المصباح في النقطة $F(0,3)$

⑦في مثال (7)، ما معادلة القطع المكافئ إذا كانت اللمبة تبعد 4 (وحدات قياس) عن رأس القطع المكافئ؟

الحل

∵ رأس القطع المكافئ (0 , 0) و محور تماثله x-axis

∴ معادلة القطع المكافئ في الشكل $y^2 = 4px$

∵ اللمبة تبعد 4 وحدات عن رأس القطع المكافئ ∴ P=4

∴ معادلة القطع المكافئ هي : $y^2 = 4 \times 4x \Rightarrow y^2 = 16x$

⑧في مثال (8)، إذا كان البعد بين العمودين 220 m و ارتفاع كل عمود 36m ، فأوجد طول الدعامة التي تبعد 10m عن أي من العمودين

الحل

باعتبار رأس القطع المكافئ (0 , 0) معادلة القطع على الشكل $x^2 = 4py$

احداثيات النقطة B هي : $\therefore B(110,33) \leftarrow x_B = \frac{220}{2} = 110, y_B = 36 - 3 = 33$

بالتعويض في معادلة القطع : $(110)^2 = 4P(33) \Rightarrow P = \frac{(110)^2}{4\times(33)} = \frac{275}{3}$

∴ معادلة القطع المكافئ هي :

$$x^2 = 4\left(\frac{275}{3}\right)y$$
$$x^2 = \frac{1100}{3}y$$

∵ الاحداثي السيني للدعامة هو : $110 - 10 = 100$

و بالتعويض في معادلة القطع $(100)^2 = \frac{1100}{3}y \Longrightarrow y = 27.3$

∴ يبلغ طول الدعامة : $27.3 + 3 = 30.3$

① إذا كانت $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ معادلة قطع ناقص فأوجد:

(a) رأسي القطع وطرفي المحور الأصغر.

الحل

معادلة القطع الناقص هي : $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

و من معادلة القطع الناقص نجد أن :

$a^2=9\Rightarrow a=3$

$b^2=4\Rightarrow b=2$

و المحور الأكبر ينطبق على محور الصادات

رأسا القطع الناقص هما : $A_1(0,-3),A_2(0,3)$

طرفا المحور الأصغر هما : $B_1(-2,0),B_2(2,0)$

(b) البؤرتين

الحل

$C^2=a^2-b^2\Rightarrow C^2=9-4=5$

$C=\sqrt{5}$

$F_1(0,-\sqrt{5}),F_2(0,\sqrt{5})$

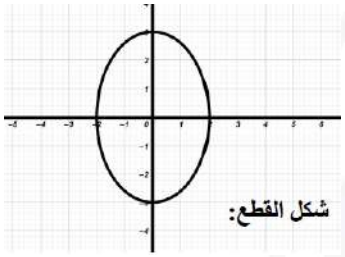
(c) معادلة دليلي القطع.

الحل

$y=\frac{a^2}{c},y=-\frac{a^2}{c}$

$y=\frac{-9}{\sqrt{5}},y=\frac{9}{\sqrt{5}}$

(d) طول كل من المحورين، ثم ارسم شكلا تقريبا للقطع.



الحل

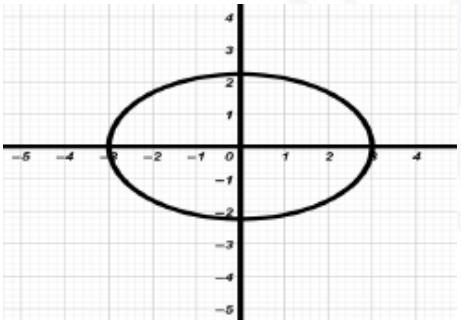
طول المحور الأكبر :

$2a=6$

طول المحور الأصغر :

$2b=4$

② أوجد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه $F_1(-2,0),F_2(2,0)$ وطول محورة الأكبر 6، وارسم شكلا تقريبا لهذا القطع.



الحل

تقع البؤرتان على محور السينات فتكون معادلة القطع على الصورة

: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ و تكون C=2

∵ طول المحور الأكبر = 6

$\therefore 2a=6\Rightarrow a=3\Rightarrow a^2=9$

∴ طرفا المحور الأكبر هما : $A_1(-3,0),A_2(3,0)$

$c^2=a^2-b^2\Rightarrow 4=9-b^2\Rightarrow b^2=5$

∴ معادلة القطع الناقص هي : $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$

③أوجد البؤرتين والرأسين وطول المحور الأكبر للقطع الناقص الذي معادلته: $x^2 + 4y^2 = 16$

الحل

$$x^2 + 4y^2 = 16 \Rightarrow \frac{x^2}{16} + \frac{4y^2}{16} = \frac{16}{16} \Rightarrow \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$$

$$a^2 = 16 \Rightarrow a = 4, b^2 = 4 \Rightarrow b = 2$$

$$C^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow C^2 = 16 - 4$$

$$C^2 = 12 \Rightarrow C = \sqrt{12} \Rightarrow C = 2\sqrt{3}$$

تقع البؤرتان على محور السينات :

$$F_1(-2\sqrt{3}, 0), F_2(2\sqrt{3}, 0)$$

تقع الرأسان على محور السينات : $A_1(-4,0), A_2(4,0)$

طول المحور الأكبر : $2a = 2 \times 4 \Rightarrow a = 8$

④أوجد معادلة قطع ناقص مركزه (0, 0) إذا كان محوره الأكبر ينطبق على المحور الصادي وطوله 16cm والمسافة بين البؤرتين 10cm

الحل

طول المحور الأكبر = 12cm

$$2a = 16 \Rightarrow a = 8 \leftarrow$$

المسافة بين البؤرتين = 8cm

$$2c = 10 \Rightarrow c = 5 \leftarrow$$

و لكن :

$$c^2 = a^2 - b^2$$

$$25 = 64 - b^2$$

$$b^2 = 64 - 25 = 39$$

∴ معادلة القطع الناقص هي : $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$

بالتعويض نحصل على المعادلة :

$$\frac{x^2}{39} + \frac{y^2}{64} = 1$$

---

⑤ (a) هل يمكنك حل مثال (5) بطريقة أخرى ؟ فسر.

الحل

البؤرة F_1(2 , 0) تقع على محور السينات

∴ البؤرة الثانية F_2(-2 , 0)

القطع يمر بالنقطة A(2 , 1)

$$\therefore AF_1 = \sqrt{(2-2)^2 + (0-1)^2} = 1$$

$$AF_2 = \sqrt{(-2-2)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{17}$$

$$2a = AF_1 + AF_2 = 1 + \sqrt{17} \Rightarrow a = \frac{1+\sqrt{17}}{2} = 2.56$$

$$\therefore a^2 = 6.56$$

$$c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow b^2 = a^2 - c^2 = 6.56 - 4 = 2.56$$

و معادلة القطع الناقص هي :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{6.56} + \frac{y^2}{2.56} = 1$$

(b)أوجد معادلة القطع الناقص الذي مركزه (0,0) ومحوره الأصغر أفقي طوله 10cm ويمر بالنقطة $A(2,2\sqrt{6})$

الحل

∵ المحور الأصغر أفقى طوله 10cm

$$\therefore 2b = 10 \Rightarrow b = 5 \Rightarrow b^2 = 25$$

∵ معادلة القطع الناقص الذى مركزه نقطة الأصل هي : $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$

للقطع $A(2,2\sqrt{6}) \in$

$$\therefore \frac{4}{25} + \frac{24}{a^2} = 1 \Rightarrow \frac{24}{a^2} = 1 - \frac{4}{25} \Rightarrow$$

$$a^2 = \frac{200}{7}$$

∴ معادلة القطع هي : $\frac{x^2}{25} + \frac{7y^2}{200} = 1$

⑥يتولد المجسم الناقص لأحد أجهزة تفتيت الحصوات من دوران قطع ناقص نقطنا طرفي محوره الأكبر $A_1(-8,0), A_2(8,0)$. إذا كانت إحدى نقطني طرفي محوره الأصغر $B_1(0,3.5)$ فأوجد إحداثيات البؤرتين

الحل

من المعلومات المعطاة نجد أن: المركز (0 , 0)

$$a = 8, b = 3.5$$
$$C^2 = a^2 - b^2$$
$$C = \sqrt{a^2 - b^2}$$
$$C = \sqrt{8^2 - 3.5^2}$$
$$C \approx 7.19$$

البؤرتان هما بالتقريب النقطتان

$F_2(-7.19,0)$،$F_1(7.19,0)$

⑦على افتراض أن الصالة بيضاوية الشكل طولي محوريها 78m ، 36m .على أي مسافة من مصدر الصوت يجب أن يكون موقع شخص ليتمكن من سماع الصوت المنطلق بشكل واضح ؟

الحل

∵ مصدر الصوت عند احدى البؤرتين

∴ يجب ان يقف الشخص عند البؤرة الأخرى حتى يسمع الصوت بوضوح

الشكل البيضاوى للصاله يمثل قطعاًله محور أكبر طوله 78m

$$\therefore 2a = 78 \Rightarrow a = 39$$
$$2b = 36 \Rightarrow b = 18$$
$$c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow c^2 = (39)^2 - (18)^2 = 1197$$
$$\Rightarrow c = \sqrt{1197} = 34.6$$

و المسافة بين البؤرتين : $2c = 69.2$

∴ يجب أن يكون موقع الشخص على بُعد 69.2m من مصدر الصوت

---

⑧إذا كان الكوكب المقصود في المثال (8) هو كوكب الأرض، اكتب معادلة تمثل حركة كوكب الأرض حول الشمس.

الحل

معادلة القطع الناقص الذى مركزه نقطة الأصل هي : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

$$a = 76 \times 10^6 \Rightarrow a^2 = 5.7 \times 10^{15}$$
$$b = 74 \times 10^6 \Rightarrow b^2 = 5.4 \times 10^{15}$$

المعادلة : $\frac{x^2}{5.7\times10^{15}} + \frac{y^2}{5.4\times10^{15}} = 1$

①لتكن $9y^2-25x^2=225$ معادلة قطع زائد، أوجد:

الحل

$$9y^2-25x^2=225 \xrightarrow{\div 225} \frac{9y^2}{225}-\frac{25x^2}{225}=1 \Rightarrow \frac{y^2}{25}-\frac{x^2}{9}=1$$

ومن معادلة القطع الزائد نجد أن : $a^2=25 \Rightarrow$

$$a=5, b^2=9 \Rightarrow b=3$$

$$C^2=a^2+b^2 \Rightarrow C^2=25+9=34 \Rightarrow C=\sqrt{34}$$

و المحور القاطع ينطبق على محور الصادات

(a)رأسي القطع الزائد $A_1(0,-5), A_2(0,5)$

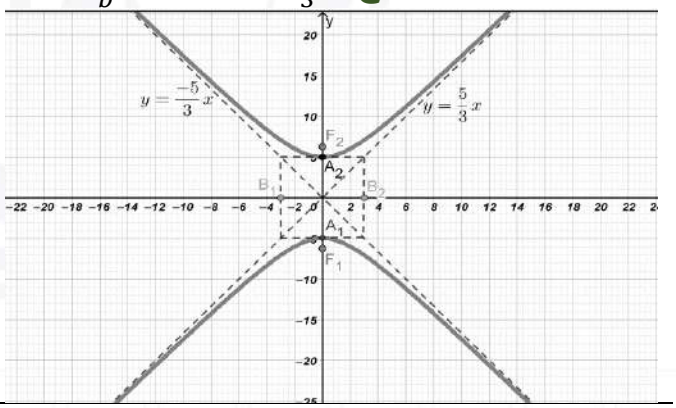
(b)البؤرتين $F_1(0,-\sqrt{34}), F_2(0,\sqrt{34})$

(c)معادلتي دليلي القطع.

$$y=\frac{a^2}{c}, y=-\frac{a^2}{c} \Rightarrow y=\frac{-25}{\sqrt{34}}, y=\frac{25}{\sqrt{34}}$$

(d)طول كل من المحورين $2a=2\times 5=10: 2a$ ، $2b=2\times 3=6: 2b$

(e)معادلة كل من الخطين المقاربين ثم ارسم شكلا تخطيطية للقطع. $y=\pm\frac{a}{b}x \Rightarrow y=\pm\frac{5}{3}x$



②أوجد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه $F_1(-4,0), F_2(4,0)$ ورأساه $A_1(-2,0), A_2(2,0)$، ثم أوجد معادلة كل من خطيه المقاربين، وارسم شكلا تقريبا للقطع

الحل

تقع البؤرتان على محور السينات فتكون المعادلة على الصورة : $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

احدى البؤرتين : $F_2(4,0)$ و نها تكون C=4

احدى الرأسين : $A_2(2,0)$ و منها تكون a=2

و لكن :

$$c^2=a^2+b^2 \Rightarrow 4^2=2^2+b^2$$

$$b^2=16-4=12 \Rightarrow b=2\sqrt{3}$$

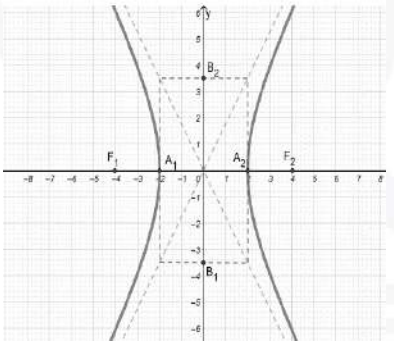
∴ معادلة القطع الزائد هي : $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$

معادلة كل من الخطين المقاربين :

$$y=\pm\frac{b}{a}x$$

$$y=\pm\frac{\sqrt{12}}{2}x \Rightarrow y=\pm\frac{2\sqrt{3}}{2}$$

$$y=\pm\sqrt{3}$$



③أوجد معادلة القطع الزائد الذي مركزه $(0,0)$ وإحدى بؤرتيه $F(\sqrt{41},0)$ ومعادلة أحد خطية المقاربين $y=\frac{4}{5}x$

الحل

المحور القاطع ينطبق على محور السينات و معادلته :

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

∵ احدى البؤرتين : $F=(\sqrt{41},0) \Leftarrow \therefore c=\sqrt{41}$

$\because C^2=a^2+b^2 \Rightarrow 41=a^2+b^2$

من معادلة لخط المقارب : $y=\frac{4}{5}x$

$\therefore \frac{4}{5}=\frac{b}{a} \Rightarrow \therefore a=\frac{5b}{4}$

بالتعويض في المعادلة (1) : $41=\left(\frac{5b}{4}\right)^2+b^2$

$41=\frac{25b^2}{16}+b^2 \Rightarrow 656=25b^2+16b^2 \Rightarrow b^2=\frac{656}{41}$

$b^2=16 \Rightarrow b=4$

لإيجاد قيمة A نستخدم : $a=\frac{5b}{4} \Rightarrow a=\frac{5\times4}{4}=5$

معادلة القطع الزائد هي : $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{16}=1$

④أوجد معادلة القطع الزائد الذي مركزه $(0,0)$ وأحد رأسيه $\left(0,\frac{5}{4}\right)$ ويمر بالنقطة $\left(-\sqrt{3},-\frac{5}{2}\right)$

الحل

∵ $\left(0,\frac{5}{4}\right)$ رأس القطع

∴ رأس القطع على محور الصادات

$\alpha=\frac{5}{4} \Rightarrow a^2=\frac{25}{16}$

و معادلة القطع من الشكل

$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$ و بالتعويض

$\frac{16y^2}{25}-\frac{x^2}{b^2}=1$

للقطع $\in \left(-\sqrt{3},-\frac{5}{2}\right)$ ∵

$\therefore \frac{16\times\frac{25}{4}}{25}-\frac{3}{b^2}=1 \Rightarrow 4-1=\frac{3}{b^2} \Rightarrow b^2=1$

∴ معادلة القطع الزائد $\frac{16y^2}{25}-\frac{x^2}{1}=1$

⑤في مثال (5) أوجد معادلة تنمذج مسار سفينة فضائية حول نبتون إذا كان

$a=35\ 988\ 342\text{km}$ ، $c=4\ 498\ 542\ 800\text{km}$

الحل

بفرض أن مركز القطع الزائد هو نقطة الأصل و المحور القاطع أفقى

∴ المعادلة على شكل $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

و كذلك $c^2=a^2+b^2 \Rightarrow b^2=c^2-a^2$

$\therefore b^2=(4498542800)^2-(35988342)^2 \Rightarrow$

$b^2=2.024\times10^{19} \Rightarrow a^2=1.295\times10^{15}$

∴ يمكن نمذجة مسار السفينة بالمعادلة :

$$\frac{x^2}{1.295\times10^{15}}-\frac{y^2}{2.024\times10^{19}}=1$$

⑥في مثال (6) أوجد معادلة قطع زائد مركزه $(0,0)$ لمسار المركبة الفضائية حول كوكب المشتري علما أن: $a=$

$38\ 942\ 360\text{km}$ ، $c=778\ 547\ 200\text{km}$

الحل

بفرض أن مركز القطع الزائد هو نقطة الأصل و أن المحور القاطع أفقى

∴ المعادلة على الصورة : $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

$c^2=a^2+b^2 \Rightarrow b^2=c^2-a^2$

$\therefore b^2=(778547200)^2-(38942360)^2$

$\therefore b^2=6.046\times10^{17}$

∴ معادلة القطع الزائد لمسار المركبة حول كوكب المشترى :

$$\frac{x^2}{1.517\times10^{15}}-\frac{y^2}{6.046\times10^{17}}=1$$

① حدد نوع القطع في كل مما يلي ثم أوجد معادلته

(a) اختلافه المركزي $(e=1)$ وبؤرته $F(-1,0)$

الحل

∵ e=1 ∴ القطع هو قطع مكافئ

البؤرة : $p=-1، F(-1,0)$

محور السينات هو محور التماثل

معادلة القطع على الصورة :

$$y^2=4px$$
$$y^2=4(-1)x$$
$$y^2=-4x$$

(b) اختلافه المركزي $\left(e=\frac{4}{5}\right)$ وإحدى بؤرتيه $F(-4\sqrt{2},0)$

الحل

$\because e=\frac{4}{5}, \frac{4}{5}<1$

∴ القطع هو قطع ناقص

إحدى البؤرتين $F(-4\sqrt{2},0)$

∴ المحور الأكبر ينطبق على محور السينات و

مركزه نقطة الأصل من البؤرة $c=-4\sqrt{2}$

$$\because e=\frac{c}{a}\Rightarrow\frac{4}{5}=\frac{-4\sqrt{2}}{a}\Rightarrow a=-5\sqrt{2}$$
$$c^2=a^2-b^2\Rightarrow 32=50-b^2$$
$$b^2=50-32=18$$

معادلة القطع الناقص هي : $\frac{x^2}{50}+\frac{y^2}{18}=1$

(c) اختلافه المركزي $(e=\sqrt{3})$ ومعادلة أحد دليليه $x=\frac{1}{3}$

$\because e=\sqrt{3}, \sqrt{3}>1$

∴ القطع هو قطع زائد

∵ معادلة أحد دليليه $x=\frac{1}{3}$

∴ المحور القاطع (الأساسي) ينطبق على محور السينات و مركزه (0, 0)

∵ معادلة أحد دليليه $x=\frac{a^2}{c}$

$$\frac{1}{3}=\frac{a^2}{c}\Rightarrow c=3a^2$$
$$e=\frac{c}{a}\Rightarrow\therefore\sqrt{3}=\frac{c}{a}$$
$$c=\sqrt{3}a$$

بحل المعادلتين :

$$3a^2=\sqrt{3}a$$
$$a(3a-\sqrt{3})=0$$

مقبوله $a=\frac{\sqrt{3}}{3}$ و مرفوضه a=0

$$\therefore c=\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=1$$
$$\because c^2=a^2+b^2$$
$$1=\frac{1}{3}+b^2\Rightarrow b^2=\frac{2}{3}$$

معادلة القطع هي :

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$
$$3x^2-\frac{3y^2}{2}=1$$

② أوجد الاختلاف المركزي لكل قطع مما يلي حيث معادلته:

(a) $x^2 + \frac{y^2}{25} = 1$

الحل

قطع ناقص معادلته : $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$

$a^2 = 25 \Rightarrow a = 5$

$b^2 = 1 \Rightarrow b = 1$

بالمقارنة :

$c^2 = a^2 - b^2$

$c^2 = 25 - 1 = 24 \Rightarrow c = 2\sqrt{6}$

الاختلاف المركزى : $e = \frac{c}{a} \Rightarrow e = \frac{2\sqrt{6}}{5}$

(b) $24y^2 = 600 + 25x^2$

الحل

قطع زائد معادلته : $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$

بالمقارنة يكون :

$a^2 = 25 \Rightarrow a = 5$

$b^2 = 24 \Rightarrow b = 2\sqrt{6}$

$c^2 = a^2 + b^2$

$c^2 = 25 + 24 = 49 \Rightarrow c = 7$

الختلاف المركزى : $\therefore e = \frac{c}{a} \Rightarrow \therefore e = \frac{7}{5}$

③ أوجد طول المحور القاطع للقطع الزائد الذي اختلافه المركزي $(e = 2)$ وطول محورة المرافق 6 وحدات.

$e = \frac{c}{a} \Rightarrow 2 = \frac{c}{a} \Rightarrow c = 2a$

$2b = 6 \Rightarrow b = 3, c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow 4a^2 = a^2 + 9$

$\Rightarrow 3a^2 = 9 \Rightarrow a^2 = 3 \Rightarrow a = \sqrt{3}$

طول المحور القاطع : $2a = 2\sqrt{3}$

④ إذا كان القمر الاصطناعي له مدار بيضاوي(قطع ناقص) حول الأرض حيث اختلافه المركزي $e =$ 0.05- وطول نصف محوره الأكبر 8600km وإحدى بؤرتيه مركز الأرض.

(a)أوجد معادلة مدار القمر الاصطناعي.

الحل

$e = 0.05a = 8600e = \frac{c}{a} \Rightarrow$

$0.05 = \frac{c}{8600} \Rightarrow c = 0.05 \times 8600 = 430$

$c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow (430)^2 = (8600)^2 - b^2 \Rightarrow$

$b^2 = 73775100$

و تكون معادلة المدار : $\frac{x^2}{73960000} + \frac{y^2}{73775100} = 1$

طول نصف قطر الأرض : 6372

(b)إذا كان نصف قطر الأرض6372km فأوجد أطول وأقصر بعد للقمر الاصطناعي عن سطح الأرض.

الحل

$A_2F = a - c$

$= 8600 - 430 = 8170$

فيكون أقصى بعد :

$8170 - 6372 = 1798$

$A_1F = a + c$

$= 8600 + 430 = 9030$

فيكون أطول بعد : $9030 - 6372 = 2658$

①في تجربة إلقاء قطعة نقود مرتين متتاليتين، أوجد مجموعة القيم للمتغيرات العشوائية التالية وحدد فيما إذا كانت متغيرات عشوائية منقطعة أم لا.

الحل $S = \{(H,H),(H,T),(T,H),(T,T)\}$

(a)المتغير Xالعشوائي الذي يمثل عدد الكتابات.

عدد عناصر x	عناصر S
0	(H , H)
1	(H , T)
1	(T , H)
2	(T , T)

مدى المتغير العشوائي :
$x(s)^{-} = \{0,1:2\}$
نوع المتغير العشوائي x :
متقطع

(b)المتغير العشوائي Yالذي يمثل مكعب عدد الكتابات.

عناصر المتغير y	عناصر S
0	(H , H)
1	(H , T)
1	(T , H)
8	(T , T)

مدى المتغير العشوائي :
$y(s) = \{0,1,8\}$
نوع المتغير العشوائي y :
متقطع

(c)المتغير العشوائي Zالذي يمثل عدد الكتابات مطروحا منه 2 .

عناصر المتغير z	عناصر S
-2	(H , H)
-1	(H , T)
-1	(T , H)
0	(T , T)

مدى المتغير العشوائي :
$z(5) = \{-2,-1,0\}$
نوع المتغير العشوائي z :
متقطع

②عند رمي حجر نرد مرة واحدة، إذا كان المتغير العشوائي X يعبر عن: مربع العدد الظاهر مطروحًا منه 1 عندما يكون العدد الظاهر أصغر من 4، و 1 - لغير ذلك.فأوجد:

(a)فضاء العينة S وعدد عناصر فضاء العينة $n(S)$

الحل فضاء العينة: $S = \{1,2,3,4,5,6\}$ عدد العناصر : n(S)=6

(b) مدى المتغير العشوائي X الحل $x = \{0,-1,3,8\}$

(c)احتمال وقوع كل عنصر من عناصر مدى المتغير العشوائي X.

الحل

$$f(-1) = P(x=-1)\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$
$$f(0) = P(x=0) = \frac{1}{6}$$
$$f(3) = P(x=3) = \frac{1}{6}, f(8) = P(x=8) = \frac{1}{6}$$

(d)دالة التوزيع الاحتمالي f للمتغير العشوائي X .

الحل

X	-1	0	3	8
F(X)	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

---

③عند إلقاء قطعة نقود ثلاث مرات متتالية، إذا كان المتغير العشوائي X يعبر عن عدد الصور، فأوجد ما يلي:

(a)فضاء العينة (S) وعدد عناصره $n(S)$.

الحل

$$S = \{(H,H,H),(H,H,T),(H,T,H),(T,H,H),(T,T,H),(T,H,T),(H,T,T),(T,T,T)\}$$

(b)مدى المتغير العشوائي X.

الحل $x = \{0,1,2,3\}$

(c) احتمال كل عنصر من عناصر مدى المتغير العشوائي X.

عدد الصور	عدد عناصر S
3	(H,H,H)
2	(H,H,T)
2	(H,T,H)
2	(T,H,H)
1	(T,T,H)
1	(T,H,T)
1	(H,T,T)
0	(T,T,T)

الحل

$$P(x=0) = \frac{1}{8} \quad , \quad P(x=1) = \frac{3}{8}$$

$$P(x=2) = \frac{3}{8} \quad , \quad P(x=3) = \frac{1}{8}$$

(d)دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X

الحل

X	0	1	2	3
F(x)	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

---

④إذا كانت دالة التوزيع الاحتمالي f و للمتغير العشوائي X هي:

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	0.35	0.15	0.1	0.2	k

فأوجد قيمة k

الحل مجموع قيم دالة التوزيع الاحتمالى f تساوى الواحد الصحيح

$$\therefore f(0)+f(1)+f(2)+f(3)+f(4)=1$$
$$0.35+0.15+0.1+0.2+K=1 \Rightarrow$$
$$K=1-0.8 \Rightarrow K=0.2$$

---

⑤إذا كان X متغيرا عشوائيا منقطعا مداه هو : $\{0, 1, 2, 3\}$وكان

$f(0) = 0.1, f(1) = 0.6, f(2) = 0.15$ فأوجد (3) لم اكتب دالة التوزيع الاحتمالي و للمتغير العشوائي X.

الحـــل

$$f(0) + f(1) + f(2) + f(3) = 1$$
$$0.1 + 0.6 + 0.15 + f(3) = 1$$
$$f(3) = 1 - 0.85 = 0.15$$

∴ دالة التوزيع الإحتمالى f للمتغير العشوائي x :

X	0	1	2	3
F(x)	0.1	0.6	0.15	0.15

---

⑥صندوق يحتوي على 10 كرات متماثلة منها 7 كرات بيضاء و 3 كرات حمراء سحبت عشوائيا 3 كرات معا من الصندوق إذا كان المتغير العشوائي Xيمثل عدد الكرات البيضاء فأوجد ما يلي:

(a)عدد عناصر فضاء العينة (S). الحـــل $n(S) = 10c3 = 120$

(b)مدى المتغير العشوائي X..

الحـــل

أن تكون كل الكرات المسحوبة حمراء ∴ عدد الكرات البيضاء x=0

أن تكون الكرات المسحوبة 2حمراء و واحدة بيضاء x=1

أن تكون الكرات المسحوبة 1حمراء و 2 بيضاء 2x=

أن تكون كل الكرات المسحوبة بيضاء x=3

(c)احتمال كل عنصر من عناصر مدى المتغير العشوائي X.

الحـــل

$$P(x = 0) = \frac{3C_3 \times 7C_0}{10C_3} = \frac{1}{120}, P(x = 1) = \frac{3C_2 \times 7C_1}{10C_3} = \frac{21}{120}$$
$$P(x = 2) = \frac{3C_1 \times 7C_2}{10C_3} = \frac{63}{120}, P(x = 3) = \frac{3C_0 \times 7C_3}{10C_3} = \frac{35}{120}$$

(d)دالة التوزيع الاحتمالي و للمتغير العشوائي X.

الحل

X	0	1	2	3	المجموع
F(x)	$\frac{1}{120}$	$\frac{21}{120}$	$\frac{63}{120}$	$\frac{25}{120}$	1

---

⑦إذا كانت دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المتقطع X هي:

x	0	1	2
$f(x)$	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{9}$

فأوجد التوقع μ للمتغير العشوائي X.

الحل

$$\mu = \sum x_i f(x_i)$$
$$= 0 \times 4/9 + 1 \times 4/9 + 2 \times \frac{1}{9} = \frac{2}{3}$$

---

⑧يبين الجدول التالي دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي متقطع X فأوجد:

x	1	2	3	4	5
$f(x)$	0.2	0.1	0.3	0.1	0.3

(a)التوقع (μ).

الحل $\mu\& = \sum x_i f(x_i) = 1 \times 0.2 + 2 \times 0.1 + 3 \times 0.3 + 4 \times 0.1 + 5 \times 0.3 = 3.2$

(b)التباين (σ^2)

الحل

$$\sigma^2\& = \sum \left(x_i^2 f(x_i)\right) - \mu^2 = 1 \times 0.2 + 4 \times 0.1 + 9 \times 0.3 + 16 \times 0.1 + 25 \times 0.3 - (3.2)^2$$
$$= 12.4 - 10.24 = 2.16$$

(c)الانحراف المعياري (σ). الحل $\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{2.16} = 1.4697$

---

⑨الجدول التالي بين دالة التوزيع الاحتمالي fللمتغير العشوائي المتقطع X ، إذا كانت F دالة التوزيع التراكمي للمتغير العشوائي X . فأوجد : $F(0), F(1), F(3.5), F(4), F(5), F(8)$

x	1	2	3	4	5
$f(x)$	0.43	0.29	0.17	0.09	0.02

الحل

$$F(0) = P(x \leqslant 0) = 0$$

$$F(1) = P(x \leqslant 1) = P(x < 1) + P(x = 1)$$
$$= 0 + 0.43 = 0.43$$

$$F(3.5) = P(x \leqslant 3.5) = P(1) + P(2) + P(3) + P(3.5)$$
$$= 0.43 + 0.29 + 0.17 + 0 = 0.89$$

$$F(4) = P(x \leqslant 4) = P(x < 4) + P(x = 4)$$
$$= P(x = 1) + P(2) + P(3) + P(4)$$
$$= 0.43 + 0.29 + 0.17 + 0.09 = 0.98$$

$$F(5) = P(x \leqslant 5) = P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5)$$
$$= 1$$

$$F(8) = P(x \leqslant 8) = 1$$

---

⑩ يبين الجدول التالي بعض قيم دالة التوزيع التراكمي F للمتغير العشوائي المتقطع X. أوجد:

x	1	2	3	4
$f(x)$	0.25	0.40	0.65	1

(a) $P(2 < X \leqslant 4)$

الحل

$$= F(4) - F(2)$$
$$= 1 - 0.40 = 0.6$$

(b) $P(X > 3)$

الحل

$$= 1 - F(x \leqslant 3)$$
$$= 1 - F(3) = 1 - 0.65 = 0.35$$

---

⑪ إذا كان X متغيرا عشوائيا ذو حدين ومعلمتيه هما: $n = 6, P = 0.6$ فأوجد

(a) $P(X = 1)$

الحل

$$= f(1) = 6C_1 \cdot (0.6)^1 \cdot (0.4)^5$$
$$= 0.037$$

حل آخر:

$$P(x = 1) = f(1)$$
$$\because n = 6, P = 0.6, x = 1$$

نبحث في جدول الاحتمالات في توزيع ذات الحدين ص172 عن قيمة f(1) لأنها ذات توزيع احتمالى متقطع فنجد أن : $f(1) = 0.037$

(b) $P(2 < X \leqslant 4)$

الحل

$$= P(x = 3) + P(x = 4)$$
$$= f(3) + f(4)$$

$$f(3) = 6C3 \times (0.6)^3 \times (0.4)^3 \Rightarrow f(3) = 0.276$$
$$f(4) = 6C4 \times (0.6)^4 \times (0.4)^2 \Rightarrow f(4) = 0.311$$
$$p(2 < x \leqslant 4) = 0.276 + 0.311 = 0.587$$

⑫ينتج مصنع سيارات 350 سيارة يوميا، إذا كانت نسبة إنتاج السيارات المعيبة 0.02 فأوجد التوقع والتباين والانحراف المعياري لعدد السيارات المعيبة في يوم واحد

الحـــل

$$\mu = nP = 350(0.02) = 7$$
$$\sigma^2 = nP(1-P) = 350(0.02)(0.98) = 6.86$$
$$\sigma = \sqrt{6.86}$$
$$= 2.6192$$

---

⑬في تجربة إلقاء قطعة نقود 8 مرات أوجد التوقع والتباين والانحراف المعياري إذا كان المتغير العشوائي X هو ظهور كتابة.

الحـــل

P هو احتمال ظهور كتابة $P = \frac{1}{2} \cdot 1 - P = \frac{1}{2}$

التوقع : $\mu = nP = 8 \times \frac{1}{2} = 4$

التباين : $\sigma^2 = nP(1-P) = 8 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = 2$

الإنحراف المعيارى : $\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{2} = 1.4142$

---

① إذا كان X متغيرا عشوائيا متصلا، فدالة كثافة الاحتمال له هي $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{6}: -3\leqslant x\leqslant 3\\ 0: \text{في ما عدا ذلك}\end{cases}$ فأوجد:

(a) $P(x<2)$

الحل

مساحة المنطقة المظللة =

$=(2-(-3))\times\frac{1}{6}=5\times\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$

(b) $P(-1<X<1)$

الحل

مساحة المنطقة المظللة =

$=(1-(-1))\times\frac{1}{6}=2\times\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$

(c) $P(-1.5<X<2.5)$

الحل

مساحة المنطقة المظللة =

$=\left(2.5-(-1.5)\right)\times\frac{1}{6}=\frac{2}{3}$

(d) $P(X=0)$

الحل

=0

② إذا كان X متغيرا عشوائيا متصلا ودالة كثافة الاحتمال له هي: $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x: 0\leqslant x\leqslant 2\\ 0: \text{في ما عداذلك}\end{cases}$ فأوجد:

(a) $P(X<1)$

الحل

مساحة المنطقة المظللة=

$=\frac{1}{2}\times 1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

(b) $P(X\geqslant 1)$

الحل

مساحة المنطقة المظللة =

$=1-P(x<1)=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$

(c) $P(X=1)$

الحل

=0

③ لتكن الدالة f: $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}: 1\leqslant x\leqslant 3\\ 0: \text{في ما عدا ذلك}\end{cases}$

(a) أثبت أن الدالة f هي دالة كثافة احتمال.

الحل مساحة المنطقة تحت المنحنى في الشكل

مساحة المنطقة المستطيلة = الطول × العرض $=2\times\frac{1}{2}=1$

∴ f هي دالة كثافة احتمال $=2\times\frac{1}{2}=1$

(b) أثبت أن الدالة f تتبع التوزيع الاحتمالي المنتظم.

الحل لاثبات أن f تتبع التوزيع الاحتمالى المنتظم يجب أن تكون على الصورة:

$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}: 1\leqslant x\leqslant 3\\ 0: \text{في ما عدا ذلك}\end{cases}$ = $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a}: a\leqslant x\leqslant b\\ 0: \text{في ما عدا ذلك}\end{cases}$

$a = 1, b = 3 \Rightarrow$
$b - a = 3 - 1 = 2$

(c)أوجد $P(2 < X \leqslant 3)$:

الحل مساحة المنطقة المظللة = $= 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

(d)أوجد التوقع والتباين للدالة f

الحل

التوقع = $\mu = \frac{a+b}{2} = \frac{1+3}{2} = 2$

التباين = $\sigma^2 = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{(3-1)^2}{12} = \frac{1}{3}$

---

④إذا كان : هو التوزيع الطبيعي المعياري للمتغير العشوائي X فأوجد:

(a) $P(z \leq 0.95)$

الحل

نستخدم جدول التوزيع المعيارى z

$P(z \leqslant 0.95) = 0.82894$

(b) $P(z > 0.71)$

الحل

$= 1 - P(z < 0.71)$
$= 1 - 0.76115$
$= 0.23885$

(c) $P(1.45 \leqslant z \leqslant 3.26)$

الحل

$= P(z \leqslant 3.26) - P(z \leqslant 1.45)$
$= 0.99944 - 0.92647$
$= 0.07297$

---

⑤ إذا كان z هو التوزيع الطبيعي المعياري للمتغير العشوائي X فأوجد

(a) $P(z \leq -0.12)$

الحل

نستخدم جدول التوزيع المعيارى

$= 0.45224$

(b) $P(-3.2 \leq z \leq -0.1)$

الحل

$= P(z \leqslant -0.1) - P(z \leqslant -3.2)$
$= 0.46017 - 0.00069$
$= 0.45948$

(c) $P(-5.26 \leq z \leq 0.69)$

الحل

$= P(z \leqslant 0.69) - P(z \leqslant -5.26)$
$= 0.75490 - 0$
$= 0.75490$