

نصار التفوق

عمل / أ . أحمد نصار

((مذكره مجانية ... المرجع: الكتاب المدرسى وكراسة التمارين
وزارة التربية والتعليم الكويتية))

تجميع لأصعب أفكار المسائل فى الكتاب والكراسة

الاختبار الفاينال 8 مسائل مقالى

الوحدة الأولى (التكامل):

3 مسائل مقالى.

الوحدة الثانية (تطبيقات التكامل):

2 مسائل مقالى.

الوحدة الثالثة (القطوع):

2 مسائل مقالى.

الوحدة الرابعة (الأحصاء):

1 سؤال مقالى.

مسائل الموضوعى من كراسه التمارين بنفس الارقام

(1)

$$\int x^5 \sqrt{3+x^2} dx$$

الحل:

$$u = 3 + x^2 \Rightarrow du = 2x dx \Rightarrow \frac{du}{2} = x dx$$

$$\int x^5 \sqrt{3+x^2} dx = \int \sqrt{3+x^2} (x^4)(x dx)$$

$$u = 3 + x^2 \Rightarrow x^2 = u - 3 \Rightarrow x^4 = (u - 3)^2$$

$$\int x^5 \sqrt{3+x^2} dx = \int \sqrt{3+x^2} (x^4)(x dx)$$

$$= \int \sqrt{u} (u - 3)^2 \frac{du}{2} = \frac{1}{2} \int u^{\frac{1}{2}} (u^2 - 6u + 9) du = \frac{1}{2} \int \left(u^{\frac{5}{2}} - 6u^{\frac{3}{2}} + 9u^{\frac{1}{2}} \right) du$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{u^{\frac{7}{2}}}{\frac{7}{2}} - \frac{6u^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + \frac{9u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C \right) = \frac{1}{7} u^{\frac{7}{2}} - \frac{6}{5} u^{\frac{5}{2}} + 3u^{\frac{3}{2}} + C$$

$$= \frac{1}{7} (3+x^2)^{\frac{7}{2}} - \frac{6}{5} (3+x^2)^{\frac{5}{2}} + 3(3+x^2)^{\frac{3}{2}} + C$$

(2)

$$\int \frac{dx}{(\sin^2 x) \sqrt{1 + \cot x}} dx$$



$$= \int \frac{1}{\sqrt{1 + \cot x}} \cdot \frac{1}{\sin^2 x} dx$$

$$= \int (1 + \cot x)^{-1/2} \cdot \csc^2 x dx$$

بفرض أن

$$u = 1 + \cot x$$

$$du = -\csc^2 x dx$$

$$\therefore \int (1 + \cot x)^{-1/2} \cdot (-\csc^2 x) dx$$

بالتعويض

$$= - \int u^{-1/2} du$$

$$= - \frac{u^{1/2}}{1/2} + C$$

$$= -2\sqrt{u} + C$$

$$= -2\sqrt{1 + \cot x} + C$$

(3)

$$\int \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} dx$$

أرجد:

الحل

$$I = \int e^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{1}{x^2} dx$$

$$= \int e^u \cdot du$$

$$= -e^u + C = -e^{\frac{1}{x}} + C$$

$$u = \frac{1}{x}$$

$$du = -\frac{1}{x^2} dx$$

$$-du = \frac{1}{x^2} dx$$

(4)

$$\int (2 \tan x - \csc^2 x) dx$$

$$\int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx$$

$$= -\int \frac{du}{u}$$

$$= -\ln |u| + C$$

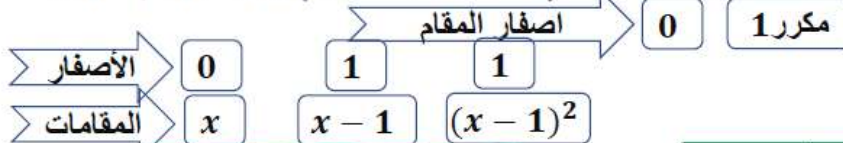
$$= -\ln |\cos x| + C$$

$$\therefore I = -2 \ln |\cos x| + \cot x + C$$

(5)

أوجد: $\int \frac{4x^2 - 4x + 1}{x^3 - 2x^2 + x} dx$

حلل المقام $\rightarrow x^3 - 2x^2 + x = x(x^2 - 2x + 1) = x(x-1)^2$



بالضرب في $x(x-1)^2$

$$\frac{4x^2 - 4x + 1}{x(x-1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{(x-1)} + \frac{C}{(x-1)^2}$$

$$4x^2 - 4x + 1 = A(x-1)^2 + Bx(x-1) + Cx$$

$$1 = A(0-1)^2 + \cancel{B(0)} + \cancel{C(0)}$$

$$A = 1$$

بالتعويض في $x=0 \rightarrow 1$

$$4(1)^2 - 4(1) + 1 = \cancel{A(0)} + \cancel{B(0)} + C(1)$$

$$C = 1$$

بالتعويض في $x=1 \rightarrow 1$

x قيمة اختيارية لا تساوي أصفار المقام و A, C من الحل

بالتعويض في $x=2, A=1, C=1 \rightarrow 1$

$$4(2)^2 - 4(2) + 1 = (1)(2-1)^2 + B(2)(2-1) + (1)(2)$$

$$B = 3$$

تابع الحل

أوجد: $\int \frac{4x^2 - 4x + 1}{x^3 - 2x^2 + x} dx$

$$\frac{4x^2 - 4x + 1}{x(x-1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{(x-1)} + \frac{C}{(x-1)^2}$$

$$A = 1$$

$$\frac{4x^2 - 4x + 1}{x(x-1)^2} = \frac{1}{x} + \frac{3}{(x-1)} + \frac{1}{(x-1)^2}$$

$$B = 3$$

$$C = 1$$

$$\begin{aligned} \int \frac{4x^2 - 4x + 1}{x(x-1)^2} dx &= \int \frac{1}{x} + \frac{3}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} dx \\ &= \int \frac{1}{x} dx + \int \frac{3}{x-1} dx + \int \frac{1}{(x-1)^2} dx = \\ &= \ln|x| + 3\ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + C \end{aligned}$$

(6)

حل المقام

$$\int \frac{x^2 + 1}{x^3 + 4x^2} dx$$

$$x^3 + 4x^2 = x^2(x + 4)$$

اصفار المقام

0 مكرر -4

الاصفار

0

0

-4

المقامات

x

x²

x + 4

بالضرب في

$$\frac{x^2 + 1}{x^2(x + 4)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x + 4}$$

$$x^2 + 1 = Ax(x + 4) + B(x + 4) + Cx^2$$

$$0^2 + 1 = \cancel{A(0)} + B(0 + 4) + \cancel{C(0)}$$

$$B = \frac{1}{4}$$

التعويض باصفار المقام

بالتعويض في 1 بـ 0 x = 0

$$(-4)^2 + 1 = \cancel{A(0)} + \cancel{B(0)} + C(-4)^2$$

$$C = \frac{17}{16}$$

بالتعويض في 1 بـ -4 x = -4

قيمة اختيارية لا تساوي اصفار المقام و B, C من الحل

بالتعويض في 1 بـ x = 1, B = 1/4, C = 17/16

$$(1)^2 + 1 = A(1)(1 + 4) + \frac{1}{4}(1 + 4) + \frac{17}{16}(1)^2 \quad A = \frac{-1}{16}$$

تابع الحل

$$\frac{x^2 + 1}{x^2(x + 4)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x + 4}$$

$$\frac{x^2 + 1}{x^2(x + 4)} = \frac{-1}{16x} + \frac{1}{4x^2} + \frac{17}{16(x + 4)}$$

$$A = \frac{-1}{16}$$

$$B = \frac{1}{4}$$

$$C = \frac{17}{16}$$

$$\int \frac{x^2 + 1}{x(x + 4)^2} dx = \int \frac{-1}{16x} + \frac{1}{4x^2} + \frac{17}{16(x + 4)} dx =$$

$$= \int \frac{-1}{16x} dx + \int \frac{1}{4x^2} dx + \int \frac{17}{16(x + 4)} dx =$$

$$= -\frac{1}{16} \ln |x| - \frac{1}{4x} + \frac{17}{16} \ln |x + 4| + C$$

(7)

بأستخدام القسمة المطولة:A)

$$\frac{x^2 + 3x + 2}{(x-3)^2} = 1 + \frac{9x-7}{(x-3)^2}$$

$$\frac{9x-7}{(x-3)^2} = \frac{A_1}{x-3} + \frac{A_2}{(x-3)^2}$$

$$9x-7 = A_1(x-3) + A_2$$

عوض عن x بـ 3 $\therefore A_2 = 20$ عوض عن A_2 بـ 20 ولنكن $x = 1$ لإيجاد قيمة A_1 .

$$\therefore A_1 = 9$$

$$\frac{x^2 + 3x + 2}{(x-3)^2} = 1 + \frac{9}{x-3} + \frac{20}{(x-3)^2}$$

$$\int \frac{x^2 + 3x + 2}{(x-3)^2} dx = x + 9 \ln|x-3| - \frac{20}{x-3} + C$$

B)

$$\frac{2x^2 + x + 3}{x^2 - 1} = 2 + \frac{x+5}{x^2-1}$$

$$\frac{x+5}{x^2-1} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{x+1}$$

$$x+5 = A_1(x+1) + A_2(x-1)$$

عوض عن x بـ 1 $\therefore A_1 = 3$ عوض عن x بـ -1 $\therefore A_2 = -2$

$$\frac{2x^2 + x + 3}{x^2 - 1} = 2 + \frac{3}{x-1} - \frac{2}{x+1}$$

$$\int \frac{2x^2 + x + 3}{x^2 - 1} dx = \int \left(2 + \frac{3}{x-1} - \frac{2}{x+1} \right) dx$$

$$= 2x + 3 \ln|x-1| - 2 \ln|x+1| + C$$

(8)

$$\int (4x - 1) \ln x \, dx$$

الحل :

$$u = \ln x$$

$$dv = (4x - 1) dx$$

$$du = \frac{1}{x} dx$$

$$v = 2x^2 - x = x(2x - 1)$$

$$\int u \, dv = u \cdot v - \int v \, du$$

$$\int (4x - 1) \ln x \, dx$$

$$= x(2x - 1) \ln x - \int \frac{1}{x} \cdot x(2x - 1) dx$$

$$= x(2x - 1) \ln x - \int (2x - 1) dx$$

$$= x(2x - 1) \ln x - (x^2 - x) + c$$

$$= x(2x - 1) \ln x - x^2 + x + c$$

(9)

$$\int x \sin(5x) dx$$

$$u = x$$

$$dv = \sin(5x) dx$$

$$du = dx$$

$$v = \frac{-\cos(5x)}{5}$$

$$\int u \, dv = uv - \int v \, du$$

$$\int x \sin(5x) dx$$

$$= \frac{-1}{5} x \cos(5x) - \int \frac{-\cos(5x)}{5} dx$$

$$= \frac{-1}{5} x \cos(5x) + \frac{1}{5} \int \cos(5x) dx$$

$$= \frac{-1}{5} x \cos(5x) + \frac{1}{5} \left(\frac{\sin(5x)}{5} \right) + c$$

$$= \frac{-1}{5} x \cos(5x) + \frac{1}{25} (\sin(5x)) + c$$

(10)

$$\int x^2 \ln x^2 dx$$

أوجد:

$$I = \int 2x^2 \cdot \ln x dx \quad \text{الحل}$$

$$u = \ln x \quad dv = 2x^2 dx$$

$$du = \frac{1}{x} dx \quad v = \frac{2}{3} x^3$$

$$\int u dv = uv - \int v du$$

$$I = \ln x \cdot \frac{2}{3} x^3 - \int \frac{2}{3} x^3 \cdot \frac{1}{x} dx$$

$$I = \frac{2}{3} x^3 \cdot \ln x - \frac{2}{3} \int x^2 dx$$

$$I = \frac{2}{3} x^3 \cdot \ln x - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} x^3 + C$$

$$I = \frac{2}{3} x^3 \cdot \ln x - \frac{2}{9} x^3 + C$$

(11)

$$\int x^2 e^{2x-3} dx$$

$$u = x^2 \quad dv = e^{2x-3} dx$$

$$du = 2x dx \quad v = \frac{1}{2} e^{2x-3}$$

$$\int u dv = uv - \int v du$$

$$\int x^2 e^{2x-3} dx = \frac{1}{2} x^2 e^{2x-3}$$

$$- \int x e^{2x-3} dx \dots \dots \dots (1)$$

نستخدم قاعدة التجزىء مرة أخرى لإيجاد تكامل

$$\int x e^{2x-3} dx$$

$$u = x \quad dv = e^{2x-3} dx$$

$$du = dx \quad v = \frac{1}{2} e^{2x-3}$$

$$\int u dv = uv - \int v du$$

$$\int x e^{2x-3} dx = \frac{1}{2} x e^{2x-3} - \frac{1}{2} \int e^{2x-3} dx$$

$$= \frac{1}{2} x e^{2x-3} - \frac{1}{4} e^{2x-3} + c \quad (2)$$

من (1) ، (2) نحصل على

$$\therefore \int x^2 e^{2x-3} dx$$

$$= \frac{1}{2} x^2 e^{2x-3} - \frac{1}{2} x e^{2x-3} + \frac{1}{4} e^{2x-3} + c$$

$$= \left(\frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{2} x + \frac{1}{4} \right) e^{2x-3} + c$$

(12)

$$\int_{-2}^3 (x|x| + 3) dx$$

$$= \int_{-2}^0 (x|x| + 3) dx + \int_0^3 (x|x| + 3) dx$$

$$= \int_{-2}^0 (-x^2 + 3) dx + \int_0^3 (x^2 + 3) dx$$

$$= \left[\frac{-x^3}{3} + 3x \right]_{-2}^0 + \left[\frac{+x^3}{3} + 3x \right]_0^3$$

$$= - \left[\frac{8}{3} - 6 \right] + [9 + 9 - 0]$$

$$= \frac{10}{3} + 18 = \frac{64}{3} = 21,3333$$

(13)

$$\int_1^e \frac{\ln^6 x}{x} dx$$

$$\int_1^e \frac{\ln^6 x}{x} dx = \int_1^e \frac{(\ln x)^6}{x} dx$$

$$u = \ln x \quad du = \frac{1}{x} dx$$

$$x \rightarrow e \quad u \xrightarrow{=\ln e} 1$$

$$x \rightarrow 1 \quad u \xrightarrow{=\ln 1} 0$$

$$\int_0^1 u^6 du$$

$$\left[\frac{u^7}{7} \right]_0^1 = \frac{1}{7}$$

(14)

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} x \sec^2 x \, dx =$$

نحل متكامل غير محدد بالتجزئي
ثم وضع حدود التكامل بعد الحصول على الحل النهائي

تفاضل	نفرض أن	تكامل
$u = x$	\rightarrow	$dv = \sec^2 x \, dx$
$du = dx$	\leftarrow	$v = \tan x$

$$\int u \, dv = u \, v - \int v \, du$$

$$\int x \sec^2 x \, dx = x \tan x - \int \tan x \, dx$$

$$= x \tan x + \ln|\cos x| + C$$

$$\int \tan x \, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} \, dx$$

$$u = \cos x$$

$$du = -\sin x \, dx$$

$$-du = \sin x \, dx$$

$$\int \tan x \, dx = \int -\frac{1}{u} \, du$$

$$= -\ln|u| + C$$

$$= -\ln|\cos x| + C$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} x \sec^2 x \, dx = [x \tan x + \ln|\cos x|]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \left[\frac{\pi}{4} \tan \frac{\pi}{4} + \ln \left| \cos \frac{\pi}{4} \right| \right] - [(0) \tan(0) + \ln|\cos(0)|]$$

$$= \left[\frac{\pi}{4} (1) + \ln \left| \frac{\sqrt{2}}{2} \right| \right] - [(\cancel{0})(\cancel{0}) + \ln|\cancel{1}|] = \frac{\pi}{4} + \ln \frac{\sqrt{2}}{2}$$

(15)

أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحى الدالة f ومحور السينات في الفترة الميمنة.

$$f(x) = \cos x \quad , \quad [0, \pi]$$

الحل:

نلاحظ أنه في الفترة $[0, \pi]$

تتقسم المنطقة المطلوبة إلى منطقتين حيث $f(x) = 0$ عند $x = \frac{\pi}{2}$

$$A = \left| \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx \right| + \left| \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(x) dx \right|$$

فتكون المساحة المطلوبة كما يلي :

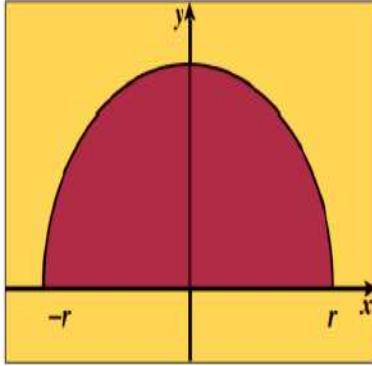
$$= \left| \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x) dx \right| + \left| \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (\cos x) dx \right|$$

$$= \left| [\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} \right| + \left| (\sin x) \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \right|$$

$$= \left| \left[\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \right] - [\sin(0)] \right| + \left| [\sin(\pi)] - \left[\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \right] \right| = 2 \quad \text{square units}$$

(16)

باستخدام التكامل المحدد أوجد حجم المجسم الناتج من دوران المنطقة المستوية دورة كاملة



شكل توضيحي

حول محور السينات والمحددة بنصف الدائرة $y = \sqrt{r^2 - x^2}$

$$y = \sqrt{r^2 - x^2} \quad \text{الحل:}$$

تمثل معادلة نصف دائرة مركزها $(0, 0)$ وطول نصف قطرها r

المجسم الناتج من دوران المنطقة المستوية دورة كاملة حول محور السينات هو كرة

$$V = \pi \int_{-r}^r y^2 dx = \pi \int_{-r}^r (\sqrt{r^2 - x^2})^2 dx$$

$$= \pi \int_{-r}^r (r^2 - x^2) dx$$

$$= \pi \left[r^2 x - \frac{1}{3} x^3 \right]_{-r}^r$$

$$= \pi \left[r^2(r) - \frac{1}{3}(r)^3 \right] - \left[r^2(-r) - \frac{1}{3}(-r)^3 \right]$$

$$= \frac{4}{3} \pi r^3 \text{ cubic units}$$

(17)

اوجد حجم المجسم الناتج من دوران المنطقة المستوية دورة كاملة حول محور السينات والمحددة بين منحنىي الدالتين

$$f(x) = \frac{x^2}{2} + 1, \quad g(x) = \frac{x}{2} + 2$$

الحل: نوجد نقاط التقاطع

$$f(x) = g(x)$$

$$\frac{x^2}{2} + 1 = \frac{x}{2} + 2$$

$$\frac{x^2}{2} + 1 - \frac{x}{2} - 2 = 0$$

$$\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} - 1 = 0$$

$$x = 2, \quad x = -1$$

نأخذ نقطة اختيارية في الفترة $(-1, 2)$ و لكن $x = 0$

$$f(0) = \frac{(0)^2}{2} + 1 = 1$$

$$g(0) = \frac{(0)}{2} + 2 = 2$$

$$g(x) \geq f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [-1, 2]$$

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-1}^2 ((g(x))^2 - (f(x))^2) dx = \pi \int_{-1}^2 \left(\left(\frac{x}{2} + 2 \right)^2 - \left(\frac{x^2}{2} + 1 \right)^2 \right) dx \\ &= \pi \int_{-1}^2 \left(\left(\frac{x^2}{4} + 2x + 4 \right) - \left(\frac{x^4}{4} + x^2 + 1 \right) \right) dx \\ &= \pi \int_{-1}^2 \left(\frac{x^2}{4} + 2x + 4 - \frac{x^4}{4} - x^2 - 1 \right) dx \\ &= \pi \int_{-1}^2 \left(-\frac{x^4}{4} - \frac{3x^2}{4} + 2x + 3 \right) dx \\ &= \pi \left[-\frac{x^5}{20} - \frac{x^3}{4} + x^2 + 3x \right]_{-1}^2 \\ &= \pi \left[\left(-\frac{32}{20} - 2 + 4 + 6 \right) - \left(\frac{1}{20} + \frac{1}{4} + 1 - 3 \right) \right] \\ &= \frac{81}{10} \pi \text{ cubic units} \end{aligned}$$

(18)**حاله خاصة :**

تمتد المنطقة المظللة من $x = -1$ إلى $x = 2$ ويتقاطعا عند النقطة $x = \frac{1}{2}$.

$$V = \pi \int_{-1}^{\frac{1}{2}} [(-x+3)^2 - (x+2)^2] dx + \pi \int_{\frac{1}{2}}^2 [(x+2)^2 - (-x+3)^2] dx = \int_{-1}^{\frac{1}{2}} (5-10x) dx + \int_{\frac{1}{2}}^2 (-5+10x) dx$$

$$= [5x - 5x^2]_{-1}^{\frac{1}{2}} + [-5x + 5x^2]_{\frac{1}{2}}^2 = 22.5 \text{ unit cub}$$

(19)أوجد طول القوس من منحنى الدالة f :

$$f(x) = 5 + 2\sqrt{x^3} \quad \text{في الفترة } \left[0, \frac{1}{3}\right]$$

الحل:

$$f(x) = 5 + 2x^{\frac{3}{2}}$$

$$f'(x) = 3x^{\frac{1}{2}}$$

$$L = \int_0^{\frac{1}{3}} \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

$$= \int_0^{\frac{1}{3}} \sqrt{1 + 9x} dx$$

$$= \int_0^{\frac{1}{3}} (1 + 9x)^{\frac{1}{2}} dx$$

$$= \frac{1}{9} \int_0^{\frac{1}{3}} 9 (1 + 9x)^{\frac{1}{2}} dx$$

$$= \frac{1}{9} \left[\frac{2}{3} (1 + 9x)^{\frac{3}{2}} \right]_0^{\frac{1}{3}}$$

$$= \frac{1}{9} \times \frac{2}{3} \left[(4)^{\frac{3}{2}} - (1)^{\frac{3}{2}} \right]$$

$$\therefore L = \frac{14}{27} \text{ (وحدة طول)}$$

(20)

إذا كان ميل العمودي لمنحنى الدالة f عند أي نقطة عليه (x, y) هو $2x - 1$

فأوجد معادلة المنحنى علمًا بأنه يمر بالنقطة $B(1, 0)$

الحل: ميل العمودي $\frac{-1}{f'(x)}$

$$f'(x) \neq 0$$

$$\frac{-1}{f'(x)} = 2x - 1$$

$$f'(x) = \frac{-1}{2x - 1}$$

$$f(x) = \int \frac{-1}{2x - 1} dx$$

$$= \frac{-1}{2} \ln |2x - 1| + C$$

لإيجاد قيمة الثابت C نعوض بالنقطة $B(1, 0)$ في المعادلة السابقة فنجد :

$$0 = \frac{-1}{2} \ln |2(1) - 1| + C$$

$$C = 0$$

معادلة منحنى الدالة f المطلوب هو :

$$f(x) = \frac{-1}{2} \ln |2x - 1|$$

(21)

حل المعادلة التفاضلية:

$$\text{a) } \frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x} \Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{2dx}{x} \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = 2 \int \frac{dx}{x}$$

$$\ln|y| = 2 \ln|x| + C$$

$$y = \pm e^{2\ln|x|+C}$$

$$y = ke^{2\ln|x|}, \quad k = \pm e^C$$

b)

$y' = -2y$ إذا كان $y = 3$ عند $x = 0$

كتابة المعادلة على الصورة: $y' = ay$

$$y = ke^{ax}$$

$$y = ke^{-2x}$$

$$3 = ke^0$$

$$k = 3$$

ومنه:

$$y = 3e^{-2x}$$

(22)

أوجد البؤرة و الدليل لقطع مكافئ ، ثم إرسم شكلا تقريبا لهذا القطع في كل

مما يلي :
المعادلة : $y = \frac{x^2}{4}$

الحل

نضع المعادلة على الصورة $x^2 = 4y$

المعادلة في الصورة $x^2 = 4py$

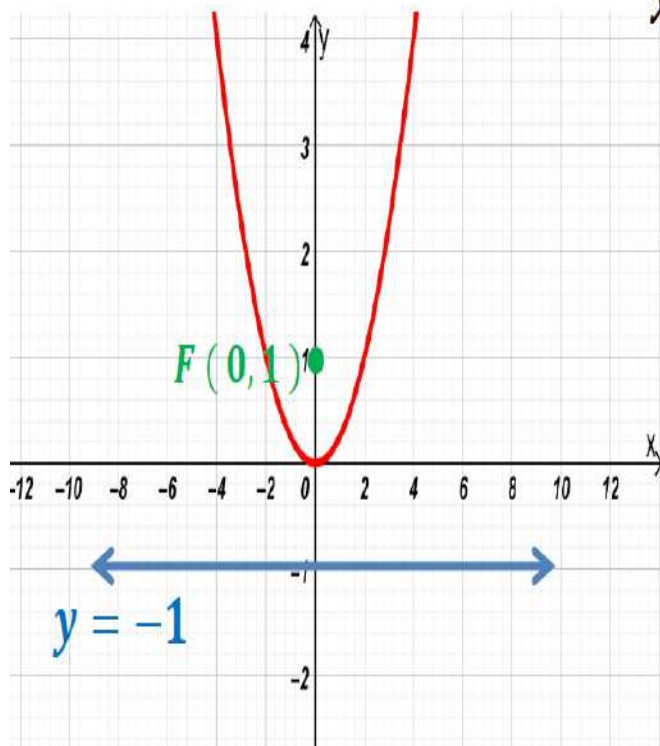
محور التماثل هو محور الصادات

$$\therefore 4p = 4 \Rightarrow p = 1$$

\therefore البؤرة $F(0, p) = F(0, 1)$

معادلة الدليل :

$$y = -p \Rightarrow y = -1$$



(23)

أوجد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل و يمر بالنقطة $A(1,2)$
و خط تماثله x -axis

الحل

رأس القطع المكافئ نقطة الأصل ، و خط تماثله x -axis
المعادلة في الصورة $y^2 = 4px$

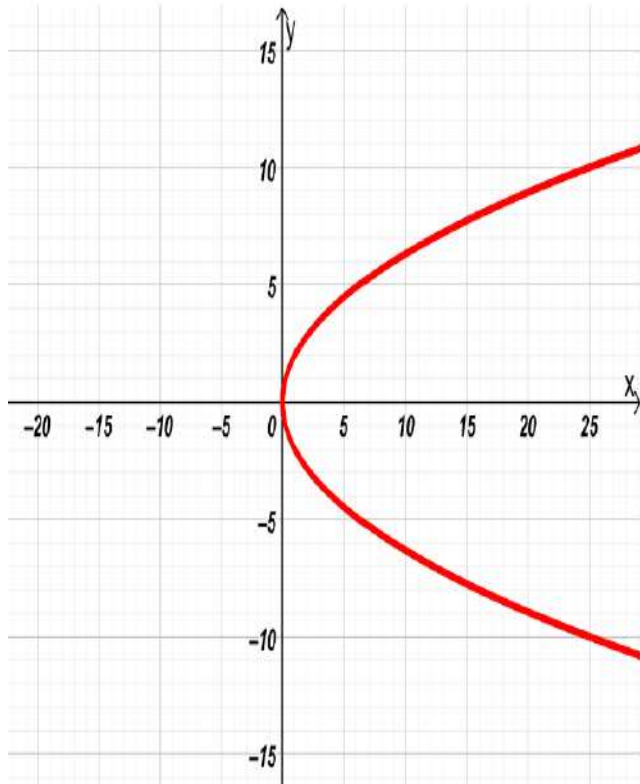
القطع المكافئ يمر بالنقطة $A(1,2)$
تحقق المعادلة أي أن :

$$(2)^2 = 4p(1)$$

$$\therefore 4 = 4p \Rightarrow p = 1$$

المعادلة هي : $y^2 = 4(1)x$

$$y^2 = 4x$$



(24)

اكتب معادلة القطع الناقص الذي فيه:

حيث إن V_1 هو نقطة على القطع الناقص، F_1 و F_2 هما البؤرتين، علمًا أن $F_1(3,0)$ ، $V_1F_1 + V_1F_2 = 10$ ، $F_2(-3,0)$.

الحل: تقع البؤرتان على محور السينات فتكون المعادلة على الصورة: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ وتكون $c=3$

$$V_1F_1 + V_2F_2 = 10 \Rightarrow 2a = 10 \Rightarrow a = 5 \Rightarrow a^2 = 25$$

$$c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow 9 = 25 - b^2 \Rightarrow b^2 = 16$$

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1 \text{ :معادلة القطع الناقص هي:}$$

(25)

أوجد معادلة القطع الزائد الذي أحد رأسيه $(0, \frac{5}{4})$ ويمر بالنقطة $(-\sqrt{3}, -\frac{5}{2})$

∴ رأس القطع $(0, \frac{5}{4})$ ∴ رأس القطع على محور الصادات

$$a = \frac{5}{4} \Rightarrow a^2 = \frac{25}{16}$$

ومعادلة القطع هي $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ وبالتعويض

$$\frac{16y^2}{25} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

∴ $(-\sqrt{3}, -\frac{5}{2}) \in$ للقطع

$$\therefore \frac{16 \times \frac{25}{4}}{25} - \frac{3}{b^2} = 1 \Rightarrow 4 - 1 = \frac{3}{b^2} \Rightarrow b^2 = 1$$

$$\therefore \text{معادلة القطع الزائد} \quad \frac{16y^2}{25} - \frac{x^2}{1} = 1$$

(26)

أوجد معادلة القطع الزائد الذي مركزه $(0, 0)$ وإحدى بؤرتيه $F(0, \sqrt{34})$ ومعادلة أحد خطيه المقاربن هي: $y = \frac{3}{5}x$.
الحل:

∴ إحدى البورتين $F(0, \sqrt{34})$

∴ المحور القاطع ينطبق على محور الصادات ومعادلته: $1 = \frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2}$

$$\therefore c^2 = a^2 + b^2$$

$$\therefore 34 = a^2 + b^2 \quad (1)$$

معادلة المقارب: $y = \frac{a}{b}x$ حيث من المعطى

$$y = \frac{3}{5}x$$

$$\therefore \frac{3}{5} = \frac{a}{b}$$

$$\therefore a = \frac{3b}{5}$$

$$34 = \left(\frac{3b}{5}\right)^2 + b^2 \quad \text{بالتعويض في المعادلة (1):}$$

$$34 = \frac{9b^2}{25} + b^2$$

$$850 = 9b^2 + 25b^2$$

$$b^2 = \frac{850}{34}$$

$$b^2 = 25 \quad \Rightarrow \quad b = 5$$

$$a = \frac{3b}{5} \quad \text{لإيجاد قيمة } a \text{ نستخدم:}$$

$$a = \frac{3 \times 5}{5} = 3$$

$$\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{25} = 1 \quad \text{ومعادلة القطع الزائد هي:}$$

(27)

أوجد الاختلاف المركزي للقطع الذي معادلته

$$x^2 - 25y^2 = 1$$

الحل :

$$\frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{\frac{1}{25}} = 1$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{بالمقارنة قطع زائد معادلته:}$$

$$a^2 = 1 \rightarrow a = 1$$

$$b^2 = \frac{1}{25} \rightarrow b = \frac{1}{5}$$

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$c^2 = 1 + \frac{1}{25}$$

$$c^2 = \frac{26}{25}$$

$$c = \frac{\sqrt{26}}{5}$$

$$e = \frac{c}{a}$$

الاختلاف المركزي :

$$e = \frac{\frac{\sqrt{26}}{5}}{1}$$

$$e = \frac{\sqrt{26}}{5}$$

(28)

أوجد طول المحور الأكبر للقطع الناقص الذي اختلافه المركزي $(e = \frac{\sqrt{5}}{3})$ وطول محوره الأصغر 4 وحدات.
الحل:

$$\therefore e = \frac{c}{a}$$

$$\therefore \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$c = \frac{a\sqrt{5}}{3}$$

$$2b = 4$$

$$b = 2$$

أي:

طول المحور الأصغر 4 أي

في القطع الناقص:

$$c^2 = a^2 - b^2$$

$$\frac{5a^2}{9} = a^2 - 4$$

$$a^2 = 4 + \frac{5a^2}{9}$$

$$9a^2 = 36 + 5a^2$$

$$4a^2 = 36$$

$$a^2 = 9$$

$$a = 3$$

$$2a = 2(3) = 6$$

طول المحور الأكبر = 6 وحدات.