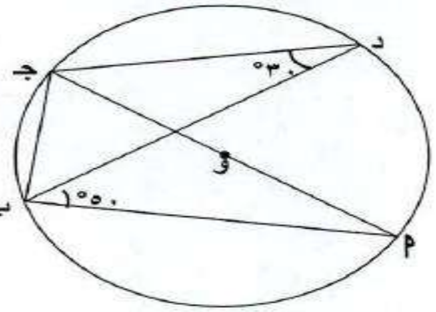
نماذج أجابة توقعات نصار فاينال عاشر

عمل / أ . أحمد نصار

((مذكره مجانية ... المرجع: الكتاب المدرسى وكراسة التمارين وزارة التربية والتعليم الكويتية))

(1)

في الشكل المقابل دائرة مركزها و ، أجـ قطر فيها ، إذا كان ق (جـ د̂ ب) = ٣٠°
ق (أ ب̂ د) = ٥٠° . فأوجد كلا من :



١) ق (جـ أ̂ ب)

٢) ق (أ ب̂ جـ)

٣) ق (أد⌒)

الحل :

ق (جـ أ̂ ب) = ق (جـ د̂ ب) = ٣٠°

(زاويتان محيطيتان مشتركتان في نفس القوس)

ق (أ ب̂ جـ) = ٩٠°

(زاوية محيطية مرسومه على قطر الدائرة)

ق (أد⌒) = ٢ × ق (أ ب̂ د)

= ٢ × ٥٠°

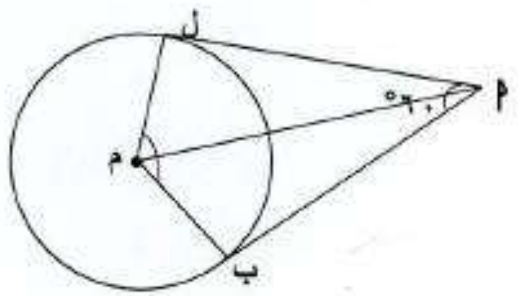
= ١٠٠°

(قياس الزاوية المحيطية يساوي نصف قياس القوس المحصور بين ضلعيها)

(2)

في الشكل المقابل : دائرة مركزها م ، $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{أل}}$ مماسان للدائرة من النقطة أ ،

ق (ل $\hat{\text{أ}}$ ب)= ٦٠° ، أوجد :



١) ق (ل $\hat{\text{م}}$ ب)

٢) ق (ل $\hat{\text{أ}}$ م)

الحل :

∵ $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ مماس ، $\overline{\text{م ب}}$ نصف قطر التماس

∴ $\overline{\text{أب}} \perp \overline{\text{م ب}}$

∴ ق(أ $\hat{\text{ب}}$ م) = ٩٠°

∵ $\overleftrightarrow{\text{أل}}$ مماس ، $\overline{\text{م ل}}$ نصف قطر التماس

∴ $\overline{\text{أل}} \perp \overline{\text{م ل}}$

∴ ق(أ $\hat{\text{ل}}$ م) = ٩٠°

∵ ل أ ب م شكل رباعي

∵ مجموع قياسات الشكل الرباعي = ٣٦٠°

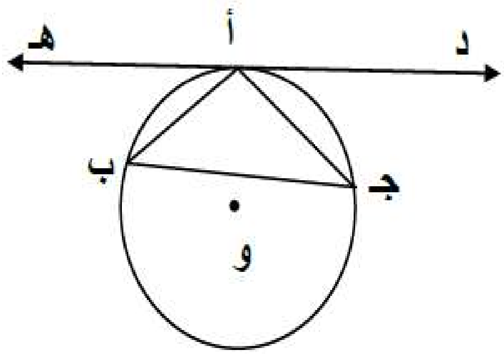
∴ ق (ل $\hat{\text{م}}$ ب) = ٣٦٠° - (٦٠° + ٩٠° + ٩٠°)

= ١٢٠°

∵ $\overrightarrow{\text{أم}}$ منصف (ل $\hat{\text{أ}}$ ب) (نتيجة)

∴ (ل $\hat{\text{أ}}$ م) = ٣٠°

(3)



في الشكل المقابل إذا كان لدينا:

$\overleftrightarrow{\text{د هـ}}$ مماس للدائرة عند النقطة أ

المثلث أ ب جـ متطابق الضلعين (أ ب = أ جـ)

اثبت أن : $\overleftrightarrow{\text{د هـ}}$ // $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$

الإجابة

المثلث أ ب جـ متطابق الضلعين حيث أ ب = أ جـ

∴ ق (أ $\hat{\text{ب}}$ جـ) = ق (أ $\hat{\text{جـ}}$ ب) (١)

∵ ق (هـ $\hat{\text{أ}}$ ب) = ق (أ $\hat{\text{جـ}}$ ب) (٢) مماسيه ومحيطية مشتركة معها في نفس القوس

من ١ ، ٢ نجد أن

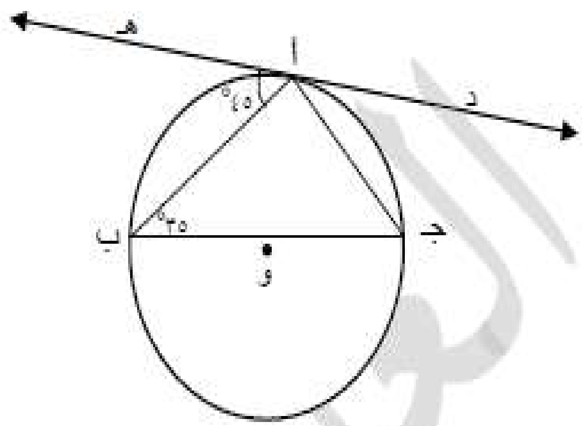
ق (هـ $\hat{\text{أ}}$ ب) = ق (أ $\hat{\text{ب}}$ جـ) وهما في وضع تبادل

∴ $\overleftrightarrow{\text{د هـ}}$ // $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$

(4)

في الشكل المقابل $\overleftrightarrow{\text{حـ هـ}}$ مماساً للدائرة عند أ، ق(أ $\hat{\text{ب}}$ حـ) = ٣٥°، ق(هـ $\hat{\text{أ}}$ ب) = ٤٥°

أوجد مع ذكر السبب:



١- ق(حـ $\hat{\text{أ}}$ ب)

٢- ق($\overset{\frown}{\text{أ ب}}$)

٣- ق($\overset{\frown}{\text{أ حـ ب}}$)

الحل:

ق(أ $\hat{\text{حـ}}$ ب) = ق(هـ $\hat{\text{أ}}$ ب) = ٤٥° (نظرية)

∵ مجموع قياسات زوايا المثلث الداخلة = ١٨٠°

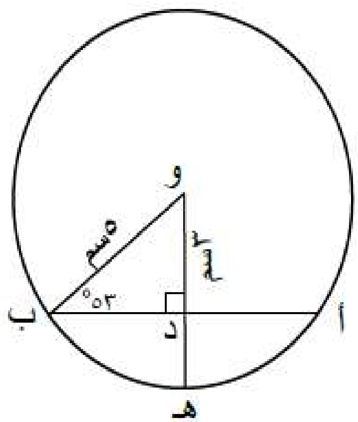
∴ ق(حـ $\hat{\text{أ}}$ ب) = ١٨٠° − (٤٥° + ٣٥°) = ١٠٠°

ق($\overset{\frown}{\text{أ ب}}$) = ٢ × ق(أ $\hat{\text{حـ}}$ ب) (نظرية)

= ٢ × ٤٥° = ٩٠°

ق($\overset{\frown}{\text{أ حـ ب}}$) = ٣٦٠° − ٩٠° = ٢٧٠° (قياس قوس الدائرة ٣٦٠°)

(5)



في الشكل المقابل حيث ق(ﻡ بَ و) = ٥٣° أوجد:

١- ﻡ ب

٢- ق(ب هـ⌒)

<u>الحل:</u>

$\overline{\text{و د}} \perp \overline{\text{ﻡ ب}}$

∴ ق(و دَ ب) = ٩٠° (نظرية)

(د ب)^2 = (و ب)^2 – (و د)^2

د ب = $\sqrt{(٥)^2 - (٣)^2}$

د ب = ٤ سم

∵ $\overline{\text{و د}} \perp \overline{\text{ﻡ ب}}$ وينصف (نظرية)

∴ ﻡ ب = ٤ + ٤ = ٨ سم

∵ مجموع قياس زوايا المثلث الداخلة = ١٨٠°

ق(د وَ ب) = ١٨٠° – (٩٠° + ٥٣°)

= ١٨٠° – ١٤٣° = ٣٧°

ق(ب هـ⌒) = ق(د وَ ب) = ٣٧° (نظرية)

(6)

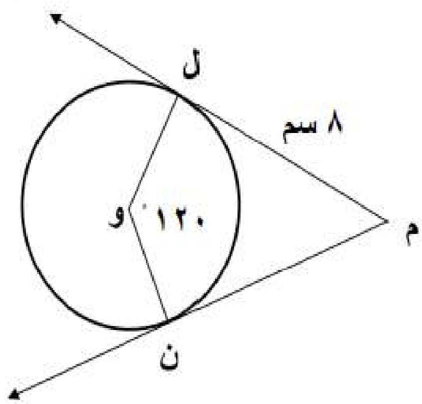
في الشكل المقابل م ل ، م ن مماسان للدائرة التي مركزها و

ق(ل وْ ن) ١٢٠° ، م ل = ٨ سم .

أوجد مع ذكر السبب:

١- ق(ل مْ ن) .

٢- م ن .



الإجابة

١) م ل مماس ، و ل نصف قطر التماس

ق(م لْ و) = ٩٠°

م ن مماس ، و ن نصف قطر التماس

ق(م نْ و) = ٩٠°

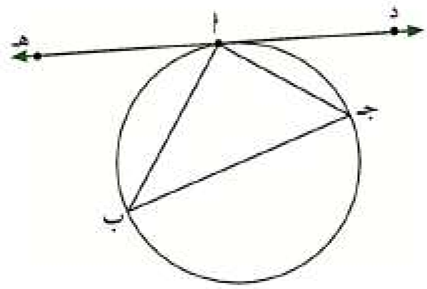
ل م ن و شكل رباعي

ق(ل مْ ن) = ٣٦٠° − (٩٠° + ٩٠° + ١٢٠°) = ٦٠°

٢) م ن = م ل (القطعتان المماستان لدائرة والمرسومتان من نقطة خارجها متطابقتان)

= ٨ سم

(7)



(أ) في الشكل المقابل. $\overleftrightarrow{\text{د هـ}}$ مماس للدائرة عند أ ،

ق(د $\hat{\text{أ}}$ جـ) = ٤٠° ، ق(هـ $\hat{\text{أ}}$ ب) = ٥٠°

(١) أوجد قياسات زوايا المثلث أ ب جـ .

(٢) أثبت أن $\overline{\text{جـ ب}}$ قطر في الدائرة .

<u>الإجابة</u>

(١) $\overleftrightarrow{\text{د هـ}}$ مماس للدائرة عند أ ،

ق($\hat{\text{جـ}}$) = ق(هـ $\hat{\text{أ}}$ ب) = ٥٠°

ق($\hat{\text{ب}}$) = ق(د $\hat{\text{أ}}$ جـ) = ٤٠°

أ ب جـ مثلث مجموع قياسات زواياه = ١٨٠°

ق(ب $\hat{\text{أ}}$ جـ) = ١٨٠° – (٤٠° + ٥٠°) = ٩٠°

(٢) ق(ب $\hat{\text{أ}}$ جـ) = ٩٠°

ب $\hat{\text{أ}}$ جـ زاوية محيطية

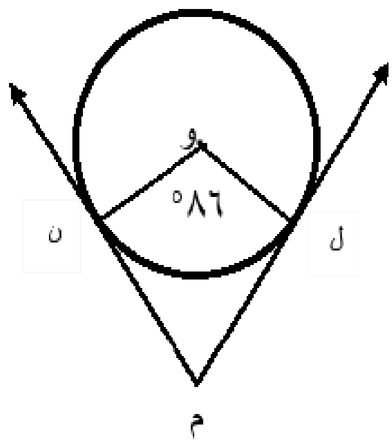
ب $\hat{\text{أ}}$ جـ تحصر نصف الدائرة

$\overline{\text{جـ ب}}$ قطر في الدائرة

(8)

في الشكل المقابل إذا كان $\overleftrightarrow{\text{م ل}}$, $\overleftrightarrow{\text{م ن}}$ مماسان للدائرة التى مركزها و

$\overline{\text{ل م}}$ = ٤ سم , $\overline{\text{ول}}$ = ٣ سم .



أوجد :

١) ق (م $\hat{\text{ل}}$ و)

٢) ق (ل $\hat{\text{م}}$ ن)

٣) محيط الشكل م ل و ن

الحل:

١) ∵ $\overleftrightarrow{\text{م ل}}$ مماس للدائرة عند النقطة ل , $\overline{\text{ول}}$ نصف قطر التماس

∴ ق(م $\hat{\text{ل}}$ و) = ٩٠° (نظرية)

∵ $\overleftrightarrow{\text{م ن}}$ مماس للدائرة عند النقطة ن , $\overline{\text{ون}}$ نصف قطر التماس

∴ ق (م $\hat{\text{ن}}$ و) = ٩٠° (نظرية)

٢) ∵ الشكل ل م ن و شكل رباعي

∴ ق(ل $\hat{\text{م}}$ ن) = ٣٦٠° - (٩٠° + ٩٠° + ٨٦°)

∴ ق(ل $\hat{\text{م}}$ ن) = ٩٤°

٣) محيط الشكل م ل و ن = مجموع أطوال الاضلاع

∵ $\overline{\text{م ل}}$ ، $\overline{\text{م ن}}$ قطعتان مماستان للدائرة المرسومة من نقطة خارج الدائرة (م)

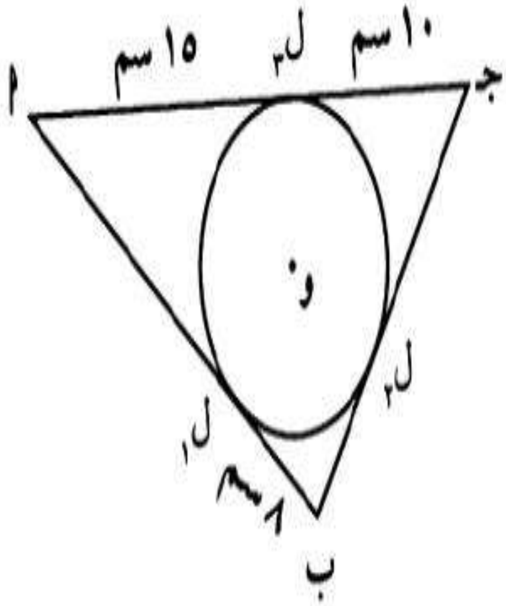
∵ م ل = م ن (نظرية)

∴ م ل = م ن = ٤ سم

و ل = و ن = ٣ سم (أنصاف أقطار في الدائرة)

∴ محيط الشكل = ٣ سم + ٣سم + ٤سم +٤ سم= ١٤ سم

(9)



في الشكل المقابل أوجد محيط المثلث أ ب جـ

أ ل١ = أ ل٣ = ١٥ سم (نظرية)

ب ل١ = ب ل٢ = ٨ سم (نظرية)

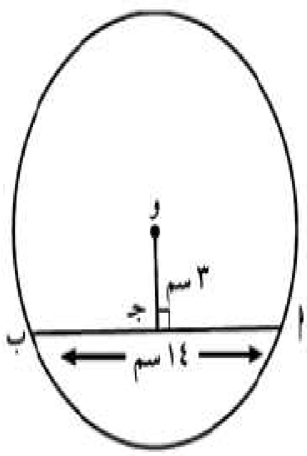
جـ ل٢ = جـ ل٣ = ١٠ سم (نظرية)

محيط المثلث أ ب جـ = أ ل١ + ل١ ب + ب ل٢ + ل٢ جـ + جـ ل٣ + ل٣ أ

١٥ + ٨ + ٨ + ١٠ + ١٠ + ١٥ = ٦٥ سم

(10)

في الشكل المقابل، أوجد طول نصف قطر الدائرة التي مركزها و.



نصل و أ

و جـ ⊥ أ ب

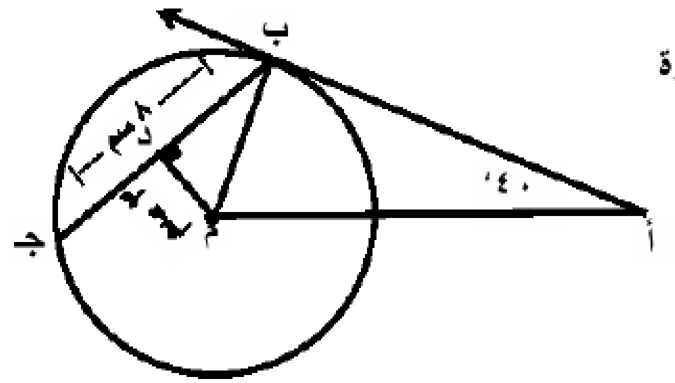
أ جـ = ب جـ = ١٤÷٢ = ٧ سم

في Δ أ جـ و قائم الزاوية في جـ

أ و = $\sqrt{(\text{أ جـ})^{٢} + (\text{و جـ})^{٢}}$

أ و = $\sqrt{(٧)^{٢} + (٣)^{٢}}$ = $\sqrt{٥٨}$ = ٧,٦ سم

(11)



في الشكل المقابل: م مركز الدائرة

أب ← مماس للدائرة عند النقطة ب

ق(ب أ م)= ٤٠ ، م د ⊥ ب جـ

ب جـ = ٨ سم ، م د = ٣ سم

أوجد بالبرهان : أ) ق (أ ب م) ب) ق(ب م أ) ج) طول ب م

الحل:

∵ أب مماس ، ب م نصف قطر التماس

∴ ق (أ ب م) = ٩٠° (نظرية)

∴ ق (ب م أ)= ١٨٠° − (٩٠° + ٤٠°) = ٥٠°

∵ م د ⊥ ب جـ ∴ د منتصف جـ ب (نظرية)

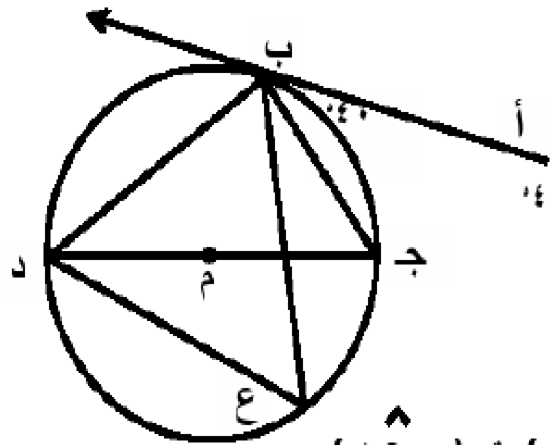
∴ ب د = د جـ = $\frac{٨}{٢}$ = ٤سم

△ م د ب قائم الزاوية في د ∴ (ب م)² = (م د)² + (ب د)²

(ب م)² = ٣² + ٤² = ٢٥

∴ ب م = $\sqrt{٢٥}$ = ٥ سم

(12)



في الشكل المقابل : م مركز الدائرة

أ ب مماس للدائرة عند النقطة ب ، ق(أ ب جـ) =٤٠°

أوجد بالبرهان :

أ) ق (جـ ب د)   ب) ق (ب جـ د)   ج) ق (ب ع د)

الحل:

∵ جـ د قطر   ∴ ق (جـ ب د)=٩٠° (محيطية تحصر نصف دائرة)

∵ أ ب مماس   ∴ ق (أ ب جـ) = ق (ب د جـ) = ٤٠°

(مماسيه ومحيطية تحصران نفس القوس ب جـ)   نظرية

∴ ق (ب جـ د)= ١٨٠° – (٩٠° + ٤٠°) = ٥٠°

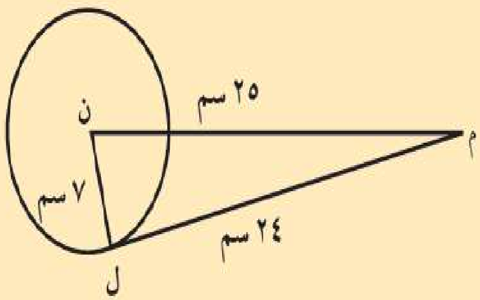
ق (ب ع د) = ق (ب د جـ) = ٥٠°

(محيطيتان تحصران نفس القوس ب د)

(13)

في الشكل المقابل، ن ل = ٧ سم ، ل م = ٢٤ سم ، ن م = ٢٥ سم.

أثبت أن $\overleftrightarrow{\text{م ل}}$ مماس للدائرة التي مركزها ن.



الحل:

المعطيات: ن ل = ٧ سم ، ن م = ٢٥ سم ، م ل = ٢٤ سم

المطلوب: إثبات أن $\overleftrightarrow{\text{م ل}}$ مماسًا للدائرة التي مركزها ن

البرهان: باستخدام عكس نظرية فيثاغورث

$(\text{ن ل})^2 + (\text{ل م})^2 \overset{?}{=} (\text{ن م})^2$

$(٧)^2 + (٢٤)^2 \overset{?}{=} (٢٥)^2$ بالتعويض

٦٢٥ = ٦٢٥ بالتبسيط

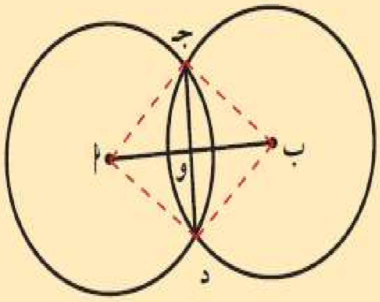
نستنتج أن المثلث م ل ن قائم في ل.

$\therefore$ $\overline{\text{م ل}} \perp \overline{\text{ن ل}}$

$\therefore$ م ل مماس للدائرة في النقطة ل. نظرية

(14)

يمثل الشكل المقابل دائرتين متطابقتين. $\overline{\text{جـ د}}$ وتر مشترك. إذا كان أ ب = ٢٤ سم، نق = ١٣ سم. فما طول $\overline{\text{جـ د}}$؟



الحل:

المعطيات: دائرتان متطابقتان مركزاهما أ ، ب.

جـ د وتر مشترك.

أب = ٢٤، طول نصف قطر كل من الدائرتين = ١٣ سم.

المطلوب: إيجاد طول جـ د

العمل: نرسم $\overline{\text{أجـ}}$، $\overline{\text{أد}}$، $\overline{\text{ب جـ}}$ ، $\overline{\text{ب د}}$.

البرهان:

في الشكل أدب جـ فيه أ د = د ب = ب جـ = جـ أ = نق = ١٣ سم

∴ أ د ب جـ معين.

والقطران $\overline{\text{أب}}$، $\overline{\text{جـ د}}$ متعامدان وينصف كل منهما الآخر.

في Δ أوجـ ، ق(أ $\hat{\text{و}}$ جـ) = ٩٠° ∴ Δ أوجـ قائم الزاوية و.

(وجـ)^{٢} = (أجـ)^{٢} − (وأ)^{٢} نظرية فيثاغورث

(وجـ)^{٢} = (١٣)^{٢} − $\left(\frac{٢٤}{٢}\right)^{٢}$ = ٢٥

وجـ = ٥

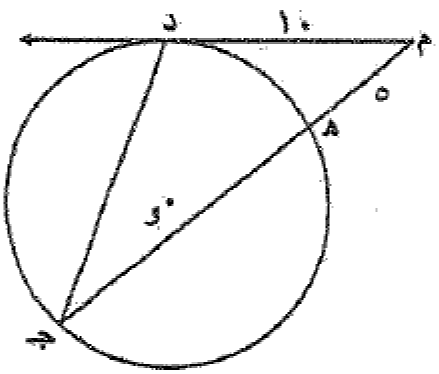
جـ د = ٢ × جـ و (و منتصف $\overline{\text{جـ د}}$)

= ٢ × ٥ = ١٠ سم.

طول جـ د يساوي ١٠ سم.

(15)

في الشكل المقابل : $\overline{\text{م د}}$ قطعة مماسية حيث م د = ١٠ ، م هـ = ٥



أوجد بذكر السبب :

طول كلا من : $\overline{\text{م جـ}}$ ، $\overline{\text{هـ جـ}}$

الحل:

(م د)^{٢} = م هـ × م جـ

(١٠)^{٢} = ٥ × م جـ

١٠٠ = ٥ × م جـ

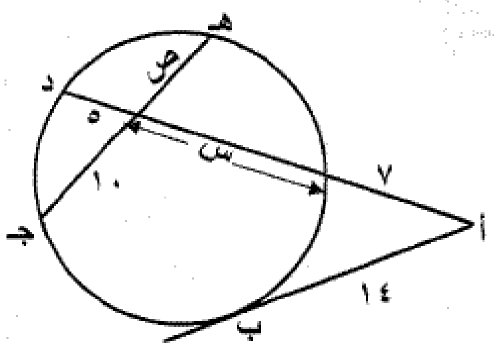
م جـ = ١٠٠ ÷ ٥ = ٢٠

هـ جـ = م جـ - م هـ

= ٢٠ ــ ٥ = ١٥

(16)

من الشكل المقابل : أوجد قيمة كل من س ، ص



الإجابة

$٧ \times (س + ١٢) = (١٤)^{٢}$

$٧ \times (س + ١٢) = ١٩٦$

$س + ١٢ = \frac{١٩٦}{٧}$

$س + ١٢ = ٢٨$

$س = ٢٨ - ١٢ = ١٦$

$١٠ \times ص = ١٦ \times ٥$

$ص = \frac{١٦ \times ٥}{١٠}$

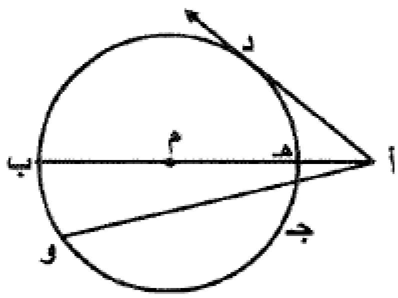
$ص = ٨$

(17)

في الشكل المقابل : دائرة مركزها م ، $\overleftarrow{\text{أ د}}$ مماس للدائرة عند النقطة د ، أ جـ = ٣سم ،

أ هـ = ٢سم ، جـ و = ٩سم

أوجد كلاً من : أ د ، هـ م



الإجابة

$(\text{أ د})^{٢}$ = أ جـ × أ و

$(\text{أ د})^{٢}$ = ٣ × ١٢

$(\text{أ د})^{٢}$ = ٣٦

أ د = ٦ سم

أ هـ × أ ب = أ جـ × أ و

٢ × أ ب = ٣ × ١٢

أ ب = ١٨ سم

هـ ب = أ ب – أ هـ = ١٨ – ٢

هـ ب = ١٦ سم

هـ م = $\frac{١}{٢}$ هـ ب = ٨ سم

(18)

حل المعادلة: $4\underline{\text{س}} + 2\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$

الحل:

$$4\underline{\text{س}} + 2\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$4\underline{\text{س}} + \begin{bmatrix} 2 \times 3 & 2 \times 4 \\ 2 \times (-2) & 2 \times 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$4\underline{\text{س}} + \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$4\underline{\text{س}} = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$4\underline{\text{س}} = \begin{bmatrix} 4 & -8 \\ 8 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\text{س}} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 4 & -8 \\ 8 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

(19)

بدون استخدام الآلة الحاسبة، إذا كان ظاθ = $2\sqrt{2}$ جتا$\theta < 0$

فأوجد جتا θ ، جاθ ، قتاθ

الحل:

باستخدام متطابقة فيثاغورث:

قا^2 θ = ١ + ظا^2θ

= ١ + $(2\sqrt{2})^2$

= ١ + ٤×٢

= ١ + ٨

= ٩

قا θ = ٣ أو قا θ = ـ٣

$\because$ جتا $\theta < 0$

$\therefore$ قا θ = ـ٣

$\therefore$ جتا θ = $\frac{1}{\text{قا}\theta}$

جتا θ = $\frac{-1}{3}$

ظا θ = $\frac{\text{جا}\theta}{\text{جتا}\theta}$

جاθ = ظاθ × جتاθ

جاθ = $2\sqrt{2} \times \frac{-1}{3} = \frac{-2\sqrt{2}}{3}$

قتاθ = $\frac{1}{\text{جا}\theta} = \frac{3}{-2\sqrt{2}}$

(20)

بدون استخدام الآلة الحاسبة، إذا كان جا$\theta = \frac{٣}{٥}$ ، $٠ < \theta < \frac{\pi}{٢}$

فأوجد كلا من : جتاθ ، ظاθ ، قاθ ، ظتاθ ، قتاθ

باستخدام متطابقة فيثاغورث:

جا$^٢ \theta$ + جتا$^٢ \theta = ١$

$(\frac{٣}{٥})^٢$ + جتا$^٢ \theta = ١$

جتا$^٢ \theta = ١ - (\frac{٣}{٥})^٢$

جتا$^٢ \theta = ١ - \frac{٩}{٢٥}$

جتا$^٢ \theta = \frac{١٦}{٢٥}$

جتا$\theta = \frac{٤}{٥}$ أو جتا$\theta = -\frac{٤}{٥}$ مرفوض لأن $٠ < \theta < \frac{\pi}{٢}$

ظاθ = $\frac{\text{جا}\theta}{\text{جتا}\theta} = \frac{\frac{٣}{٥}}{\frac{٤}{٥}} = \frac{٣}{٤}$

قاθ = $\frac{١}{\text{جتا}\theta} = \frac{٥}{٤}$

ظتاθ = $\frac{١}{\text{ظا}\theta} = \frac{٤}{٣}$

قتاθ = $\frac{١}{\text{جا}\theta} = \frac{٥}{٣}$

(21)

اثبت صحة المتطابقة : $\dfrac{(\text{قا}\,\theta + ١)\,(\text{قا}\,\theta - ١)}{\text{جا}^{٢}\theta} = \text{قا}^{٢}\theta$

الإجابة

$$\dfrac{(\text{قا}\,\theta + ١)\,(\text{قا}\,\theta - ١)}{\text{جا}^{٢}\theta} = \dfrac{\text{قا}^{٢}\theta - ١}{\text{جا}^{٢}\theta}$$

$$= \dfrac{\text{ظا}^{٢}\theta}{\text{جا}^{٢}\theta}$$

$$= \dfrac{\text{جا}^{٢}\theta}{\text{جتا}^{٢}\theta} \times \dfrac{١}{\text{جا}^{٢}\theta}$$

$$= \dfrac{١}{\text{جتا}^{٢}\theta}$$

(22)

حل المعادلة : ٢ جتا س − ١ = ٠

الإجابة

٢ جتا س = ١

جتا س = $\frac{١}{٢}$

جتا س = جتا $\frac{\pi}{٣}$

∵ جتا س > ٠

∴ س تقع في الربع الاول أو تقع في الربع الرابع

∴ س = $\frac{\pi}{٣}$ + ٢ ك π أو س = $\frac{-\pi}{٣}$ + ٢ ك π : (ك ∈ ص)

(23)

حل المعادلة : ٢ جاس − ١ = ٠

الإجابة

٢ جا س = ١

جا س = $\frac{١}{٢}$

جا س = جا $\frac{\pi}{٦}$

∵ جا س > ٠

∴ س تقع في الربع الأول أو الربع الثاني

س = $\frac{\pi}{٦}$ + ٢ ك π أو س = ($\pi - \frac{\pi}{٦}$) + ٢ ك π

س = $\frac{\pi}{٦}$ + ٢ ك π أو س = $\frac{٥\pi}{٦}$ + ٢ ك π (ك ∋ ص)

(24)

بدون استخدام الآلة الحاسبة :

إذا كان جا $\theta = \frac{٣}{٧}$ ، جتا $\theta < ٠$ فأوجد جتا θ ، ظا θ ، ظتا θ

الإجابة

باستخدام متطابقة فيثاغورث :

$$\text{جا}^{٢}\theta + \text{جتا}^{٢}\theta = ١$$

$$\left(\frac{٣}{٧}\right)^{٢} + \text{جتا}^{٢}\theta = ١$$

$$\text{جتا}^{٢}\theta = ١ - \left(\frac{٣}{٧}\right)^{٢} = \frac{٤٠}{٤٩}$$

جتا $\theta = \frac{٢\sqrt{١٠}}{٧} \approx ٠{,}٩٠٤$ (مرفوض لأن جتا $\theta < ٠$)

أو جتا $\theta = -\frac{٢\sqrt{١٠}}{٧} \approx -٠{,}٩٠٤$

$$\text{ظا}\,\theta = \frac{\text{جا}\,\theta}{\text{جتا}\,\theta} = \frac{\frac{٣}{٧}}{-\frac{٢\sqrt{١٠}}{٧}} = -\frac{٣}{٢\sqrt{١٠}}$$

$$\text{ظتا}\,\theta = \frac{١}{\text{ظا}\,\theta} = -\frac{٢\sqrt{١٠}}{٣}$$

(25)

(أ)

$$\text{ظا}\,\theta = \frac{\sqrt{٣}}{٣} \text{ ، } \text{ظا}\,\theta = \text{ظا}\,\frac{\pi}{٦}$$

$$\theta = \frac{\pi}{٦} + \text{ك}\,\pi \text{ ، حيث } (\text{ك} \in \text{ص})$$

(ب)

بسّط التعبيرات التالية لأبسط صورة:

$$\text{جتا}(\pi - \theta) - \text{جتا}(-\theta) + \text{جا}(\pi + \theta) + \text{جتا}\left(\frac{\pi}{٢} - \theta\right).$$

$$= -\text{جتا}\,\theta - \text{جتا}\,\theta - \text{جا}\,\theta + \text{جا}\,\theta = -٢\,\text{جتا}\,\theta$$

$$\text{جا}(\pi + \theta) - \text{جتا}\left(\theta + \frac{\pi}{٢}\right) + \text{جتا}(\pi - \theta) + \text{جا}\left(\theta + \frac{\pi}{٢}\right).$$

$$= -\text{جا}\,\theta + \text{جا}\,\theta - \text{جتا}\,\theta + \text{جتا}\,\theta = \text{صفر}$$

---

(26)

جا س + جا(٩٠° + س) + جا(١٨٠° + س) + جا(٩٠° − س).

الحل:

جا س + جا(٩٠° + س) + جا(١٨٠° + س) + جا(٩٠° − س)

= جا س + جتا س − جا س + جتا س

= ٢ جتا س

جتا $(\theta + 9\pi)$ = جتا $(\theta + \pi + 8\pi)$

= جتا $(\theta + \pi)$

= − جتا θ

جتا $(-\frac{\pi}{2} - \theta)$ = جتا $(\frac{\pi}{2} + \theta)$ = − جا θ

(27)

(أ)

أثبت صحة المنطابقة: (قا² θ + قتا² θ) − (ظا² θ + ظتا² θ) = ٢.

الحل

(قا² θ + قتا² θ) − (ظا² θ + ظتا² θ)

= ١ + ~~ظا² θ~~ + ١ + ~~ظتا² θ~~ − ~~ظا² θ~~ − ~~ظتا² θ~~

= ٢

(ب)

أوجد قيمة كلا مما يلي:

(جا θ + جتا θ)² − ٢ جا θ جتا θ = جا² θ + جتا² θ + ٢ جا θ جتا θ − ٢ جا θ جتا θ = ١

(ظا² θ + ١) جتا² θ = قا² θ جتا² θ = (قا θ جتا θ)² = ١² = ١

(28)

اذا كانت $\underline{أ} = \begin{bmatrix} س & ٤ \\ ١٢ & ٦ \end{bmatrix}$ منفردة أوجد قيمة س.

الحل:

$\because$ $\underline{أ}$ منفردة

$\therefore$ $|\underline{أ}|$ = صفر

$\begin{vmatrix} س & ٤ \\ ١٢ & ٦ \end{vmatrix} = ٠$

$\therefore$ ٦س ـ ٤٨ = ٠

٦س = ٤٨

س = ٨

(29)

حل النظام $\left.\begin{array}{r} ٥\text{ س} + ٣\text{ ص} = ٧ \\ ٣\text{ س} + ٢\text{ ص} = ٥ \end{array}\right\}$ باستخدام النظير الضربي للمصفوفة

الإجابة

المعادلة المصفوفية للنظام هي :

$$\begin{bmatrix} ٧ \\ ٥ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ٣ & ٥ \\ ٢ & ٣ \end{bmatrix}$$

حيث $\text{أ} = \begin{bmatrix} ٣ & ٥ \\ ٢ & ٣ \end{bmatrix}$ ، $\text{ع} = \begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{bmatrix}$ ، $\text{ب} = \begin{bmatrix} ٧ \\ ٥ \end{bmatrix}$

$$٠ \neq ١ = ٣ \times ٣ - ٢ \times ٥ = \begin{vmatrix} ٣ & ٥ \\ ٢ & ٣ \end{vmatrix} = |\text{أ}|$$

$$\begin{bmatrix} ٣- & ٢ \\ ٥ & ٣- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣- & ٢ \\ ٥ & ٣- \end{bmatrix} \times \frac{١}{١} = {}^{١-}\text{أ}$$

وبضرب المعادلة المصفوفية للنظام (١) من جهة اليمين في $\text{أ}^{١-}$

$$\begin{bmatrix} ٧ \\ ٥ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ٣- & ٢ \\ ٥ & ٣- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} ١- \\ ٤ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{bmatrix}$$

س = − ١ ، ص = ٤

(30)

أوجد $\underline{\text{س}}$ بحيث : $\begin{bmatrix} ٥ \\ ١٠ \end{bmatrix} = \underline{\text{س}} \times \begin{bmatrix} ٣- & ٥ \\ ٢- & ٤ \end{bmatrix}$

الإجابة

نوجد النظير الضربي للمصفوفة : $\underline{أ} = \begin{bmatrix} ٣- & ٥ \\ ٢- & ٤ \end{bmatrix}$:

$$٠ \neq ٢ = ٤ \times (٣-) - (٢-) \times ٥ = \begin{vmatrix} ٣- & ٥ \\ ٢- & ٤ \end{vmatrix} = \Delta$$

$$\begin{bmatrix} ٣ & ٢- \\ ٥ & ٤- \end{bmatrix} \times \frac{١}{٢} = {}^{١-}\underline{أ}$$

$$\begin{bmatrix} ٥ \\ ١٠ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ٣ & ٢- \\ ٥ & ٤- \end{bmatrix} \times \frac{١}{٢} = \underline{\text{س}}$$

$$\begin{bmatrix} ٢٠ \\ ٣٠ \end{bmatrix} \times \frac{١}{٢} = \begin{bmatrix} ١٠ \times ٣ + ٥ \times ٢- \\ ١٠ \times ٥ + ٥ \times ٤- \end{bmatrix} \times \frac{١}{٢} = \underline{\text{س}}$$

$$\begin{bmatrix} ١٠ \\ ١٥ \end{bmatrix} = \underline{\text{س}}$$

(31)

استخدم قاعدة كرامر لحلّ النظام:
$$\begin{cases} ٤\text{س} - ٥\text{ص} + ٧ = ٠ \\ ٣\text{ص} - ٦\text{س} + ٣ = ٠ \end{cases}$$

الحل:

نكتب أولًا النظام بالطريقة القياسية:
$$\begin{cases} ٤\text{س} - ٥\text{ص} = -٧ \\ -٦\text{س} + ٣\text{ص} = -٣ \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} ٤ & -٥ \\ -٦ & ٣ \end{vmatrix} = -١٨$$

$$\Delta_{\text{س}} = \begin{vmatrix} -٧ & -٥ \\ -٣ & ٣ \end{vmatrix} = -٣٦$$

$$\Delta_{\text{ص}} = \begin{vmatrix} ٤ & -٧ \\ -٦ & -٣ \end{vmatrix} = -٥٤$$

$$\text{س} = \frac{\Delta_{\text{س}}}{\Delta} = \frac{-٣٦}{-١٨} = ٢$$

$$\text{ص} = \frac{\Delta_{\text{ص}}}{\Delta} = \frac{-٥٤}{-١٨} = ٣$$

(32)

أثبت أن $\underline{\text{ب}} = \begin{bmatrix} ٢ & -٣ \\ -١ & ٢ \end{bmatrix}$ هي النظير الضربي للمصفوفة $\underline{\text{أ}} = \begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix}$.

الحل:

$$\underline{\text{أ}} \times \underline{\text{ب}} = \begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ١ & ٢ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ٢ & -٣ \\ -١ & ٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢ \times ٢ + ٣ \times (-١) & ٢ \times (-٣) + ٣ \times ٢ \\ ١ \times ٢ + ٢ \times (-١) & ١ \times (-٣) + ٢ \times ٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}$$

$\underline{\text{أ}} \times \underline{\text{ب}} = \underline{\text{و}}$ $\therefore$ $\underline{\text{ب}}$ هي النظير الضربي لِـ $\underline{\text{أ}}$.

يمكن القول أن المصفوفة $\underline{\text{أ}}$ هي النظير الضربي للمصفوفة $\underline{\text{ب}}$.

(33)

الحل:

نقطة التقسيم ن (س ، ص)

$$س = \frac{م\,س_٢ + ن\,س_١}{م + ن}$$

$$= \frac{(٢ \times -٧) + (٨ \times ١)}{١ + ٢}$$

$$= \frac{-١٤ + ٨}{٣} = \frac{-٦}{٣} = -٢$$

$$ص = \frac{م\,ص_٢ + ن\,ص_١}{م + ن}$$

$$= \frac{(١ \times -٥) + (٢ \times ٥)}{١ + ٢}$$

$$= \frac{-٥ + ١٠}{٣} = \frac{٥}{٣}$$

نقطة التقسيم ن هي $(-٢ ، \frac{٥}{٣})$

(34)

ارسم كلًّا من الزوايا الموجهة في وضع قياسي، ثم عيّن زاوية الإسناد وأوجد قياسها لكل مما يلي:

أ $^\circ$١٢٥ ب $^\circ$٢١٥ جـ $\frac{١١\pi}{٦}$

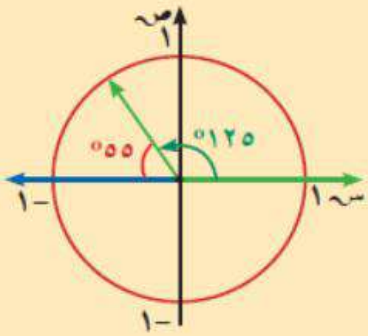
الحل:

أ θ = $^\circ$١٢٥ تقع في الربع الثاني

∴ قياس زاوية الإسناد α° = $^\circ$١٨٠ − θ°

= $^\circ$١٨٠ − $^\circ$١٢٥

= $^\circ$٥٥

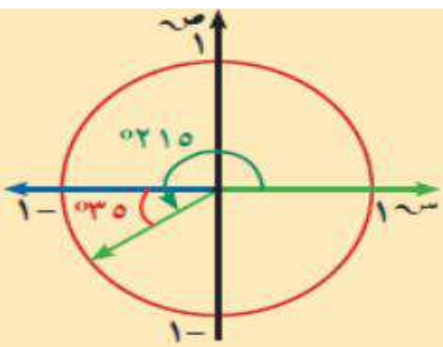


ب θ = $^\circ$٢١٥ تقع في الربع الثالث

∴ قياس زاوية الإسناد α = θ − $^\circ$١٨٠

= $^\circ$٢١٥ − $^\circ$١٨٠

= $^\circ$٣٥

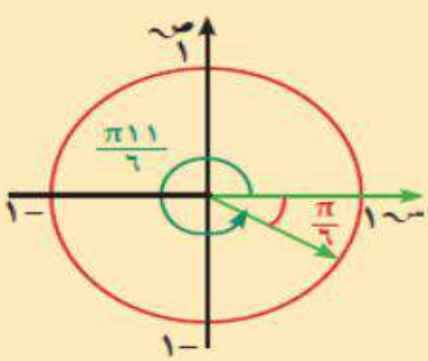


جـ θ = $\frac{١١\pi}{٦}$ تقع في الربع الرابع

∴ قياس زاوية الإسناد α = ٢π − θ

= ٢π − $\frac{١١\pi}{٦}$

= $\frac{\pi}{٦}$



(3)

لتكن أ (٢، −٣) ، ب (−٤ ، ٧). أوجد إحداثيات النقطة جـ على $\overline{\text{أب}}$ بحيث: ٧جـ ب = ٢جـ أ .

الحل:

أ (٢، −٣)   ب (−٤، ٧)

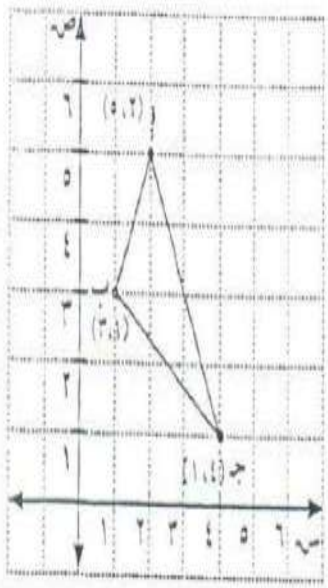
أ جـ : جـ ب = ٧ : ٢

٢   ٧

س = $\frac{٧ \times -٤ + ٢ \times ٢}{٧ + ٢}$ = $\frac{-٨}{٣}$ ، ص = $\frac{٧ \times ٧ + ٢ \times -٣}{٧ + ٢}$ = $\frac{٤٣}{٩}$

نقطة التقسيم جـ $\left(\frac{-٨}{٣} ، \frac{٤٣}{٩}\right)$

(36)



أ ب جـ مثلث فيه أ(٢، ٥)، ب(١، ٣)، جـ(٤، ١).

(أ) أوجد إحداثيي النقطة ن التي تقسم $\overline{أب}$ من الداخل من جهة أ بنسبة ١ : ٣.

أ(٢، ٥) ب(١، ٣)

١ + ٣

$س = \frac{٢\times٣+١\times١}{٣+١} = ١٫٧٥$

$ص = \frac{٥\times٣+٣\times١}{٣+١} = ٤٫٥$

أوجد إحداثيي النقطة ك التي تقسم ب جـ من الداخل من جهة ب بنسبة ١ : ٢.

ب(١، ٣) جـ(٤، ١)

١ + ٢

$س = \frac{١\times٢+٤\times١}{٢+١} = ٢$

$ص = \frac{٣\times٢+١\times١}{٢+١} = \frac{٧}{٣}$

نحصل على الناتج التالى:

(أ) ن $\left(\frac{٧}{٤} ، \frac{٩}{٢}\right)$

(ب) ك $\left(٢ ، \frac{٧}{٣}\right)$

(37)

أوجد بعد النقطة د (٢ ، ١) عن المستقيم ل : ٣ س + ٤ ص + ٥ = ٠

الحل :

أ = ٣ ، ب = ٤ ، جـ = ٥

س$_1$ = ٢ ، ص$_1$ = ١

$$\text{البعد ف} = \frac{|\text{أ س}_1 + \text{ب ص}_1 + \text{جـ}|}{\sqrt{\text{أ}^2 + \text{ب}^2}}$$

$$\text{البعد ف} = \frac{|٣(٢) + ٤(١) + ٥|}{\sqrt{٩ + ١٦}}$$

$$\text{البعد ف} = \frac{١٥}{٥} = ٣$$

أي أن البعد بين النقطة د و المستقيم يساوي ٣ وحدات طول

(38)

نأخذ في المستوى الإحداثي النقاط: أ(١، -١) ، ب(٢، ٢) ، جـ(-١، -٧). أثبت أن النقاط أ، ب، جـ على استقامة واحدة.

الحل:

$$\text{م}_{1} = \text{ميل } \overleftrightarrow{\text{أب}} = \frac{\text{ص}_{2} - \text{ص}_{1}}{\text{س}_{2} - \text{س}_{1}} = \frac{٢ - (-١)}{٢ - ١} = ٣$$

$$\text{م}_{2} = \text{ميل } \overleftrightarrow{\text{أجـ}} = \frac{\text{ص}_{2} - \text{ص}_{1}}{\text{س}_{2} - \text{س}_{1}} = \frac{-٧ - (-١)}{-١ - ١} = \frac{-٦}{-٢} = ٣$$

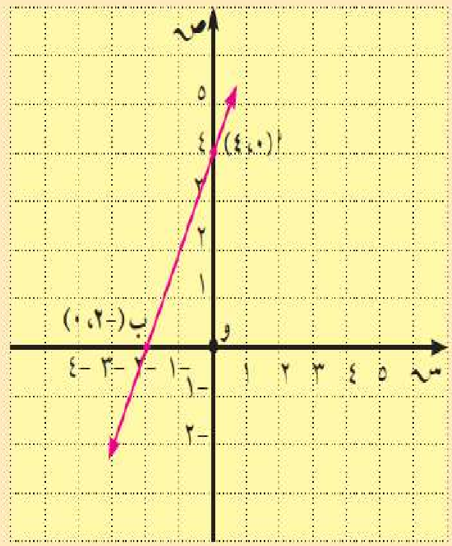
أي أن $\text{م}_{1} = \text{م}_{2} = ٣$

$\therefore$ $\overleftrightarrow{\text{أب}} \parallel \overleftrightarrow{\text{أجـ}}$ ولكنهما يشتركان في النقطة أ.

$\therefore$ تكون النقاط أ، ب، جـ على استقامة واحدة.

(39)

أوجد ميل $\overleftrightarrow{أب}$ حيث أ(٠،٤)، ب(-٢، ٠) وقارنه بظل الزاوية $\hat{ب}$ في المثلث قائم الزاوية ب و أ.



الحل:

$$\text{الميل} = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$$

$$= \frac{٤ - ٠}{٠ - (-٢)} \qquad \text{عوّض}$$

$$= \frac{٤}{٢} \qquad \text{بسّط}$$

$$= ٢$$

في المثلث أوب: أو = ٤ ، وب = ٢

$$\text{ظاب} = \frac{أو}{ب و} = \frac{٤}{٢} = ٢$$

$\therefore$ ظاب = ميل $\overleftrightarrow{أب}$ = ٢

(40)

إذا كان المستقيم ل: ص = ٢س + ١ ، فأوجد:

أ معادلة المستقيم هـ الموازي للمستقيم ل والذي يمر بالنقطة (٢، −٣).

ب معادلة المستقيم ف العمودي على المستقيم ل والذي يمر بالنقطة (٤، −٣).

الحل:

أ ∵ المستقيمان ل، هـ متوازيان ، ميل المستقيم هـ = ميل المستقيم ل

∴ ميل المستقيم هـ = ٢

وبالتالي، معادلة المستقيم هـ تكتب على الشكل:

ص − $ص_١$ = م(س − $س_١$)

ص − (−٣) = ٢ (س − ٢) بالتعويض في المعادلة

ص = −٣ + ٢س − ٤ بالتبسيط

ص = ٢س − ٧ وبالتالي معادلة هـ : ص − ٢س + ٧ = ٠

أو ٢س − ص − ٧ = ٠ وهي الصورة العامة لمعادلة المستقيم.

ب ∵ ل ، ف مستقيمان متعامدان ∴ ميل المستقيم ل × ميل المستقيم ف = −١

٢ × ميل المستقيم ف = −١

ميل المستقيم ف = $\frac{-١}{٢}$

وبالتالي معادلة المستقيم ف:

ص − $ص_١$ = م (س − $س_١$)

ص − (−٣) = $\frac{-١}{٢}$ (س − ٤) بالتعويض

ص + ٣ = $\frac{-١}{٢}$ س + ٢ بالتبسيط

ص = $\frac{-١}{٢}$ س − ١

∴ معادلة المستقيم ف: ص = $\frac{-١}{٢}$ س − ١

(41)

(أ)

أوجد المسافة بين ك (١، −٥) ، ل(٣، −٢).

الحل: المسافة = $\sqrt{(س_٢ - س_١)^٢ + (ص_٢ - ص_١)^٢}$

$= \sqrt{(٣ - ١)^٢ + (-٢ - (-٥))^٢}$

$= \sqrt{(٢)^٢ + (٣)^٢}$

$= \sqrt{١٣} \simeq ٣,٦$ وحدة طول

المسافة بين ك، ل تساوي حوالى ٣,٦ وحدات طول.

(ب)

في الشكل المقابل أوجد نقطة منتصف $\overline{جـ د}$ حيث جـ (−١، ٥)، د (٣، ٠).

الحل: $\left(\frac{س_١ + س_٢}{٢} ، \frac{ص_١ + ص_٢}{٢}\right) = \left(\frac{-١ + ٣}{٢} ، \frac{٥ + ٠}{٢}\right)$

$= \left(\frac{٢}{٢} ، \frac{٥}{٢}\right)$

$= (١ ، ٢,٥)$

نقطة منتصف $\overline{جـ د}$ هي (١ ، ٢,٥).

(42)

اكتب معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطتين أ(١، ٣)، ب(-٢، ٠).

الحل:

نوجد الميل

$$\text{م} = \frac{\text{ص}_٢ - \text{ص}_١}{\text{س}_٢ - \text{س}_١} = \frac{٣ - ٠}{١ - (-٢)}$$

$$\text{م} = \frac{٣}{٣} = ١$$

المعادلة: $\text{ص} - \text{ص}_١ = \text{م}(\text{س} - \text{س}_١)$

ص - ٣ = ١ (س - ١) بالتعويض في المعادلة

ص = ٣ + س - ١ بالتبسيط

ص = س + ٢

وبالتالي معادلة المستقيم هي: ص - س - ٢ = ٠ أو س - ص + ٢ = ٠ وهي الصورة العامة لمعادلة المستقيم.

معلومة مفيدة:

الصورة العامة لمعادلة المستقيم هي:

أس + ب ص + جـ = ٠

حيث أ، ب لا يساويان الصفر معًا.

(43)

أوجد معادلة دائرة قطرها $\overline{أب}$ حيث أ(٤ ، -٢) ، ب(٢ ، ٤)

الحل :

مركز الدائرة = $\left(\frac{٤+٢}{٢} \text{ ، } \frac{-٢+٤}{٢} \right)$

= (٣ ، ١)

نق = $\frac{١}{٢} \sqrt{(س_٢ - س_١)^٢ + (ص_٢ - ص_١)^٢}$

= $\frac{١}{٢} \sqrt{(٢ - ٤)^٢ + (٤ + ٢)^٢}$

= $\frac{١}{٢} \sqrt{٤٠}$

= $\sqrt{١٠}$

∴ معادلة الدائرة هي :

$(س - س_١)^٢ + (ص - ص_١)^٢ = نق^٢$

$(س - ٣)^٢ + (ص - ١)^٢ = ١٠$

(44)

أوجد معادلة مماس دائرة معادلتها:

$(س - ١)^٢ + (ص - ٢)^٢ = ٥$ عند نقطة التماس أ(٣، ١).

الحل:

النقطة أ (٣، ١) تنتمي إلى الدائرة .

إحداثيات مركز الدائرة و(١ ، ٢).

$$\text{ميل } \overline{\text{وأ}} = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{١ - ٢}{٣ - ١} = -\frac{١}{٢}$$

∵ نصف قطر التماس $\overline{\text{وأ}}$ عمودي على مماس الدائرة

∴ $\text{ميل}_{\text{المماس}} \times \text{ميل } \overline{\text{وأ}} = -١$

$$م_{\text{المماس}} \times \left(-\frac{١}{٢}\right) = -١$$

$$م_{\text{المماس}} = ٢$$

معادلة المماس و $\overline{\text{أ}}$ الذي ميله ٢ ويمر بالنقطة (٣، ١) هي:

$ص - ص_١ = م (س - س_١)$

$ص - ١ = ٢ (س - ٣)$

$ص - ١ = ٢س - ٦$

∴ معادلة المماس ص = ٢س - ٥

(45)

هل كل معادلة مما يلي تمثل معادلة دائرة؟ فسّر.

أ) $س^٢ + ص^٢ - ٣س + ٥ص - \frac{١٥}{٤} = ٠$

ب) $س^٢ + ص^٢ + ٤س - ٧ص + ٢٠ = ٠$

الحل:

أ) المعادلة: $س^٢ + ص^٢ - ٣س + ٥ص - \frac{١٥}{٤} = ٠$

معامل $س^٢$ = معامل $ص^٢$ = ١

ل = -٣، ك = ٥، ب = $\frac{-١٥}{٤}$

$ل^٢ + ك^٢ - ٤ب = ٩ + ٢٥ - ٤\left(\frac{-١٥}{٤}\right) = ٩ + ٢٥ + ١٥ = ٤٩ > ٠$

٤٩ > ٠ ∴ المعادلة تمثل معادلة دائرة.

ب) المعادلة: $س^٢ + ص^٢ + ٤س - ٧ص + ٢٠ = ٠$

معامل $س^٢$ = معامل $ص^٢$ = ١

ل = ٤، ك = -٧، ب = ٢٠

$ل^٢ + ك^٢ - ٤ب = ١٦ + ٤٩ - ٤ \times ٢٠ = -١٥ < ٠$

∴ المعادلة لا تمثل معادلة دائرة.

(46)

عيّن مركز وطول نصف قطر الدائرة الممثلة بالمعادلة: ٣س^{٢} + ٣ص^{٢} − ٦س + ٩ص − ١٢ = ٠

الحل:

س^{٢} + ص^{٢} − ٢س + ٣ص − ٤ = ٠ بالقسمة على ٣

وهي معادلة دائرة على الصورة العامة

∴ ل = −٢، ك = ٣، ب = −٤

المركز = $\left(\frac{-ل}{٢} ، \frac{-ك}{٢}\right) = \left(١ ، -\frac{٣}{٢}\right)$

نق = $\frac{١}{٢}\sqrt{ل^{٢} + ك^{٢} - ٤ب}$

نق = $\frac{١}{٢}\sqrt{٤ + ٩ - ٤ \times (-٤)}$

نق = $\frac{١}{٢}\sqrt{٢٩}$

الدائرة مركزها $\left(١ ، -\frac{٣}{٢}\right)$ وطول نصف قطرها نق = $\frac{١}{٢}\sqrt{٢٩}$ وحدة طول.