

نماذج أجابة أسئله توقعات نصار 11 علمى

عمل / أ . أحمد نصار

((مذكره مجانية ... المرجع: الكتاب المدرسى وكراسة التمارين
وزارة التربية والتعليم الكويتية))

(1)

اكتب العدد $\frac{\sqrt{3} - i}{\sqrt{3} + i}$ في الصورة الجبرية

ثم حوله للصورة المثلثية مستخدما السعة الأساسية

$$\frac{\sqrt{3} - i}{\sqrt{3} + i} = \frac{\sqrt{3} - i}{\sqrt{3} + i} \times \frac{\sqrt{3} - i}{\sqrt{3} - i} \quad \text{الحل:}$$

$$= \frac{2 - 2\sqrt{3}i}{3 + 1}$$

$$= \frac{2 - 2\sqrt{3}i}{4}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$x = \frac{1}{2}, y = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$r = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{1} = 1$$

$$\tan \alpha = \left| \frac{y}{x} \right| = \left| \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} \right| = \sqrt{3}$$

$$\therefore \alpha = \frac{\pi}{3}$$

$$x > 0, y < 0$$

$$\theta = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$$

$$\left(\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} \right)$$

تفرض أن α زاوية الاسناد

θ تقع في الربع الرابع

الصورة المثلثية هي :

(2)

إذا كان : $z_1 = 3 + 4i$, $z_2 = 5 - 2i$
فأوجد كلا مما يلي في الصورة الجبرية:

$$\overline{3z_1 - 2z_2}$$

$$\begin{aligned} \overline{3z_1 - 2z_2} &= \overline{3(3 + 4i) - 2(5 - 2i)} && \text{الحل:} \\ &= \overline{9 + 12i - 10 + 4i} \\ &= \overline{-1 + 16i} \\ &= -1 - 16i \end{aligned}$$

2) $\frac{z_2}{z_1}$

$$\begin{aligned} \frac{z_2}{z_1} &= \frac{5 - 2i}{3 + 4i} \times \frac{3 - 4i}{3 - 4i} && \text{الحل:} \\ &= \frac{15 - 20i - 6i - 8}{3^2 + 4^2} \\ &= \frac{7 - 26i}{25} \\ &= \frac{7}{25} - \frac{26}{25}i \end{aligned}$$

(3)

إذا كان : $z_2 = 1 - i$ ، $z_1 = -2 + 2i$

(1) ضع z_1 في الصورة المثلثية

(2) حل المعادلة : $2z + \overline{z_1} = 3i (z_2)^2$

(1) $z_1 = -2 + 2i$ الحل :

$$x = -2 \text{ ، } y = 2$$

$$r = |z_1| = \sqrt{(-2)^2 + (2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

نفرض أن α زاوية الإسناد

$$\tan \alpha = \left| \frac{y}{x} \right| = |-1| = 1$$

$$\therefore \alpha = \frac{\pi}{4}$$

$$x < 0 \text{ ، } y > 0$$

$\therefore \theta$ تقع في الربع الثاني

$$\theta = \pi - \alpha = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$$

الصورة المثلثية هي : $z_1 = 2\sqrt{2} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right)$

(2) $2z + \overline{z_1} = 3i (z_2)^2$

$$2z + \overline{(-2 + 2i)} = 3i (1 - i)^2$$

$$2z + -2 - 2i = 3i (1 - 2i - 1)$$

$$2z + -2 - 2i = 3i (-2i)$$

$$2z + -2 - 2i = -6i^2$$

$$2z + -2 - 2i = 6$$

$$2z = 6 + 2 + 2i = 8 + 2i$$

$$z = 4 + i$$

(4)

(a) حول الاحداثيات القطبية إلى إحداثيات ديكارتية حيث $N(5, \frac{\pi}{4})$

الزوج المرتب $(5, \frac{\pi}{4})$ يمثل الإحداثيات القطبية للنقطة N حيث

$$r = 5, \theta = \frac{\pi}{4}$$

$$x = r \cos \theta = 5 \cos \frac{\pi}{4}$$

$$= 5 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

$$y = r \sin \theta = 5 \sin \frac{\pi}{4}$$

$$= 5 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

∴ الزوج المرتب الذي يمثل الإحداثيات الديكارتية

لنقطة N : $(\frac{5\sqrt{2}}{2}, \frac{5\sqrt{2}}{2})$

(b) إذا كان $z_2 = 3 - 5i$

(1) اوجد z_2^{-1}

الحل :

$$z_2^{-1} = \frac{1}{3 - 5i} \times \frac{3 + 5i}{3 + 5i}$$

$$= \frac{3 + 5i}{9 + 25}$$

$$= \frac{3}{34} + \frac{5}{34}i$$

(5)

أوجد مجموعة حل المعادلة : $4z^2 + 16z + 25 = 0$ في C

الحل : نحسب المميز Δ : $\Delta = b^2 - 4ac$

$$\Delta = (16)^2 - 4(4)(25)$$

$$= -144$$

$$= (-1) \times (12)^2$$

$$= i^2 \times (12)^2$$

$$z_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-16 - 12i}{2 \times 4} = -2 - \frac{3}{2}i$$

$$z_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-16 + 12i}{2 \times 4} = -2 + \frac{3}{2}i$$

$$\left\{ -2 - \frac{3}{2}i, -2 + \frac{3}{2}i \right\} = \text{مجموعة الحل}$$

(6)

أوجد الزوج المرتب (r, θ) للنقطة $D(3\sqrt{3}, 3)$ حيث $0 \leq \theta < 2\pi$

الحل :

$$r = \sqrt{(3\sqrt{3})^2 + (3)^2} = \sqrt{36} = 6$$

نفرض أن α زاوية الاسناد

$$\therefore \tan \alpha = \left| \frac{y}{x} \right| = \left| \frac{3}{3\sqrt{3}} \right| = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\alpha = \tan^{-1} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right) = \frac{\pi}{6} \quad \text{وبالتالى :}$$

$\therefore x > 0, y > 0 \rightarrow D$ تنتمي إلى الربع الأول

$$\therefore \theta = \frac{\pi}{6}$$

وبالتالى : الاحداثيات القطبية هي $D(6, \frac{\pi}{6})$

(7)

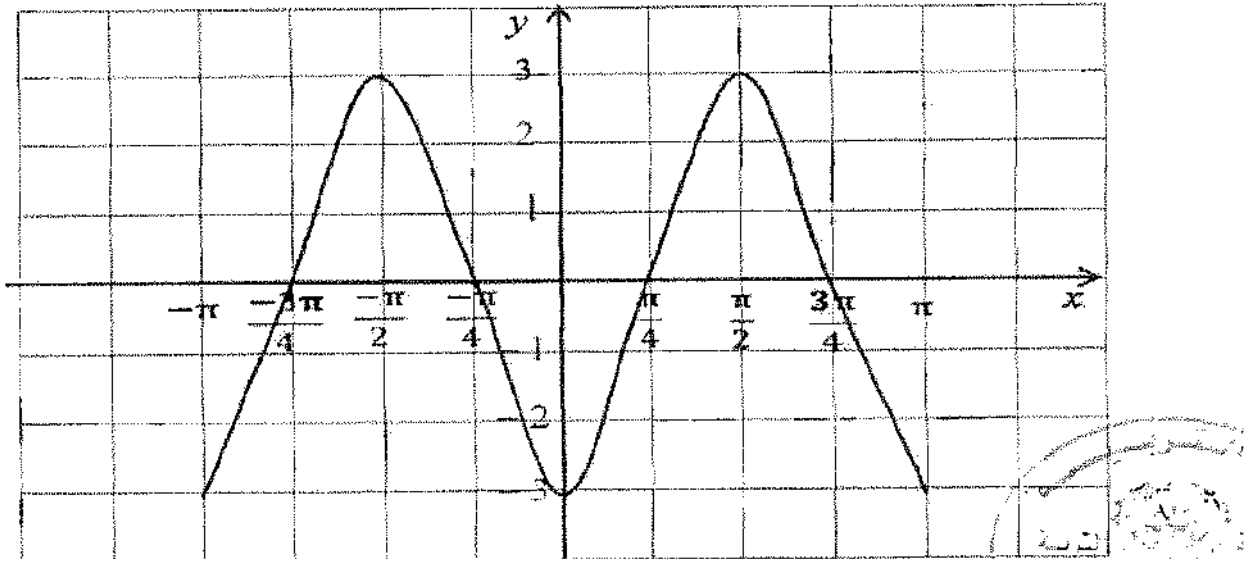
أوجد السعة و الدورة للدالة : $y = -3\cos(2x)$, $-\pi \leq x \leq \pi$
ثم ارسم بيانتها

السعة : $|a| = |-3| = 3$

الدورة : $\frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{|2|} = \pi$

ربع الدورة = $\frac{\pi}{4}$

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
$2x$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\cos(2x)$	1	0	-1	0	1
$y = -3\cos(2x)$	-3	0	3	0	-3



(8)

(a) أوجد السعة و الدورة ثم ارسم بيان الدالة :

$$y = \frac{1}{2} \cos(-x) \quad ; \quad x \in [-2\pi, 2\pi]$$

الحل :

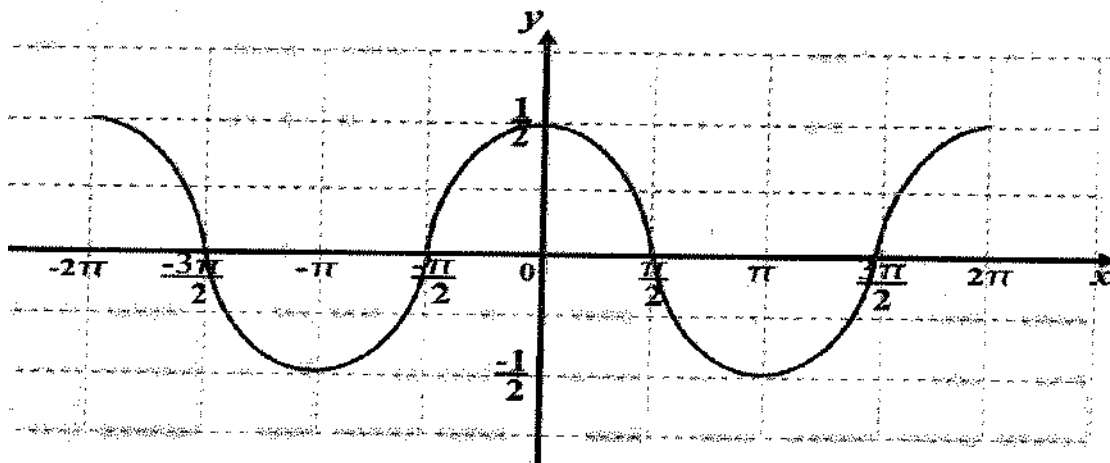
$$\text{السعة : } |a| = \left| \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2}$$

$$\text{الدورة : } \frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{|-1|} = 2\pi$$

$$\therefore \text{ربع الدورة : } \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

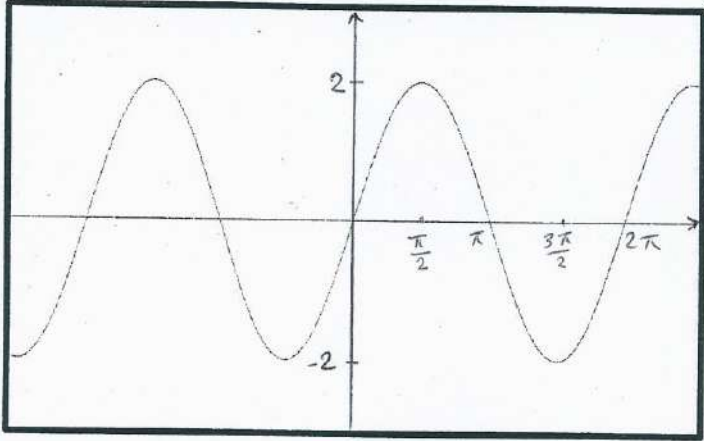


x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$-x$	0	$-\frac{\pi}{2}$	$-\pi$	$-\frac{3\pi}{2}$	-2π
$\cos(-x)$	1	0	-1	0	1
$\frac{1}{2} \cos(-x)$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$



(9)

(a) $y = \sin x$



الحل: الدالة دورية مجالها \mathbb{R}

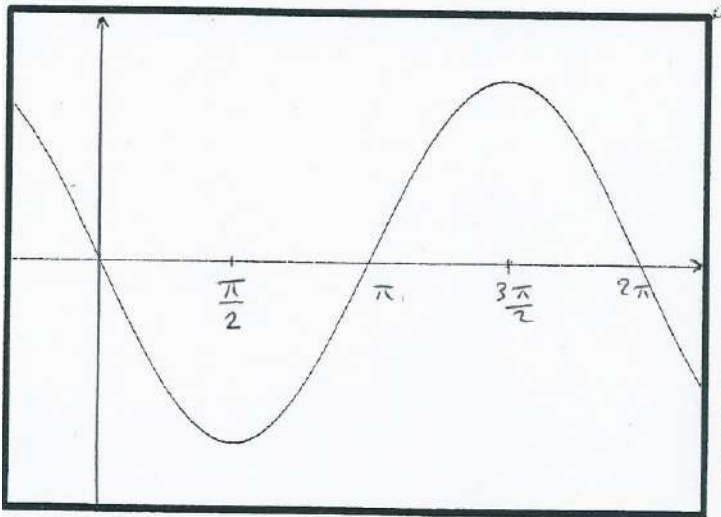
الفترة: $|a| = |2| = 2$

المررة: $\frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{1} = 2\pi$

∴ ربع الدورة: $\frac{\pi}{2}$

X	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
SinX	0	1	0	-1	0
2SinX	0	2	0	-2	0

(b) $y = -3 \sin x$



الحل: الدالة دورية مجالها \mathbb{R}

الفترة: $|a| = |-3| = 3$

المررة: $\frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{1} = 2\pi$

∴ ربع الدورة: $\frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$

X	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
SinX	0	1	0	-1	0
-3SinX	0	-3	0	3	0

(10)

أوجد الجذرين التربيعيين للعدد المركب $z = -3 - 4i$

الحل:

ليكن $w = m + ni$ جذرا تربيعيا للعدد z ، فيكون $w^2 = z$

$$(m + ni)^2 = -3 - 4i \quad \text{بالتعويض}$$

$$m^2 - n^2 + 2mni = -3 - 4i \quad \text{خاصية ضرب كثيرات الحدود}$$

$$\begin{cases} m^2 - n^2 = -3 & \text{--- --> (1)} \\ 2mn = -4 & \text{--- --> (2)} \end{cases} \quad \text{خاصية المساواة لعددتين مركبتين}$$

$$|w|^2 = |z| \quad \text{نضيف المعادلة:}$$

$$(\sqrt{m^2 + n^2})^2 = (\sqrt{(-3)^2 + (-4)^2})$$

$$m^2 + n^2 = 5 \quad \text{--- --> (3)}$$

بجمع المعادلتين (1) ، (3) نحصل على:

$$\begin{cases} m^2 - n^2 = -3 \\ m^2 + n^2 = 5 \end{cases}$$

$$2m^2 = 2 \Rightarrow m^2 = 1 \Rightarrow m = \pm 1$$

بالتعويض في (1) نحصل على: $n^2 = 4 \Rightarrow n = \pm 2$

$$\begin{cases} m = 1 , m = -1 \\ n = 2 , n = -2 \end{cases}$$

من المعادلة $2mn = -4$ نستنتج أن m, n لهما إشارتان مختلفتان

$$\therefore m = 1 , n = -2 \text{ أو } m = -1 , n = 2$$

الجزران التربيعيان للعدد المركب $z = -3 - 4i$

$$\text{هما: } w_1 = 1 - 2i , w_2 = -1 + 2i$$

(11)

أوجد مجموعة حل المعادلة في c :

$$z + \frac{4}{z} = 2$$

$$z^2 + 4 = 2z$$

$$z^2 - 2z + 4 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = (-2)^2 - 4(1)(4)$$

$$\Delta = -12$$

$$= 12 \times (-1)$$

$$= 12 \times i^2$$

$$i^2 = -1$$

$$z = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-2) - 2\sqrt{3}i}{2(1)} = 1 - \sqrt{3}i$$

$$z = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-2) + 2\sqrt{3}i}{2(1)} = 1 + \sqrt{3}i$$

$$\{1 - \sqrt{3}i, 1 + \sqrt{3}i\} = \text{ح.م}$$

(12)

اوجد مجموعة حل المعادلة : $z + i = 2\bar{z} + 1$ في C

$$\bar{z} = x - yi \quad \text{و} \quad z = x + yi$$

$$x + yi + i = 2(x - yi) + 1$$

$$x + yi + i = 2x - 2yi + 1$$

$$x + yi - 2x + 2yi = 1 - i$$

$$-x + 3yi = 1 - i$$

$$-x = 1 \quad \Rightarrow \quad x = -1$$

$$3y = -1 \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{1}{3}$$

$$\left\{-1 - \frac{1}{3}i\right\} = \text{الحل مجموعة}$$

(13)

أوجد مجموعة حل المعادلة: $2z + i\bar{z} = 5 - 2i$ في \mathbb{C} .

الحل:

لتكن $z = x + yi$ حيث x, y عدداً حقيقياً.

$$2z + i\bar{z} = 5 - 2i$$

$$2(x + yi) + i(\overline{x + yi}) = 5 - 2i$$

عوض عن z بـ $x + yi$

$$2(x + yi) + i(x - yi) = 5 - 2i$$

مرافق $x + yi$ هو $x - yi$

$$2x + 2yi + xi - y(i)^2 = 5 - 2i$$

$$2x + 2yi + xi + y = 5 - 2i$$

$$i^2 = -1$$

$$2x + y + (x + 2y)i = 5 - 2i$$

تجميع الأعداد الحقيقية معاً والأعداد التخيلية معاً

$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ x + 2y = -2 \end{cases}$$

خاصية تساوي عددين مركبين

$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ x + 2y = -2 \end{cases}$$

بحل المعادلتين نحصل على:

$$\begin{cases} x = 4 \\ y = -3 \end{cases}$$

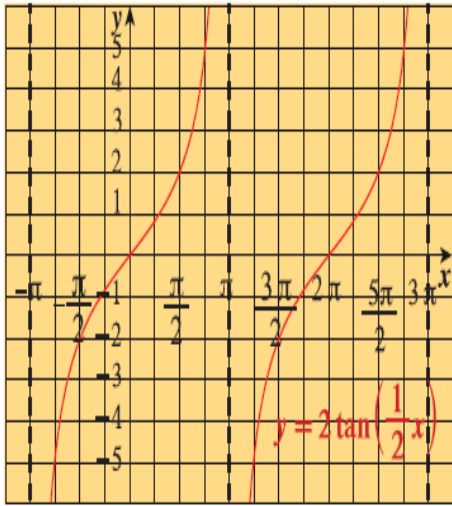
مجموعة الحل: $\{4 - 3i\}$.

(14)

الدالة $y = 2 \tan\left(\frac{1}{2}x\right)$ هي دالة دورية.

$$\frac{\pi}{|b|} = \frac{\pi}{\frac{1}{2}} = 2\pi \text{ :الدورة}$$

$$\therefore \frac{\pi}{2} = \text{ربع الدورة}$$



x	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$\frac{1}{2}x$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
$\tan\left(\frac{1}{2}x\right)$	غير معرف	-1	0	1	غير معرف
$y = 2 \tan\left(\frac{1}{2}x\right)$	غير معرف	-2	0	2	غير معرف

(15)

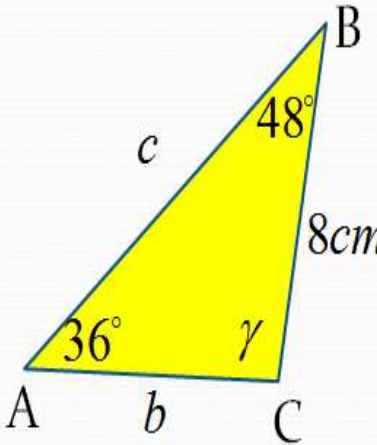
ΔABC **حل المثلث**

$\alpha = 36^\circ, \beta = 48^\circ, a = 8cm$ **حيث**

الحل

مجموع قياسات زوايا المثلث = 180

قانون الجيب



$\gamma = 180^\circ - (36^\circ + 48^\circ)$
 $\gamma = 96^\circ$

$\frac{\sin \alpha}{a} = \frac{\sin \beta}{b} = \frac{\sin \gamma}{c}$

$\frac{\sin 36^\circ}{8} = \frac{\sin 48^\circ}{b} = \frac{\sin 96^\circ}{c}$

$\frac{\sin 36^\circ}{8} = \frac{\sin 48^\circ}{b} \Rightarrow b = \frac{8 \times \sin 48^\circ}{\sin 36^\circ} \approx 10.115cm$

$\frac{\sin 36^\circ}{8} = \frac{\sin 96^\circ}{c} \Rightarrow c = \frac{8 \times \sin 96^\circ}{\sin 36^\circ} \approx 13.536cm$

(16)

حل $\triangle ABC$ حيث: $a = 3 \text{ cm}$, $b = 2 \text{ cm}$, $\alpha = 40^\circ$

الحل:

نستخدم قانون الجيب لإيجاد β

$$\frac{\sin \alpha}{a} = \frac{\sin \beta}{b}$$

$$\frac{\sin 40^\circ}{3} = \frac{\sin \beta}{2}$$

$$\sin \beta = \frac{2 \times \sin 40^\circ}{3} \implies \sin \beta \approx 0.43$$

توجد زاويتان β ، $0^\circ < \beta < 180^\circ$ تحققان $\sin \beta = 0.43$

$$\beta_1 \approx 25.4^\circ \text{ أو } \beta_2 \approx 154.6^\circ$$

الحالة $\beta_2 \approx 154.6^\circ$ مرفوضة، لأن $\alpha + \beta_2 \approx 194.6^\circ$

وهو أكبر من 180°

باستخدام $\beta_1 \approx 25.4^\circ$ نحصل على:

$$\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta_1$$

$$\approx 180^\circ - 40^\circ - 25.4^\circ$$

$$\gamma \approx 114.6^\circ$$

يمكن الآن معرفة طول الضلع الثالث c

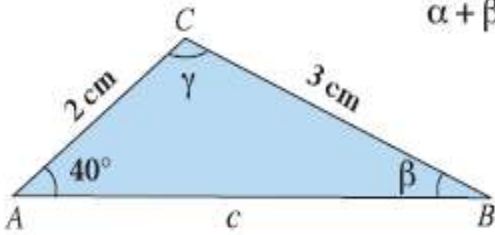
قانون الجيب

$$\frac{\sin \alpha}{a} = \frac{\sin \gamma}{c}$$

$$\frac{\sin 40^\circ}{3} = \frac{\sin 114.6^\circ}{c}$$

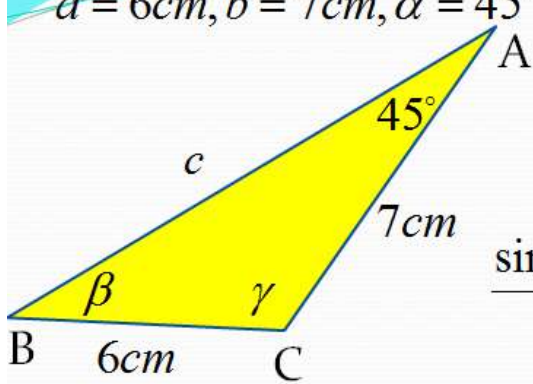
$$c = \frac{3 \sin 114.6^\circ}{\sin 40^\circ}$$

$$c \approx 4.24 \text{ cm}$$



(17)

$a = 6\text{cm}, b = 7\text{cm}, \alpha = 45^\circ$ **حيث** $\triangle ABC$ **حل المثلث**



قانون الجيب

$$\frac{\sin \alpha}{a} = \frac{\sin \beta}{b} = \frac{\sin \gamma}{c}$$

$$\frac{\sin 45^\circ}{6} = \frac{\sin \beta}{7} = \frac{\sin \gamma}{c}$$

$$\frac{\sin 45^\circ}{6} = \frac{\sin \beta}{7} \Rightarrow \sin \beta = \frac{7 \times \sin 45^\circ}{6}$$

$$\sin \beta \approx 0.824$$

إما $\beta_1 \approx 55.58^\circ$

$$\gamma_1 \approx 180^\circ - (45^\circ + 55.58^\circ) =$$

$$\gamma_1 \approx 79.42^\circ$$

إما $\beta_2 \approx 180^\circ - 55.58^\circ \approx 124.42^\circ$

$$\alpha + \beta_2 = 45^\circ + 124.42^\circ = 169.42^\circ$$

$$169.42^\circ < 180^\circ$$

$$\gamma_2 \approx 180^\circ - 169.42^\circ =$$

$$\gamma_2 \approx 10.58^\circ$$

إما

$$\gamma_1 \approx 79.42^\circ$$

إما

$$\gamma_2 \approx 10.58^\circ$$

$$\frac{\sin \alpha}{a} = \frac{\sin \beta}{b} = \frac{\sin \gamma}{c}$$

$$\frac{\sin 45^\circ}{6} = \frac{\sin 79.42^\circ}{c}$$

$$c = \frac{6 \times \sin 79.42^\circ}{\sin 45^\circ}$$

$$c \approx 9.73\text{cm}$$

$$\frac{\sin 45^\circ}{6} = \frac{\sin 10.58^\circ}{c}$$

$$c = \frac{6 \times \sin 10.58^\circ}{\sin 45^\circ}$$

$$c \approx 1.82\text{cm}$$

(18)

$$\frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta} + \frac{1 + \cos \theta}{\sin \theta} = 2 \csc \theta \quad \text{أثبت صحة المتطابقة:}$$

الطرف الأيسر

الحل:

$$\frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta} + \frac{1 + \cos \theta}{\sin \theta} = \frac{\sin^2 \theta + 1 + \cos^2 \theta + 2 \cos \theta}{(1 + \cos \theta) \sin \theta}$$

يتم عمل توحيد مقامات

$$= \frac{2(1 + \cos \theta)}{(1 + \cos \theta) \sin \theta}$$

وباستخدام متطابقه
فيثاغورث

$$= 2 \csc \theta$$

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

(19)

$$2 \cot x \csc x = \frac{1}{\sec x - 1} + \frac{1}{\sec x + 1} \quad \text{أثبت صحة المتطابقة:}$$

الحل:

نبسط الطرف الأيمن إلى صورة الطرف الأيسر

أوجد مقاماً مشتركاً

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sec x - 1} + \frac{1}{\sec x + 1} &= \frac{(\sec x + 1) + (\sec x - 1)}{(\sec x - 1)(\sec x + 1)} \\ &= \frac{2 \sec x}{\sec^2 x - 1} \end{aligned}$$

بسط

$$1 + \tan^2 \theta = \sec^2 \theta$$

$$= \frac{2 \sec x}{\tan^2 x}$$

متطابقة فيثاغورث

$$= 2 \sec x \cot^2 x$$

استخدم متطابقة المقلوب

$$= \frac{2}{\cos x} \cdot \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}$$

بسط

$$= \frac{2 \cos x}{\sin x} \cdot \frac{1}{\sin x}$$

$$= 2 \cot x \csc x$$

∴ الطرف الأيمن = الطرف الأيسر

(20)

$$\frac{\cos x}{1 - \sin x} = \frac{1 + \sin x}{\cos x} \text{ :أثبت صحة المتطابقة}$$

الحل:

نبدأ بالطرف الأيسر ونصل إلى صورة الطرف الأيمن

ضرب كل من البسط والمقام في $(1 + \sin x)$

$$\begin{aligned} \frac{\cos x}{1 - \sin x} &= \frac{\cos x}{1 - \sin x} \times \frac{1 + \sin x}{1 + \sin x} \\ &= \frac{\cos x(1 + \sin x)}{1 - \sin^2 x} \end{aligned}$$

$$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$$

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

$$= \frac{\cos x(1 + \sin x)}{\cos^2 x}$$

متطابقة فيثاغورث

$$= \frac{1 + \sin x}{\cos x}$$

اختصار العامل المشترك

∴ الطرف الأيمن = الطرف الأيسر

(21)

أثبت صحة المتطابقة: $\frac{\cot^2 \theta}{1 + \csc \theta} = (\cot \theta)(\sec \theta - \tan \theta)$

الحل:

$$\begin{aligned} \frac{\cot^2 \theta}{1 + \csc \theta} &= \frac{\csc^2 \theta - 1}{1 + \csc \theta} \\ &= \frac{(\csc \theta - 1)(\csc \theta + 1)}{1 + \csc \theta} \\ &= \csc \theta - 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\cot \theta)(\sec \theta - \tan \theta) &= \left(\frac{\cos \theta}{\sin \theta} \right) \left(\frac{1}{\cos \theta} - \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \right) \\ &= \frac{1}{\sin \theta} - 1 \\ &= \csc \theta - 1 \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{\cot^2 \theta}{1 + \csc \theta} = (\cot \theta)(\sec \theta - \tan \theta)$$

(22)

أثبت أن: $\frac{\sec x + \tan x}{\cot x + \cos x} = \sin x + \sin x \tan^2 x$

الحل:

$$\frac{\sec x + \tan x}{\cot x + \cos x} = \frac{\frac{1}{\cos x} + \frac{\sin x}{\cos x}}{\frac{\cos x}{\sin x} + \cos x}$$

توحيد مقامات

$$= \frac{(1 + \sin x)}{\cos x} \times \frac{\sin x}{\cos x(1 + \sin x)}$$

القسمه = الضرب فى المقلوب

$$= \frac{\sin x}{\cos^2 x}$$

$$\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta}$$

$$= \sin x(1 + \tan^2 x)$$

$$1 + \tan^2 \theta = \sec^2 \theta$$

$$= \sin x + \sin x \tan^2 x$$

نستنتج أن: $\frac{\sec x + \tan x}{\cot x + \cos x} = \sin x + \sin x \tan^2 x$

(23)

$$\text{حل المعادلة: } 2 \cos x + \sqrt{3} = 0$$

الحل:

$$2 \cos x + \sqrt{3} = 0$$

$$2 \cos x = -\sqrt{3}$$

$$\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

نفرض أن α هي زاوية الإسناد للزاوية x

$$\therefore \cos \alpha = |\cos x|$$

$$= \left| -\frac{\sqrt{3}}{2} \right| = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore \alpha = \frac{\pi}{6}$$

$$\therefore \cos x < 0$$

$\therefore x$ تقع في الربع الثاني أو الربع الثالث

عندما x تقع في الربع الثاني:

$$x = \left(\pi - \frac{\pi}{6} \right) + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\therefore x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$$

$$x = \left(\pi + \frac{\pi}{6} \right) + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$= \frac{7\pi}{6} + 2k\pi$$

حيث $k \in \mathbb{Z}$

وعندما x تقع في الربع الثالث:

$$\therefore \text{حل المعادلة: } x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \text{ أو } x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$$

(24)

حل المعادلة: $4 \sin \theta + 1 = \sin \theta$ ، حيث $0 \leq \theta < 2\pi$

الحل:

$$4 \sin \theta + 1 = \sin \theta$$

$$4 \sin \theta - \sin \theta = -1$$

$$3 \sin \theta = -1$$

$$\sin \theta = -\frac{1}{3}$$

فصل المتغير

بسط

نفرض أن α هي زاوية الإسناد للزاوية θ

$$\begin{aligned} \therefore \sin \alpha &= |\sin \theta| \\ &= \left| -\frac{1}{3} \right| = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$\therefore \alpha = \sin^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) \approx 0.34 \text{ radians}$$

$\therefore \sin \theta < 0$ $\therefore \theta$ تقع في الربع الثالث أو في الربع الرابع

عندما θ تقع في الربع الثالث

$$\therefore \theta \approx \pi + 0.34$$

$$\approx 3.4816, \quad 3.4816 \in [0, 2\pi)$$

عندما θ تقع في الربع الرابع

$$\therefore \theta \approx 2\pi - 0.34$$

$$\approx 5.9432, \quad 5.9432 \in [0, 2\pi)$$

حل المعادلة: $\theta \approx 3.4816$ أو $\theta \approx 5.9432$

ملاحظة:

$$2\pi \approx 6.2832$$

(25)

حل المعادلة: $\tan x = \sqrt{3}$

الحل:

$$\tan x = \sqrt{3}$$

نفرض أن α هي زاوية الإسناد للزاوية x .

$$\begin{aligned}\therefore \tan \alpha &= |\tan x| \\ &= |\sqrt{3}| = \sqrt{3}\end{aligned}$$

$$\therefore \alpha = \frac{\pi}{3}$$

$\therefore \tan x > 0$ $\therefore x$ تقع في الربع الأول أو في الربع الثالث

ولكن الدالة $\tan x$ هي دالة دورية ودورتها π

$$\text{فيكون: } \tan(\pi + x) = \tan x$$

$$\text{ومنه يكون حل المعادلة: } x = \frac{\pi}{3} + k\pi \quad \text{حيث } k \in \mathbb{Z}$$

(26)

حل المعادلة: $2\cos\theta \sin\theta = -\sin\theta$

الحل:

$$2\cos\theta \sin\theta = -\sin\theta$$

$$2\cos\theta \sin\theta + \sin\theta = 0$$

$$\sin\theta(2\cos\theta + 1) = 0$$

$$\sin\theta = 0 \text{ أو } 2\cos\theta + 1 = 0$$

$$\sin\theta = 0 \text{ أو } \cos\theta = -\frac{1}{2}$$

$$\sin\theta = 0$$

أو

$$\cos\theta = -\frac{1}{2}$$

$\therefore \theta$ زاوية ربعية

$$\therefore \theta = 0 \text{ أو } \theta = \pi$$

$$\therefore \theta = 2k\pi \text{ أو } \theta = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

نفرض أن α هي زاوية الإسناد للزاوية θ

$$\therefore \cos\alpha = |\cos\theta|$$

$$= \left| -\frac{1}{2} \right| = \left| \frac{1}{2} \right|$$

$$\therefore \alpha = \frac{\pi}{3}$$

$$\therefore \cos\theta < 0$$

$\therefore \theta$ تقع في الربع الثاني أو في الربع الثالث.

عندما تقع θ في الربع الثاني:

$$\theta = (\pi - \alpha) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$= \left(\pi - \frac{\pi}{3} \right) + 2k\pi$$

$$= \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$$

عندما θ تقع في الربع الثالث

$$\therefore \theta = \pi + \alpha + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$= \left(\pi + \frac{\pi}{3} \right) + 2k\pi$$

$$= \frac{4\pi}{3} + 2k\pi$$

حل المعادلة: $\theta = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ أو $\theta = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi$ أو $\theta = \pi + 2k\pi$ أو $\theta = 2k\pi$ حيث $k \in \mathbb{Z}$

(27)

حل المعادلة: $\sin \theta \cos \theta - \cos \theta = 0$

الحل:

$$\cos \theta (\sin \theta - 1) = 0$$

$$\cos \theta = 0 \quad \text{أو} \quad \sin \theta = 1$$

أو

$$\cos \theta = 0$$

\therefore θ زاوية ربعية

$$\theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$, \quad \theta = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \quad : k \in \mathbb{Z}$$

$$\sin \theta = 1$$

\therefore θ زاوية ربعية

$$\theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

(28)

المعادلة: $4 \sin^2 x - 8 \sin x + 3 = 0$ هي معادلة تربيعية في $\sin x$
 بالتحليل:

$$(2 \sin x - 1)(2 \sin x - 3) = 0$$

$$2 \sin x - 1 = 0 \quad \text{أو} \quad 2 \sin x - 3 = 0$$

$$\sin x = \frac{1}{2} \quad \text{أو} \quad \sin x = \frac{3}{2}$$

$$\sin x = \frac{1}{2}$$

$$\sin x = \frac{1}{2} \quad \text{نأخذ}$$

نفرض أن α هي زاوية الإسناد للزاوية x .

$$\therefore \sin \alpha = |\sin x|$$

$$= \left| \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \alpha = \frac{\pi}{6}$$

$$\therefore \sin x > 0$$

$\therefore x$ تقع في الربع الأول أو في الربع الثاني.

عندما x تقع في الربع الأول

$$\therefore x = \alpha + 2k\pi = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

عندما x تقع في الربع الثاني

$$\therefore x = (\pi - \alpha) + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$= \left(\pi - \frac{\pi}{6} \right) + 2k\pi$$

$$= \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$$

حيث $k \in \mathbb{Z}$

أو

$$\sin x = \frac{3}{2}$$

$\therefore y = \sin x$ مداها $[-1, 1]$

$$\frac{3}{2} \notin [-1, 1]$$

$\therefore \sin x = \frac{3}{2}$ ليس لها حل

حل المعادلة: $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ أو $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$

(29)

حل المعادلة: $\cos^2 x + 3 \cos x + 2 = 0$

الحل:

$$(\cos x + 1)(\cos x + 2) = 0$$

بالتحليل لمعادلة من الدرجة الثانية

$$\cos x = -1$$

أو

$$\cos x = -2$$

كل قوس يتم مساواته ب صفر

$$x = \pi + 2k\pi$$

ليس لها حل

حيث $k \in \mathbb{Z}$

$$x = \pi + 2k\pi$$

حل المعادلة

(30)

ABC مثلث فيه $a = 3 \text{ cm}$, $b = 8 \text{ cm}$, $c = 7 \text{ cm}$

أوجد : (1) قياس أكبر زاوية

(2) مساحة سطح المثلث ABC مستخدماً قاعدة هيرون

الحل:

(1) قياس أكبر زاوية هو β لأنها تقابل أطول ضلع

$$\cos \beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

$$= \frac{3^2 + 7^2 - 8^2}{2(3)(7)} = \frac{-1}{7}$$

$$\therefore \beta \approx 98.21^\circ$$

$$s = \frac{1}{2} (a + b + c) \quad (2)$$

$$= \frac{1}{2} (3 + 8 + 7) = 9$$

$$\text{Area} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \sqrt{9(9-3)(9-8)(9-7)}$$

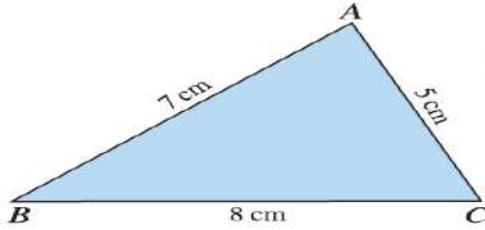
$$= \sqrt{108} = 6\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

(31)

بدون استخدام قاعدة هيرون :

أوجد مساحة المثلث ABC حيث $a = 8 \text{ cm}$ ، $b = 5 \text{ cm}$ ، $c = 7 \text{ cm}$

الحل:



ليكن α قياس الزاوية المحصورة بين الضلعين \overline{AB} ، \overline{AC} باستخدام قانون جيب التمام يمكننا إيجاد $\cos \alpha$:

$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$\cos \alpha = \frac{25 + 49 - 64}{2 \times 5 \times 7} = \frac{10}{70} = \frac{1}{7}$$

$$\therefore \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$$

$$\therefore \sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$$

في كل مثلث، جيب الزاوية هو موجب

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$$

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \frac{1}{49}} = \sqrt{\frac{48}{49}} = \frac{4\sqrt{3}}{7}$$

نوجد مساحة المثلث ABC باستخدام:

$$\text{Area} = \frac{1}{2}bc \sin \alpha$$

$$\text{Area} = \frac{1}{2} \times 5 \times 7 \times \frac{4\sqrt{3}}{7}$$

$$\text{Area} = 10\sqrt{3} \approx 17.32$$

(32)

حل ΔABC حيث: $a = 4 \text{ cm}$, $b = 3 \text{ cm}$, $c = 6 \text{ cm}$

الحل:

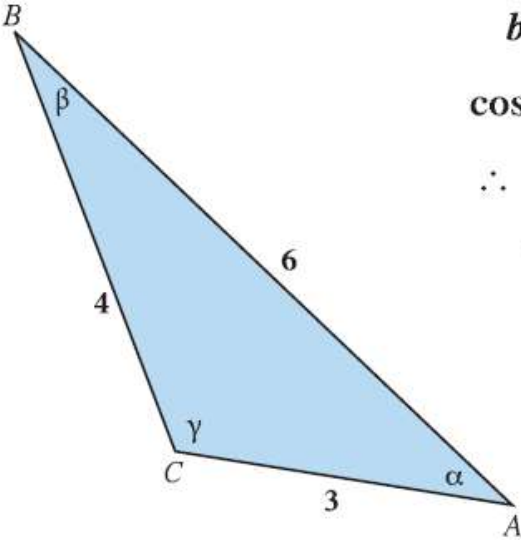
يتوجب علينا إيجاد قياسات الزوايا الثلاث في ΔABC

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

نستخدم قانون جيب التمام:

$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{9 + 36 - 16}{2 \times 3 \times 6} = \frac{29}{36}$$

$$\therefore \alpha \approx 36.4^\circ$$



$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$$

كذلك:

$$\cos \beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{16 + 36 - 9}{2 \times 4 \times 6} = \frac{43}{48}$$

$$\therefore \beta \approx 26.4^\circ$$

$$\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta$$

$$\gamma \approx 180^\circ - 36.4^\circ - 26.4^\circ$$

$$\approx 117.2^\circ$$

(33)

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \quad \text{الحل :}$$

$$\cos^2 \alpha = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{16}{25} \longrightarrow \cos \alpha = \pm \frac{4}{5}$$

$$\therefore \cos \alpha = \frac{4}{5} \quad \alpha \text{ زاوية حادة}$$

$$\sin^2 \beta + \cos^2 \beta = 1$$

$$\sin^2 \beta = 1 - \left(\frac{24}{25}\right)^2$$

$$\sin^2 \beta = \frac{49}{625} \quad \sin \beta = \pm \frac{7}{25}$$

$$\therefore \sin \beta = \frac{7}{25} \quad \beta \text{ زاوية حادة}$$

$$(1) \cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

$$= \left(\frac{4}{5}\right) \left(\frac{24}{25}\right) + \left(\frac{3}{5}\right) \left(\frac{7}{25}\right)$$

$$= \frac{117}{125}$$

$$(2) \sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = \cos \beta$$

$$= \frac{24}{25}$$

(34)

إذا كان: $\sin \alpha = \frac{4}{5}$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

$\cos \beta = \frac{-12}{13}$, $\pi < \beta < \frac{3\pi}{2}$

أوجد كلاً مما يلي:

a $\sin(\alpha + \beta)$

b $\cos(\alpha - \beta)$

c $\tan(\alpha - \beta)$

الحل:

نوجد أولاً: $\cos \alpha$, $\sin \beta$, $\tan \alpha$, $\tan \beta$

متطابقة فيثاغورث

تعويض

• $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

$\left(\frac{4}{5}\right)^2 + \cos^2 \alpha = 1$

$\cos^2 \alpha = 1 - \frac{16}{25}$

$\cos^2 \alpha = \frac{9}{25}$

$\cos \alpha = -\frac{3}{5}$ أو $\cos \alpha = \frac{3}{5}$

$\because 0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos \alpha > 0$

$\therefore \cos \alpha = \frac{3}{5}$

• $\sin^2 \beta + \cos^2 \beta = 1$

$\sin^2 \beta + \left(\frac{-12}{13}\right)^2 = 1$

$\sin^2 \beta = 1 - \frac{144}{169}$

$\sin^2 \beta = \frac{25}{169}$

$\sin \beta = -\frac{5}{13}$ أو $\sin \beta = \frac{5}{13}$

$\because \pi < \beta < \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \sin \beta < 0$

$\therefore \sin \beta = \frac{-5}{13}$

فصل المتغير

بسّط

متطابقة فيثاغورث

تعويض

فصل المتغير

بسّط

تابع الحل :

$$\bullet \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{4}{3}$$

$$\bullet \tan \beta = \frac{\sin \beta}{\cos \beta} = \frac{\frac{-5}{13}}{\frac{-12}{13}} = \frac{5}{12}$$

$$\begin{aligned} \text{a) } \sin(\alpha + \beta) &= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \\ &= \left(\frac{4}{5}\right)\left(\frac{-12}{13}\right) + \left(\frac{3}{5}\right)\left(-\frac{5}{13}\right) \\ &= \frac{-48}{65} - \frac{15}{65} = -\frac{63}{65} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \cos(\alpha - \beta) &= \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \\ &= \left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{-12}{13}\right) + \left(\frac{4}{5}\right)\left(-\frac{5}{13}\right) \\ &= \frac{-36}{65} - \frac{20}{65} = -\frac{56}{65} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \tan(\alpha - \beta) &= \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta} \\ &= \frac{\frac{4}{3} - \frac{5}{12}}{1 + \left(\frac{4}{3}\right)\left(\frac{5}{12}\right)} \\ &= \frac{\frac{11}{12}}{\frac{56}{36}} = \frac{33}{56} \end{aligned}$$

(35)

اكتب المقدار على صورة جيب أو جيب التمام أو ظل الزاوية.

• $\sin 3x \cos x - \cos 3x \sin x$

• $\frac{\tan 2y + \tan 3x}{1 - \tan 2y \tan 3x}$

الحل

$$\begin{aligned} \sin 3x \cos x - \cos 3x \sin x \\ = \sin (3x - x) = \sin 2x \end{aligned}$$

.....

$$\frac{\tan 2y + \tan 3x}{1 - \tan 2y \tan 3x} = \tan (2y + 3x)$$

(36)

أثبت صحة كل من المتطابقات التالية:

$$2 \csc 2x = \csc^2 x \tan x$$

الحل:

$$\frac{2}{\sin 2x} = \frac{2}{2 \sin x \cos x} = \frac{1}{\sin^2 x} \times \frac{\sin x}{\cos x} = \csc^2 x \tan x$$

.....

$$\sin 3x = (\sin x)(4 \cos^2 x - 1)$$

الحل:

$$\sin 3x = \sin 2x \cos x + \cos 2x \sin x = 2 \sin x \cos^2 x + (2 \cos^2 x - 1) \sin x = \sin x (4 \cos^2 x - 1)$$

.....

$$\cos 4x = 1 - 8 \sin^2 x \cos^2 x$$

الحل:

$$\cos 4x = \cos 2(2x) = 1 - 2 \sin^2 2x = 1 - 2(2 \sin x \cos x)^2 = 1 - 8 \sin^2 x \cos^2 x$$

(37)

$$\cos 2\theta = \frac{1 - \tan^2 \theta}{1 + \tan^2 \theta} \quad \text{أثبت صحة المتطابقة:}$$

الحل:

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

$$\text{الطرف الأيمن} = \frac{1 - \tan^2 \theta}{1 + \tan^2 \theta} = \frac{1 - \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta}}{1 + \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta}}$$

$$= \frac{\frac{\cos^2 \theta - \sin^2 \theta}{\cos^2 \theta}}{\frac{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta}{\cos^2 \theta}}$$

$$= \frac{\cos^2 \theta - \sin^2 \theta}{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta}$$

$$= \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$$

$$= \cos 2\theta = \text{الطرف الأيسر}$$

المقام المشترك

بسّط

متطابقة فيثاغورث

متطابقة الضعف

(38)

أثبت صحة المتطابقة: $\sin 3\theta = 3 \sin \theta - 4 \sin^3 \theta$

$$\begin{aligned}\sin(3\theta) &= \sin(2\theta + \theta) \\ &= \sin 2\theta \cos \theta + \cos 2\theta \sin \theta \\ &= 2 \sin \theta \cos^2 \theta + \sin \theta (1 - 2 \sin^2 \theta) \\ &= 2 \sin \theta (1 - \sin^2 \theta) + \sin \theta (1 - 2 \sin^2 \theta) \\ &= 3 \sin \theta - 4 \sin^3 \theta\end{aligned}$$

(39)

إذا كان: $\sin \theta = \frac{-1}{\sqrt{2}}$, $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$ ، فأوجد $\sin 2\theta$.

الحل:

$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$$

متطابقة فيثاغورث

$$\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta$$

$$= 1 - \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)^2$$

$$= \frac{1}{2}$$

$$\cos \theta = \frac{-1}{\sqrt{2}}$$

$$\pi < \theta < \frac{3\pi}{2} \therefore \cos \theta < 0$$

$$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$$

متطابقة جيب ضعف الزاوية

$$\sin 2\theta = 2 \times \frac{-1}{\sqrt{2}} \times \frac{-1}{\sqrt{2}} = 1$$

(40)

إذا كانت: $180^\circ < \theta < 270^\circ$ ، $\sin \theta = -\frac{24}{25}$ ،

فأوجد $\sin \frac{\theta}{2}$.

الحل:

نوجد أولاً $\cos \theta$

متطابقة فيثاغورث

عوض

$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$$

$$\cos^2 \theta + \left(\frac{-24}{25}\right)^2 = 1$$

$$\cos^2 \theta = \frac{49}{625}$$

$$\cos \theta = \frac{-7}{25}$$

$$\therefore 180^\circ < \theta < 270^\circ$$

$$\therefore 90^\circ < \frac{\theta}{2} < 135^\circ$$

$$\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{2}}$$

$$\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 - \left(\frac{-7}{25}\right)}{2}} = \frac{4}{5}$$

لأن θ في الربع الثالث

نوجد الآن $\frac{\theta}{2}$

ومنه $\frac{\theta}{2}$ في الربع الثاني

متطابقة نصف الزاوية

عوض، اختر الجذر الموجب، لأن $\frac{\theta}{2}$ في الربع الثاني

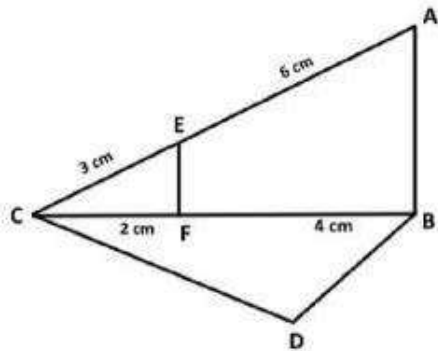
(41)

في الشكل المقابل: $\overline{AB} \perp (BCD)$

$CE = 3 \text{ cm}$, $EA = 6 \text{ cm}$, $CF = 2 \text{ cm}$, $FB = 4 \text{ cm}$

اثبت أن :

$\overline{EF} \perp \overline{BD}$



في $\triangle ABC$

$$\frac{CE}{EA} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \quad , \quad \frac{CF}{FB} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \overline{EF} \parallel \overline{AB}$$

$$\overline{AB} \perp (DBC)$$

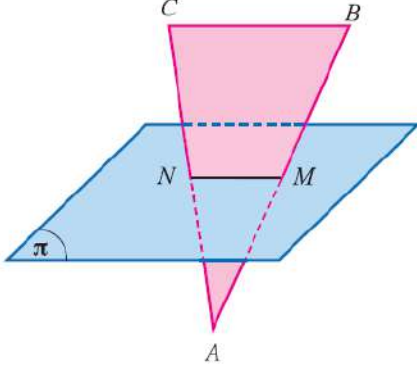
$$\therefore \overline{EF} \perp (DBC)$$

$$\overline{DB} \subset (DBC)$$

$$\therefore \overline{EF} \perp \overline{BD}$$

(يوجد حل آخر باستخدام تشابه المثلثات بدلا من نظريه طاليس)

(42)



في الشكل المقابل: المثلث ABC فيه M منتصف \overline{AB} ، N منتصف \overline{AC} ،
 M ، N تنتميان إلى المستوي π .
 أثبت أن $\overline{BC} \parallel \pi$.

البرهان

$\therefore M$ منتصف \overline{AB}

$\therefore N$ منتصف \overline{AC}

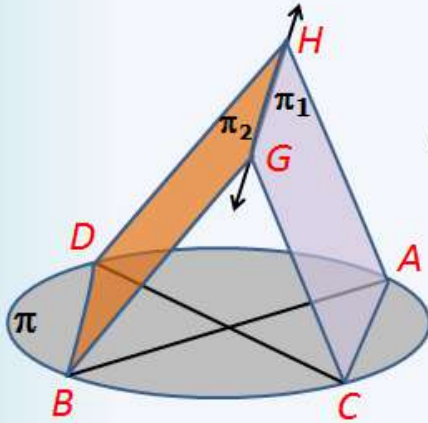
$\therefore \overleftrightarrow{BC} \parallel \overleftrightarrow{MN}$

$\therefore \overleftrightarrow{MN} \subset \pi$ (معطى)

$\therefore \overleftrightarrow{BC} \parallel \pi$ (نظرية)

(43)

في الشكل المقابل : $\overline{AB}, \overline{CD}$ قطران في مستوي الدائرة π
 $\overleftrightarrow{GH} = \pi_1 \cap \pi_2$ أثبت أن مستوي الدائرة π يوازي \overleftrightarrow{GH}



البرهان

$\therefore \overline{AB}, \overline{CD}$ قطران في الدائرة

\therefore ينصف كل منهما الآخر و متطابقان

\therefore الشكل $ACBD$ مستطيل

$$\therefore \overline{AC} \parallel \overline{DB}$$

$$\therefore \overline{AC} \subset \pi_1 \quad \overline{DB} \subset \pi_2$$

$$\pi_1 \cap \pi_2 = \overleftrightarrow{GH}$$

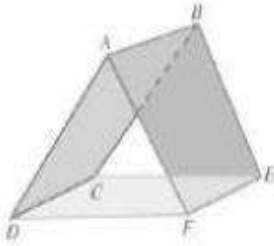
$$\therefore \overleftrightarrow{GH} \parallel \overline{AC} \parallel \overline{DB}$$

$$\therefore \overline{GH} \parallel \overline{AC} \quad \overline{AC} \subset \pi$$

$$\therefore \overleftrightarrow{GH} \parallel \pi$$

أي أن مستوي الدائرة π يوازي \overleftrightarrow{GH}

(44)



في الشكل المقابل:

مستطيلان $ABEF, ABCD$

أثبت أن: $(AFD) \parallel (BEC)$

الحل: مستطيل $ABEF$

$$\overline{AB} \perp \overline{AF}$$

مستطيل $ABCD$

$$\overline{AB} \perp \overline{AD}$$

فهما يعينان مستو وحيد هو (AFD) مستقيمان متقاطعان في A $\longleftrightarrow \longleftrightarrow$ BC, AF

$$\overline{AB} \perp (AFD) \rightarrow 1$$

$$\overline{AB} \perp \overline{BC} \text{ بالمثل } \overline{AB} \perp \overline{BE}$$

فهما يعينان مستو وحيد هو (BEC) $\longleftrightarrow \longleftrightarrow$ BC, BE مستقيمان متقاطعان في B

$$\overline{AB} \perp (BEC) \rightarrow 2$$

$$(AFD) \parallel (BEC)$$

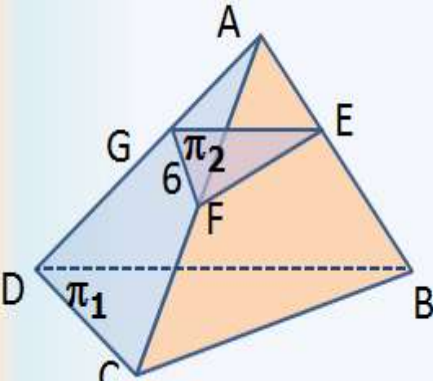
(45)

في الشكل المقابل $ABCD$: هرم ثلاثي .

المستويان π_1 ، π_2 متوازيان إذا كان $\frac{AE}{EB} = \frac{1}{3}$ ،

$FG = 6$ cm فأوجد DC

البرهان



وذلك من تشابه المثلثات
(AFE, ACB)
(AGF, ADC)

$\therefore \frac{AG}{AD} = \frac{GF}{DC}$

$\therefore \frac{AE}{EB} = \frac{1}{3} \quad \therefore \frac{AE}{AB+EB} = \frac{1}{1+3}$

$\therefore \frac{AE}{AB} = \frac{1}{4}$

$\therefore \pi_1 \parallel \pi_2, \quad ABC \cap \pi_1 = \vec{DB}$

$ABC \cap \pi_2 = \vec{GE}$

$\therefore \vec{DB} \parallel \vec{GE} \quad \therefore \frac{AG}{AD} = \frac{1}{4}$

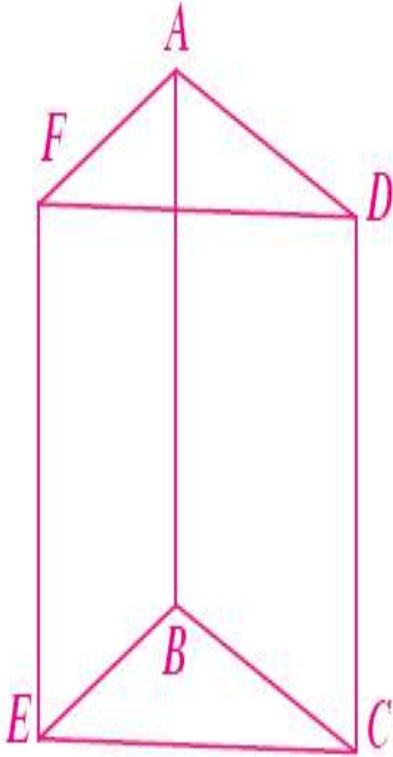
و بالمثل يمكن إثبات أن $\vec{GF} \parallel \vec{DC}$

$\therefore \frac{GF}{DC} = \frac{1}{4} \quad \therefore \frac{6}{DC} = \frac{1}{4}$

$DC = 24$ cm

(46)

\overrightarrow{AB} متوازي أضلاع $ABCD$, $ABEF$ غير مستويين معًا ويتقاطعان في \overrightarrow{AB}
أثبت أن: $CDFE$ متوازي أضلاع



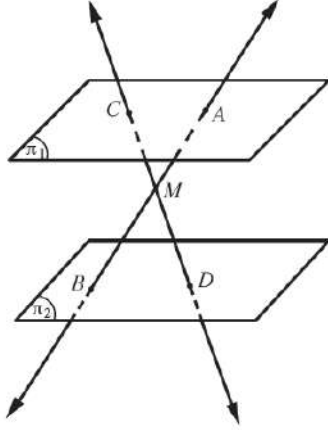
$$AB = EF, \overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{EF} \because$$

$$AB = CD, \overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD} \because$$

$$EF = CD, \overrightarrow{EF} \parallel \overrightarrow{CD} \because$$

ومنه $CDFE$ متوازي الأضلاع.

(47)



في الشكل المقابل π_1, π_2 مستويان متوازيان، M نقطة واقعة بينهما،

حيث $\overrightarrow{AB} \cap \overrightarrow{CD} = \{M\}$

أثبت أن: $\frac{AM}{MB} = \frac{AC}{BD}$

$\therefore \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}$ يتقاطعان \therefore يشكلان مستويًا وهذا المستوي يقطع المستويين المتوازيين π_1, π_2 بمستقيمين متوازيين فيكون

$\overrightarrow{BD} \parallel \overrightarrow{AC}$ وبالتالي المثلثان: MBD, MAC متشابهان.

ومن هنا نستنتج: $\frac{AM}{MB} = \frac{AC}{BD}$

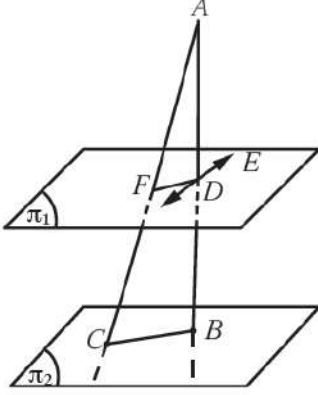
(ويتشابه المثلثان لان جميع الزوايا المتناظرة متطابقه)

(48)

في الشكل المقابل، \vec{AB} عمودي على المستوي π_1, π_2 ، $\vec{DE} \subset \pi_1$ ، $\vec{AD} \perp \vec{DE}$

فإذا كانت D منتصف \vec{AB} ، F منتصف \vec{AC}

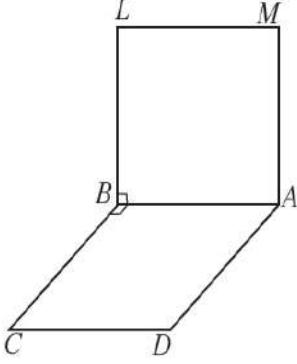
أثبت أن: $\pi_1 \parallel \pi_2$



في المثلث ABC لدينا $\vec{FD} \parallel \vec{CB}$ ولكن $\vec{AB} \perp \vec{BC}$ فيكون $\vec{AB} \perp \vec{FD}$ كما أن $\vec{AB} \perp \vec{DE}$ لذا $\vec{AB} \perp \pi_1$ في النقطة D .

$\therefore \vec{AB} \perp \pi_2, \vec{AB} \perp \pi_1 \therefore \pi_1 \parallel \pi_2$.

(49)

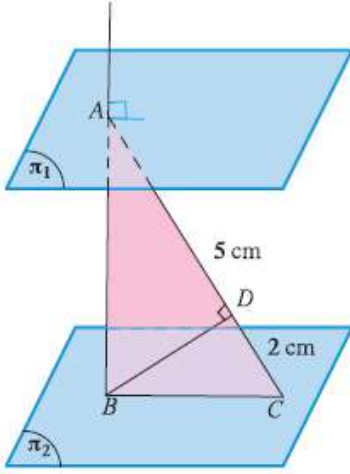


$ABLM, ABCD$ مربعان ليسا في مستو واحد، لهما ضلع مشترك \overline{AB} ،
أثبت أن: $\overline{LM} \perp (LBC)$

$$\therefore \overline{LM} \perp (LBC) \text{ ومنه } \overline{LM} \perp \overline{BC} \text{ و } \overline{LM} \perp \overline{BL} \therefore \overline{LM} \parallel \overline{BA} \parallel \overline{CD} \therefore$$

(من خواص المربع... الاضلاع المتقابلة متوازيه والمتجاوره متعامده)

(50)



في الشكل المقابل، $\pi_1 \parallel \pi_2$ ، $\overline{AB} \perp \pi_1$ ، $A \in \pi_1$ ، $\overline{BC} \subset \pi_2$ ،

رسم: $\overline{BD} \perp \overline{AC}$ في المستوي ABC

إذا كان: $AD = 5 \text{ cm}$ ، $DC = 2 \text{ cm}$

أوجد: BD

الحل:

المعطيات:

$\pi_1 \parallel \pi_2$ ، $\overline{AB} \perp \pi_1$ ، $\overline{BD} \perp \overline{AC}$

$AD = 5 \text{ cm}$ ، $DC = 2 \text{ cm}$

المطلوب:

إيجاد BD

البرهان:

$$\because \pi_1 \parallel \pi_2 ، \overline{AB} \perp \pi_1$$

$$\therefore \overline{AB} \perp \pi_2$$

(نظرية 7)

$\therefore \overline{AB}$ عمودي على كل مستقيم في π_2

$$\because \overline{BC} \subset \pi_2$$

$$\therefore \overline{AB} \perp \overline{BC}$$

في المثلث ABC القائم الزاوية في B

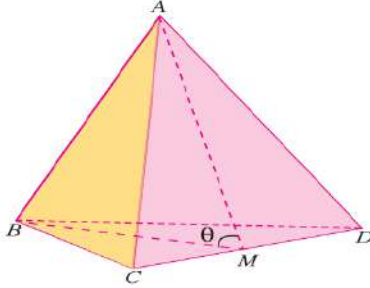
$$\because \overline{BD} \perp \overline{AC}$$

$$\therefore (BD)^2 = AD \times DC$$

$$= 5 \times 2 = 10$$

$$BD = \sqrt{10} \text{ cm}$$

(51)



يبين الشكل المقابل هرمًا ثلاثي القاعدة أوجهه مثلثات متطابقة الأضلاع طول حرفه 8 cm
M منتصف \overline{DC}

a حدد الزاوية المستوية بين المستويين ADC , BDC

b أوجد قياس الزاوية المستوية للزاوية الزوجية \overline{DC}

المعطيات: هرم $ABCD$ أوجهه مثلثات متطابقة الأضلاع.

طول الحرف = 8 cm ، M منتصف \overline{DC} .

a المطلوب: تحديد الزاوية المستوية بين المستويين: ADC , BDC

البرهان:

نحدد الزاوية المستوية بين المستويين: ADC , BDC

(1) حافة الزاوية الزوجية \overline{DC}

المثلث ADC متطابق الأضلاع.

∴ M منتصف \overline{CD}

من خواص Δ متطابق الأضلاع

(2) $\overline{AM} \subset (ADC)$ حيث $\overline{AM} \perp \overline{DC}$

(3) $\overline{BM} \subset (BDC)$ حيث $\overline{BM} \perp \overline{DC}$

وبالمثل نجد أن: \widehat{AMB} هي الزاوية المستوية للزاوية الزوجية \overline{DC}

b المطلوب

إيجاد قياس الزاوية المستوية للزاوية الزوجية \overline{DC}

البرهان:

∴ المثلث AMD قائم الزاوية في M .

متطابقة فيثاغورث

$$(AM)^2 = (AD)^2 - (DM)^2$$

$$(AM)^2 = 8^2 - \left(\frac{8}{2}\right)^2$$

$$(AM)^2 = 64 - 16 = 48$$

$$AM = \sqrt{48} = 4\sqrt{3} \text{ cm}$$

$$BM = AM = 4\sqrt{3} \text{ cm}$$

في المستوي AMB :

لإيجاد قياس الزاوية المستوية AMB نستخدم قانون جيب التمام في المثلث ABM .

$$(AB)^2 = (AM)^2 + (MB)^2 - 2 \cdot AM \cdot MB \cdot \cos \theta$$

$$\cos \theta = \frac{(AM)^2 + (MB)^2 - (AB)^2}{2AM \cdot MB}$$

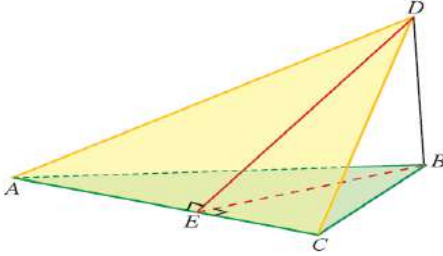
$$\cos \theta = \frac{48 + 48 - 64}{2 \times 4\sqrt{3} \times 4\sqrt{3}} = \frac{32}{96} = \frac{1}{3}$$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) \approx 70.5287^\circ$$

$$70^\circ 31' 43.61'' \text{ أي}$$

∴ قياس الزاوية المستوية للزاوية الزوجية حوالى $70^\circ 31' 44''$

(52)



في الشكل المقابل D نقطة خارج مستوى المثلث ABC ،

$$DB = 5 \text{ cm} , AB = 10 \text{ cm} , m(\widehat{BAC}) = \frac{\pi}{6}$$

$$\overline{DB} \perp (ABC)$$

$$\overline{BE} \perp \overline{AC} , \overline{DE} \perp \overline{AC}$$

أوجد:

a BE, DE

b قياس الزاوية الزوجية بين المستويين BAC, DAC

الحل:

المعطيات:

D نقطة خارج (ABC)

$$m(\widehat{BAC}) = \frac{\pi}{6}$$

$$DB = 5 \text{ cm} , AB = 10 \text{ cm} , \overline{DB} \perp (ABC)$$

$$\overline{DE} \perp \overline{AC} , \overline{BE} \perp \overline{AC}$$

a المطلوب: إيجاد BE, DE

البرهان:

فرضًا

$$\therefore \overline{BE} \perp \overline{AC} \Rightarrow \therefore m(\widehat{BEA}) = \frac{\pi}{2}$$

$$\therefore m(\widehat{BAC}) = \frac{\pi}{6}$$

$$\therefore BE = \frac{1}{2} AB = 5 \text{ cm}$$

$$\overline{DB} \perp (ABC) , \overline{BE} \subset (ABC)$$

$$\therefore \overline{DB} \perp \overline{BE}$$

$$\therefore DE = BE \times \sqrt{2}$$

$$= 5\sqrt{2} \text{ cm}$$

$\therefore AEB$ مثلث ثلاثيني - سيني

خاصية المثلث ثلاثيني - سيني

فرضًا

خاصية المستقيم العمودي على مستو

في المستوي DBE :

المثلث DBE قائم في B ، متطابق الضلعين.

طول الوتر في المثلث القائم متطابق الضلعين

b المطلوب: إيجاد قياس الزاوية الزوجية بين المستويين (BAC) ، (DAC)

البرهان:

\overline{AC} هو خط تقاطع المستويين BAC, DAC

$\overline{BE} \perp \overline{AC}$ في المستوي BAC

$\overline{DE} \perp \overline{AC}$ في المستوي DAC

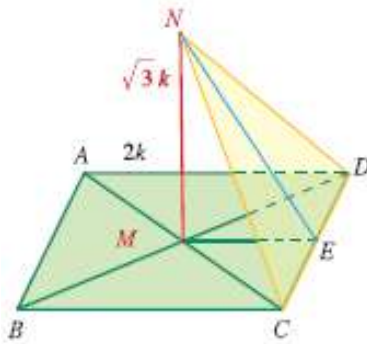
\therefore الزاوية المستوية للزاوية الزوجية بين المستويين BAC, DAC هي \widehat{BED}

$\therefore \Delta DBE$ قائم في B ومتطابق الضلعين.

$$\therefore m(\widehat{BED}) = \frac{\pi}{4}$$

$$\therefore \text{قياس الزاوية الزوجية} = \frac{\pi}{4}$$

(53)



$ABCD$ مستطيل تقاطع قطراه في M ، وفيه $AD = 2k$

أقيم \overline{NM} عموداً على $(ABCD)$ حيث N خارج مستواه بحيث $MN = \sqrt{3}k$

أوجد قياس الزاوية الزوجية بين المستويين $ABCD$ ، NCD

الحل:

المعطيات: مستطيل $ABCD$ ، $\overline{AC} \cap \overline{DB} = \{M\}$

$AD = 2k$ ، $MN = \sqrt{3}k$ ، $\overline{MN} \perp (ABCD)$

المطلوب: إيجاد قياس الزاوية الزوجية بين المستويين $ABCD$ ، NCD

العمل: نرسم \overline{ME} حيث E منتصف \overline{CD}

البرهان: \overline{CD} هي الحافة المشتركة بين المستويين $ABCD$ ، NCD

$$\therefore \overline{MN} \perp (ABCD) , \overline{CD} \subset (ABCD)$$

$$\therefore \overline{MN} \perp \overline{CD} \quad (1)$$

(من خواص المستطيل)

في المثلث CDM المتطابق الضلعين

(عملاً)

$\therefore E$ منتصف \overline{CD}

$$\therefore \overline{ME} \perp \overline{CD} \quad (2)$$

من (1)، (2) نجد أن:

$$\overline{CD} \perp (MNE) , \overline{NE} \subset (MNE)$$

$$\therefore \overline{NE} \perp \overline{CD}$$

$\therefore \widehat{MEN}$ هي الزاوية المستوية للزاوية الزوجية \overline{CD}

في المثلث BCD

(من خواص المستطيل)

M منتصف \overline{BD}

(عملاً)

E منتصف \overline{CD}

$$\begin{aligned} \therefore ME &= \frac{1}{2} AD \\ &= \frac{1}{2} \times 2k = k \end{aligned}$$

(من خواص المستقيم العمودي مع مستوي)

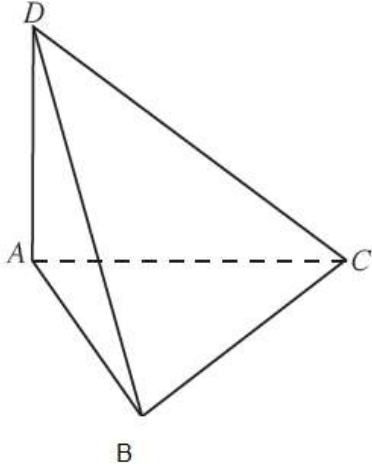
في المثلث MEN القائم الزاوية في M

$$\tan(\widehat{MEN}) = \frac{MN}{ME} = \frac{\sqrt{3}k}{k} = \sqrt{3}$$

$$\therefore m(\widehat{MEN}) = 60^\circ$$

\therefore قياس الزاوية الزوجية بين المستويين $ABCD$ ، NCD هو 60°

(54)



ABC مثلث متطابق الأضلاع.

\vec{AD} متعامد مع المستوي ABC

أوجد قياس الزاوية الزوجية (DAB, \vec{DA}, DAC)

\vec{DA} هو خط تقاطع المستويين DAB, DAC

$\vec{AC} \perp \vec{AD}$ في المستوي ADC

$\vec{AB} \perp \vec{AD}$ في المستوي ADB

\therefore الزاوية (\hat{BAC}) هي زاوية مستوية للزاوية الزوجية (DAB, \vec{DA}, DAC)

\therefore مثلث ABC متطابق الأضلاع \therefore زواياه متطابقة .

$$\therefore m(\hat{BAC}) = \frac{\pi}{3}$$