

توقعات نصار فاينال

عمل / أ . أحمد نصار

((مذكره مجانية ... المرجع: الكتاب المدرسى وكراسة التمارين
وزارة التربية والتعليم الكويتية))

تجميع لأهم أفكار المسائل المتوقعة و الأكثر تكرارا فى أختبارات السنوات السابقة

الاختبار الفاينال 8 مسائل مقالى

الوحدة الأولى (التكامل):

3 مسائل مقالى.

الوحدة الثانية (تطبيقات التكامل):

2 مسائل مقالى.

الوحدة الثالثة (القطوع):

2 مسائل مقالى.

الوحدة الرابعة (الأحصاء):

1 سؤال مقالى.

مسائل الموضوعى من كراسه التمارين بنفس الارقام

(1)

a

أثبت أن $F(x) = x^3 + 5x + 3$ هي مشتقة عكسية للدالة $f(x) = 3x^2 + 5$
ثم اكتب الصورة العامة للمشتقة العكسية

$$F(x) = x^3 + 5x + 3$$

$$F'(x) = 3x^2 + 5 = f(x)$$

$\therefore F$ هي مشتقة عكسية للدالة f

الصورة العامة للمشتقة العكسية هي

$$H(x) = x^3 + 5x + C \quad \text{حيث } c \text{ ثابت}$$

b

$$\int \frac{x^4 - 27x}{x^2 - 3x} dx$$

$$\int \frac{x(x^3 - 27)}{x(x-3)} dx = \int \frac{(x-3)(x^2 + 3x + 9)}{(x-3)} dx$$

$$= \int (x^2 + 3x + 9) dx$$

$$\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + 9x + c$$

(2)

$$\int \frac{x+1}{\sqrt[3]{x+1}} dx = \int \frac{(\sqrt[3]{x+1})[(\sqrt[3]{x})^2 - \sqrt[3]{x+1}]}{\sqrt[3]{x+1}} dx =$$

$$\int [(\sqrt[3]{x})^2 - \sqrt[3]{x} + 1] dx = \int (x^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{1}{3}} + 1) dx =$$

$$= \frac{3}{5} x^{\frac{5}{3}} - \frac{3}{4} x^{\frac{4}{3}} + x + C$$

$$= \frac{3}{5} x \sqrt[3]{x^2} + \frac{3}{4} x \sqrt[3]{x} + x + C$$

(3)

$$\int \frac{x-1}{\sqrt{x}+1} dx$$

$$= \int \frac{(x-1)}{\sqrt{x}+1} \times \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-1} dx$$

$$= \int \frac{(x-1)(\sqrt{x}-1)}{(x-1)} dx$$

$$= \int (\sqrt{x}-1) dx$$

$$= \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - x + c$$

(4)

$$\int (x + 2) \sqrt[3]{x^2 + 4x - 1} dx$$

الحل :

$$u = x^2 + 4x - 1 \quad \text{بفرض}$$

$$du = (2x + 4)dx \quad , \quad \frac{1}{2} du = (x + 2)dx$$

$$\begin{aligned} \int (x + 2) \sqrt[3]{x^2 + 4x - 1} dx &= \int u^{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{2} du \right) \\ &= \frac{1}{2} \int u^{\frac{1}{3}} du \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{3}{4} u^{\frac{4}{3}} \right] + C \end{aligned}$$

$$\therefore \int (x + 2) \sqrt[3]{x^2 + 4x - 1} dx = \frac{3}{8} (x^2 + 4x - 1)^{\frac{4}{3}} + C$$

(5)

$$\int \frac{5}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)^3} dx \quad \text{أوجد :}$$

$$\int \frac{5}{x^{\frac{1}{2}}(x^{\frac{1}{2}}+2)^3} dx =$$

$$= \int 5 x^{\frac{-1}{2}} (x^{\frac{1}{2}}+2)^{-3} dx = 5 \int (x^{\frac{1}{2}}+2)^{-3} x^{\frac{-1}{2}} dx$$

نفرض أن $u = x^{\frac{1}{2}} + 2$  $du = \frac{1}{2} x^{\frac{-1}{2}} dx$
 $2 du = x^{\frac{-1}{2}} dx$

$$5 \int (x^{\frac{1}{2}}+2)^{-3} x^{\frac{-1}{2}} dx = 5 \int u^{-3} \cdot 2 du = 10 \int u^{-3} du$$

$$= 10 \cdot \frac{u^{-2}}{-2} + C = \frac{-5}{u^2} + C = \frac{-5}{(\sqrt{x}+2)^2} + C$$

(6)

$$\int x(2x - 1)^3 dx$$

الحل:

$$u = 2x - 1 \Rightarrow du = 2dx \Rightarrow \frac{du}{2} = dx$$

$$u = 2x - 1 \Rightarrow 2x = u + 1 \Rightarrow x = \frac{u + 1}{2}$$

$$\int x(2x - 1)^3 dx = \int \left(\frac{u + 1}{2}\right) u^3 \frac{du}{2} = \frac{1}{4} \int (u^4 + u^3) du$$

$$= \frac{1}{4} \left(\frac{u^5}{5} + \frac{u^4}{4} + C \right) = \frac{1}{20} (2x - 1)^5 + \frac{1}{16} (2x - 1)^4 + C$$

(7)

$$\int x \sec^2(x^2 + 2) dx$$

الحل:

$$u = x^2 + 2 \Rightarrow du = 2x dx \Rightarrow \frac{1}{2} du = x dx$$

$$\begin{aligned} \int x \sec^2(x^2 + 2) dx &= \int \sec^2 u \left(\frac{1}{2} du \right) \\ &= \frac{1}{2} \int \sec^2 u du = \frac{1}{2} \tan u + C = \frac{1}{2} \tan(x^2 + 2) + C \end{aligned}$$

(8)

$$\int \csc^5 x \cot x dx$$

الحل:

$$u = \csc x \Rightarrow du = -\csc x \cot x dx \Rightarrow -du = \csc x \cot x dx$$

$$\int \csc^5 x \cot x dx = \int \csc^4 x \cdot \csc x \cdot \cot x dx = \int u^4 (-du)$$

$$= -\int u^4 du = -\frac{u^5}{5} + C = -\frac{1}{5} \csc^5 x + C$$

(9)

$$\int \cot x \, dx$$

الحل:

$$\int \cot x \, dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} \, dx$$

$$u = \sin x \Rightarrow du = \cos x \, dx$$

$$\int \cot x \, dx = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C = \ln|\sin x| + C$$

(10)

$$\int \cos^3(2x - 3) \cdot \sin(2x - 3) \, dx$$

$$= \int u^3 \frac{du}{-2}$$

$$= \frac{-1}{2} \cdot \frac{u^4}{4} + C = \frac{-1}{8} (\cos(2x - 3))^4 + C$$

$$u = \cos(2x - 3)$$

$$du = -2 \sin(2x - 3) \, dx$$

$$\frac{du}{-2} = \sin(2x - 3) \, dx$$

(11)

$$\int \frac{3t^2 - 6t}{t^3 - 3t^2 + 8} dt$$

$$\text{نفرض أن } u = t^3 - 3t^2 + 8 \longrightarrow du = (3t^2 - 6t) dt$$

$$\begin{aligned} \int \frac{3t^2 - 6t}{t^3 - 3t^2 + 8} dx &= \int \frac{1}{u} du = \ln |u| + C \\ &= \ln |t^3 - 3t^2 + 8| + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\int \frac{x^3 + 4}{x} dx \\ &= \int \left(\frac{x^3}{x} + \frac{4}{x} \right) dx \\ &= \int \left(x^2 + \frac{4}{x} \right) dx \\ &= \frac{x^3}{3} + 4 \ln |x| + C \end{aligned}$$

(12)

$$\int (x^2 - 2)e^{x^3 - 6x} dx$$

أوجد:

الحل

$$I = \int e^{x^3 - 6x} \cdot \underline{(x^2 - 2)} dx$$

$$= \int e^u \cdot \frac{1}{3} du$$

$$= \frac{1}{3} e^u + C$$

$$= \frac{1}{3} e^{x^3 - 6x} + C$$

$$u = x^3 - 6x$$

$$du = (3x^2 - 6) dx$$

$$du = 3(x^2 - 2) dx$$

$$\frac{1}{3} du = \underline{(x^2 - 2)} dx$$

(13)

$$\int \frac{e^x}{e^x + 1} dx$$

أوجد:

الحل

$$I = \int \frac{1}{u} du$$

$$= \ln |u| + C$$

$$= \ln |e^x + 1| + C$$

$$u = e^x + 1$$

$$du = e^x dx$$

(14)

أوجد: $\int \frac{x^2-2}{2x^3-5x^2-3x} dx$ حلل المقام

$$2x^3 - 5x^2 - 3x = x(2x^2 - 5x - 3) = x(2x + 1)(x - 3)$$

اصفر المقام \rightarrow 0 $-\frac{1}{2}$ 3 بالضرب في

$$\frac{x^2 - 2}{x(2x + 1)(x - 3)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{(2x + 1)} + \frac{C}{(x - 3)}$$

$$x^2 - 2 = A(2x + 1)(x - 3) + Bx(x - 3) + Cx(2x + 1)$$

1 التعويض بأصفر المقام

بالتعويض في 1 $\rightarrow x = 0$ A = $\frac{2}{3}$

بالتعويض في 1 $\rightarrow x = -0.5$ B = -1

بالتعويض في 1 $\rightarrow x = 3$ C = $\frac{1}{3}$

تابع الحل \rightarrow

أوجد: $\int \frac{x^2-2}{2x^3-5x^2-3x} dx$

$$\frac{x^2 - 2}{x(2x + 1)(x - 3)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{(2x + 1)} + \frac{C}{(x - 3)}$$

A = $\frac{2}{3}$

B = -1

C = $\frac{1}{3}$

$$\int \frac{x^2 - 2}{2x^3 - 5x^2 - 3x} dx = \int \left(\frac{\frac{2}{3}}{x} + \frac{-1}{2x + 1} + \frac{\frac{1}{3}}{x - 3} \right) dx =$$

$$= \frac{2}{3} \ln |x| - \frac{1}{2} \ln |2x + 1| + \frac{1}{3} \ln |x - 3| + C$$

(15)

$$\int \frac{x^2 - 3x + 7}{x^2 - 4x + 4} dx$$

∴ درجة البسط = درجة المقام

∴ نبدأ بقسمة البسط على المقام باستخدام القسمة المطولة

$$\begin{array}{r} \text{ناتج القسمة} \leftarrow 1 \\ x^2 - 4x + 4 \overline{) x^2 - 3x + 7} \\ \underline{- x^2 - 4x + 4} \\ x + 3 \leftarrow \text{الباقى} \end{array}$$

$$\frac{x^2 - 3x + 7}{x^2 - 4x + 4} = 1 + \frac{x + 3}{(x - 2)^2}$$

$$\frac{x + 3}{(x - 2)^2} = \frac{A_1}{x - 2} + \frac{A_2}{(x - 2)^2}$$

الحدودية النسبية

$$x + 3 = A_1(x - 2) + A_2$$

نضرب كلاً من طرفي المعادلة في $(x - 2)^2$ ثم نبسط

$$2 + 3 = A_1(0) + A_2$$

نعوض عن x بـ 2

$$\therefore A_2 = 5$$

نعوض في المعادلة عن $A_2 = 5$ وإحدى قيم x وليكن $x = 1$ لإيجاد قيمة A_1 .

$$1 + 3 = -A_1 + 5$$

$$\therefore A_1 = 1$$

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 - 3x + 7}{x^2 - 4x + 4} dx &= \int \left(1 + \frac{1}{x - 2} + \frac{5}{(x - 2)^2} \right) dx \\ &= x + \ln|x - 2| - \frac{5}{x - 2} + C \end{aligned}$$

(16)

$$\int x \cos x \, dx$$

الحل:

$$\int u \, dv = uv - \int v \, du$$

$$\int x \cos x \, dx = x \sin x - \int \sin x \, dx$$

$$= x \sin x + \cos x + C$$

$u = x$	$dv = \cos x \, dx$
$du = dx$	$v = \sin x$

(17)

$$\int 4x e^{-5x} \, dx$$

الحل:

$$\int u \, dv = uv - \int v \, du$$

$$\int 4x e^{-5x} \, dx = 4x \left(-\frac{1}{5} e^{-5x} \right) - \int -\frac{4}{5} e^{-5x} \, dx$$

$$= -\frac{4}{5} x e^{-5x} - \frac{4}{25} e^{-5x} + C$$

$u = 4x$	$dv = e^{-5x} \, dx$
$du = 4 \, dx$	$v = -\frac{1}{5} e^{-5x}$

(18)

$$\int \ln x \, dx$$

الحل :

$$\int u \, dv = uv - \int v \, du$$

$$\int \ln x \, dx = x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} \, dx$$

$$= x \ln x - \int dx = x \ln(x) - x + C$$

$u = \ln x$	$dv = dx$
$du = \frac{1}{x} dx$	$v = x$

(19)

$$\int x^2 \sin x \, dx$$

الحل :

$$\int u \, dv = uv - \int v \, du$$

$$\int x^2 \sin x \, dx = -x^2 \cos x + \int 2x \cos x \, dx$$

$$\begin{aligned} \int 2x \cos x \, dx &= 2x \sin x - \int 2 \sin x \, dx \\ &= 2x \sin x + 2 \cos x + C \end{aligned}$$

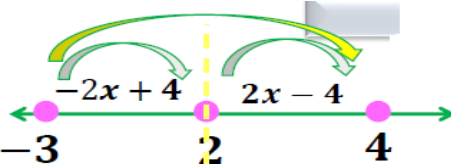
$$\therefore \int x^2 \sin x \, dx = -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + C$$

$u = x^2$	$dv = \sin x \, dx$
$du = 2x \, dx$	$v = -\cos x$

$u = 2x$	$dv = \cos x \, dx$
$du = 2 \, dx$	$v = \sin x$

(20)

$$\int_{-3}^4 |2x - 4| dx$$



$$\begin{aligned} 2x - 4 &= 0 \\ 2x &= 4 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \int_{-3}^2 |2x - 4| dx + \int_2^4 |2x - 4| dx = \\ & \int_{-3}^2 (-2x + 4) dx + \int_2^4 (2x - 4) dx = \\ & = \left[-\frac{2x^2}{2} + 4x \right]_{-3}^2 + \left[\frac{2x^2}{2} - 4x \right]_2^4 = \\ & = [-x^2 + 4x]_{-3}^2 + [x^2 - 4x]_2^4 = \\ & [-(-2)^2 + 4(2)] - [-(-3)^2 + 4(-3)] + [4^2 - 4(4)] - [2^2 - 4(2)] \\ & = 29 \end{aligned}$$

(21)

$$\int_3^5 (x^2 + x) dx \geq 0$$

دون حساب قيمة التكامل أثبت أن:

الحل:

بفرض

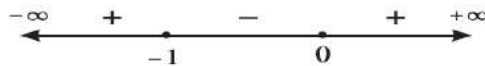
وهي دالة متصلة على $[3, 5]$

نضع

$$f(x) = x^2 + x$$

$$x^2 + x = 0$$

$$x(x + 1) = 0$$



$$f(x) \geq 0 \quad \forall x \in (-\infty, -1] \cup [0, \infty)$$

$$\therefore [3, 5] \subseteq [0, \infty)$$

$$\therefore x^2 + x \geq 0 \quad \forall x \in [3, 5]$$

$$\int_3^5 (x^2 + x) dx \geq 0$$

(22)

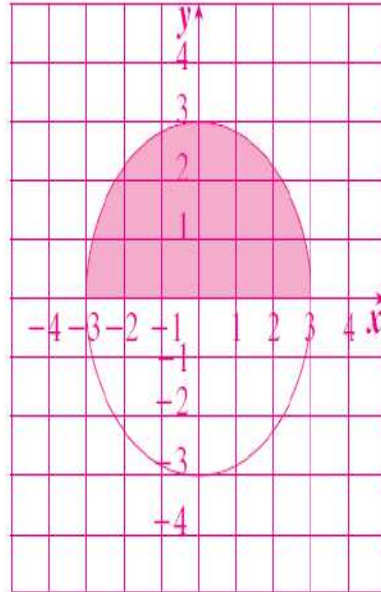
$$y = \sqrt{9 - x^2} \therefore y^2 = 9 - x^2 \therefore y^2 + x^2 = 9$$

وهي معادلة دائرة مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها 3 وحدات.

والدالة $y = \sqrt{9 - x^2}$ تمثل معادلة النصف العلوي للدائرة.

\therefore مساحة المنطقة المظللة تساوي:

$$\begin{aligned} \therefore \int_{-3}^3 \sqrt{9 - x^2} dx \\ = \frac{1}{2} \pi (3)^2 = \frac{9}{2} \pi \end{aligned}$$



(23)

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x \sec^2 x \, dx$$

$$u = \tan x \Rightarrow du = \sec^2 x \, dx$$

$$u = \tan(0) = 0 \quad \Leftarrow \quad x = 0 \quad \text{عندما}$$

$$u = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 \quad \Leftarrow \quad x = \frac{\pi}{4} \quad \text{عندما}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x \sec^2 x \, dx = \int_0^1 u \, du$$

$$= \left[\frac{u^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{2} - 0$$

$$= \frac{1}{2}$$

(24)

بأستخدام الكسور الجزئية:

$$\int_{-2}^0 \frac{5x - 1}{x^2 + 2x - 3} dx$$

$$\frac{5x - 1}{x^2 + 2x - 3} = \frac{A}{(x - 1)} + \frac{B}{(x + 3)}$$

$$5x - 1 = A(x + 3) + B(x - 1)$$

$$\text{عوض عن } x=1 \rightarrow 4 = 4A \quad \xrightarrow{\text{ينتج}} A = 1$$

$$\text{عوض عن } x=-3 \rightarrow -16 = -4B \quad \xrightarrow{\text{ينتج}} B = 4$$

$$= \int_{-2}^0 \left(\frac{1}{(x - 1)} + \frac{4}{(x + 3)} \right) dx$$

$$= [\ln|x - 1|]_{-2}^0 + 4 \ln[|x + 3|]_{-2}^0$$

$$= 3 \ln 3$$

(25)

$$f(x) = x^3 - 9x, \quad [-2, 1]$$

$$f(x) = 0$$

$$x^3 - 9x = 0$$

$$x(x^2 - 9) = 0$$

$$x(x - 3)(x + 3) = 0$$

$$x = 0$$

$$x = 3$$

$$x = -3$$

$$0 \in (-2, 1)$$

$$3 \notin (-2, 1)$$

$$-3 \notin (-2, 1)$$

$$A = \left| \int_{-2}^0 f(x) dx \right| + \left| \int_0^1 f(x) dx \right|$$

$$A = \left| \int_{-2}^0 (x^3 - 9x) dx \right| + \left| \int_0^1 (x^3 - 9x) dx \right|$$

$$= \left| \left[\frac{x^4}{4} - \frac{9}{2}x^2 \right]_{-2}^0 \right| + \left| \left[\frac{x^4}{4} - \frac{9}{2}x^2 \right]_0^1 \right|$$

$$= \left| \left[\frac{(0)^4}{4} - \frac{9}{2}(0)^2 \right] - \left[\frac{(-2)^4}{4} - \frac{9}{2}(-2)^2 \right] \right| + \left| \left[\frac{(1)^4}{4} - \frac{9}{2}(1)^2 \right] - \left[\frac{(0)^4}{4} - \frac{9}{2}(0)^2 \right] \right| = \frac{73}{4} \text{ square units}$$

(26)

أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f : $f(x) = x^2 - 3x$ ومحور السينات.

الحل:

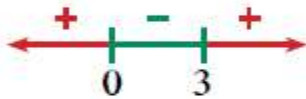
نوجد الإحداثيات السينية لنقاط تقاطع منحنى الدالة f مع محور السينات بوضع

$$f(x) = 0$$

$$x^2 - 3x = 0$$

$$x(x - 3) = 0$$

$$x = 0 \text{ أو } x = 3$$



نبحث هل $f(x) \geq 0$ أو $f(x) \leq 0$ في $[0, 3]$

$$\therefore f(x) \leq 0 \quad \forall x \in [0, 3]$$

$$A = - \int_0^3 f(x) dx$$

∴ المساحة:

$$= - \int_0^3 (x^2 - 3x) dx$$

$$= - \left[\frac{x^3}{3} - \frac{3}{2}x^2 \right]_0^3$$

$$= - \left[\left(9 - \frac{27}{2} \right) - (0) \right]$$

$$= - \left(-\frac{9}{2} \right)$$

$$= \frac{9}{2} \text{ units square}$$

ملاحظه:

يمكن حل السؤال بطريقة المطلق دون الاحتياج لخطوه اختبار الداله موجبہ ولا سالبہ.

(27)

أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحني: $f(x) = x^2 + 1$, $g(x) = -x^2 + 9$

الحل:

لإيجاد الإحداثيات السينية لنقاط تقاطع المنحنيين نضع

$$f(x) = g(x)$$

$$x^2 + 1 = -x^2 + 9$$

$$2x^2 = 8$$

$$x^2 = 4$$

$$x = \pm 2$$

يكون التكامل من $x = -2$ إلى $x = 2$ ومساحة المنطقة هي:

$$\begin{aligned} A &= \left| \int_{-2}^2 (f(x) - g(x)) dx \right| \\ &= \left| \int_{-2}^2 (x^2 + 1 + x^2 - 9) dx \right| = \left| \int_{-2}^2 (2x^2 - 8) dx \right| \\ &= \left| \left[\frac{2x^3}{3} - 8x \right]_{-2}^2 \right| \\ &= \left| \left[\frac{2(2)^3}{3} - 8(2) \right] - \left[\frac{2(-2)^3}{3} - 8(-2) \right] \right| \\ &= \frac{64}{3} \quad (\text{وحدة مربعة}) \end{aligned}$$

(28)

أوجد حجم المجسم الناتج من دوران المنطقة المستوية دورة كاملة حول محور السينات والمحددة بمنحنى الدالة f :

$$f(x) = \sqrt{x-1} \text{ ومحور السينات في الفترة } [1, 5].$$

الحل:

$$V = \pi \int_1^5 (f(x))^2 dx$$

$$= \pi \int_1^5 (\sqrt{x-1})^2 dx$$

$$= \pi \int_1^5 (x-1) dx$$

$$= \pi \left[\frac{x^2}{2} - x \right]_1^5$$

$$= \pi \left(\left[\frac{(5)^2}{2} - (5) \right] - \left[\frac{(1)^2}{2} - (1) \right] \right)$$

$$= 8\pi \text{ cubic units}$$

(29)

أوجد حجم المجسم الناتج من دوران المنطقة المستوية دورة كاملة حول محور السينات والمحددة بمنحني الدالتين

$$f(x) = x^2 \quad , \quad g(x) = \sqrt{x} : g$$

الحل:

المنطقة المستوية محددة بمنحني الدالتين

نجد التقاطع بوضع:

$$f(x) = g(x)$$

$$x^2 = \sqrt{x} \quad (x \geq 0)$$

بتريع الطرفين

$$x^4 = x$$

$$x^4 - x = 0$$

$$x(x^3 - 1) = 0$$

$$x(x - 1)(x^2 + x + 1) = 0$$

$$x = 0 \quad , \quad x = 1$$

$$x^2 + x + 1 = 0$$

نحصل على:

وبالنسبة إلى المعادلة

نوجد المميز Δ :

$$\Delta = 1 - 4(1)(1) = -3 \quad , \quad -3 < 0$$

∴ المعادلة ليس لها حلول في \mathbb{R} فيكون التكامل على $[0, 1]$

نأخذ قيمة اختيارية في $(0, 1)$ ولتكن $x = \frac{1}{4}$

$$f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{16} \quad , \quad g\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\therefore g(x) \geq f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [0, 1]$$

$$V = \pi \int_0^1 [(g(x))^2 - (f(x))^2] dx \quad \therefore \text{حجم المجسم الناتج عن الدوران:}$$

$$V = \pi \int_0^1 [(\sqrt{x})^2 - (x^2)^2] dx$$

$$V = \pi \int_0^1 (x - x^4) dx$$

$$= \pi \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{5} \right]_0^1 = \pi \left[\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5} \right) - (0) \right]$$

$$= \frac{3}{10} \pi \quad \text{units cube}$$

(30)

أوجد طول القوس من منحنى الدالة f : $f(x) = \frac{2}{9}(9 + 3x)^{\frac{3}{2}}$ في الفترة $[2, 5]$

الحل

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \left(\frac{2}{9}\right) \left(\frac{3}{2}\right) (9 + 3x)^{\frac{1}{2}} (3) \\
 &= (9 + 3x)^{\frac{1}{2}} \\
 L &= \int_2^5 \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx \\
 &= \int_2^5 \sqrt{1 + 9 + 3x} dx = \int_2^5 \sqrt{10 + 3x} dx \\
 &= \int_2^5 (10 + 3x)^{\frac{1}{2}} dx \\
 &= \frac{1}{3} \int_2^5 3(10 + 3x)^{\frac{1}{2}} dx \\
 &= \left(\frac{1}{3}\right) \left(\frac{2}{3}\right) \left[(10 + 3x)^{\frac{3}{2}}\right]_2^5 \\
 &= \left(\frac{2}{9}\right) \left[(25)^{\frac{3}{2}} - (16)^{\frac{3}{2}}\right] \\
 &= \frac{122}{9} \text{ units}
 \end{aligned}$$

(31)

أوجد معادلة منحنى الدالة f الذي ميله عند أي نقطة $P(x, y)$ يساوي $3x^2 + x$ ويمر بالنقطة $(2, 2)$

الحل:

$$f'(x) = 3x^2 + x$$

$$f(x) = \int (3x^2 + x) dx$$

$$= \frac{3x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + C$$

$$= x^3 + \frac{x^2}{2} + C$$

لإيجاد قيمة الثابت C نعوض بالنقطة $(2, 2)$ في المعادلة السابقة فنجد:

$$2 = (2)^3 + \frac{(2)^2}{2} + C$$

$$2 = 8 + 2 + C$$

$$C = -8$$

معادلة منحنى الدالة f المطلوب هو:

$$f(x) = x^3 + \frac{x^2}{2} - 8$$

(32)

إذا كان ميل العمودي على منحنى الدالة f عند أي نقطة عليه (x, y) يساوي $\sqrt{5-4x}$ فأوجد معادلة المنحنى

عندما يمر بالنقطة $A(-5, 3)$

الحل : ميل العمودي $\frac{-1}{f'(x)}$

$$f'(x) \neq 0$$

$$\frac{-1}{f'(x)} = \sqrt{5-4x}$$

$$f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{5-4x}}$$

$$f(x) = \int \frac{-1}{\sqrt{5-4x}} dx$$

$$= - \int (5-4x)^{-\frac{1}{2}} dx$$

$$= \frac{1}{4} \int -4(5-4x)^{-\frac{1}{2}} dx$$

$$= \frac{1}{4} \times \left[\frac{2}{1} (5-4x)^{\frac{1}{2}} + C \right]$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{5-4x} + \frac{1}{4} C$$

$$f(x) = \frac{1}{2} \sqrt{5-4x} + \frac{1}{4} C$$

تابع للحل :

لإيجاد قيمة الثابت C نعوض بالنقطة $A(-5,3)$ في المعادلة السابقة فنجد :

$$3 = \frac{1}{2} \sqrt{5-4(-5)} + \frac{1}{4} C$$

$$3 = \frac{5}{2} + \frac{1}{4} C$$

$$C = 2$$

$$f(x) = \frac{1}{2} \sqrt{5-4x} + \frac{1}{2}$$

معادلة منحنى الدالة f المطلوب هو :

(33)

حل المعادلات التفاضلية التالية:

$$y' - 2xy = 0$$

الحل:

$$y' - 2xy = 0$$

$$\frac{dy}{dx} - 2xy = 0$$

$$y' = \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = 2xy$$

$$\frac{dy}{y} = 2x dx$$

فصل المتغيرات

$$\int \frac{dy}{y} = \int 2x dx$$

$$\int \frac{df(x)}{f(x)} = \ln|f(x)| + C \quad \text{كامل الطرفين}$$

$$\ln|y| = x^2 + C$$

$$|y| = e^{x^2+C} = e^{x^2} \cdot e^C$$

$$\ln y = x \Rightarrow y = e^x$$

$$y = \pm e^C \cdot e^{x^2}$$

$$y = ke^{x^2}$$

$$\pm e^C = k$$

(34)

المعادلات التفاضلية على الصورة $y' = ay + b$ حيث $a \neq 0$, $b \neq 0$ تكون حلولها: $y = k e^{ax} - \frac{b}{a}$

a حل المعادلة: $2y' + y = 1$

b أوجد الحل الذي يحقق $y = 2$ عند $x = -1$

الحل:

اكتب المعادلة على الشكل $y' = ay + b$

a $2y' + y = 1$

$$y' = -\frac{1}{2}y + \frac{1}{2}$$

$$y = k e^{-\frac{1}{2}x} + 1$$

b $k e^{\frac{1}{2}} + 1 = 2$

$$k = e^{-\frac{1}{2}}$$

$$y = e^{-\frac{1}{2}} \cdot e^{-\frac{1}{2}x} + 1$$

$$y = e^{-\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}} + 1$$

طبّق القاعدة

عوّض x, y بقيمتيهما

(35)

أوجد معادلة المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل و بؤرته $F(-4,0)$

الحل

الرأس نقطة الأصل

:: البؤرة $F(-4,0)$ تنتمي إلى الجزء السالب من محور السينات

$p = -4$ ، معادلة الدليل : $x = 4$ (مستقيم رأسي)

محور تماثل القطع هو محور السينات (فتحة القطع لليسار)

:: معادلة القطع المكافئ هي على الصورة $y^2 = 4 p x$

معادلة القطع المكافئ هي : $y^2 = -16 x$

(36)

أوجد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل و معادلة دليله $y = 1$

الحل

معادلة الدليل $y = 1$ (مستقيم أفقي)

و الدليل متعامد مع خط التماثل

خط التماثل رأسي ($y - axis$)

معادلة القطع المكافئ هي على الصورة $x^2 = 4py$

معادلة الدليل هي على الصورة $y = -p$

$$y = 1 \Rightarrow p = -1$$

المعادلة $x^2 = 4py$

$$x^2 = 4(-1)y$$

$$x^2 = -4y$$

(37)

إذا كانت: $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ معادلة قطع ناقص فأوجد :

(a) رأسي القطع و طرفي المحور الأصغر.

(b) البؤرتين.

(c) معادلتي دليلي القطع.

(d) طول كل من المحورين ثم ارسم شكلا تقريبا للقطع.

الحل:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

(a) معادلة القطع الناقص هي:

$$a^2 = 9 \Rightarrow a = 3$$

ومن معادلة القطع الناقص نجد أن :

$$b^2 = 4 \Rightarrow b = 2$$

والمحور الأكبر ينطبق علي محور الصادات

$$A_1(0, -3), A_2(0, 3)$$

رأسا القطع الناقص هما :

$$B_1(-2, 0), B_2(2, 0)$$

طرفا المحور الأصغر هما :

$$c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow c^2 = 9 - 4 = 5$$

(b) البؤرتين:

$$c = \sqrt{5}$$

$$F_1(0, -\sqrt{5}), F_2(0, \sqrt{5})$$

(c) معادلة الدليلين:

$$y = \frac{a^2}{c}, \quad y = -\frac{a^2}{c}$$

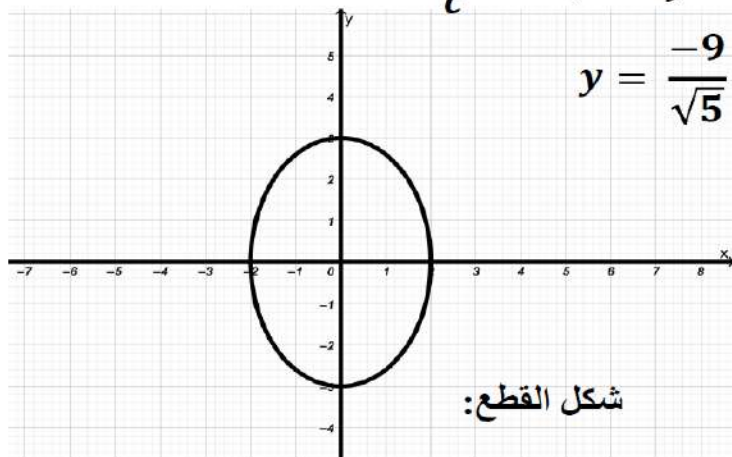
$$y = \frac{-9}{\sqrt{5}}, \quad y = \frac{9}{\sqrt{5}}$$

(d) طول المحور الأكبر:

$$2a = 6$$

طول المحور الأصغر:

$$2b = 4$$



(38)

أوجد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه $F_1(-2,0), F_2(2,0)$ وطول محوره الأكبر 6 . ثم ارسم شكلا تقريبا لهذا القطع.

الحل:

تقع البؤرتان على محور السينات فتكون معادلة القطع على الصورة:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

وتكون $c=2$

∴ طول المحور الأكبر = 6

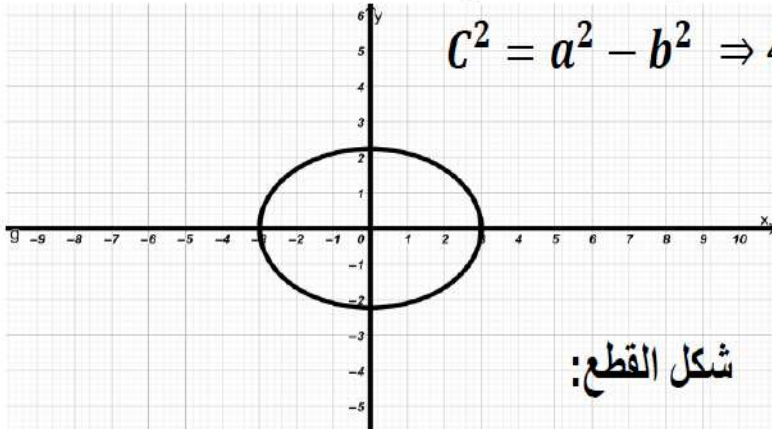
$$\therefore 2a = 6 \Rightarrow a = 3 \Rightarrow a^2 = 9$$

∴ طرفا المحور الأكبر هما : $A_1(-3, 0), A_2(3, 0)$

$$c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow 4 = 9 - b^2 \Rightarrow b^2 = 5$$

∴ معادلة القطع الناقص هي:

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$$



شكل القطع:

(39)

إذا كانت: $9y^2 - 25x^2 = 225$ - معادلة قطع زائد فأوجد :

- ١- رأسي القطع الزائد.
- ٢- البؤرتين.
- ٣- معادلتا دليلي القطع.
- ٤- طول كل من المحورين
- ٥- معادلة كلا من الخطين التقاربين ثم ارسم شكلا تخطيطيا للقطع.

الحل:

$$9y^2 - 25x^2 = 225 \xrightarrow{\div 225} \frac{9y^2}{225} - \frac{25x^2}{225} = 1 \Rightarrow \frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{9} = 1$$

ومن معادلة القطع الزائد نجد أن :

$$a^2 = 25 \Rightarrow a = 5, \quad b^2 = 9 \Rightarrow b = 3$$

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c^2 = 25 + 9 = 34 \Rightarrow c = \sqrt{34}$$

والمحور القاطع ينطبق علي محور الصادات

(1) رأسا القطع الزائد هما : $A_1(0, -5), A_2(0, 5)$ (2) البؤرتين : $F_1(0, -\sqrt{34}), F_2(0, \sqrt{34})$

(3) معادلتا الدليلين:

$$y = \frac{a^2}{c} \quad , \quad y = -\frac{a^2}{c} \Rightarrow y = \frac{-25}{\sqrt{34}} \quad , \quad y = \frac{25}{\sqrt{34}}$$

(4) طول المحور القاطع يساوي $2a$:

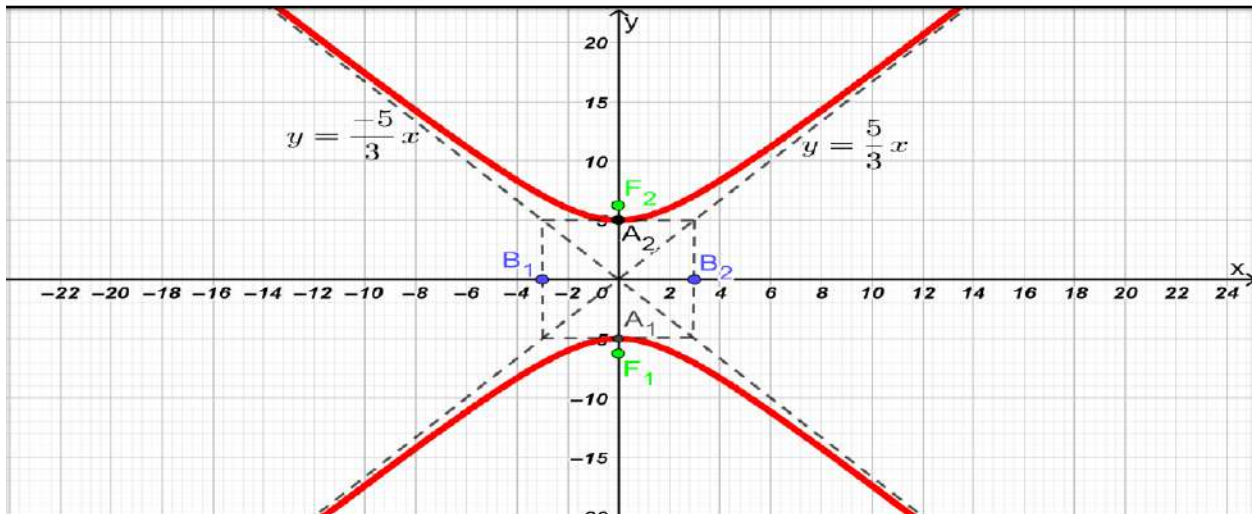
$$2a = 2 \times 5 = 10$$

طول المحور المرافق يساوي $2b$:

$$2b = 2 \times 3 = 6$$

(5) معادلتا كل من الخطين المقاربين :

$$y = \pm \frac{a}{b}x \Rightarrow y = \pm \frac{5}{3}x$$



(40)

أوجد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه $F_1(-4,0), F_2(4,0)$ ورأساه $A_1(-2,0), A_2(2,0)$.
ثم أوجد معادلة كل من خطيه المقاربين وارسم شكلا تقريبا لهذا القطع.

الحل:

تقع البؤرتان على محور السينات فتكون المعادلة على الصورة: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

احدي البؤرتين $F_2(4,0)$ ومنها تكون $C = 4$

احدي الرأسين $A_2(2,0)$ ومنها تكون $a = 2$

ولكن

$$C^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow 4^2 = 2^2 + b^2$$

$$b^2 = 16 - 4 = 12 \Rightarrow b = 2\sqrt{3}$$

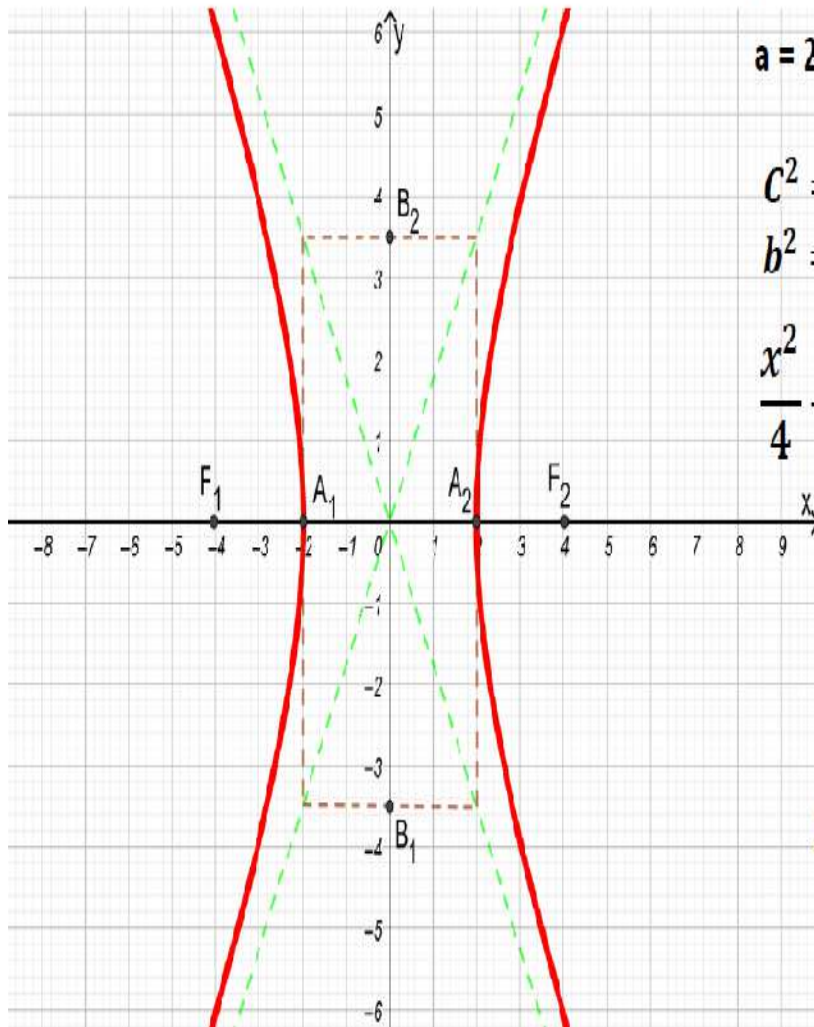
معادلة القطع الزائد هي: $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$

معادلة كل من الخطين المقاربين:

$$y = \pm \frac{b}{a}x$$

$$y = \pm \frac{\sqrt{12}}{2}x \Rightarrow y = \pm \frac{2\sqrt{3}}{2}$$

$$y = \pm\sqrt{3}$$



(41)

حدد نوع القطع في كل مما يلي ثم أوجد معادلته.

اختلافه المركزي ($e = 2$) ومعادلة أحد دليبيه: $x = 1$.

$$\therefore e = 2, 2 > 1$$

∴ القطع هو قطع زائد

∴ معادلة أحد دليبيه $x = 1$ ∴ المحور القاطع (الأساسي) ينطبق على محور السينات ومركزه $(0, 0)$

معادلة الدليل هي:

$$x = \frac{a^2}{c}$$

$$1 = \frac{a^2}{c}$$

$$c = a^2 \quad (1)$$

$$\therefore e = \frac{c}{a}$$

$$\therefore 2 = \frac{c}{a}$$

$$c = 2a \quad (2)$$

بحل المعادلتين (1), (2)

$$a^2 = 2a$$

$$a(a - 2) = 0$$

∴ $a = 0$ أو مرفوضة قيمة مقبولة $a = 2$

$$\therefore e = a = 2$$

$$c = (2)^2 = 4$$

$$\therefore c^2 = a^2 + b^2$$

$$\therefore c^2 = a^2 + b^2$$

$$16 = 4 + b^2 \implies b^2 = 12$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$$

∴ معادلة القطع هي: