Q. إذا كان $z_1 = 5 - 4i$, $z_2 = 3 + i$ فأوجد :

(a) $z_2 \, . \, z_1$ (b) $\overline{(z_2 + z_1)}$ (c) $(z_2)^{-1}$

الحل

$$(a) \qquad z_2 + z_1 = (3 + i)(5 - 4i)$$
$$= 15 - 12i + 5i + 4$$
$$= 19 - 7i$$

(b) $\overline{(z_2 + z_1)} = \overline{z_2} + \overline{z_1} = (3 - i) + (5 + 4i) = 8 + 3i$

$$(c) \quad Z_2^{-1} = \frac{1}{3+i} \times \frac{3-i}{3-i}$$
$$= \frac{3-i}{9+1} = \frac{3}{10} - \frac{1}{10} i$$

Q. إذا كان $z_1 = 5 - 2i$, $z_1 = 3 + 4i$ فأوجد :

(a) $\overline{3Z_1 - 2Z_2}$ (b) $\frac{z_2}{z_1}$

الحل

(a)

$$\overline{3Z_1 - 2Z_2} = 3\overline{Z_1} - 2\overline{Z_2}$$
$$= 3(3 - 4i) - 2(5 + 2i)$$
$$= 9 - 12i - 10 - 4i$$
$$= -1 - 16i$$

(b)

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{5 - 2i}{3 + 4i} \times \frac{3 - 4i}{3 - 4i}$$
$$= \frac{15 - 20i - 6i - 8}{3^2 + 4^2}$$
$$= \frac{7 - 26i}{25}$$
$$= \frac{7}{25} - \frac{26}{25} i$$

Q. اكتب العدد المركب : $\frac{3+i}{2+5i}$ في الصورة الجبرية

الحل

$$= \frac{3+i}{2+5i} \times \frac{2-5i}{2-5i}$$

$$= \frac{(3+i)\,(2-5i)}{4+25} = \frac{6-15i+2i-5i^2}{29} = \frac{6-15i+2i+5}{29}$$

$$= \frac{11-13i}{29} = \frac{11}{29} - \frac{13i}{29}$$

Q. اكتب العدد : $\frac{2}{3-i}$ في الصورة الجبرية

الحل

$$\frac{2}{3-i} = \frac{2}{3-i} \times \frac{3+i}{3+i}$$

$$= \frac{6+2i}{9+1} = \frac{6}{10} + \frac{2}{10}\,i = \frac{3}{5} + \frac{1}{5}\,i$$

Q. ضع العدد المركب : $Z = 1 - \sqrt{3}\, i$ في الصورة المثلثية

الحل

$$\because x = 1 \quad , \qquad y = -\sqrt{3}$$

$$\therefore r = |z| = \sqrt{(1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2$$

بفرض α زاوية الإسناد :

$$\alpha = tan^{-1}\left|\frac{-\sqrt{3}}{1}\right| \alpha = \frac{\pi}{3}$$

$\therefore$ θ تقع في الربع الرابع $\qquad \because x > 0 \;,\; y < 0$

$$\therefore \theta = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$$

الصورة المثلثية هي : $= 2\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$

Q. اكتب العدد : $\frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i}$ في الصورة الجبرية ، ثم حوله للصورة المثلثية مستخدما السعة الأساسية

الحل

الصورة الجبرية :

$$\frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i} = \frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i} \times \frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}-i}$$

$$= \frac{2-2\sqrt{3}i}{3+1}$$

$$= \frac{2-2\sqrt{3}i}{4}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

الصورة المثلثية

$$x = \frac{1}{2} \;, y = \frac{-\sqrt{3}}{2}$$

$$r = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{1} = 1$$

بفرض α زاوية الإسناد : $\therefore \alpha = tan^{-1}\left|\frac{-\sqrt{3}}{2} \div \frac{1}{2}\right|$

$$\therefore \alpha = \frac{\pi}{3}$$

θ تقع في الربع الرابع $\qquad x > 0 \;,\; y < 0$

$$\theta = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$$

الصورة المثلثية هي : $Z = \left(cos\frac{5\pi}{3} + i\,sin\,\frac{5\pi}{3}\right)$

Q. إذا كان : $z_2 = 1 - i \ , \ z_1 = -2 + 2i$

(a) ضع z_1 في الصورة المثلثية

(b) حل المعادلة : $2z + \overline{z_1} = 3i\,(z_2)^2$

الحل

$(a) \qquad z_1 = -2 + 2i$

$x = -2 \quad , \quad y = 2$

$r = |z_1| = \sqrt{(-2)^2 + (2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

نفرض أن α زاوية الإسناد :

$$\alpha = tan^{-1}\left|\frac{2}{-2}\right| = \frac{\pi}{4}$$

$x < 0 \ , \quad y > 0$

$\therefore$ θ تقع في الربع الثاني

$$\theta = \pi - \alpha = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$$

الصورة المثلثية هي :

$$z_1 = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$$

$$(b) \quad 2z + \bar{z}_1 = 3i(z_2)^2$$
$$2z + (\overline{-2 + 2i}) = 3i(1 - i)^2$$
$$2z + -2 - 2i = 3i(1 - 2i - 1)$$
$$2z + -2 - 2i = 3i(-2i)$$
$$2z + -2 - 2i = -6i^2$$
$$2z + -2 - 2i = 6$$
$$2z = 6 + 2 + 2i = 8 + 2i$$
$$z = 4 + i$$

Q. حول من الإحداثيات الديكارتية إلى الإحداثيات القطبية $(r\,,\theta)$: $L\left(1\,,-\sqrt{3}\right), 0 \le \theta < 2\pi$

الحل

$x = 1 \qquad y = -\sqrt{3}$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2$$

نفرض أن α زاوية الإسناد :

$$\alpha = tan^{-1}\left|\frac{y}{x}\right| = tan^{-1}\left|\frac{-\sqrt{3}}{1}\right| = \frac{\pi}{3}$$

الربع الرابع : $x > 0 \quad , \quad y < 0$

$$\alpha = 2\pi - \alpha = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$$

$\therefore$ الإحداثيات القطبية : $\therefore L = \left(2\,,\frac{5\pi}{3}\right)$

Q. أوجد الزوج المرتب (r, θ) للنقطة $D\left(3\sqrt{3}, 3\right)$ حيث $0 \le \theta < 2\pi$

الحل

$$x = 3\sqrt{3} \qquad y = 3$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\left(3\sqrt{3}\right)^2 + (3)^2} = 6$$

نفرض أن α زاوية الإسناد :

$$\alpha = tan^{-1}\left|\frac{y}{x}\right| = tan^{-1}\left|\frac{3}{3\sqrt{3}}\right| = \frac{\pi}{6}$$

الربع الأول : $x > 0 \quad , \quad y > 0$

$$\theta = \alpha = \frac{\pi}{6}$$

∴ الإحداثيات القطبية : $L = \left(6, \frac{\pi}{6}\right)$

Q. حول الإحداثيات القطبية إلى إحداثيات ديكارتية حيث : $N\left(5, \frac{\pi}{4}\right)$

الحل

$$r = 5 \quad , \quad \theta = \frac{\pi}{4}$$

$$x = r\cos\theta = 5\cos\frac{\pi}{4} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

$$y = r\sin\theta = 5\sin\frac{\pi}{4} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

∴ الزوج المرتب الذي يمثل الإحداثيات الديكارتية للنقطة N :

$$\left(\frac{5\sqrt{2}}{2}, \frac{5\sqrt{2}}{2}\right)$$

Q. أوجد مجموعة حل المعادلة : $4z^2 + 16z + 25 = 0$ في C

الحل

$a = 4 \qquad b = 16 \qquad c = 25$

نحسب المميز Δ :

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = (16)^2 - 4(4)(25)$$

$$= -144 = 144\, i^2$$

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-16 \pm \sqrt{144\, i^2}}{2 \times 4}$$

$$z_1 = -2 - \frac{3}{2}\, i$$

$$z_2 = -2 + \frac{3}{2}\, i$$

مجموعة الحل = $\left\{-2 - \frac{3}{2}\, i , -2 + \frac{3}{2}\, i\right\}$

Q. أوجد مجموعة حل المعادلة : $x^2 + 6x + 25 = 0$

الحل

$a = 1 \qquad b = 6 \qquad c = 25$

نحسب المميز Δ :

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = 36 - 4(1)(25)$$

$$= -64 = 64\, i^2$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-6 \pm \sqrt{64\, i^2}}{2}$$

$$x_1 = \frac{-6 + \sqrt{64\, i^2}}{2} = -3 + 4\, i$$

$$x_2 = \frac{-6 - \sqrt{64\, i^2}}{2} = -3 - 4\, i$$

مجموعة الحل = $\{-3 + 4\, i , -3 - 4\, i\}$

Q. أوجد الجذرين التربيعيين للعدد المركب : $z = 3 + 4\,i$

الحل

ليكن $w = m + ni$ جذرا تربيعيا للعدد z

فيكون $w^2 = z$

$$(m + ni)^2 = 3 + 4i$$

$$m^2 - n^2 + 2mni = 3 + 4i$$

$$m^2 - n^2 = 3 \qquad (1)$$

$$2mn = 4 \qquad (2)$$

$$|w|^2 = |Z|$$

$$\left(\sqrt{m^2 + n^2}\right)^2 = \sqrt{3^2 + 4^2}$$

$$m^2 + n^2 = 5 \qquad (3)$$

من (1) ، (3) بالجمع

$$\begin{cases} m^2 + n^2 = 5 \\ m^2 - n^2 = 3 \end{cases}$$

$$2m^2 = 8 \implies m^2 = 4 \implies m = \pm 2$$

من (1) ، (3) بالطرح $m^2 + n^2 = 5$

$$m^2 - n^2 = 3$$

$$2n^2 = 2 \qquad n^2 = 1 \qquad n = \pm 1$$

$$2\,mn = 4$$

نستنتج أن $m\,,n$ لهما نفس الإشارة

$m = 2 \qquad n = 1$ أو $m = -2 \qquad n = -1$

∴ الجذران التربيعيان هما :

$$w_1 = 2 + i \qquad , \qquad w_2 = -2 - i$$

Q. أوجد الجذرين التربيعيين للعدد المركب : $z = -3 - 4i$

الحل

ليكن $w = m + ni$ جذرا تربيعيا للعدد z

فيكون $w^2 = z$

بالتعويض $(m + ni)^2 = -3 - 4i$

خاصية ضرب كثيرات الحدود $m^2 - n^2 + 2mni = -3 - 4i$

خاصية المساواة لعددين مركبين
$$\begin{cases} m^2 - n^2 = -3 & (1) \\ 2mn = -4 & (2) \end{cases}$$

$$|w|^2 = |Z|$$

$$\left(\sqrt{m^2 + n^2}\right)^2 = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2}$$

$$m^2 + n^2 = 5 \qquad (3)$$

من (1) ، (3) بالجمع نحصل على :

$$\begin{cases} m^2 - n^2 = -3 \\ m^2 + n^2 = 5 \end{cases}$$

$$2m^2 = 2 \Rightarrow m^2 = 1 \Rightarrow m = \pm 1$$

من (1) ، (3) بالطرح نحصل على :

$$\begin{cases} m^2 - n^2 = -3 \\ m^2 + n^2 = 5 \end{cases}$$

$$-2n^2 = -8 \quad n^2 = 4 \quad n = \pm 2$$

من المعادلة 2 :

$$2\,mn = -4$$

نستنتج أن m , n لهما إشارتان مختلفتان

$\therefore m = 1 \qquad n = -2$ أو $m = -1 \qquad n = 2$

$\therefore$ الجذران التربيعيان هما :

$$w_1 = 1 - 2i \quad , \quad w_2 = -1 + 2i$$

Q. اكتب معادلة الدالة على الصورة $y = a\ \sin(bx)$ في كل من الحالات التالية :

(a) الدورة $\frac{2\pi}{3}$, $a = 1$

الحل

$$\text{دورة الرسم} = \frac{2\pi}{|b|}$$

$$\frac{2\pi}{3} = \frac{2\pi}{|b|} = b = 3$$

$$\therefore y_1 = 1\ \sin 3x \quad , \quad y_2 = -1 \sin 3x$$

Q. اكتب معادلة الدالة على الصورة $y = a\ \cos(bx)$ في كل من الحالات التالية :

(a) الدورة 3π , $a = 5$

الحل

$$\text{دورة الرسم} = \frac{2\pi}{b}$$

$$3\pi = \frac{2\pi}{b} = b = \frac{2}{3}$$

$$\therefore y_1 = 5\ \cos\frac{2}{3}x \quad , \quad y_2 = -5 \cos\frac{2}{3}x$$

Q. اكتب معادلة الدالة على الصورة $y = a\ \tan(bx)$ في كل من الحالات التالية :

(a) الدورة $\frac{\pi}{5}$

الحل

$$\text{دورة الرسم} = \frac{\pi}{b}$$

$$\frac{\pi}{5} = \frac{\pi}{b} = b = 5$$

$$\therefore y_1 = 1\ \tan 5x \quad , \quad y_2 = -1\ \tan 5x$$

Q. أوجد السعة و الدورة للدالة : $-4\pi \le x \le 4\pi$, $y = 2\sin\left(\frac{1}{2}x\right)$ ثم ارسم بيانها

الحل

السعة : $|a| = |2| = 2$

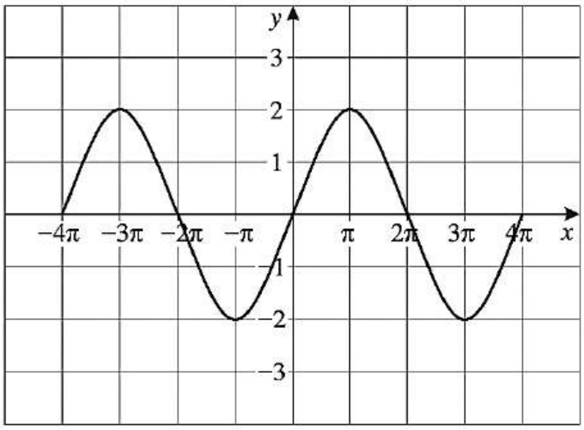
الدورة : $\frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{\left|\frac{1}{2}\right|} = 4\pi$

ربع الدورة : $4\pi \times \frac{1}{4} = \pi$

x	0	π	2π	3π	4π
$y = 2\sin\left(\frac{1}{2}x\right)$	0	2	0	-2	0

$$y = 2\sin\left(\frac{1}{2}x\right)$$

$a = 2$, $b = \frac{1}{2}$



Q. أوجد السعة و الدورة للدالة : $x \in [-\pi, 2\pi]$, $y = -3\sin x$ ثم ارسم بيانها

الحل

السعة : $|a| = |-3| = 3$

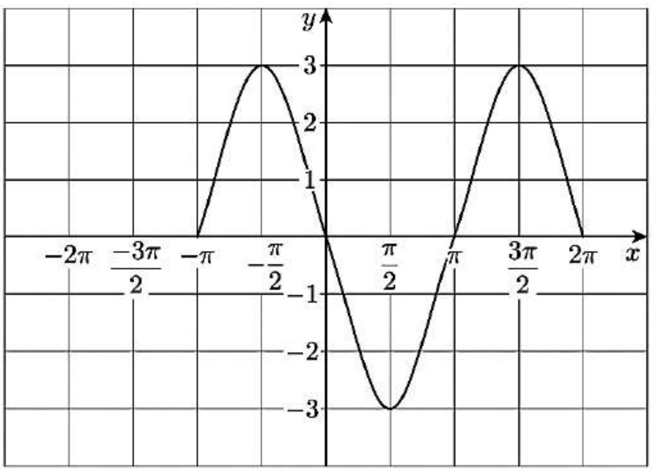
الدورة : $\frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{|1|} = 2\pi$

ربع الدورة : $2\pi \times \frac{1}{4} = \frac{\pi}{2}$

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$y = -3\sin x$	0	-3	0	3	0

$$y = -3\sin x$$

$a = -3$, $b = 1$



Q. أوجد السعة و الدورة للدالة : $y = 3\sin 2x$ ثم ارسم بيانها

الحل

السعة : $|a| = |3| = 3$

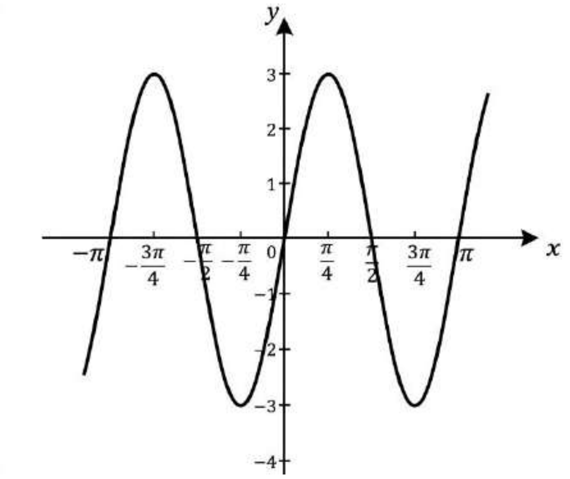
الدورة : $\frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{|2|} = \pi$

ربع الدورة : $\pi \times \frac{1}{4} = \frac{\pi}{4}$

$y = 3\,sin\,2x$

$a = 3 \quad , \quad b = 2$

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
$y = 3\,sin\,2x$	0	3	0	-3	0



Q. أوجد السعة و الدورة للدالة : $y = \frac{1}{2}\cos(-x) : x \in [-2\pi , 2\pi]$ ثم ارسم بيانها

الحل

السعة : $|a| = \left|\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$

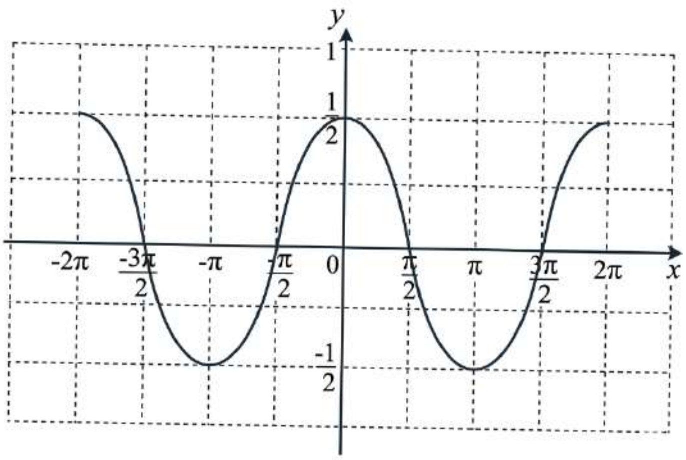
الدورة : $\frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{|-1|} = 2\pi$

ربع الدورة : $\frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$

$y = \frac{1}{2}cos(-x)$

$a = \frac{1}{2} \quad , \quad b = -1$

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$y = \frac{1}{2}cos(-x)$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$



Q. أوجد السعة و الدورة للدالة : $\left(\frac{-\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right)$ $y = \tan 2x \quad , x \in$ ثم ارسم بيانها

الحل

السعة : لا يوجد

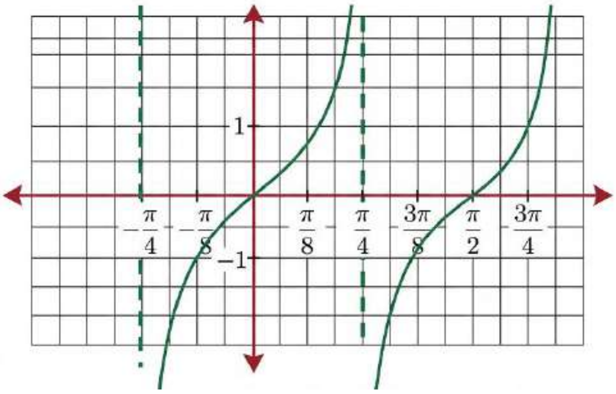
الدورة : $\frac{\pi}{|b|} = \frac{\pi}{2}$

ربع الدورة : $\frac{\pi}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{\pi}{8}$

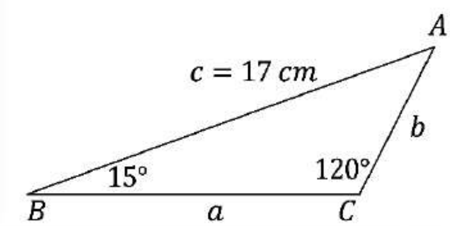
$y = tan\, 2x$

$a = 1 \quad , \quad b = 2$

x	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{8}$	0	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$
y	غير معرف	-1	0	1	غير معرف	-1	0	1



Q. حل المثلث ABC



الحل

$\alpha = 180^\circ - (15^\circ + 120^\circ) = 45^\circ$

$$\frac{\sin \alpha}{a} = \frac{\sin \beta}{b} = \frac{\sin \gamma}{c}$$

$$\frac{\sin 45^\circ}{a} = \frac{\sin 15^\circ}{b} = \frac{\sin 120^\circ}{17}$$

$$\frac{\sin 45^\circ}{a} = \frac{\sin 120^\circ}{17}$$

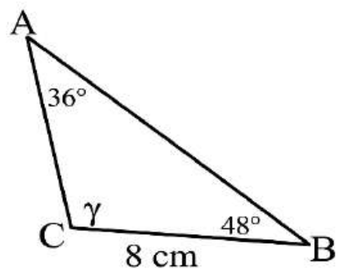
$$a = \frac{17 \times \sin 45^\circ}{\sin 120^\circ} \qquad a \approx 13.88\text{ cm}$$

$$\frac{\sin 15}{b} = \frac{\sin 120^\circ}{17} \Rightarrow b = \frac{17 \times \sin 15^\circ}{\sin 120^\circ}$$

$$b \approx 5.08\text{ cm}$$

Q. حل المثلث ABC حيث ، $\alpha = 36^\circ$, $\beta = 48^\circ$ $a = 8\ cm$

الحل



$$\gamma = 180^\circ - (36^\circ + 48^\circ)$$
$$= 96^\circ$$

$$\frac{\sin\ \alpha}{a} = \frac{\sin\ \beta}{b} = \frac{\sin\ \gamma}{c}$$

$$\frac{\sin\ 36^\circ}{8} = \frac{\sin\ 48^\circ}{b} = \frac{\sin\ 96^\circ}{c}$$

$$\frac{\sin 36^\circ}{8} = \frac{\sin 48^\circ}{b}$$

$$b = \frac{8\sin\ 48^\circ}{\sin\ 36^\circ} \qquad b \approx 10.11\ cm$$

$$\frac{\sin 36^\circ}{8} = \frac{\sin 96^\circ}{c}$$

$$c = \frac{8\sin 96^\circ}{\sin 36^\circ}$$

$$c \approx 13.54\ cm$$

Q. حل $\Delta\ ABC$ حيث $a = 7\ cm$, $b = 6\ cm$ $\alpha = 26.3^\circ$

الحل

$$\frac{\sin\ \alpha}{a} = \frac{\sin\ \beta}{b} = \frac{\sin\ \gamma}{c}$$

$$\frac{\sin 26.3}{7} = \frac{\sin \beta}{6}$$

$$\beta = \sin^{-1}\left(\frac{6 \times \sin 26.3}{7}\right) = 22.3$$

الربع الأول

$$\beta_1 = 22.3$$

$$\gamma_1 = 180 - [\alpha + \beta_1]$$

$$180 - [26.3 + 22.3] = 131.4$$

$$\frac{\sin 26.3}{7} = \frac{\sin 131.4}{c}$$

$$c = \frac{7 \times \sin\ 131.9}{\sin\ 26.3} = 11.85$$

الربع الثاني

$$\beta_2 = 180 - \beta = 180 - 22.3 = 157.7$$

$$\gamma_2 = 180 - [\alpha + \beta_2]$$

$$= 180 - [26.3 + 157.7]$$

$$\gamma_2 = -4$$

مرفوض

Q. حل $\Delta\, ABC$ حيث $\propto = 95^\circ$, $b = 21$ $a = 12$

الحل

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2abcos\,(\hat{c})$$
$$C = \sqrt{a^2 + b^2 - 2abcos\,(\hat{c})}$$
$$= \sqrt{12^2 + 21^2 - 2 \times 12 \times 21 \times cos\,(95^\circ)} = 25.08\ cm$$

$$\cos\ \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{(21)^2 + (25.08)^2 - (12)^2}{2 \times 21 \times 25.08} = 0.879$$
$$\propto = \cos^{-1}(0.879) = 28.47$$
$$\beta = 180 - \alpha - \propto = 180 - 95 - 28.47$$
$$\beta = 56.53$$

Q. حل المثلث ABC حيث $c\ = 5\ cm$, $b = 4\ cm$, $a = 2\ cm$

الحل

$$cos\ \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{(4)^2 + (5)^2 - (2)^2}{2 \times 4 \times 5} = \frac{37}{40}$$
$$\alpha = cos^{-1}\left(\frac{37}{40}\right) = 22.3$$
$$cos\ \beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{(2)^2 + (5)^2 - (4)^2}{2 \times 2 \times 5} = \frac{13}{20}$$
$$\beta = cos^{-1}\left(\frac{13}{20}\right) = 49.5$$
$$\gamma = 180^\circ - (22.3^\circ + 49.5^\circ) \approx 108.2^\circ$$

Q. ABC مثلث فيه $c = 7\ cm$, $b = 8\ cm$, $a = 3\ cm$ أوجد :

- قياس أكبر زاوية

- مساحة سطح المثلث ABC مستخدما قاعدة هيرون

الحل

(1) قياس أكبر زاوية هو β لأنها تقابل أطول ضلع

$$\cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

$$= \frac{3^2 + 7^2 - 8^2}{2(3)(7)} = \frac{-1}{7}$$

$$\beta = \cos^{-1}\left(\frac{-1}{7}\right) = 98.21$$

(2) $$s = \frac{1}{2}(a + b + c)$$

$$= \frac{1}{2}(3 + 8 + 7) = 9$$

$$\text{Area} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \sqrt{9(9-3)(9-8)(9-7)}$$

$$= 6\sqrt{3}\ \text{cm}^2$$

أثبت صحة المتطابقات التالية

Q. $\cos^4 x - \sin^4 x = \cos 2x$

الحل

$$\cos^4 x - \sin^4 x =$$

$$(\cos^2 x - \sin^2 x)(\cos^2 x + \sin^2 x)$$

$$= \cos^2 x - \sin^2 x$$

$= \cos 2x =$ الأيمن

Q. $\tan^2 x - \sin^2 x = \sin^2 x \tan^2 x$

الحل

الطرف الأيسر $= \tan^2 x - \sin^2 x = \dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - \sin^2 x$

$$= \frac{\sin^2 x - \sin^2 x \cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\sin^2 x(1-\cos^2 x)}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \cdot \sin^2 x = \tan^2 x \sin^2 x$$

= الطرف الأيمن

Q. $(1 - \tan x)^2 = \sec^2 x - 2\tan x$

الحل

الأيسر

$$(1 - \tan x)^2 = 1 + \tan^2 x - 2\tan x$$

$$= \sec^2 x - 2\tan x$$

Q. $\tan x + \cot x = \sec x . \csc x$

الحل

الطرف الأيسر

$$\tan x + \cot x = \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$= \frac{\sin^2 x}{\cos x \sin x} + \frac{\cos^2 x}{\cos x \sin x}$$

$$= \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos x \sin x}$$

$$= \frac{1}{\cos x \sin x}$$

$$= \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{1}{\sin x}$$

$$= \sec x \cdot \csc x$$

الطرف الأيمن

Q. $\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta} + \frac{1+\cos\theta}{\sin\theta} = 2\csc\theta$

الحل

الأيسر

$$\frac{\sin\ \theta}{1+\cos\ \theta}+\frac{1+\cos\ \theta}{\sin\ \theta}=\frac{\sin^2\ \theta+(1+\cos\ \theta)^2}{(1+\cos\ \theta)\cdot\sin\ \theta}$$

$$=\frac{\sin^2\ \theta+\cos^2\ \theta+1+2\cos\ \theta}{(1+\cos\ \theta)\sin\ \theta}$$

$$=\frac{1+1+2\cos\theta}{(1+\cos\theta)\sin\theta}=\frac{2\,\cancel{[1+\cos\theta]}}{\cancel{[1+\cos\theta]}\sin\theta}$$

$$=\frac{2}{\sin\theta}=2\csc\theta$$ الأيمن

Q. $\frac{1}{1-\cos x} + \frac{1}{1-\cos x} = 2\csc^2 x$

الحل

الطرف الأيسر

$$\frac{1}{1-\cos\ x}+\frac{1}{1+\cos\ x}=\frac{1+\cos\ x}{1-\cos^2\ x}+\frac{1-\cos\ x}{1-\cos^2\ x}$$

$$=\frac{1+\cos\ x+1-\cos\ x}{1-\cos^2\ x}=\frac{2}{1-\cos^2\ x}=\frac{2}{\sin^2\ x}$$

$$=2\csc^2\ x$$

= الطرف الأيمن

Q. $\frac{1-\cos x}{1+\cos x} = (\csc x - \cot x)^2$

الحل

$$\frac{1-\cos\ x}{1+\cos\ x}\cdot\frac{1-\cos\ x}{1-\cos\ x}=\frac{(1-\cos\ x)^2}{1-\cos^2\ x}$$

$$=\frac{(1-\cos\ x)^2}{\sin^2 x}=\left(\frac{1-\cos x}{\sin x}\right)^2$$

$$=\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{\cos x}{\sin x}\right)^2$$

$$=(\csc\ x-\cot\ x)^2$$

Q. $\frac{(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)}{\cos^2\theta} = \tan^2\theta$

الحل

الطرف الأيسر

$$\frac{(1-\cos\ \theta)(1+\cos\ \theta)}{\cos^2\ \theta}=\frac{1-\cos^2\ \theta}{\cos^2\ \theta}$$

$$=\frac{\sin^2\ \theta}{\cos^2\ \theta}=\tan^2\ \theta$$

Q. $(\cos x)(\tan x + \sin x \cot x) = \sin x + \cos^2 x$

الحل

الأيسر

$$\cos x\,[\tan x + \sin x \,.\, \cot x]$$

$$\cos x\left[\frac{\sin x}{\cos x} + \cancel{\sin} x \,.\, \frac{\cos x}{\cancel{\sin x}}\right]$$

$$\cos x \,.\, \frac{\sin x}{\cos x} + \cos x \,.\, \cos x$$

$$\sin x + \cos^2 x$$ الأيمن

Q. $\tan x + \cot x + 2 = \frac{(\sin x + \cos x)^2}{\sin x \cos x}$

الحل

الأيسر

$$\tan x + \cot x + 2 = \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} + 2$$

نوحد المقامات

$$= \frac{\sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x \cos x}{\cos x \,.\, \sin x}$$

$$= \frac{(\sin x + \cos x)^2}{\sin x \cos x}$$ = الأيمن

Q. $(\sin x)(\cot x + \cos x \tan x) = \cos x + \sin^2 x$

الحل

الطرف الأيسر

$$\sin x\,[\cot x + \cos x \,.\, \tan x]$$

$$\sin x\left[\frac{\cos x}{\sin x} + \cancel{\cos} x \,.\, \frac{\sin x}{\cancel{\cos x}}\right]$$

$$\cancel{\sin} x \,.\, \frac{\cos x}{\cancel{\sin} x} + \sin x \,.\, \sin x$$

$$\cos x + \sin^2 x$$

Q. أثبت صحة المتطابقة $\frac{1+\sin x}{\cos x} = \frac{\cos x}{1-\sin x}$

الحل

نبسط الطرف الأيسر

$$\frac{\cos x}{1-\sin x} = \frac{\cos x}{1-\sin x} \times \frac{1+\sin x}{1+\sin x} = \frac{\cos x \cdot (1+\sin x)}{1-\sin^2 x}$$

$$= \frac{\cos x[1+\sin x]}{\cos^2 x} = \frac{1+\sin x}{\cos x} =$$ الطرف الأيمن

Q. أثبت صحة المتطابقة : $\frac{\sec^2 x - 1}{\sin x} = \tan x . \sec x$

الحل

الطرف الأيسر

$$= \frac{\sec^2 x - 1}{\sin x} = \frac{\tan^2 x}{\sin x}$$

$$= \frac{\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}{\sin x}$$

$$= \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \times \frac{1}{\sin x}$$

$$= \frac{\sin x}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\sin x}{\cos x} \times \frac{1}{\cos x} = \tan x \cdot \sec x =$$ الطرف الأيمن

Q. حل المعادلة : $sin\ x = \frac{-\sqrt{3}}{2}$

الحل

$$\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

نفرض أن $\propto$ هي زاوية الإسناد للزاوية x

$$\alpha = sin^{-1}\left|\frac{-\sqrt{3}}{2}\right| = \frac{\pi}{3}$$

$\therefore$ x تقع في الربع الثالث أو في الربع الرابع $\sin\ x < 0$

عندما x تقع في الربع الثالث :

$$x = \left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) + 2k\pi$$
$$= \frac{4\pi}{3} + 2k\pi$$

عندما x تقع في الربع الرابع :

$$x = \left(-\frac{\pi}{3}\right) + 2k\pi$$
$$= -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

$\therefore$ حل المعادلة : $-\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{4\pi}{3} + 2k\pi$

Q. حل المعادلة : $3\ sin\ \theta + 1 = sin\ \theta$

الحل

$$3\sin\theta - \sin\theta = -1$$

$$2\sin\ \theta = -1 \Rightarrow \sin\ \theta = -\frac{1}{2}$$

نفرض أن $\propto$ هي زاوية الإسناد لـــ θ

$$\alpha = sin^{-1}\left|-\frac{1}{2}\right| = \frac{\pi}{6}$$

$\therefore$ x تقع في الربع الثالث أو في الربع الرابع $\sin\ x < 0$

θ تقع في الربع الثالث :

$$\theta = \frac{1}{\pi} + \frac{\pi}{6} + 2k\pi$$
$$= \frac{7}{6}\pi + 2k\pi$$

θ تقع في الربع الرابع :

$$\theta = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$$

$\therefore$ حل المعادلة : $-\frac{\pi}{6} + 2k\pi\ ,\ \frac{7\pi}{6} + 2k\pi$

Q. حل المعادلة : $5\sin\theta - 3 = \sin\theta$ حيث $0 \leq \theta < 2\pi$

الحل

$5\sin\theta - \sin\theta = 3$ $\quad$ $4\sin\theta = 3$ $\quad$ $\sin\theta = \frac{3}{4}$

نفرض أن $\propto$ هي زاوية الإسناد للزاوية θ

$$\alpha = \sin^{-1}\left|\frac{3}{4}\right| = 0.848$$

$\therefore$ θ تقع في الربع الأول و الربع الثاني $\quad$ $\sin\theta > 0$

الربع الأول :

$\theta = \alpha = 0.848$

الربع الثاني :

$\theta = \pi - \alpha = \pi - 0.848 = 2.29$

$\therefore$ حل المعادلة : $\theta = 0.848$, $\theta = 2.29$

Q. حل المعادلة : $2\sin^2 x - 3\sin x - 2 = 0$

الحل

$(2\sin x + 1)(\sin x - 2) = 0$

$(2\sin x + 1) = 0$ أو $(\sin x - 2) = 0$

$\sin x = \frac{-1}{2}$ أو $\sin x = 2$

عندما $2 \notin [-1, 1]$ $\quad$ $\sin x = 2$

$\therefore$ $\sin x = 2$ ليس لها حل

نأخذ $\sin x = \frac{-1}{2}$

نفرض أن $\propto$ هي زاوية الإسناد للزاوية x

$$\alpha = \sin^{-1}\left|-\frac{1}{2}\right| = \frac{\pi}{6}$$

$\therefore$ x تقع في الربع الثالث أو في الربع الرابع $\quad$ $\because \sin x < 0$

عندما x تقع في الربع الرابع :

$x = (2\pi - \alpha) + 2k\pi$

$x = \left(-\frac{\pi}{6}\right) + 2k\pi$

$x = \left(-\frac{\pi}{6}\right) + 2k\pi$

عندما x تقع في الربع الثالث :

$x = (\pi + \alpha) + 2k\pi$

$x = \left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) + 2k\pi$

$x = \left(\frac{7\pi}{6}\right) + 2k\pi$

$\therefore$ حل المعادلة : $x = \left(-\frac{\pi}{6}\right) + 2k\pi$, $x = \left(\frac{7\pi}{6}\right) + 2k\pi$

Q. حل المعادلة : $2\cos x = -\sqrt{3}$

الحل

$$2\cos x = -\sqrt{3} \qquad \cos x = \frac{-\sqrt{3}}{2}$$

نفرض أن α هي زاوية الإسناد لـ x

$$\alpha = \cos^{-1}\left|\frac{-\sqrt{3}}{2}\right| = \frac{\pi}{6}$$

$\therefore$ x تقع في الربع الثاني و الربع الثالث $\qquad \cos x < 0$

الربع الأول :

$$x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi$$

$$x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$$

الربع الثالث :

$$x = \pi + \frac{\pi}{6} + 2k\pi$$

$$x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi$$

حل المعادلة : $\frac{5\pi}{6} + 2k\pi \,,\, \frac{7\pi}{6} + 2k\pi$

Q. حل المعادلة : $\cos x = -\frac{1}{2}$ حيث $0 \leq x < 2\pi$

الحل

نفرض أن α هي زاوية الإسناد للزاوية x

$$\cos\alpha = |\cos x| \left|\frac{-1}{2}\right| = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \alpha = \frac{\pi}{3}$$

$\therefore$ x تقع في الربع الثاني أو الربع الثالث $\qquad \because \cos x < 0$

عندما x تقع في الربع الثاني :

$$x = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} \in [0\,,2\pi)$$

عندما x تقع في الربع الثالث :

$$x = \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3} \in [0\,,2\pi)$$

و منه يكون حل المعادلة هو : $x = \frac{4\pi}{3}$ أو $x = \frac{2\pi}{3}$

Q. حل المعادلة : $\cos^2 x + 3\cos x + 2 = 0$

الحل

$$(\cos x + 2)\,(\cos x + 1) = 0$$

أما

$$\cos x + 2 = 0$$

$$\cos x = -2 \notin [-1\,,1]$$

أو

$$\cos x + 1 = 0$$

$$\cos x = -1$$

$$x = \pi + 2k\pi \;, k \in \mathbb{Z}$$

∴ حل المعادلة :

$$x = \pi + 2k\pi$$

Q. حل المعادلة : $2\cos\theta\sin\theta = -\sin\theta$

الحل

$$2\cos\theta\sin\theta + \sin\theta = 0$$

$$\sin\theta\,(2\cos\theta + 1) = 0$$

$\sin\theta = 0$ أو $\cos x = \dfrac{-1}{2}$

نفترض أن α هي زاوية الإسناد للزاوية θ

$$\alpha = \cos^{-1}\left|\frac{-1}{2}\right| = \frac{\pi}{3}$$

∴ θ زاوية ربعية

$\therefore\; \theta = 0$ أو $\theta = \pi$

$\therefore\; \theta = 2k\pi$ أو $\theta = \pi + 2k\pi \;, k \in Z$

∴ θ تقع في الربع الثاني أو في الربع الثالث

$$\cos x < 0$$

عندما θ تقع في الربع الثاني :

$$\theta = (\pi - \alpha) + 2k\pi \;,\; k \in Z$$

$$= \left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) + 2k\pi = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$$

عندما θ تقع في الربع الثالث :

$$\theta = (\pi + \alpha) + 2k\pi \;,\; k \in Z$$

$$= \left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) + 2k\pi = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi$$

∴ حل المعادلة :

$\theta = \dfrac{4\pi}{3} + 2k\pi$ أو $\theta = \dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi$ أو $\theta = \pi + 2k\pi$ أو $\theta = 2k\pi$

Q. حل المعادلة : $2\cos x \sin x - \cos x = 0 \; , \; x \in [0, 2\pi]$

الحل

$$\cos x\,(2\sin x - 1) = 0$$

$\therefore \cos x = 0$ or $2\sin x - 1 = 0$

$\therefore x = \frac{\pi}{2}$, $x = \frac{3\pi}{2}$ $\qquad \sin x = \frac{1}{2}$

نفرض أن α هي زاوية الإسناد حيث

$$\alpha = \sin^{-1}\left|\frac{1}{2}\right| = \frac{\pi}{6}$$

$$\because \sin x > 0$$

$\therefore$ x تقع في الربع الأول أو الثاني

في الربع الأول :

$$x = \alpha = \frac{\pi}{6}$$

في الربع الثاني :

$$x = \pi - \alpha = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$$

$\therefore$ حل المعادلة هو : $x = \frac{5\pi}{6}$, $x = \frac{\pi}{6}$, $x = \frac{3\pi}{2}$, $x = \frac{\pi}{2}$

Q. إذا كان : $\sin\alpha = \frac{4}{5}$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ $\qquad \cos\beta = \frac{-12}{13}$, $\pi < \beta < \frac{3\pi}{2}$

أوجد كلا مما يلي : 2) $\tan 2\beta$ $\qquad$ 1) $\sin(\alpha + \beta)$

الحل

$$\sin^2\beta + \cos^2\beta = 1$$

$$\sin^2\beta = 1 - \left(\frac{-12}{13}\right)^2$$

$$\sin\beta = \pm\sqrt{1 - \left(\frac{-12}{13}\right)^2} = \pm\frac{5}{13}$$

$\because \pi < \beta < \frac{3\pi}{2}$ $\qquad \therefore \sin\beta = \frac{-5}{13}$

$$\tan\beta = \frac{\sin\beta}{\cos\beta} = \frac{-5}{13} \div \frac{-12}{13} = \frac{5}{12}$$

$$(2)\quad \tan 2\beta = \frac{2\tan\beta}{1 - \tan^2\beta} = \frac{2 \times \frac{5}{12}}{1 - \left(\frac{5}{12}\right)^2} = \frac{120}{119}$$

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$\cos^2\alpha = 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2$$

$$\cos\alpha = \pm\sqrt{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2} = \pm\frac{3}{5}$$

$\because 0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \rightarrow$ $\qquad \therefore \cos\alpha = \frac{3}{5}$

$$(1)\quad \sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\,\sin\beta$$

$$= \left(\frac{4}{5}\right)\left(\frac{-12}{13}\right) + \left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{-5}{13}\right) = \frac{-63}{65}$$

Q. إذا كان : $\cos\theta = -\frac{3}{5}$ $\quad \frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ فأوجد :

1) $\sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)$ 2) $\tan 2\theta$

الحل

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

$$\sin^2\theta + \left(-\frac{3}{5}\right)^2 = 1$$

$$\sin\theta = \pm\sqrt{1-\left(-\frac{3}{5}\right)^2} = \pm\frac{4}{5}$$

$\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ الربع الثاني

$$\sin\theta = \frac{4}{5}$$

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{4}{5} \div -\frac{3}{5} = = -\frac{4}{3}$$

1) $\sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)$

$$= \sin\theta\cos\frac{\pi}{2} - \sin\frac{\pi}{2}\cos\theta$$

$$= \frac{4}{5}\cdot(0) - 1 \times \frac{-3}{5} = \frac{3}{5}$$

(2) $\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-(\tan\theta)^2}$

$$= \frac{2\times -\frac{4}{3}}{1-\left(-\frac{4}{3}\right)^2} = \frac{24}{7}$$

Q. إذا كان : $\sin\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$

فأوجد : 2) $\sin 2\theta$ 1) $\cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)$

الحل

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

$$\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$$

$$\cos^2\theta = 1 - \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)^2$$

$$\cos\theta = \pm\sqrt{1-\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)^2} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\because \pi < \theta < \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \cos\theta < 0$$

$$\therefore \cos\theta = \frac{-1}{\sqrt{2}}$$

(1) $\cos\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\theta\cos\frac{\pi}{3} - \sin\theta\sin\frac{\pi}{3}$

$$= \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{1}{2}\right) - \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

(2) $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$

$$\sin 2\theta = 2 \times \frac{-1}{\sqrt{2}} \times \frac{-1}{\sqrt{2}} = 1$$

Q. إذا كان : $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$, $\sin \theta = \frac{-3}{5}$ فأوجد :

1) $\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$ 2) $\tan 2\theta$ 3) $\sin 2\beta$

الحل

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

$$\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$$

$$\cos^2\theta = 1 - \left(\frac{-3}{5}\right)^2$$

$$\cos\theta = \pm\sqrt{1 - \left(-\frac{3}{5}\right)^2}$$

$$\cos\theta = \pm\sqrt{\frac{16}{25}} = \pm\frac{4}{5}$$

$$\pi < \theta < \frac{3\pi}{2} \qquad \therefore \cos\theta < 0$$

$$\cos\theta = \frac{-4}{5}$$

$$\tan(\theta) = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\left(\frac{-3}{5}\right)}{\left(\frac{-4}{5}\right)} = \frac{3}{4}$$

1) $$\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}$$

$\frac{\theta}{2}$ تقع في الربع الثاني

$$\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-\left(\frac{-4}{5}\right)}{2}} = \sqrt{\frac{9}{10}} = \frac{3\sqrt{10}}{10}$$

(2) $$\tan(2\theta) = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$$

$$\tan(2\theta) = \frac{2\times\frac{3}{4}}{1-\left(\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{7}{16}} = \frac{24}{7}$$

(3) $$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cdot\cos\theta$$

$$= 2x - \frac{3}{5}x - \frac{4}{5} = \frac{24}{25}$$

Q. إذا كان : $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, $\cos\theta = \frac{3}{5}$

فأوجد : $\sin 2\theta$

الحل

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$

$$\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$$

$$= 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2$$

$$\sin\theta = \pm\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2} = \pm\frac{4}{5}$$

$$\because 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \quad \therefore \sin\theta > 0$$

$$\sin\theta = \frac{4}{5}$$

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\,\cos\theta$$

$$\sin 2\theta = 2\times\frac{4}{5}\times\frac{3}{5} = \frac{24}{25}$$

Q. إذا كان : $tan\ \theta = -1 + \sqrt{2}$ ، استخدم متطابقة ظل ضعف الزاوية لإيجاد $tan\ 2\theta$

الحل

$$\tan\ 2\theta = \frac{2\tan\ \theta}{1-(\tan\ \theta)^2} = \frac{2(-1+\sqrt{2})}{1-(-1+\sqrt{2})^2}$$

$$= 1$$

Q. أوجد قيمة $sin\ 2x$: إذا كان $sin\ x - cos\ x = \frac{1}{5}$

الحل

بتربيع الطرفين

$$\sin\ x - \cos\ x = \frac{1}{5}$$

$$(\sin\ x - \cos\ x)^2 = \left(\frac{1}{5}\right)^2$$

$$\sin^2\ x + \cos^2\ x - 2\sin\ x\cos\ x = \frac{1}{25}$$

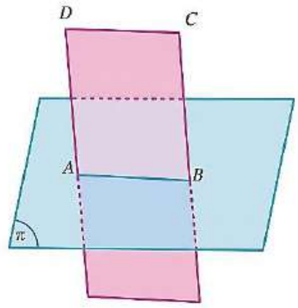
$$1 - 2\sin\ x\cos\ x = \frac{1}{25}$$

$$-2\sin\ x\cos\ x = \frac{1}{25} - 1 = -\frac{24}{25}$$

$$2\sin\ x\cos\ x = \frac{24}{25} \qquad \therefore \sin\ 2x = \frac{24}{25}$$

Q. في الشكل المقابل : $\overleftrightarrow{AB} \subset \pi , \overleftrightarrow{AD} // \overleftrightarrow{BC} , AD = BC$

أثبت أن : $\overleftrightarrow{CD} // \pi$



الحل

$\because \overleftrightarrow{AD} // \overleftrightarrow{BC}$

$\therefore \overleftrightarrow{AD} , \overleftrightarrow{BC}$ يعينان مستويا وحيدا و ليكن $(ABCD)$ فيه

$\overleftrightarrow{AD} // \overleftrightarrow{BC} , AD = BC$

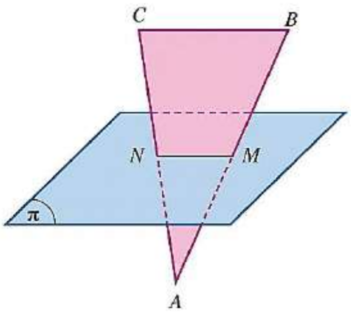
$\therefore$ $(ABCD)$ متوازي أضلاع

و منه $\overleftrightarrow{DC} // \overleftrightarrow{AB}$

$\because \overleftrightarrow{AB} \subset \pi$

$\therefore \overleftrightarrow{CD} // \pi$

Q. في الشكل المقابل : المثلث ABC فيه M منتصف $\overline{AB}$ ، N منتصف $\overline{AC}$ ، M , N تنتميان إلى المستوى π . أثبت أن : $\overleftrightarrow{BC} // \pi$



الحل

في Δ ABC :

$$\left.\begin{cases} M \text{ منتصف } \overline{AB} \\ N \text{ منتصف } \overline{AC} \end{cases}\right. \Rightarrow \overleftrightarrow{BC} // \overleftrightarrow{MN} \quad (1)$$

و لكن :

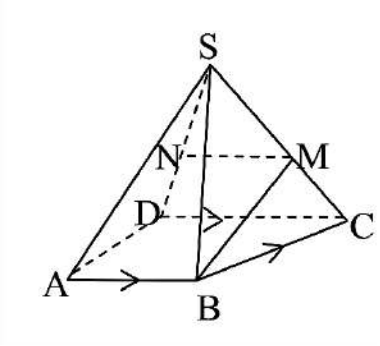
$$\left.\begin{matrix} N \in \pi \\ M \in \pi \end{matrix}\right\} \Rightarrow \overleftrightarrow{MN} \subset \pi \qquad (2)$$

من 1 , 2 :

$\therefore \overleftrightarrow{BC} // \pi$

Q. في الشكل المقابل : $SABCD$ هرم قاعدته شبه المنحرف $ABCD$ حيث إن

$\overleftrightarrow{AB} // \overleftrightarrow{CD}$, $M \in \overline{SC}$ ، المستوى ABM يقطع $\overleftrightarrow{SD}$ في N



أثبت أن : (1) $\overleftrightarrow{AB}$ يوازي المستوى SDC

(2) $\overleftrightarrow{MN} // \overleftrightarrow{CD}$

الحل

$$\left.\begin{array}{r}\overleftrightarrow{AB}//\overleftrightarrow{DC}\\ \overleftrightarrow{DC}\subset(SDC)\end{array}\right\}\overleftrightarrow{AB}//(SDC) \qquad (1)$$

$$(ABMN)\cap(SDC)=\overleftrightarrow{MN}$$

$$\overleftrightarrow{AB}\subset(ABMN) \quad , \quad \overleftrightarrow{DC}\subset(SDC)$$

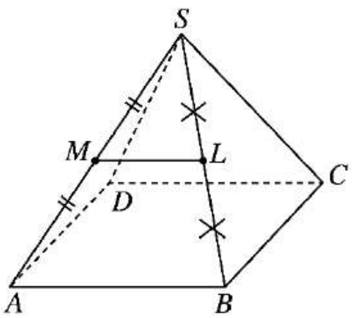
$$\overleftrightarrow{AB}//\overleftrightarrow{DC}$$

$$\overleftrightarrow{AB}//\overleftrightarrow{DC}//\overleftrightarrow{MN}$$

$$\therefore \overleftrightarrow{MN}//\overleftrightarrow{CD}$$

Q. $SABCD$ هرم قاعدته $ABCD$ مربعة الشكل M منتصف $\overline{SA}$ ، L منتصف $\overline{SB}$ ،

أثبت أن : $\overleftrightarrow{ML} // (ABCD)$



الحل

في المثلث SAB :

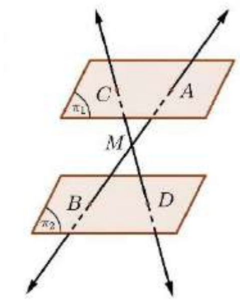
$$\overleftrightarrow{ML} // \overleftrightarrow{AB} \Leftarrow \left\{\begin{array}{l} M \text{ منتصف } \overline{SA}\\ N \text{ منتصف } \overline{SB}\end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{r}\overleftrightarrow{ML} // \overleftrightarrow{AB}\\ \overleftrightarrow{AB} \subset (ABCD)\end{array}\right\} \Rightarrow \overleftrightarrow{ML} // (ABCD)$$

نظرية 1

Q. في الشكل المقابل : π_2 , π_1 مستويان متوازيان ، M نقطة واقعة بينهما ، حيث $\overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{CD} = \{M\}$

أثبت أن : $\frac{AM}{MB} = \frac{AC}{BD}$



الحل

$$\overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{CD} = \{M\}$$

يكونان مستوى ليكن

$$\pi_1 // \pi_2$$

$$\left.\begin{matrix} \pi \cap \pi_1 = \overleftrightarrow{CA} \\ \pi \cap \pi_2 = \overleftrightarrow{BD} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \overleftrightarrow{CA} // \overleftrightarrow{BD}$$

$\therefore \ \Delta\Delta\, AMC , BMD$ متشابهان

$$\therefore \frac{AM}{MB} = \frac{MC}{MD} = \frac{AC}{BD}$$

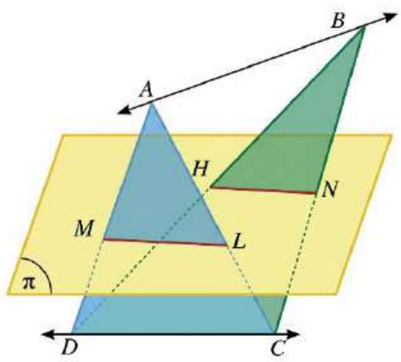
و منه $\frac{AM}{MB} = \frac{AC}{BD}$

Q. في الشكل المقابل : إذا كان $\overleftrightarrow{AB} , \overleftrightarrow{CD}$ متخالفان ، $\overleftrightarrow{CD} // \pi$

$\overleftrightarrow{AD}$ تقطع π في M ، $\overleftrightarrow{AC}$ تقطع π في L

$\overleftrightarrow{BD}$ تقطع π في H ، $\overleftrightarrow{BC}$ تقطع π في N

أثبت أن : $\overleftrightarrow{LM} // \overleftrightarrow{NH}$



الحل

$$\overleftrightarrow{AD} \cap \overleftrightarrow{AC} = \{A\}$$

مستقيمان متقاطعان يعينان مستويا وحيدا و هو (ADC)

$\overleftrightarrow{AD} \cap \pi = \{M\}$, $\overleftrightarrow{AC} \cap \pi = \{L\}$

$$\left.\begin{matrix} (ADC) \cap \pi = \overleftrightarrow{LM} \\ \overleftrightarrow{CD} // \pi \\ \overleftrightarrow{CD} \subset (ACD) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \overleftrightarrow{LM} // \overleftrightarrow{CD} \qquad (1)$$

$$\overleftrightarrow{BC} \cap \overleftrightarrow{BD} = \{B\}$$

مستقيمان متقاطعان يعينان مستويا وحيدا و هو (BCD)

$\overleftrightarrow{BD} \cap \pi = \{H\}$, $\overleftrightarrow{BC} \cap \pi = \{N\}$

$$\left.\begin{matrix} (BCD) \cap \pi = \overleftrightarrow{NH} \\ \overleftrightarrow{CD} // \pi \\ \overleftrightarrow{CD} \subset (BCD) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \overleftrightarrow{NH} // \overleftrightarrow{CD} \qquad (2)$$

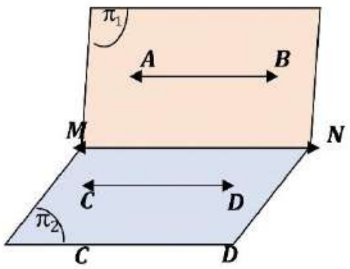
من 1 , 2 نجد

$$\overleftrightarrow{LM} // \overleftrightarrow{NH}$$

Q. ليكن π_1 , π_2 مستويان متقاطعان في $\overleftrightarrow{MN}$ حيث : $\overleftrightarrow{AB} // \pi_2$, $\overleftrightarrow{AB} \subset \pi_1$

$\overleftrightarrow{CD} // \pi_2$, $\overleftrightarrow{CD} \subset \pi_1$

أثبت أن : $\overleftrightarrow{AB} // \overleftrightarrow{CD}$



الحل

$$\left.\begin{array}{r} \pi_1 \cap \pi_2 = \overleftrightarrow{MN} \\ \overleftrightarrow{AB} // \pi_2 \\ \overleftrightarrow{AB} \subset \pi_1 \end{array}\right\} \Rightarrow \overleftrightarrow{AB} // \overleftrightarrow{MN} \qquad (1)$$

نظرية 2

$$\left.\begin{array}{r} \pi_1 \cap \pi_2 = \overleftrightarrow{MN} \\ \overleftrightarrow{CD} // \pi_1 \\ \overleftrightarrow{CD} \subset \pi_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \overleftrightarrow{CD} // \overleftrightarrow{MN} \qquad (2)$$

نظرية 2

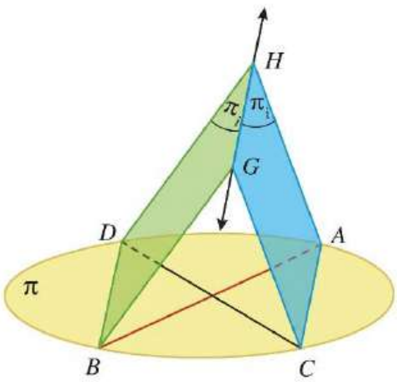
من 1 , 2 نجد

$$\overleftrightarrow{AB} // \overleftrightarrow{CD}$$

Q. في الشكل المقابل : $\overleftrightarrow{CD}$, $\overleftrightarrow{AB}$ قطران في مستوى الدائرة π

$\pi_1 \cap \pi_2 = \overleftrightarrow{GH}$

أثبت أن : مستوى الدائرة π يوازي $\overleftrightarrow{GH}$



الحل

AB , CD قطران في الدائرة ، فهما متطابقان و ينصف كل منهما الآخر

فالشكل ABCD مستطيل

$$\overline{AC} // \overline{DB} \qquad (1)$$

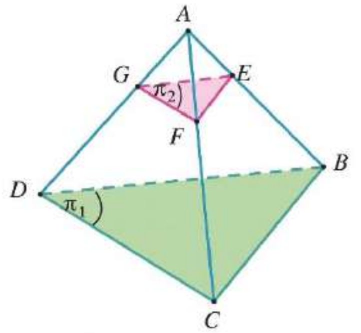
$$\overline{AC} \subset \pi_1 , \quad \overline{DB} \subset \pi_2 \quad , \quad \pi_1 \cap \pi_2 = \overleftrightarrow{GH} \qquad (2)$$

من 1 , 2 نجد

$$\overleftrightarrow{GH} // \overleftrightarrow{AC} // \overleftrightarrow{DB}$$

$$\left.\begin{array}{r} \overleftrightarrow{GH} // \overleftrightarrow{AC} \\ \overleftrightarrow{AC} \subset \pi \end{array}\right\} \Rightarrow \overleftrightarrow{GH} // \pi$$

أي أن مستوى الدائرة π يوازي $\overleftrightarrow{GH}$



.Q في الشكل المقابل : $ABCD$ هرم ثلاثي . المستويان π_1 , π_2 متوازيان .

إذا كان $\frac{AE}{EB} = \frac{1}{3}$, $FG = 6\ cm$

فأوجد : DC

الحل

$$\left.\begin{array}{l}(ABC)\cap\pi_1 = \overleftrightarrow{BC}\\(ABC)\cap\pi_2 = \overleftrightarrow{EF}\\\pi_1//\pi_2\end{array}\right\} \Rightarrow \overleftrightarrow{EF}//\overleftrightarrow{BC}$$

نظرية 4

المثلث ABC فيه $\overleftrightarrow{EF}//\overleftrightarrow{BC}$

فالمثلثان AEF , ABC متشابهان

$$\frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC} = \frac{EF}{BC} = \frac{1}{4} \qquad (1)$$

$$\left.\begin{array}{l}(ACD)\cap\pi_1 = \overleftrightarrow{DC}\\(ACD)\cap\pi_2 = \overleftrightarrow{GF}\\\pi_1//\pi_2\end{array}\right\} \Rightarrow \overleftrightarrow{GF}//\overleftrightarrow{DC}$$

المثلثان AFG, ACD متشابهان

$$\frac{AF}{AC} = \frac{AG}{AD} = \frac{FG}{CD} \qquad (2)$$

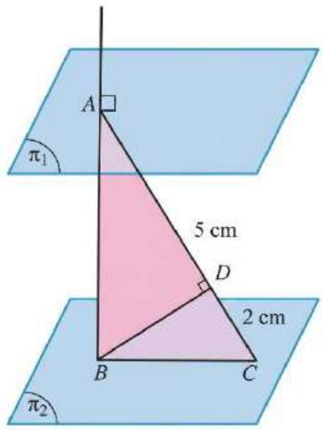
من 2 , 1 نجد

$$\frac{FG}{CD} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{6}{CD} = \frac{1}{4}$$
$$CD = 24\ \text{cm}$$

.Q في الشكل المقابل : $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ قطران في مستوى الدائرة π

ارسم : $\overleftrightarrow{BD} \perp \overleftrightarrow{AC}$ في المستوى ABC

إذا كان : $\overleftrightarrow{DC} = 2cm$, $AD = 5cm$ ، أوجد : BD



الحل

$$\left.\begin{array}{l}\pi_1//\pi_2\\AB\perp\pi_1\end{array}\right\} \Rightarrow \overleftrightarrow{AB} \perp \pi_2$$

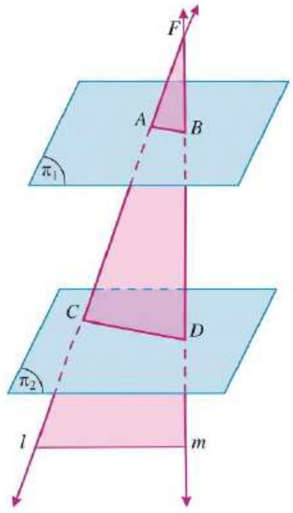
نظرية 7

$$\left.\begin{array}{l}\overline{BC}\subset\pi_2\\\overleftrightarrow{AB}\perp\pi_2\end{array}\right\} \Rightarrow \overline{AB}\perp\overline{BC}$$

في المثلث ABC القائم في B

$$\overline{BD}\perp\overline{AC}$$

$$(BD)^2 = AD\times DC = 5\times 2 = 10$$
$$BD = \sqrt{10}\ \text{cm}$$



Q. في الشكل المقابل : π_1 , π_2 مستويين متوازيين .

$\overleftrightarrow{l} , \overleftrightarrow{m}$ مستقيمان متقاطعان F و يقطعان كلا من

π_1 في A , B ، π_2 في C , D

إذا كان $FB = 5cm , CD = 9cm , AC = 6cm , BD = 4cm$

فأوجد محيط المثلث FAB

الحل

$\because$ $\overleftrightarrow{l} , \overleftrightarrow{m}$ مستقيمان متقاطعان F

يعينان مستو واحد π

$$\left.\begin{array}{l} \pi_1 // \pi_2 \\ \pi \cap \pi_1 = \overleftrightarrow{AB} \\ \pi \cap \pi_2 = \overleftrightarrow{CD} \end{array}\right\} \Longrightarrow \therefore \overleftrightarrow{AB} // \overleftrightarrow{CD}$$

نظرية

في المستوى π , $\overleftrightarrow{AB} // \overleftrightarrow{CD}$

المثلثان FAB , FCD متشابهان

$$\frac{FB}{FD} = \frac{FA}{FC} = \frac{AB}{CD}$$

$$\frac{5}{5+4} = \frac{FA}{FA+6} = \frac{AB}{9}$$

$$\frac{5}{9} = \frac{FA}{FA+6}$$

$$9FA = 5(FA+6)$$

$$4FA = 30 \Rightarrow FA = 7.5 \text{ cm}$$

$$\frac{5}{9} = \frac{AB}{9}$$

$$9AB = 45 \Rightarrow AB = 5 \text{ cm}$$

محيط المثلث FAB يساوي :

$$FA + FB + AB = 7.5 + 5 + 5 = 17.5 \text{ cm}$$

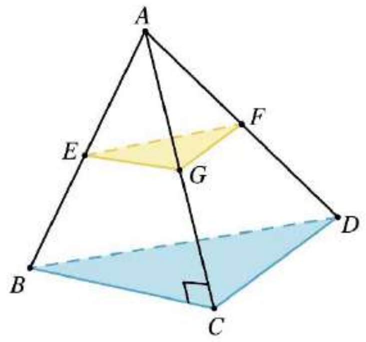
Q. في الشكل المقابل : A نقطة خارج المستوى BCD .

و النقاط F , G , E منتصفات $\overline{AD} , \overline{AC} , \overline{AB}$ على الترتيب

إذا كان : $\overline{AC} \perp \overline{CB}$

و كان : $AD = 13cm \quad AC = 12cm \quad CD = 5cm$

فأثبت أن : $(EGF) // (BCD)$



الحل

في $\Delta\, ACD$:

$$(AD)^2 = (13)^2 = 169$$

$$(AC)^2 + (CD)^2 = (12)^2 + (5)^2 = 169$$

فالمثلث ACD قائم في C

$$\overleftrightarrow{AC} \perp \overleftrightarrow{CD}$$

معطى $\overleftrightarrow{AC} \perp \overleftrightarrow{CB}$

متقاطعان $\overleftrightarrow{CB} \quad , \quad \overleftrightarrow{CD}$

إذا $\overleftrightarrow{AC} \perp (BCD) \quad (1)$

نظرية 5

في $\Delta\, ABC$:

$$\left.\begin{cases} E & \text{منتصف } \overline{AB} \\ G & \text{منتصف } \overline{AC} \end{cases}\right. \Rightarrow \overline{EG} // \overleftrightarrow{BC}$$

و لكن $m(B\hat{C}A) = 90^\circ$ بالتالي $m(A\hat{G}E) = 90^\circ$

$$\Rightarrow \overleftrightarrow{AG} \perp \overleftrightarrow{EG}$$

بالمثل $\overleftrightarrow{AG} \perp \overleftrightarrow{GF}$

بالتالي $\overleftrightarrow{AG} \perp (EGF)$

أي أن $\overleftrightarrow{AC} \perp (EGF) \quad (2)$

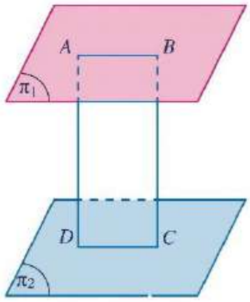
من $1 , 2$ نجد

$$(EGF)//(BCD)$$

Q. في الشكل المقابل : $\pi_1 \,//\, \pi_2$ ، A , B نقطتان في π_1

C , D نقطتان في π_2 حيث : A , B , C , D في مستوى واحد

$\overline{BC} \perp \pi_1$, $\overline{AD} \perp \pi_2$ ، أثبت أن : $ABCD$ مستطيل



الحل

$$\left.\begin{array}{l}\overleftrightarrow{AD} \perp \pi_2\\ \overleftrightarrow{BC} \perp \pi_2\end{array}\right\} \Rightarrow \overleftrightarrow{AD}//\overleftrightarrow{BC} \qquad (1)$$

النقاط A , B , C , D في مستوى واحد هو $(ABCD)$

$$\left.\begin{array}{l}\pi_1 \cap (ABCD) = \overleftrightarrow{AB}\\ \pi_2 \cap (ABCD) = \overleftrightarrow{DC}\\ \pi_1 \,//\, \pi_2\end{array}\right\} \Rightarrow \overleftrightarrow{AB} \,//\, \overleftrightarrow{DC} \qquad (2)$$

من 1 , 2 نجد الشكل $ABCD$ متوازي أضلاع

لكن

$$\left.\begin{array}{l}\overline{AD} \perp \pi_2\\ \overline{DC} \subset \pi_2\end{array}\right\} \Rightarrow \overline{AD} \perp \overline{DC}$$

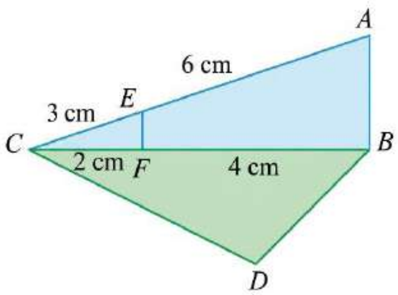
إذا الشكل $ABCD$ متوازي أضلاع إحدى زواياه قائمة

الشكل $ABCD$ مستطيل

Q. في الشكل المقابل : إذا كان $\overline{AB} \perp (BCD)$

و كان : $CE = 3cm , EA = 6cm , CF = 2cm , FB = 4cm$

أثبت أن : $\overline{EF} \perp \overline{DB}$



الحل

البرهان : $\overleftrightarrow{AC} , \overleftrightarrow{AB}$ متقاطعان فهما يعنيان مستويا وحيدا (ABC)

في المثلث CAB :

$$\frac{CE}{EA} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{CF}{FB} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$\therefore \overline{EF}//\overline{AB}$ نظرية طاليس

$\because \overline{AB} \perp (CBD)$

$\therefore \overline{EF} \perp (CBD)$ (1) نظرية

$\overline{DB} \subset (CBD)$ (2)

من 1 , 2 نستنتج أن :

$$\overline{EF} \perp \overline{DB}$$

Q. في الشكل المقابل : D نقطة خارج مستوى المثلث ABC

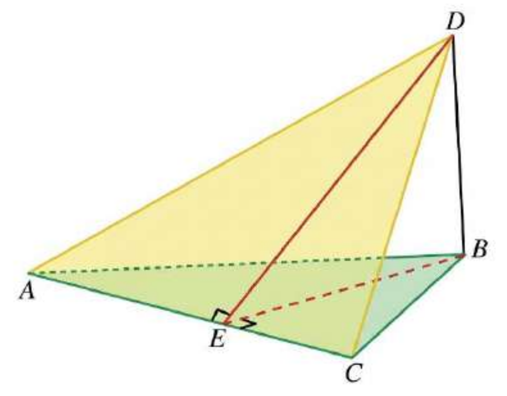
$DB = 5cm$, $AB = 10cm$, $m(BAC) = \frac{\pi}{6}$

$\overline{DB} \perp (ABC)$

$\overline{BE} \perp \overline{AC}$, $\overline{DE} \perp \overline{AC}$

أوجد :

- BE , DE
- قياس الزاوية الزوجية بين المستويين BAC , DAC



الحل

$BE \perp AC \Rightarrow m(B\hat{E}A) = \frac{\pi}{2}$

في المثلث ABE القائم في E

$\sin A = \frac{BE}{AB} \Rightarrow \sin\frac{\pi}{6} = \frac{BE}{10}$

$\text{BE} = 10\sin\frac{\pi}{6} = 5\text{ cm}$

$\left.\begin{matrix}\overline{DB} \perp (ABC) \\ \overline{BE} \perp (ABC)\end{matrix}\right\} \Rightarrow \overline{DB} \perp \overline{EB}$

فالمثلث DBE قائم في B و متطابق الضلعين

$(BD = BE = 5cm)$

حسب فيثاغورث $DE = \sqrt{(5)^2 + (5)^2} = 5\sqrt{2}$

تكملة :

(2) $\overleftrightarrow{AC}$ هو خط تقاطع المستويين BAC , DAC

في المستوى BAC : $\overline{BE} \perp \overline{AC}$

في المستوى DAC : $\overline{DE} \perp \overline{AC}$

$\because$ $\overleftrightarrow{AC}$ حافة الزاوية الزوجية بين المستويين

$\therefore$ الزاوية المستوية للزاوية الزوجية بين المستويين

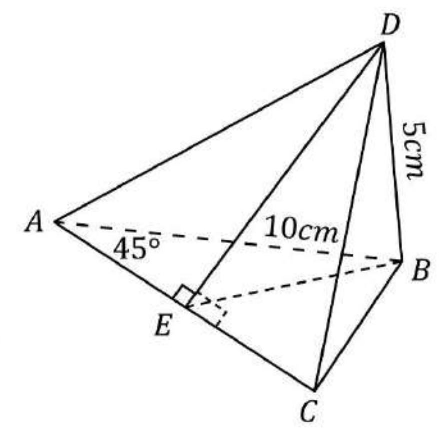
$\tan(BED) = \frac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}} = \frac{BD}{BE} = \frac{5}{5}$

$\therefore m(BED) = \frac{\pi}{4}$

$\therefore$ قياس الزاوية الزوجية بين المستويين

$BAC = DAC = \frac{\pi}{4}$

Q. في الشكل المقابل : D نقطة خارج مستوى المثلث ABC



$DB = 5cm$, $AB = 10cm$, $m(B\hat{A}C) = 45°$

$\overline{DB} \perp (ABC)$

$\overline{BE} \perp \overline{AC}$, $\overline{DE} \perp \overline{AC}$

أوجد :

- BE , DE

- قياس الزاوية الزوجية بين المستويين BAC , DAC

الحل

(a) في المثلث BEA القائم في $\hat{E}$

$$\sin A = \frac{BE}{AB} \Rightarrow \sin 45° = \frac{BE}{10}$$

$$BE = 10 \sin 45° = 5\sqrt{2}$$

$$\left.\begin{array}{l} \overline{DB} \perp (ABC) \\ \overline{BE} \perp (ABC) \end{array}\right\} \Rightarrow \overline{DB} \perp \overline{BE}$$

فالمثلث DBE قائم في B حسب فيثاغورث

$$DE = \sqrt{(5)^2 + \left(5\sqrt{2}\right)^2} = 5\sqrt{3}$$

(b) $\overleftrightarrow{AC}$ هو خط تقاطع المستويين BAC , DAC

(الحافة الزوجية)

$\overline{BE} \perp \overline{AC}$: $BE \subset (BAC)$

$\overline{DE} \perp \overline{AC}$: $DE \subset (DAC)$

الزاوية المستوية للزاوية الزوجية بين المستويين

BAC , DAC هي $B\hat{E}D$

في المثلث DBE القائم في B

$$\tan(B\hat{E}D) = \frac{DB}{BE} = \frac{5}{5\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\therefore m(BED) = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \approx 35.26°$$

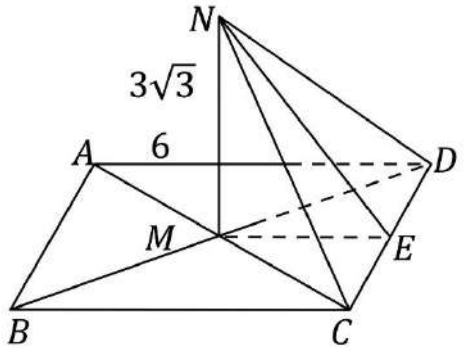
∴ قياس الزاوية الزوجية بين المستويين BAC , DAC يساوي $35.26°$ تقريبا

Q. $ABCD$ مستطيل تقاطع قطراه في M ، و فيه $AD = 6cm$

أقيم $\overline{NM}$ عمودا على $(ABCD)$ حيث N خارج مستواه

بحيث $MN = 3\sqrt{3}\ cm$ ، E منتصف $\overline{CD}$

أوجد : قياس الزاوية الزوجية بين المستويين $ABCD , NCD$



الحل

$\overleftrightarrow{CD}$ هي الحافة المشتركة بين المستويين $ABCD , NCD$

$$\left.\begin{array}{l} \overleftrightarrow{MN} \perp (ABCD) \\ \overleftrightarrow{CD} \subset (ABCD) \end{array}\right\} \Rightarrow \overleftrightarrow{MN} \perp \overleftrightarrow{CD} \qquad (1)$$

في المثلث CDM المتطابق الضلعين (من خواص المستطيل)

E منتصف $\overline{CD}$

$$\overleftrightarrow{ME} \perp \overleftrightarrow{CD} \qquad (2)$$

من 1 , 2 نجد

$$\overleftrightarrow{CD} \perp (MNE) \qquad , \qquad \overline{NE} \subset (MNE)$$

$$\overleftrightarrow{NE} \perp \overleftrightarrow{CD}$$

$$NE \subset (NCD)$$

$M\hat{E}N$ هي الزاوية المستوية للزاوية الزوجية $\overleftrightarrow{CD}$

في المثلث ACD لدينا $\overleftrightarrow{EM}$ واصلة بين منتصفي الضلعين $\overline{CA} , \overline{CD}$

$$EM = \frac{1}{2}AD = \frac{1}{2} \times 6 = 3cm$$

في المثلث MEN القائم الزاوية في M :

$$\tan M\hat{E}N = \frac{3\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}$$

$$m(M\hat{E}N) = \tan^{-1}(\sqrt{3}) = 60°$$

قياس الزاوية الزوجية بين المستويين $ABCD , NCD$ هو $60°$

➢ ظلل الدائرة ⓐ إذا كانت العبارة صحيحة و ⓑ إذا كانت العبارة خاطئة :

❖ الصورة الجبرية للعدد : $\sqrt{-4}+3$ هي $3+2i$

ⓐ ⓑ

❖ الجذران التربيعيان للعدد -1 هما : $-1\,,1$

ⓐ ⓑ

❖ الصورة المبسطة للتعبير $(12+5i)-(2-i)$ هي $(10-6i)$

ⓐ ⓑ

❖ الإحداثيات القطبية للنقطة $M\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\,,\,\frac{-\sqrt{2}}{2}\right)$ هي : $M\left(1\,,\,\frac{5\pi}{4}\right)$

ⓐ ⓑ

❖ الإحداثيات الديكارتية للنقطة : $B\left(\sqrt{2}\,,135°\right)$ هي : $B(-1\,,1)$

ⓐ ⓑ

❖ الإحداثيات الديكارتية للنقطة : $A\left(4\,,\frac{5\pi}{3}\right)$ هي : $A(2\,,-2\sqrt{3})$

ⓐ ⓑ

❖ مرافق العدد المركب : $z=3+4i$ هو : $\bar{z}=3-4i$

ⓐ ⓑ

❖ إذا كان $z_1\,,z_2$ جذران تربيعيان للعدد z فإن $z_1+z_2=0$

ⓐ ⓑ

❖ معادلة الدالة المثلثية $y=a\sin(b\theta)$ حيث السعة 5 و الدورة 3π

يمكن أن تكون $y=5\sin\left(\frac{2}{3}\theta\right)$

ⓐ ⓑ

❖ سعة الدالة $y = 3\,tan\left(\frac{3}{4}x\right)$ هي 3

a b

❖ الدالة : $y = a\,tan\,bx$ دالة دورية دورتها $\frac{\pi}{|2b|}$

a b

❖ $cos\,x = 2\,cos^2\,\frac{x}{2} - 1$

a b

❖ $\frac{1-cos\,2x}{2} = 2\,cos^2\,\frac{x}{2}$

a b

❖ $sin^2\,\frac{x}{2} = \frac{1-cos\,x}{2}$

a b

❖ حل المعادلة : $\bar{z} + 2 = 5 - i$ هو : $z = 3 + i$

a b

❖ $cos\,6x = 2\,cos^2\,3x - 1$

a b

❖ إذا كان a , b طولا ضلعين متتالين في متوازى أضلاع و θ قياس الزاوية بينهما فإن مساحة متوازي الأضلاع تساوي $ab\ \sin\theta$

ⓐ ⓑ

❖ لا يمكن إيجاد مساحة مثلث بمعلومية قياسات زواياه الثلاثة

ⓐ ⓑ

❖ في المثلث ABC : $AC = 9\text{cm} , AB = 7\text{cm} , BC = 8\text{cm}$
فإن مساحة المثلث ABC تساوي $12\sqrt{5}\ cm^2$

ⓐ ⓑ

❖ مجموعة حل المعادلة : $z^2 - 4z + 5 = 0$ هي : $\{2 - i , 2 + i\}$

ⓐ ⓑ

❖ إذا كانت أطوال أضلاع مثلث تساوي $5\ cm , 8\ cm , 12\ cm$ فإن قياس الزاوية الأكبر في هذا المثلث يساوي حوالي $133.4°$

ⓐ ⓑ

❖ إذا كان $0^\circ < \theta < 90^\circ$, $cos\,\theta = \frac{3}{5}$ فإن $sin\,2\theta = \frac{4}{5}$

ⓐ ⓑ

❖ حل المعادلة $\cos x = \frac{1}{2}$ هو : $x = \frac{\pi}{3} + 2k\,\pi$ حيث k عدد صحيح

ⓐ ⓑ

❖ $\cos 94° \cos 18° - \sin 94° \sin 18°$ يساوي $\cos 112°$

a b

❖ $\sin 4x = 2 \sin 2x \cos 2x$

a b

❖ $\cos \frac{\pi}{12}$ يساوي $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

a b

❖ $\sin 75° = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

a b

❖ إذا توازى مستقيمان ومر بهما مستويان متقاطعان فإن تقاطعهما هو مستقيم يوازي كلا من هذين المستقيمين.

a b

❖ إذا كان $ABCD$ هرم ثلاثي القاعدة جميع أحرفه متطابقة فإن : $\overleftrightarrow{CD} \perp \overleftrightarrow{AB}$

a b

❖ يكون المستويان متوازيين إذا اشتركا في نقطة واحدة على الأقل.

a b

❖ إذا كان مستقيم عموديا على أحد مستويين متوازيين فإنه يكون عموديا على المستوى الآخر

a b

❖ إذا كان المستقيمان l, m متخالفان و كان $\overleftrightarrow{m} \perp \overleftrightarrow{n}$ فإن $\overleftrightarrow{n} \perp \overleftrightarrow{l}$

a b

❖ إذا كان : $\overleftrightarrow{m} // \pi$, $\overleftrightarrow{l} // \pi$ فإن $\overleftrightarrow{l} \perp \overleftrightarrow{m}$

a b

❖ إذا مستقيم l مستوى π فإن $\overleftrightarrow{l}$ يوازى مستقيما وحيدا في π

a b

❖ إذا كان : $\overleftrightarrow{m} // \pi$, $\overleftrightarrow{l} // \pi$ فإن $\overleftrightarrow{l} // \overleftrightarrow{m}$

a b

❖ إذا كان : $\overleftrightarrow{m} \subset \pi$, $\overleftrightarrow{l} \perp \overleftrightarrow{m}$ فإن $\overleftrightarrow{l} \subset \pi$

a b

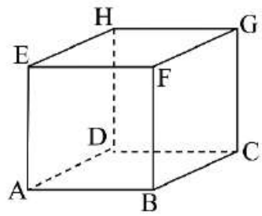
❖ المستقيمان العموديان على مستو متوازيان

a b

❖ إذا كان المستقيم l مائل على المستوى π فإن $\overleftrightarrow{l}$ ليس عموديا على اى مستقيم محتوى في π

a b

❖ في الشكل المقابل : إذا كان $ABCDEFGH$ مكعب فإن $\overleftrightarrow{HG}, \overleftrightarrow{AB}$ يعينان مستويا



a   b

➢ لكل بند أربع اختيارات واحد فقط صحيح ظلل في ورقة الإجابة الرمز الدال على الإجابة الصحيحة :

❖ مجموعة حل : $z^2 - 4z + 20 = 0$: $z \in C$ هي :

$(a)\{2-4i, -2-4i\}$

$(b)\ \{-2+4i, -2-4i\}$

$(c)\ \{2-4i, -2+4i\}$

$(d)\ \{2-4i, 2+4i\}$

❖ الصورة المثلثية للعدد المركب : $z = \frac{-4}{1-i}$ حيث $\pi > \theta \geq 0$ هي z

$(a)\ 4\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$

$(b)\ 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$

$(c)\ 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$

$(d)\ 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$

❖ الصورة المثلثية للعدد المركب : $z = 2 - 2\sqrt{3}\,i$ حيث $\theta \in [0, 2\pi]$

$(a)\ z = 4\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$

$(b)\ z = 4\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

$(c)\ z = 4\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

$(d)\ z = 4\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$

❖ إذا كان $z = i$ فإن z^{250} تساوي :

$(a)\ -i$ $(b)\ i$
$(c)\ 1$ $(d)\ -1$

❖ $8-(\sqrt{-1})-(-3+\sqrt{-16})$ يساوي :

$(a)\ 11-3i$ $(b)\ 11+3i$
$(c)\ 11-5i$ $(d)\ 11+5i$

❖ $\forall\, n \in z^{+}$ قيمة فإن $(i^{2n+2}+i^{2n+8})$ تساوي :

$(a)\ i^{-2n}$ $(b)\ -1$
$(c)\ 0$ $(d)\ 1$

❖ قيمة i^{40} تساوي :

$(a)\ -1$ $(b)\ -i$
$(c)\ 1$ $(d)\ 1$

❖ الإحداثيات القطبية للنقطة $B\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}, \frac{-\sqrt{2}}{2}\right)$ هي :

$(a)\ B\left(1,\frac{-\pi}{4}\right)$ $(b)\ B\left(1,\frac{\pi}{4}\right)$
$(c)\ B\left(1,\frac{3\pi}{4}\right)$ $(d)\ B\left(1,\frac{-3\pi}{4}\right)$

❖ أبسط صورة للتعبير: $(3+\sqrt{-4})(4+\sqrt{-9})$ هي :

$(a)\ 18+17i$ $(b)\ 18+3\sqrt{-9}+4\sqrt{-4}$
$(c)\ 6+17i$ $(d)\ 18$

❖ إذا كان : $xi^2 + 3yi = 5 + 3i^5$: فإن (x , y) تساوي :

(b) $(-5 , -1)$ (a) $(5 , 1)$

(d) $(-5 , 1)$ (c) $(5 , -1)$

❖ الإحداثيات الديكارتية للنقطة : $A\left(4 , \frac{5\pi}{3}\right)$ هي :

(b) $A(-2 , 2\sqrt{3})$ (a) $A(2 , 2\sqrt{3})$

(d) $A(2 , -2\sqrt{3})$ (c) $A(-2 , -2\sqrt{3})$

❖ الصورة الجبرية للعدد المركب $z = (1 + 2i)^2$ هي :

(b) $z = 5 + 4i$ (a) $z = -3 + 4i$

(d) $z = -3$ (c) $z = 5$

❖ الجذران التربيعيان للعدد المركب $z = 33 - 56i$ هما :

(b) $\begin{cases} z_1 = -7 - 4i \\ z_2 = -7 + 4i \end{cases}$ (a) $\begin{cases} z_1 = -7 - 4i \\ z_2 = 7 + 4i \end{cases}$

(d) $\begin{cases} z_1 = 7 - 4i \\ z_2 = -7 + 4i \end{cases}$ (c) $\begin{cases} z_1 = 7 + 4i \\ z_2 = 7 - 4i \end{cases}$

❖ معادلة الدالة المثلثية $y = a\cos(bx)$ حيث السعة 4 و الدورة 6 يمكن ان تكون :

(b) $y = -4\cos\left(\frac{3}{\pi}x\right)$ (a) $y = -\frac{1}{2}\cos\left(\frac{x}{3}\right)$

(d) $y = 4\cos\left(\frac{x}{3}\right)$ (c) $y = -4\cos\left(\frac{\pi}{3}x\right)$

❖ في الدالة المثلثية $y = -2\sin(3x)$ السعة هي :

(b) 3 (a) -3

(d) 2 (c) -2

❖ معادلة الدالة المثلثية $y = tan\,(bx)$ حيث الدورة $\frac{3}{4}$ هي :

$(a)\ y = tan\left(\frac{4}{3}\,\pi\,x\right)$ $(b)\ y = tan\left(\frac{3}{4}\ x\right)$

$(c)\ y = tan\left(\frac{3}{4}\,\pi\,x\right)$ $(d)\ y = tan\left(\frac{4}{3}\ x\right)$

❖ مثلث قياسات زواياه $70°\,, 60°\,, 50°$ فإذا كان طول أصغر ضلع فيه هو $9\ cm$ فإن :
أطول ضلع يساوي تقريبا :

(a) $11\ cm$ (b) $11.5\ cm$

(c) $12\ cm$ (d) $12.5\ cm$

❖ في المثلث ABC : $AC = 40\ cm\,, AB = 30\ cm\,, m(\hat{A}) = 120°$
فإن طول $\overline{BC}$ يساوي تقريبا :

(a) 68 cm (b) $36\ cm$

(c) $60.8\ cm$ (d) 21 cm

❖ إذا كان : $AB = 12\ cm\,, AC = 17\ cm\,, BC = 25\ cm$ فإن قياس الزاوية الكبرى في المثلث ABC
يساوي تقريبا :

(a) $118°$ (b) $110°$

(c) $125°$ (d) $100°$

❖ إذا كان $c = 6\ cm\,, b = 3\ cm\,, a = 4cm$ فإن قياس الزاوية الكبرى في المثلث ABC يساوى
حوالي :

(a) $117°$ (b) $110°$

(c) $125°$ (d) $100°$

❖ مساحة المثلث الذي أطوال أضلاعه : $9\ cm\,, 8\ cm\,, 7\ cm$ هي :

(a) $6\sqrt{3}\ cm^2$ (b) $12\sqrt{5}\ cm^2$

(c) $16\sqrt{3}\ cm^2$ (d) $18\sqrt{3}\ cm^2$

❖ مساحة المثلث الذي أطوال أضلاعه : $8\ cm$, $4\ cm$, $6\ cm$ هي :

(a) $5\sqrt{3}\ cm^2$ (b) $3\sqrt{15}\ cm^2$

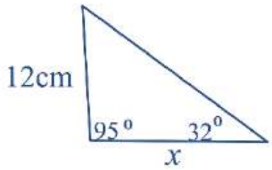
(c) $3\sqrt{5}\ cm^2$ (d) $\sqrt{15}\ cm^2$

❖ في مثلث ABC : $BC = 20\ cm$, $AC = 10\ cm$, $m(\widehat{C}) = 60°$ يساوي :

(a) $10\sqrt{3}\ cm$ (b) $10\sqrt{7}\ cm$

(c) $12.4\ cm$ (d) $29\ cm$

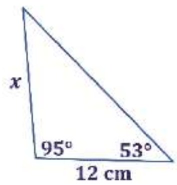
❖ في المثلث المقابل ، x تساوي حوالى :



(a) $8.6\ cm$ (b) $15\ cm$

(c) $18.1\ cm$ (d) $19.2\ cm$

❖ في المثلث المقابل ، x تساوي حوالى :



(a) $8.6\ cm$ (b) $15\ cm$

(c) $18.1\ cm$ (d) $19.2\ cm$

❖ مساحة مثلث متطابق الأضلاع طول ضلعه a هي :

(a) $\frac{1}{2}a^2\ units^2$ (b) $a^2\frac{\sqrt{3}}{2}\ units^2$

(c) $a^2\frac{\sqrt{3}}{4}\ units^2$ (d) $a^2\ units^2$

❖ $cos\left(h+\frac{\pi}{2}\right) =$

(a) $-\sin h$ (b) $\sin h$

(c) $\cos h$ (d) $-\cos h$

❖ إذا كان : $a = 2\ cm\ , b = 3\ cm\ , m(\widehat{C}) = 40°$ فإن مساحة المثلث ABC حوالى :

(a) $4.6\ cm^2$ | (b) $3.86\ cm^2$
(c) $1.93\ cm^2$ | (d) $2.3\ cm^2$

❖ مجموعة حل المعادلة : $\tan(x) = -\sqrt{3}$ حيث $0 \le \theta < 2\pi$ هي x تساوي .....

(a) $\left\{\frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right\}$ | (b) $\left\{\frac{2\pi}{3}\right\}$
(c) $\left\{\frac{4\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right\}$ | (d) $\left\{\frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right\}$

❖ $\cos 94° \cos 18° + \sin 94° \sin 18°$ تساوي :

(a) $\cos 112°$ | (b) $\sin 112°$
(c) $\sin 76°$ | (d) $\cos 76°$

❖ $\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{7} - \sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{\pi}{3}$ يساوي :

(a) $\cos\frac{4\pi}{21}$ | (b) $\sin\frac{4\pi}{21}$
(c) $\cos\frac{10\pi}{21}$ | (d) $\sin\frac{10\pi}{21}$

❖ إذا كان $\sin x + \cos x = 0$ فإن الربع الذي تقع فيه x هو :

(a) الأول أو الثالث | (b) الثاني أو الرابع
(c) الثالث | (d) الأول

❖ المقدار : $1 + \frac{\sin x}{\csc x} + \frac{\cos x}{\csc x}$ متطابق مع المقدار :

(a) 1 | (b) -1
(c) 2 | (d) -2

❖ $\frac{\sin 2x}{1+\cos 2x}$ تساوي :

$(a)\ \csc x$ $(b)\ \csc 2x \cos x$
$(c)\ \tan 2x$ $(d)\ \tan x$

❖ المقدار : $\tan^2 x - \sin^2 x$ متطابق مع المقدار:

$(a)\ \cot^2 x$ $(b)\ \tan^2 x$
$(c)\ \cot^2 x \cos^2 x$ $(d)\ \tan^2 x . \sin^2 x$

❖ $\sin 2\theta =$

$(a)\ \cos\theta \sin\theta$ $(b)\ \sin^2\theta$
$(c)\ \cos^2\theta$ $(d)\ 2\cos\theta \sin\theta$

❖ $2\cos^2 \frac{x}{2}$ تساوي :

$(a)\ 1+\cos 2x$ $(b)\ 1+\cos x$
$(c)\ \frac{1-\cos 2x}{2}$ $(d)\ \frac{1+\cos x}{2}$

❖ $\tan\left(h+\frac{\pi}{4}\right)$ تساوي :

$(a)\ 1+\tan h$ $(b)\ \frac{1-\tan h}{1+\tan h}$
$(c)\ \frac{1+\tan h}{1-\tan h}$ $(d)\ 1-\tan h$

❖ المقدار : $\frac{1}{\tan x}+\tan x$ متطابق مع المقدار:

$(a)\ \sec x \cos x$ $(b)\ \sec x \sin x$
$(c)\ \sec x \csc x$ $(d)\ \sin x \cos x$

❖ إذا كان $\pi_1 // \pi_2$, $\pi \cap \pi_1 = \overleftrightarrow{l}$, $\pi \cap \pi_2 = \overleftrightarrow{m}$ فإن :

$(a)\ \pi // \pi_1$ 　 $(b)\ \pi // \pi_2$

$(c)\ \overleftrightarrow{l} \perp \overleftrightarrow{m}$ 　 $(d)\ \overleftrightarrow{l} // \overleftrightarrow{m}$

❖ $tan\ \frac{7\pi}{12}$ تساوي :

$(a)\ \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{\sqrt{2}+\sqrt{6}}$ 　 $(b)\ \sqrt{2}+\sqrt{6}$

$(c)\ 2+\sqrt{3}$ 　 $(d)\ -2-\sqrt{3}$

❖ $\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$ تساوي :

$(a)\ \frac{1}{2}\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x$ 　 $(b)\ \frac{1}{2}(\sin x + \cos x)$

$(c)\ \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x + \frac{1}{2}\cos x$ 　 $(d)\ \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x - \frac{1}{2}\cos x$

❖ المقدار : $\frac{\sec^2 x - 1}{\sin x}$ متطابق مع المقدار:

$(a)\ \sin x \tan x$ 　 $(b)\ \sin x \sec^2 x$

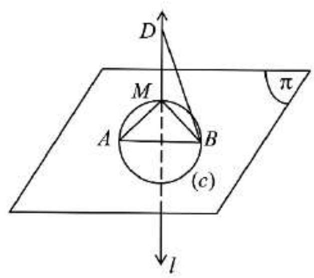
$(c)\ \cos x \sec^2 x$ 　 $(d)\ \sin x \csc x$

❖ إذا كان : $\overleftrightarrow{l} \perp \pi_1$, $\overleftrightarrow{l} \subset \pi_2$

$(a)\ \pi_1 // \pi_2$ 　 $(b)\ \pi_1 \cap \pi_2 = \overleftrightarrow{l}$

$(c)\ \pi_1 \perp \pi_2$ 　 $(d)\ \pi_1 = \pi_2$

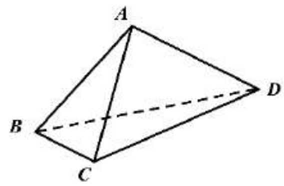
❖ في الشكل المقابل : إذا كان $\overleftrightarrow{l} \perp (AMB)$, $\overleftrightarrow{AB}$ قطر في الدائرة (C) فإن



$(a)\ \overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{BD}$ 　 $(b)\ \overleftrightarrow{l} \perp (BMD)$

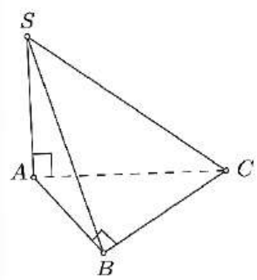
$(c)\ \overleftrightarrow{AM} \perp (BMD)$ 　 $(d)\ \overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{BM}$

❖ في الشكل المقابل : النقاط B , C , D تعين :



(a) مستويين مختلفين
(b) مستويا واحدا
(c) لا يمكن أن تعين مستوى
(d) عدد لا منته من المستويات

❖ في الشكل المقابل : إذا كان $\overleftrightarrow{SA} \perp (ABC) , m(A\hat{B}C) = 90°$ فإن :



(a) المثلث SAB قائم في $\hat{B}$
(b) $\overleftrightarrow{CB} \perp (SAB)$
(c) المثلث SAB متطابق الضلعين
(d) المثلث SCB قائم في $\hat{C}$

❖ إذا توازى مستويان مختلفان و قطعهما مستو ثالث فإن خطى التقاطع :

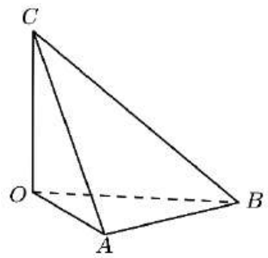
(a) متعامدان
(b) متقاطعان
(c) متخالفان
(d) متوازيان

❖ الحاجة التي لا تعين مستويا وحيدا فيما يلي هي :

(a) أي ثلاث نقاط مختلفة
(b) أي مستقيم و نقطة خارجة عنه
(c) أي مستقيمان متوازيان مختلفان
(d) أي مستقيمان متقاطعان في نقطة

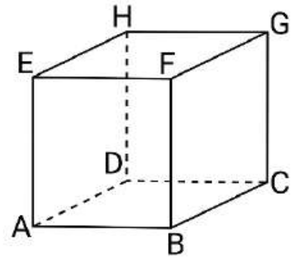
❖ في الشكل المقابل إذا كان OAB مثلث فيه $m(A\hat{O}B) = 60° , OB = 2x , OA = x$

$\overrightarrow{OC}$ متعامد مع المستوى OAB فإن قياس الزاوية الزوجية $(AOC , \overrightarrow{OC} , BOC)$



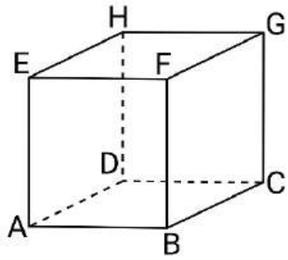
(a) 30°
(b) 45°
(c) 60°
(d) 90°

❖ في المكعب $ABCDEFGH$, $\overleftrightarrow{EG}$, $\overleftrightarrow{BD}$ هما :



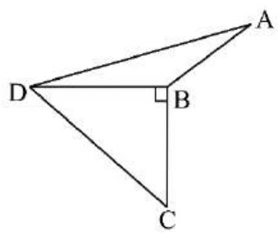
(a) متوازيان
(b) متقاطعان
(c) متخالفان
(d) يحويهما مستو واحد

❖ يمثل الشكل المقابل مكعبا $ABCDEFGH$, المستقيمان $\overleftrightarrow{AC}$, $\overleftrightarrow{HF}$ هما :



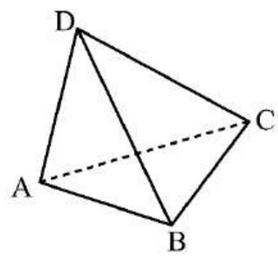
(a) متخالفان
(b) متقاطعان
(c) يحويهما مستو واحد
(d) متوازيان

❖ في الشكل المقابل : المثلث DBC قائم الزاوية في B فإذا كان $\overleftrightarrow{AB} \perp (DBC)$ فإن الزاوية المستوية للزاوية الزوجية $\overleftrightarrow{BD}$ هي :



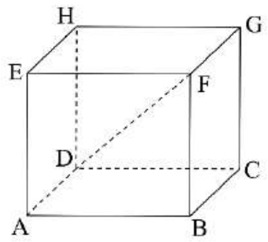
(a) $D\hat{B}C$
(b) $A\hat{B}C$
(c) $A\hat{B}D$
(d) $A\hat{D}C$

❖ في الشكل المقابل ، المثلث ABC متطابق الأضلاع ، $\overleftrightarrow{AD}$ عمودي على (ABC) فإن قياس الزاوية المستوية للزاوية الزوجية $(BAD , \overleftrightarrow{DA} , DAC)$ هي :



(a) $45°$
(b) $30°$
(c) $80°$
(d) $60°$

❖ يمثل الشكل المقابل مكعبا إذا كان طول حرفه $3\ cm$ فإن طول قطره $\overline{AG}$ يساوي :



(a) $18\ cm$

(b) $9\ cm$

(c) $3\sqrt{3}\ cm$

(d) $\sqrt{3}\ cm$