❖ $\int (x-2)(2x+3)\, dx$

الحل

$$\int (x-2)(2x+3)\, dx$$

$$= \int (2x^2 + 3x - 4x - 6)\, dx$$

$$= \int (2x^2 - x - 6)\, dx$$

$$= \frac{2}{3}x^2 - \frac{1}{2}x^2 - 6x + c$$

❖ $\int \frac{x^2-4x+3}{x-1}\, dx$

الحل

$$\int \frac{x^2-4x+3}{x-1}\, dx = \int \frac{(x-1)\,(x-3)}{(x-1)}\, dx$$

$$= \int (x-3)\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\, x^2 - 3x + c$$

❖ $\int \frac{x^4-27x}{x^2-3x}\, dx$

الحل

$$\int \frac{\cancel{x}\,(x^3-27)}{\cancel{x}\,(x^3-27)}\, dx$$

$$= \int \frac{(x^3-27)}{(x^3-27)}\, dx$$

$$= \int \frac{\cancel{(x-3)}\,(x^2+3x+9)}{\cancel{x-3}}\, dx$$

$$= \int (x^2+3x+9)\, dx$$

$$= \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 9x + c$$

❖ $\int \left(\frac{3x^2-x}{x}\right) dx$

الحل

$$\int \left(\frac{3x^2-x}{x}\right)^2 dx = \int \left(\frac{x\,(3x-1)}{x}\right)^2 dx$$

$$= \int (3x-1)^2\, dx$$

$$= \int (9x^2 - 6x + 1)\, dx$$

$$= 3x^3 - 3x^2 + x + c$$

❖ $\int \left(\frac{x^2-2}{x^2}\right) dx$

الحل

$$\int \left(\frac{x^2}{x^2} - \frac{2}{x^2}\right) dx$$

$$= \int (1 - 2x^{-2})\ dx$$

$$= x - \frac{2x^{-1}}{-1} + c$$

$$= x + \frac{2}{x} + c$$

❖ $\int \left(x^3 - \frac{1}{x^3}\right) dx$

الحل

$$\int (x^3 - x^{-3})\ dx$$

$$= \frac{1}{4}x^4 - \frac{x^{-2}}{-2} + c$$

$$= \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2x^2} + c$$

❖ $\int \frac{x-1}{\sqrt{x}+1} dx$

الحل

$$\int \frac{x-1}{\sqrt{x}+1} \cdot \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-1} dx$$

$$= \int \frac{\cancel{(x-1)}(\sqrt{x}-1)}{\cancel{x-1}} dx$$

$$= \int (\sqrt{x}-1)\ dx$$

$$= \int \left(x^{\frac{1}{2}} - 1\right) dx$$

$$= \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - x + c$$

❖ $\int \frac{x^2-3x}{\sqrt[3]{x}} dx$

الحل

$$\int \left(\frac{x^2}{\sqrt[3]{x}} - \frac{3x}{\sqrt[3]{x}}\right) dx$$

$$= \int \left(x^{\frac{5}{3}} - 3x^{\frac{2}{3}}\right) dx$$

$$= \frac{3}{8}x^{\frac{8}{3}} - 3 \cdot \frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}} + c$$

$$= \frac{3}{8}x^{\frac{8}{3}} - \frac{9}{5}x^{\frac{5}{3}} + c$$

❖ $\int (x^2-2x)(x^3-3x^2+4)^5 dx$

الحل

$$u = x^3-3x^2+4$$
$$du = (3x^2-6x)dx$$
$$\frac{1}{3}du = (x^2-2x)dx$$
$$\therefore \int u^5 \cdot \frac{1}{3}de = \frac{1}{3}\int u^5 du$$
$$= \frac{1}{3\times 6}u^6 + c = \frac{1}{18}u^6 + c$$
$$= \frac{1}{18}\int (x^3-3x^2+4)^6 + c$$

❖ $\int (x+2)\sqrt[3]{x^2+4x-1}\, dx$

الحل

$$u = x^2+4x-1$$
$$du = (2x+4)dx$$
$$\frac{1}{2}du = (x+2)dx$$
$$\int (x+2)\sqrt[3]{x^2+4x-1}dx = \int u^{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{2}du\right)$$
$$= \frac{1}{2}\int u^{\frac{1}{3}}du$$
$$= \frac{1}{2}\left[\frac{3}{4}u^{\frac{4}{3}}\right] + C$$
$$\therefore \int (x+2)\sqrt[3]{x^2+4x-1}dx = \frac{3}{8}(x^2+4x-1)^{\frac{4}{3}} + C$$

❖ $\int \frac{5}{\sqrt{x}\,(\sqrt{x}+2)^3} dx$

الحل

$$u = \sqrt{x}+2$$
$$du = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx$$
$$2du = \frac{1}{\sqrt{x}}dx$$
$$\int \frac{5}{\sqrt{x}\,(\sqrt{x}+2)^3}dx = \int \frac{5}{u^3}(2du)$$
$$= \int \frac{10\,du}{u^3} = 10\int u^{-3}du$$
$$= -5u^{-2} + c$$
$$= \frac{-5}{(\sqrt{x}+2)^2} + c$$

❖ $\int \frac{\left(\frac{1}{x}+3\right)^4}{x^2} dx$

الحل

$$u = \frac{1}{x}+3$$
$$du = -\frac{1}{x^2}dx \Rightarrow -du = \frac{1}{x^2}dx$$
$$\int \frac{\left(\frac{1}{x}+3\right)^4}{x^2}dx = \int -u^4 du$$
$$= -\frac{u^5}{5} + c$$
$$= -\frac{1}{5}\left(\frac{1}{x}+3\right)^5 + c$$

❖ $\int \sqrt{4x-5}\, dx$

الحل

$$\int \sqrt{4x-5}\, dx = \int (4x-5)^{\frac{1}{2}}\, dx$$

$u = 4x-5$

$du = 4\, dx$

$\frac{1}{4}\, du = dx$

$$\int \sqrt{4x-5}\, dx = \int u^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{4}\, du$$

$$= \frac{1}{4}\int u^{\frac{1}{2}}\, du = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3}\, u^{\frac{3}{2}} + c$$

$$= \frac{1}{6}\sqrt{u^3} + c$$

$$= \frac{1}{6}\sqrt{(4x-5)^3} + c$$

❖ $\int \frac{5}{x^2\left(\frac{1}{x}+2\right)^5}\, dx$

الحل

$u = \frac{1}{x} + 2$

$du = -\frac{1}{x^2}dx \Rightarrow -du = \frac{1}{x^2}dx$

$$\int \frac{1}{x^2\left(\frac{1}{x}+2\right)^5}dx = -\int \frac{\left(\frac{1}{x}+2\right)^{-5}}{-x^2}dx$$

$$= -\int u^{-5}du$$

$$= -\left[\frac{u^{-4}}{-4} + C_1\right] = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{u^4} + C_1\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{1}{\left(\frac{1}{x}+2\right)^4} + C_1\right] = \frac{1}{4\left(\frac{1}{x}+2\right)^4} + C$$

❖ $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{2-3x}}\, dx$

الحل

$$\int (2-3x)^{-\frac{1}{3}}\, du$$

$u = 2-3x$

$du = -3dx$

$-\frac{1}{3}\, du = dx$

$$\int u^{-\frac{1}{3}} \cdot -\frac{1}{3}\, du$$

$$= -\frac{1}{3}\int u^{-\frac{1}{3}}\, du = -\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4}\, u^{\frac{4}{3}} + c$$

$$= -\frac{1}{4}\sqrt[3]{u^4} + c$$

$$= -\frac{1}{4}\sqrt[3]{(2-3x)^4 + c}$$

❖ $\int x\,(3x+2)^6\, dx$

الحل

$u = 3x+2$

$u - 2 = 3X$

$\frac{u-2}{3} = x$

$du = 3dx$

$\frac{1}{3}du = dx$

$$\int \left(\frac{u-2}{3}\right)u^6\frac{1}{3}du$$

$$\frac{1}{9}\int (u-2)u^6du = \frac{1}{9}\int (u^7 - 2u^6)du$$

$$\frac{1}{9}\left[\frac{1}{8}u^8 - \frac{2}{7}u^7\right] + C$$

$$\frac{1}{72}u^8 - \frac{2}{63}u^7 + c$$

$$\frac{1}{72}(3x+2)^8 - \frac{2}{83}(3x+2)^7 + c$$

❖ $\int x^3 \sqrt{x^2-2}\, dx$

الحل

بفرض $u = x^2 - 2 \longrightarrow x^2 = u + 2$

$\therefore du = 2xdx \longrightarrow xdx = \frac{1}{2}\, du$

$$\int x^3 \sqrt{x^2-2}\, dx = \int \sqrt{x^2-2}\ .x^2\ .(xdx)$$

$$\int \sqrt{u}\ .(u+2)\ .\frac{1}{2}\, du$$

$$= \frac{1}{2}\int u^{\frac{1}{2}}\ (u+2)\, du$$

$$= \frac{1}{2}\int \left(u^{\frac{3}{2}} + 2\, u^{\frac{1}{2}}\right) du$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}\, u^{\frac{5}{2}} + 2 \times \frac{2}{3}\, u^{\frac{3}{2}}\right) + c$$

تعويض $= \frac{1}{5}\, u^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3}\, u^{\frac{3}{2}} + c$

$$= \frac{1}{5}\,(x^2-2)^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3}\,(x^2-2)^{\frac{3}{2}} + c$$

❖ $\int \sqrt[5]{(3x+7)}\, dx$

الحل

$$\int \sqrt[5]{(3x+7)}dx = \int (3x+7)^{\frac{1}{5}}dx$$

$u = 3x+7$

$du = \frac{1}{3}dx$

$3du = dx$

$$\int \sqrt[5]{(3x+7)}dx = \int u^{\frac{1}{5}}\, 3du$$

$$= 3\int u^{\frac{1}{5}}\, du$$

$$= 3 \cdot \frac{5}{6} u^{\frac{6}{5}} + c$$

$$= \frac{15}{6}\sqrt[5]{u^6} + c = \frac{15}{6}\sqrt[5]{(3x+7)^6} + c$$

❖ $\int x\,(x+1)^5 dx$

الحل

$u = x+1 \Rightarrow x = u-1$

$du = dx$

$$\int x\,(x+1)^5\, dx = \int (u-1)\, u^5\, du$$

$$= \int (u^6 - u^5)\, du$$

$$= \frac{u^7}{7} - \frac{u^6}{6} + c$$

$$= \frac{(x+1)^7}{7} - \frac{(x+1)^6}{6} + c$$

❖ $\int x^2 \sqrt{x-1}\, dx$

الحل

$u = x-1 \longrightarrow x = u+1$

$du = dx$

$$\therefore \int x^2\sqrt{x-1}dx = \int (u+1)^2\sqrt{u}\, du$$

$$= \int (u^2+2u+1)\cdot u^{\frac{1}{2}}\, du$$

$$= \int \left(u^{\frac{5}{2}} + 2u^{\frac{3}{2}} + u^{\frac{1}{2}}\right) du$$

$$= \left(\frac{2}{7}\right) u^{\frac{7}{2}} + 2\left(\frac{2}{5}\right) u^{\frac{5}{2}} + \left(\frac{2}{3}\right) u^{\frac{3}{2}} + C$$

$$= \frac{2}{7}(x-1)^{\frac{7}{2}} + \frac{4}{5}(x-1)^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}} + C$$

❖ $\int x^5 \sqrt[3]{x^3+1}\,dx$

الحل

$$\int x^3x^2(x^3+1)^{\frac{1}{3}}dx$$

$$u = x^3+1 \Rightarrow u-1 = x^3$$

$$du = 3x^2dx$$

$$\frac{1}{3}du = x^2dx$$

$$\int (u-1)u^{\frac{1}{3}} \frac{1}{3}du$$

$$\frac{1}{3}\int \left(u^{\frac{4}{3}} - u^{\frac{1}{3}}\right)du$$

$$\frac{1}{3}\left[\frac{3}{7}u^{\frac{7}{3}} - \frac{3}{4}u^{\frac{4}{3}}\right]+c$$

$$\frac{1}{7}u^{\frac{7}{3}} - \frac{1}{4}u^{\frac{4}{3}} + c$$

$$\frac{1}{7}(x^3+1)^{\frac{7}{3}} - \frac{1}{4}(x^3+1)^{\frac{4}{3}} + c$$

❖ $\int x(2x-1)^3\;dx$

الحل

$$u = 2x-1 \qquad u+1 = 2x$$

$$\frac{u+1}{2} = x$$

$$du = 2dx \longrightarrow \frac{1}{2}de = dx$$

$$\int \left(\frac{u+1}{2}\right) u^3 \frac{1}{2}du$$

$$\frac{1}{4}\int (u+1)\cdot u^3du = \frac{1}{4}\int (u^4+u^3)du$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{u^5}{5} + \frac{u^4}{4}\Big] + c$$

$$= \frac{1}{20}u^5 + \frac{1}{16}u^4 + c$$

$$= \frac{1}{20}(2x-1)^5 + \frac{1}{16}(2x-1)^4 + c$$

❖ $\int_{-1}^{1}(x^2+2x-3)^2\,(x+1)\,dx$

الحل

$$u = x^2+2x-3$$

$$du = (2x+2)\,dx \Rightarrow \frac{1}{2}\,du = (x+1)\,dx$$

عندما $x = -1$ فإن $u = -4$

عندما $x = 1$ فإن $u = 0$

$$\int_{-1}^{1}(x^2+2x-3)^2\,(x+1)\,dx = \frac{1}{2}\int_{-4}^{0}u^2\,du$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{u^3}{3}\right]_{-4}^{0} = \frac{1}{2}\left[0+\frac{64}{3}\right]$$

$$= \frac{32}{3}$$

❖ $\int \frac{x}{\sqrt{1+3x}}\,dx$

الحل

$$u = 1+3x \qquad \frac{u-1}{3} = x$$

$$du = 3dx \qquad \frac{1}{3}\,du = dx$$

$$\int x(1+3x)^{-\frac{1}{2}}dx$$

$$\int \left(\frac{u-1}{3}\right)(u)^{-\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{3}du$$

$$\frac{1}{9}\int (u-1)u^{-\frac{1}{2}}du = \frac{1}{9}\int \left(u^{\frac{1}{2}} - u^{-\frac{1}{2}}\right)dx$$

$$\frac{1}{9}\left[\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{1}u^{\frac{1}{2}}\right] + c = \frac{2}{27}u^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{9}u^{\frac{1}{2}} + c$$

$$\frac{2}{27}(1+3x)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{9}(1+3x)^{\frac{1}{2}} + c$$

❖ $\int \cos^3(2x-3)\,.\sin(2x-3)\,dx$

الحل

$u = \cos(2x-3)$

$du = -2\sin(2x-3)\ dx$

$-\frac{1}{2}\,du = \sin(2x-3)\ dx$

$\therefore \int \cos^3(2x-3)\,.\sin(2x-3)\,dx$

$= -\frac{1}{2}\int u^3\ du$

$= -\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}\,u^4 + c$

$= -\frac{1}{8}\cos^4(2x-3) + c$

❖ $\int_1^e \frac{ln^6 x}{x}\ dx$

الحل

$u = ln\ x \qquad du = \frac{1}{x}dx$

$x = 1 \qquad u = ln\,(1) = 0$

$x = e \qquad u = ln\,(e) = 1$

$\therefore \int_0^1 u^6 du = \left[\frac{1}{7}u^7\right]_0^1$

$= \frac{1}{7}(1)^7 - \frac{1}{7}(0)^7$

$= \frac{1}{7}$

❖ $\int_0^{\frac{\pi}{4}} tan\,x\,.sec^2\,x\,dx$

الحل

$u = tan\,x$

$du = sec^2 x\,dx$

عندما $x = 0$ فإن $u = tan0 = 0$

عندما $x = \frac{\pi}{4}$ فإن $u = tan\,\frac{\pi}{4} = 1$

$\int_0^{\frac{\pi}{4}} tan\,x\,.sec^2\,x\,dx = \int_0^1 u\ du$

$= \left[\frac{1}{2}\,u^2\right]_0^1$

$= \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}$

❖ $\int x^5\sqrt{4-x^2}\,dx$

الحل

$u = 4 - x^2 \Rightarrow x^2 = 4 - u$

$du = -2xdx \Rightarrow \frac{-1}{2}du = xdx$

$\int x^5\sqrt{4-x^2}dx = \int \sqrt{4-x^2}\cdot(x^2)^2(xdx)$

$= \int \sqrt{u}(4-u)^2\left(\frac{-1}{2}du\right)$

$= \int \frac{-1}{2}\sqrt{u}(16-8u+u^2)du$

$= \int \left(-8u^{\frac{1}{2}} + 4u^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}u^{\frac{5}{2}}\right)du$

$= \frac{-8}{\frac{3}{2}}u^{\frac{3}{2}} + \frac{4u^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} - \frac{1}{2}u^{\frac{7}{2}} + C$

$= \frac{-16}{3}u^{\frac{3}{2}} + \frac{8}{5}u^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{7}u^{\frac{7}{2}} + C$

$= \frac{-16}{3}(4-x^2)^{\frac{3}{2}} + \frac{8}{5}(4-x^2)^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{7}(4-x^2)^{\frac{7}{2}} + C$

❖ $\int \sqrt{1+\sin x}\ \cos x\ dx$

الحل

$$\int (1+\sin x)^{\frac{1}{2}} \cos x\ dx$$

$u = 1 + \sin x$

$du = \cos x\ dx$

$$\int u^{\frac{1}{2}}\ du = \frac{2}{3}\ u^{\frac{3}{2}} + c$$

$$= \frac{2}{3}\sqrt{u^3} + c$$

$$= \frac{2}{3}\sqrt{(1+\sin x)^3} + c$$

❖ $\int csc^5\, x\, cotx\, dx$

الحل

$u = \csc x$

$du = -\csc x\, cotx\ dx$

$-du = \csc x\, cotx\ dx$

$$\int csc^5\, x\, cotx\ dx = \int csc^4\, x\, .\, cscxcotx\, dx =$$

$$= -\int u^4\ .du$$

$$= \frac{-u^5}{5} + c$$

$$= \frac{-csc^5 x}{5} + c$$

❖ $\int (3+\sin 2x)^5\ \cos 2x\ dx$

الحل

$u = 3 + \sin 2x$

$du = 2\ \cos 2x\ dx$

$\frac{1}{2}\ du = \cos 2x\ dx$

$$= \int u^5 \left(\frac{1}{2}\ du\right) = \frac{1}{2}\int u^5\ du$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6}\ u^6 + c = \frac{1}{12}\ u^6 + c$$

$$= \frac{1}{12}\ (3+\ \sin 2x)^6 + c$$

❖ $\int x^2\, .\sin\left(x^3 - 1\right)\ dx$

الحل

$u = x^3 - 1$

$du = 3x^2\ dx$

$\frac{1}{3}\ du = x^2\ dx$

$$\frac{1}{3}\int \sin(u)\ du$$

$$= -\frac{1}{3}\cos(u)\ + c$$

$$= -\frac{1}{3}\cos(x^3 - 1)\ + c$$

❖ $\int \sin^5(x+1)\,.\cos(x+1)\,dx$

الحل

$u = \sin(x+1)$

$du = \cos(x+1)\ dx$

$\int sin^5(x+1)\,.\,cos(x+1)\,dx$

$= \int u^5\ du$

$= \frac{u^6}{6} + c$

$= \frac{1}{6}\,(\sin^6(x+1)) + c$

❖ $\int sec^4\,x\,tan\,x\,dx$

الحل

$u = sec\,x$

$du = \sec x \tan x\,dx$

$\int sec^3 x \sec x \tan x\,dx$

$\int u^3\ du = \frac{1}{4}\,u^4 + c$

$= \frac{1}{4}\,sec^4\,x + c$

❖ $\int \frac{dx}{(\cos^2 x)\,\sqrt{1+tan\,x}}$

الحل

$\int (1+tan\,x)^{\frac{-1}{2}}\ .\ \frac{1}{\cos^2 x}\,dx$

$= \int (1+tan\,x)^{\frac{-1}{2}}\ .\ sec^2\,x\,dx$

$u = 1 + \tan x$

$du = sec^2\,x\,dx$

$= \int u^{\frac{-1}{2}}\,du$

$= 2\,u^{\frac{1}{2}} + c$

$= 2\,(1+tan\,x)^{\frac{1}{2}} + c$

$= 2\sqrt{1+tan\,x} + c$

❖ $\int x^3\,.\cos(x^4+5)\ dx$

الحل

$u = x^4 + 5$

$du = 4x^3\ dx$

$\frac{1}{4}\,du = x^3\ dx$

$\int \cos(u)\ .\frac{1}{4}\ du$

$\frac{1}{4}\int \cos(u)\ du = \frac{1}{4}\,\sin(u) + c$

$= \frac{1}{4}\,\sin(x^4+5) + c$

❖ $\int (x+1)\, e^{x^2+2x+3}\, dx$

الحل

$u = x^2 + 2x + 3$

$du = (2x+2)\, dx$

$\frac{1}{2}\, du = (x+1)\, dx$

$\int (x+1)\, e^{x^2+2x+3}\, dx = \frac{1}{2} \int e^u\, du$

$= \frac{1}{2} e^u + c$

$= \frac{1}{2} e^{x^2+2x+3} + c$

❖ $\int \frac{dx}{(\sin^2 x)\sqrt{1+\cot x}}$

الحل

$\int (1+\cot x)^{\frac{-1}{2}} \cdot \frac{1}{\sin^2 x}\, dx$

$= \int (1+\cot x)^{\frac{-1}{2}} \cdot \csc^2 x\, dx$

$u = 1 + \cot x$

$du = -\csc^2 x\, dx \implies -du = \csc^2 x\, dx$

$= -\int u^{\frac{-1}{2}}\, du$

$= -2\, u^{\frac{1}{2}} + c$

$= -2\, (1+\cot x)^{\frac{1}{2}} + c$

$= -2\sqrt{1+\cot x} + c$

❖ $\int \frac{2x+3}{x^2+3x+7}\, dx$

الحل

$u = x^2 + 3x + 7$

$du = (2x+3)\, dx$

$\int \frac{du}{u}\, dx = \ln|u| + c$

$\therefore \int \frac{2x+3}{x^2+3x+7}\, dx = |n|\ x^2 + 3x + 7 + c$

❖ $\int (2x-1)\, e^{x^2-x+3}\, dx$

الحل

$u = x^2 - x + 3$

$du = (2x-1)\, dx$

$\int (2x-1)\, e^{x^2-x+3}\, dx = \int e^u\, du$

$= e^u + c$

$= e^{x^2-x+3} + c$

❖ $\int x\, e^{x}\, dx$

الحل

$u = x \qquad dv = e^{x}\, dx$

$du = dx \qquad v = e^{x}$

$$\int u\, dv = u\,v - \int v\, du$$

$$\int x\, e^{x}\, dx = x\, e^{x} - \int (e^{x})\, dx$$

$$= x\, e^{x} - e^{x} + c$$

$$= e^{x}(x+1) + c$$

❖ $\int \frac{1}{\sqrt{x}}\, e^{\sqrt{x}}\, dx$

الحل

$$u = \sqrt{x}$$

$$du = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$$

$$2\, du = \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx$$

$$\int e^{u} .\ 2\, du$$

$$= 2\int e^{u}\ du = 2e^{u} + c$$

$$= 2\, e^{\sqrt{x}} + c$$

❖ $\int x \cos x\, dx$

الحل

$u = x \qquad dv = \cos x\ dx$

$du = dx \qquad v = \sin x$

$$\int u\, dv = u\,v - \int v\, du$$

$$\int x \cos x\ dx = x \sin x - \int \sin x\ dx$$

$$= -x \sin x + \cos x + c$$

❖ $\int 4\, x\ e^{-5x}\, dx$

الحل

$u = 4x \qquad dv = e^{-5x}\ dx$

$du = 4\, dx \qquad v = \frac{-1}{5} e^{-5x}$

$$\int u\, dv = u\,v - \int v\, du$$

$$\int 4x\, e^{-5x}\, dx = -\frac{4}{5}\, x\, e^{-5x} + \int \frac{4}{5}\ e^{-5x}\ dx$$

$$= -\frac{4}{5}\, x\, e^{-5x} - \frac{4}{25}\, e^{-5x} + c$$

❖ $\int x \sin(5x)\ dx$

الحل

$u = x \qquad dv = \sin(5x)\,dx$

$du = dx \qquad v = \frac{-1}{5}\cos(5x)$

$$\int u\ dv = u\,v - \int v\ du$$

$$\int x \sin(5x)\ dx = \frac{-1}{5} x \cos(5x) + \frac{1}{5}\int \cos(5x)\ dx$$

$$= \frac{-1}{5} x \cos(5x) + \frac{1}{25}\sin(5x) + c$$

❖ $\int x \sin x\ dx$

الحل

$u = x \qquad dv = \sin dx$

$du = dx \qquad v = -\cos x$

$$\int u\ dv = u\,v - \int v\ du$$

$$\int x \sin x\ dx = -x \cos x - \int (-\cos x)\ dx$$

$$= -x \cos x + \sin x + c$$

❖ $\int x^2 \cos x\ dx$

الحل

$u = x^2 \qquad dv = \cos x\ dx$

$du = 2x\,dx \qquad v = \sin x$

$$\int u\ dv = u\,v - \int v\ du$$

$$\int x^2 \cos x\ dx = x^2 \sin x - 2\int x \sin x\ dx \ \ldots\ldots\ (1)$$

نستخدم القاعدة مرة ثانية لإيجاد : $\int x \sin x\ dx$

$u = x \qquad dv = \sin x\ dx$

$du = dx \qquad v = -\cos x$

$$\therefore \int x \sin x\ dx = -x\cos x - \int -\cos x\ dx$$

$$= -x\cos x + \sin x + c_1 \ \ldots\ldots\ (2)$$

من (1) ، (2) نحصل على :

$$\int x^2 \cos x\ dx = x^2 \sin x - 2(-x\cos x + \sin x + c_1)$$

$$= x^2 \sin x + 2x\cos x - 2\sin x + c$$

❖ $\int (x+1)\, e^{x+1}\ dx$

الحل

$u = x + 1 \qquad dv = e^{x+1}\ dx$

$du = dx \qquad v = e^{x+1}$

$$\int u\ dv = u\,v - \int v\ du$$

$$\int (x+1)\, e^{x+1}\ dx = (x+1)\, e^{x+1} - \int e^{x+1}\ dx$$

$$= (x+1)\, e^{x+1} - e^{x+1} + c$$

❖ $\int \ln x \, dx$

الحل

$u = \ln x \qquad dv = dx$

$du = \frac{1}{x} dx \qquad v = x$

$$\int u \, dv = u\,v - \int v \, du$$

$$\int \ln x \, dx = x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx$$

$$= x \ln x - \int 1 \, dx$$

$$= x \ln x - x + c$$

❖ $\int 3xe^{2x+1} dx$

الحل

$u = 3x \qquad dv = e^{2x+1} dx$

$du = 3\,dx \qquad v = \frac{1}{2} e^{2x+1}$

$$\int u \, dv = u\,v - \int v \, du$$

❖ $\int 3xe^{2x+1} dx = \frac{3}{2} x\, e^{2x+1} . \frac{3}{2}\int e^{2x+1} \, dx$

$$= \frac{3}{2} x\, e^{2x+1} - \frac{3}{4} e^{2x+1} dx$$

❖ $\int x \ln x \, dx$

الحل

$u = \ln x \qquad dv = x\,dx$

$du = \frac{1}{x} dx \qquad v = \frac{x^2}{2}$

$$\int u \, dv = u\,v - \int v \, du$$

$$\int x \ln x \, dx = \frac{1}{2} x^2 \ln x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx$$

$$= \frac{1}{2} x^2 \ln x - \frac{1}{2}\int x \, dx$$

$$= \frac{1}{2} x^2 \ln x - \frac{1}{4} x^2 + c$$

❖ $\int_{-2}^{0} \frac{x}{e^x}\, dx$

الحل

$$\int_{-2}^{0} x\, e^{-x}\, dx$$

$u = x \qquad dv = e^{-x}\, dx$

$du = dx \qquad v = -e^{-x}$

$$\int u\ dv = u\, v - \int v\ du$$

$$\int_{-2}^{0} x\, e^{-x}\, dx = -[x\ e^{-x}]_{-2}^{0} - \int_{-2}^{0} -e^{-x}\, dx$$

$$= -[x\ e^{-x}]_{-2}^{0} - [e^{-x}]_{-2}^{0}$$

$$= -(0 + 2e^2) - (1 - e^2)$$

$$= -2e^2 - 1 + e^2$$

$$= -e^2 - 1$$

❖ $\int x^2 \ln x^2\, dx$

الحل

$u = \ln x^2 \qquad dv = x^2\, dx$

$du = \frac{1}{x^2} \cdot 2x\, dx = \frac{2}{x} dx \qquad v = \frac{x^3}{3}$

$$\int u\ dv = u\, v - \int v\ du$$

$$\int x^2 \ln x^2\, dx = \frac{x^3}{3} \ln x^2 - \int \frac{x^3}{3} \cdot \frac{2}{x}\, dx$$

$$= \frac{x^3}{3} \ln x^2 - \frac{2}{3} \int x^2\ dx$$

$$= \frac{x^3}{3} \ln x^2 - \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right) x^3 + c$$

$$= \frac{x^3}{3} \ln x^2 - \frac{2}{9}\, x^3 + c$$

❖ $\int_0^{\pi} x \cos 3x\ dx$

الحل

$u = x \qquad dv = \cos 3x\ dx$

$du = dv \qquad v = \frac{1}{3} \sin 3x$

$$\int u\ dv = u\, v - \int v\ du$$

$$\int_0^{\pi} x \cos 3x\ dx = \left[\frac{1}{3}\ x \sin 3x\right]_0^{\pi} - \frac{1}{3}\int_0^{\pi} \sin 3x\, dx$$

$$= \left[\frac{1}{3}\ x \sin 3x + \frac{1}{9} \cos 3x\right]_0^{\pi}$$

$$\left(\frac{1}{3}\ \pi\ \sin 3x + \frac{1}{9} \cos 3x\right)$$

$$= \left(\frac{1}{3}\ (0)\ \sin 3(0) + \frac{1}{9} \cos 3(0)\right) = -\frac{2}{9}$$

❖ $f(x) = \frac{5x-1}{x^2-2x-15}$ لتكن الدالة f :

فأوجد : (1) الكسور الجزئية

(2) $\int f(x)\,dx$

الحل

نحلل المقام

$$(1)\ x^2-2x-15=(x+3)(x-5)$$

$$\frac{5x-1}{x^2-2x-15}=\frac{A}{x+3}+\frac{B}{x-5}$$
$$5x-1=A(x-5)+B(x+3)$$
$$5(5)-1=A(5-5)+B(5+3)$$

نعوض عن x بـ (5) :

$$\therefore B=3$$

$$5x-1=A(x-5)+B(x+3)$$
$$5(-3)-1=A(-3-5)+B(-3+3)$$

نعوض عن x بـ (3) :

$$\therefore A=2$$
$$\frac{5x-1}{x^2-2x-15}=\frac{2}{x+3}+\frac{3}{x-5}$$

$$(2)\int f(x)dx=\int \frac{5x-1}{x^2-2x-15}dx$$
$$=\int\left(\frac{2}{x+3}+\frac{3}{x-5}\right)dx$$
$$=\int \frac{2}{x+3}dx+\int\frac{3}{x-5}dx$$
$$=2\int\frac{1}{x+3}dx+3\int\frac{1}{x-5}dx$$
$$=2\ln|x+3|+3\ln|x-5|+C$$

لتكن الدالة f :

❖ $f(x) = \frac{2}{(x-5)\,(x-3)}$

فأوجد : (1) الكسور الجزئية

(2) $\int f(x)\, dx$

الحل

$$\frac{2}{(x-5)(x-3)} = \frac{A_1}{x-5} + \frac{A_2}{x-3}$$

$$2 = A_1(x-3) + A_2(x-5)$$

$$2 = A_1(3-3) + A_2(3-5)$$

نعوض عن x بـ (3) :

$$\therefore A_2 = -1$$

$$2 = A_1(5-3) + A_2(5-5)$$

نعوض عن x بـ (5) :

$$\therefore A_1 = 1$$

$$\frac{2}{(x-5)}(x-3) = \frac{1}{x-5} + \frac{-1}{x-3}$$

$$\int f(x) = \int \frac{2}{(x-5)(x-3)}\, dx$$

$$= \int \left(\frac{1}{x-5} + \frac{-1}{x-3}\right) dx$$

$$= \int \frac{1}{x-5} dx + \int \frac{-1}{x-3} dx$$

$$= \ln\,|x-5| - \ln\,|x-3| + C$$

❖ $\int \frac{x^2-2}{2x^3-5x^2-3x} \quad dx$

الحل

$$2x^3+3x^2-2x = x(2x^2+3x-2)$$
$$= x(2x-1)(x+2)$$

$$\therefore \frac{x^2+2x-1}{x(2x-1)(x+2)} = \frac{A}{x}+\frac{B}{2x-1}+\frac{C}{x+2}$$

اضرب طرفي المعادلة في : $x\,(2x-1)\,(x+2)$

$$x^2+2x-1 = A(2x-1)(x+2)+Bx(x+2)+Cx(2x-1)$$

عوض عن x بـ (0) :

$$0^2+2(0)-1 = A\,(0-1)\,(0+2) \Rightarrow A=\frac{1}{2}$$

عوض عن x بـ $\left(\frac{1}{2}\right)$:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2+2\left(\frac{1}{2}\right)-1 = \left(\frac{1}{2}\right)B \times \left(\frac{5}{2}\right) \Rightarrow B=\frac{1}{5}$$

عوض عن x بـ (-2) :

$$(-2)^2+2(-2)-1 = (-2)C \times (-5) \Rightarrow C=\frac{1}{10}$$

و منه :

$$\frac{x^2+2x-1}{2x^3+3x^2-2x} = \frac{\frac{1}{2}}{x}+\frac{\frac{1}{5}}{2x-1}+\frac{\frac{-1}{10}}{x+2}$$

$$\int \frac{x^2+2x-1}{2x^3+3x^2-2x}dx = \int \left(\frac{\frac{1}{2}}{x}+\frac{\frac{1}{5}}{2x-1}-\frac{\frac{1}{10}}{x+2}\right)dx$$

$$= \frac{1}{2}\ln|x| + \frac{1}{10}\ln|2x-1| - \frac{1}{10}\ln|x+2| + C$$

❖ $\int \frac{x^2-2x+4}{x^2-2x} \quad dx$

الحل

$$\begin{array}{r|l} & 1 \\ \hline x^2-2x & x^2-2x+4 \\ & x^2-2x \\ \hline & \quad\quad 4 \end{array}$$

$$= 1 + \frac{4}{x^2-2x}$$

$$x^2-2x = x(x-2)$$

$$\frac{4}{x(x-2)} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x-2}$$

بضرب طرفي المعادلة في : $x\,(x-2)$

$$4 = A_1(x-2) + A_2 x$$

بالتعويض عن x بـ (0) :

$$4 = -2A_1 \to A_1 = -2$$

بالتعويض عن x بـ (2) :

$$4 = 2A_2 \to A_2 = 2$$

$$\frac{4}{x(x-2)} = \frac{-2}{x} + \frac{2}{x-2}$$

$$\int \frac{x^2-2x+4}{x^2-2x} dx = \int \left(1 + \frac{-2}{x} + \frac{2}{x-2}\right) dx$$

$$= \int 1dx + \int \frac{-2}{x} dx + \int \frac{2}{x-2} dx$$

$$= x - 2\ln|x| + 2\ln|x-2| + C$$

❖ $\int_{-2}^{0} \frac{5x-1}{x^2+2x-3} \quad dx$

الحل

$$x^2 + 2x - 3 = (x+3)(x-1)$$

$$\frac{5x-1}{x^2+2x-3} = \frac{5x-1}{(x+3)(x-1)} = \frac{A_1}{x+3} + \frac{A_2}{x-1}$$

$$\Rightarrow 5x - 1 = A_1(x-1) + A_2(x+3)$$

بالتعويض عن : $(x = 1)$

$$4 = 4A_2 \Rightarrow A_2 = 1$$

بالتعويض عن : $(x = -3)$

$$-16 = -4A_1 \Rightarrow A_1 = 4$$

$$\frac{5x-1}{x^2+2x-3} = \frac{4}{x+3} + \frac{1}{x-1}$$

$$\int_{-2}^{0} \left(\frac{5x-1}{x^2+2x-3}\right) dx = \int_{-2}^{0} \left(\frac{4}{x+3} + \frac{1}{x-1}\right) dx$$

$$= 4[\ln |x+3|]_{-2}^{0} + [\ln|x-1|]_{-2}^{0}$$

$$= 4[\ln 3 - \ln 1] + [\ln 1 - \ln 3]$$

$$= 3\ln 3$$

❖ $\int_{-3}^{4}|2x-4|\ dx$

الحل

$$\int_{-3}^{4}|2x-4|dx=\int_{-3}^{2}|2x-4|dx+\int_{2}^{4}|2x-4|dx$$
$$=\int_{-3}^{2}(-2x+4)dx+\int_{2}^{4}(2x-4)dx$$
$$=[-x^2+4x]_{-3}^{2}+[x^2-4x]_{2}^{4}$$
$$=[-(2)^2+4(2)]-[-(-3)^2+4(-3)]$$
$$+[4^2-4(4)]-[2^2-4(2)]$$
$$\approx 29$$

❖ $\int_{2}^{-1}\left(\sqrt{x+1}-3\right)\ dx$

الحل

$$\int_{2}^{-1}(\sqrt{x+1}-3)dx=-\int_{-1}^{2}(\sqrt{x+1}-3)dx$$
$$=-\int_{-1}^{2}\left((x+1)^{\frac{1}{2}}-3\right)dx$$
$$=-\left[\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}-3x\right]_{-1}^{2}$$
$$=-\left[\frac{2}{3}(2+1)^{\frac{3}{2}}-3(2)-\frac{2}{3}(-1+1)^{\frac{3}{2}}+3(-1)\right]$$
$$=-\left(\frac{2}{3}(3\sqrt{3})-6-3\right)$$
$$=9-2\sqrt{3}\approx 5.5$$

دون حساب قيمة التكامل أثبت أن :

❖ $\int_{0}^{2}\left(x^2-2x-3\right)\ dx\ \leq 0$

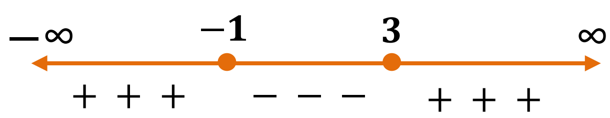
الحل

بفرض : $f(x)=\ x^2-2x-3$

و هي دالة متصلة على $[0\ ,2]$

نضع

$$x^2-2x-3=0$$
$$(x+1)(x-3)=0$$
$x=-1$ أو $x=3$



$$[0,2]\subseteq[-1,3]$$
$$f(x)\leq 0\quad,\quad \forall x\in[0,2]$$
$$\therefore\int_{0}^{2}f(x)dx\leq 0\quad,\quad \forall x\in[0,2]$$
$$\therefore\int_{0}^{2}(x^2-2x-3)dx\leq 0$$

❖ $\int_{1}^{4}|x-2|\ dx$

الحل

$$\int_{1}^{4}|x-2|dx=\int_{1}^{2}|x-2|dx+\int_{2}^{4}|x-2|dx$$
$$=\int_{1}^{2}(2-x)dx+\int_{2}^{4}(x-2)dx$$
$$=\left[2x-\frac{1}{2}x^2\right]_{1}^{2}+\left[\frac{1}{2}x^2-2x\right]_{2}^{4}$$
$$=\left[(4-2)-\left(2-\frac{1}{2}\right)\right]+[(8-8)-(2-4)]$$
$$=\left[2-1\frac{1}{2}\right]+[0-(-2)]$$
$$=\frac{1}{2}+2=2\frac{1}{2}$$

❖ أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f : $f(x) = x^2 - 3x$ و محور السينات

الحل

نوجد الاحداثيات السينية لنقاط تقاطع منحنى الدالة f مع محور السينات بوضع

$f(x) = 0$ $\quad x^2 - 3x = 0 \quad$ $x = 0$ أو $x = 3$

$$A = \left|\int_0^3 f(x)dx\right| = \left|\int_0^3 (x^2 - 3x)dx\right| = \left|\left[\frac{x^3}{3} - \frac{3}{2}x^2\right]_0^3\right|$$

$$= \left|\left[\left(9 - \frac{27}{2}\right) - (0)\right]\right| = \frac{9}{2} \text{ units square}$$

❖ أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f : $f(x) = x^3 - 4x$ و محور السينات في الفترة $[-1 , 1]$

الحل

نوجد قيم x بحيث $f(x) = 0$

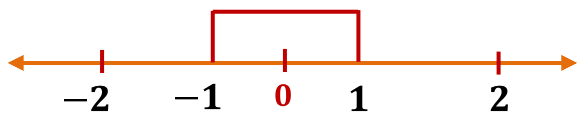
$x^3 - 4x = 0 \qquad x(x^2 - 4) = 0$

$x(x-2)(x+2) = 0$

$\therefore x = 0, 0 \in (-1, 1)$

$x = 2, 2 \notin (-1, 1)$

$x = -2, -2 \notin (-1, 1)$



مساحة المنطقة المحددة كما يلي :

$$A = \left|\int_{-1}^0 f(x)dx\right| + \left|\int_0^1 f(x)dx\right|$$

$$A = \left|\int_{-1}^0 (x^3 - 4x)dx\right| + \left|\int_0^1 (x^3 - 4x)dx\right|$$

$$A = \left|\left[\frac{1}{4}x^4 - 2x^2\right]_{-1}^0\right| + \left|\left[\frac{1}{4}x^4 - 2x^2\right]_0^1\right|$$

$$A = \left|(0) - \left(\frac{1}{4}(-1)^4 - 2(-1)^2\right)\right|$$

$$+ \left|\left(\frac{1}{4}(1)^4 - 2(1)^2\right) - (0)\right|$$

$$A = \left|\frac{7}{4}\right| + \left|-\frac{7}{4}\right| = \frac{7}{2} = 3.5 \text{ units square}$$

❖ أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالتين $y_1 = x^2 + 2 \quad , \quad y_2 = -2x + 5$

الحل

لإيجاد الإحداثيات السينية لنقاط التقاطع :

نضع $y_1 = y_2$

$$x^2 + 2 = -2x + 5$$
$$x^2 + 2x - 3 = 0$$
$x = 1$ أو $x = -3$

$$A = \left|\int_{-3}^{1} (y_2 - y_1)dx\right|$$
$$A = \left|\int_{-3}^{1} [(-2x + 5) - (x^2 + 2)]dx\right|$$
$$= \left|\int_{-3}^{1} [-x^2 - 2x + 3]dx\right|$$
$$= \left|\left[\frac{-x^3}{3} - x^2 + 3x\right]_{-3}^{1}\right|$$
$$= \left|\left[\frac{-(1)^3}{3} - (1)^2 + 3(1)\right] - \left[\frac{-(-3)^3}{3} - (-3)^2 + 3(-3)\right]\right|$$
$$= \left|\frac{32}{3}\right|$$
$= \frac{32}{3}$ (وحدة مربعة)

❖ أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة : $y_1 = 3 - x^2$ و المستقيم $y_2 = x$

الحل

لإيجاد الإحداثيات السينية لنقطتي التقاطع :

نضع $y_1 = y_2$

$$2 - x^2 = -x$$
$$x^2 - x - 2 = 0$$
$$(x - 2)(x + 1) = 0$$
$x = 2$ أو $x = -1$

∴ مساحة المنطقة هي :

$$A = \int_{-1}^{2} (y_1 - y_2)dx$$
$$= \int_{-1}^{2} (2 - x^2 - (-x))dx$$
$$= \left[2x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{2}$$
$$= \left[\left(2(2) - \frac{(2)^3}{3} + \frac{(2)^2}{2}\right) - \left(2(-1) - \frac{(-1)^3}{3} + \frac{(-1)^2}{2}\right)\right]$$
$= \frac{9}{2}$ (وحدة مربعة)

❖ أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة $f(x) = 4x - x^2$ و منحنى الدالة $g(x) = x^2 + 5$ و المستقيمين : $x = 2 , x = 0$ علما بأن منحنيى الدالتين f , g غير متقاطعين

الحل

$\because$ المنحنيين غير متقاطعين

$$A = \left|\int_0^2 (g(x) - f(x))dx\right|$$
$$= \left|\int_0^2 ((5 + x^2) - (4x - x^2))dx\right|$$
$$= \left|\int_0^2 (2x^2 - 4x + 5)dx\right|$$
$$= \left|\left[\frac{2}{3}x^3 - 2x^2 + 5x\right]_0^2\right|$$
$$= \left|\left[\frac{16}{3} - 8 + 10\right] - 0\right|$$
$$= \frac{22}{3} \text{ (وحدة مربعة)}$$

❖ أوجد حجم المجسم الناتج من دوران المنطقة المستوية دورة كاملة حول محور السينات و المحددة بمنحنى الدالة $f : f(x) = \frac{1}{2}x^2$ و المستقيم $y = 2$ في الفترة $[-2 , 2]$

الحل

بفرض $g(x) = y = 2$

نأخذ قيمة اختيارية في $[-2 , 2]$

و لتكن $x = 0$

$g(0) = 2 \quad , \quad f(0) = 0$

$\therefore g(x) \geq f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [-2, 2]$

$\therefore$ حجم المجسم الناتج عن الدوران :

$$V = \pi \int_{-2}^{2} [(g(x))^2 - (f(x))^2]dx$$
$$= \pi \int_{-2}^{2} \left[(2)^2 - \left(\frac{1}{2}x^2\right)^2\right] dx$$
$$= \pi \int_{-2}^{2} \left[4 - \frac{1}{4}x^4\right] dx$$
$$= \pi \left[4x - \frac{1}{20}x^5\right]_{-2}^{2}$$
$$= \pi \left[\left(4(2) - \frac{1}{20}(2)^5\right) - \left(4(-2) - \frac{1}{20}(-2)^5\right)\right]$$
$$V = \frac{64}{5}\pi \text{ (وحدة مكعبة)}$$

❖ أوجد حجم المجسم الناتج من دوران المنطقة المستوية دورة كاملة حول محور السينات و المحددة بمنحنيي الدالتين : $f(x) = x^2 \quad , \quad g(x) = \sqrt{x}$

الحل

$f(x) = g(x)$

$x^2 = \sqrt{x} \quad : (x > 0)$

بتربيع الطرفين : $x^4 = x$

$x^4 - x = 0$

$x(x^3 - 1) = 0$

نحصل على $x = 0 \; , \; x = 1$

نأخذ قيمة اختيارية في $(0\,,1)$ و لتكن $x = \frac{1}{4}$

$f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{16} \quad , \quad g\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}$

$\therefore g(x) \geq f(x) \geq 0 \; , \quad \forall x \in [0\,,1]$

∴ حجم المجسم الناتج :

$$V = \pi \int_0^1 [(g(x))^2 - (f(x))^2]dx$$

$$= \pi \int_0^1 [x - x^4]dx$$

$$= \pi \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{5}\right]_0^1$$

$$\therefore V = \pi \left[\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5}\right) - 0\right] = \frac{3}{10}\pi (\text{وحدة مكعبة})$$

❖ أوجد حجم المجسم الناتج من دوران المنطقة المستوية دورة كاملة حول محور السينات و المحددة بمنحنى الدالة f : $f(x) = x^2 + 2$ و محور السينات في الفترة $[-1\,,1]$

الحل

∴ حجم المجسم الناتج عن الدوران هو :

$$\therefore V = \pi \int_{-1}^{1} (f(x))^2 \, dx = \pi \int_{-1}^{1} (x^2 + 2)^2 \, dx = \pi \int_{-1}^{1} (x^4 + 4x^2 + 4)^2 \, dx$$

$$= \pi \left[\frac{1}{5}x^5 + \frac{4}{3}x^3 + 4x\right]_{-1}^{1} = \pi \left[\left(\frac{1}{5} + \frac{4}{3} + 4\right) - \left(\frac{-1}{5} - \frac{4}{3} - 4\right)\right]$$

$$= \frac{166}{15} \pi \; units \; cube$$

❖ أوجد حجم المجسم الناتج من دوران المنطقة المستوية دورة كاملة حول محور السينات و المحددة بمنحنيي الدالتين : $y_1 = x + 3 \quad , \quad y_2 = x^2 + 1$

الحل

المنطقة المستوية محددة بمنحنيي الدالتين y_1 , y_2

نوجد الإحداث السيني لنقاط تقاطع المنحنيين بوضع $y_1 = y_2$

$$x + 3 = x^2 + 1$$
$$\therefore x^2 - x - 2 = 0$$
$$(x-2)(x+1) = 0$$

و منها $x = 2 \ , x = -1$

بأخذ قيمة اختيارية في $(-1 , 2)$ و لتكن $x = 0$ نجد أن :

$$y_1 = 3 \ , \ y_2 = 1$$
$$\therefore y_1 \geq y_2 \geq 0 \qquad \forall x \in [-1, 2]$$

∴ حجم المجسم الناتجمن الدوران هو :

$$V = \pi \int_{-1}^{2} [(y_1)^2 - (y_2)^2] dx$$
$$V = \pi \int_{-1}^{2} [(x+3)^2 - (x^2+1)^2] dx$$
$$V = \pi \int_{-1}^{2} [(x^2 + 6x + 9) - (x^4 + 2x + 1)] dx$$
$$V = \pi \int_{-1}^{2} [-x^4 - x^2 + 6x + 8] dx$$
$$V = \pi \left[-\frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{3}x^3 + 3x^2 + 8x \right]$$
$$V = \pi \left[\left(\frac{284}{15} \right) - \left(\frac{-67}{15} \right) \right]$$
$$V = \frac{117\pi}{5} \ units\ cube$$

❖ أوجد حجم المجسم الناتج من دوران المنطقة المستوية دورة كاملة حول محور السينات و المحددة بمنحنى الدالة f : $f(x) = \sqrt{x-1}$ و محور السينات في الفترة $[1 , 5]$

الحل

∴ حجم المجسم الناتج هو :

$$V = \pi \int_{1}^{5} (f(x))^2 dx$$
$$= \pi \int_{1}^{5} (\sqrt{x-1})^2 dx$$
$$= \pi \int_{1}^{5} (x-1) dx$$
$$= \pi \left[\frac{x^2}{2} - x \right]_1^5$$
$$= \pi \left[\left(\frac{25}{2} - 5 \right) - \left(\frac{1}{2} - 1 \right) \right]$$
$$= 8\pi \ units\ cube$$

❖ أوجد حجم المجسم الناتج من دوران المنطقة المستوية دورة كاملة حول محور السينات و المحددة بمنحنيي الدالتين : $g(x) = \frac{x}{2} + 2$, $f(x) = \frac{x^2}{2} + 1$

الحل

نقاط التقاطع $f(x) = g(x)$

بالضرب ×2 $\frac{x^2}{2} + 1 = \frac{x}{2} + 2$

$x^2 + 2 = x + 4$

$x^2 + 2 - x - 4 = 0$

$x^2 - x - 2 = 0$

$(x-2)(x+1) = 0$

$x = 2 \quad x = -1$

نختار $(-1,2) \ni x = 0$

$f(0) = \frac{0^2}{2} + 1 = 1$

$g(0) = \frac{0}{2} + 2 = 2$

$g(x) > f(x)$

$\forall x \in (-1,2)$

$$V = \pi \int_a^b (g(x))^2 - (f(x))^2 dx$$

$$\pi \int_{-1}^{2} \left(\frac{x}{2} + 2\right)^2 - \left(\frac{x^2}{2} + 1\right)^2 dx$$

$$\pi \int_{-1}^{2} \left(\frac{x^2}{4} + 2x + 4\right) - \left(\frac{x^4}{4} + x^2 + 1\right) dx$$

$$\pi \int_{-1}^{2} \left(-\frac{x^4}{4} - \frac{3}{4}x^2 + 2x + 3\right) dx$$

$$\pi \left[-\frac{x^5}{20} - \frac{3x^3}{4x^3} + \frac{2x^2}{2} + 3x\right]_{-1}^{2}$$

$$\pi \left[\left[-\frac{(2)^5}{20} - \frac{1}{4}(2)^3 + (2)^2 + 3(2)\right] - \left[-\frac{(-1)^5}{20} - \frac{1}{4}(-1)^3 + (-1)^2 + 3(-1)\right]\right]$$

$= 25.44$ وحدة مكعبة

❖ أوجد طول القوس من منحنى الدالة f : $f(x) = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + 1$ في الفترة $[3, 8]$

الحل

$$f(x) = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + 1$$

$$f'(x) = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{2}}$$

$$(f'(x))^2 = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)^2 = x$$

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$$

$$= \int_3^8 \sqrt{1+x}\,dx = \int_3^8 (1+x)^{\frac{1}{2}}\, dx$$

$$= \left[\frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}}\right]_3^8$$

$$= \left[\frac{2}{3}(1+8)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}(1+3)^{\frac{3}{2}}\right]$$

$$= 12.6 \text{ units}$$

❖ أوجد طول القوس من منحنى الدالة f : $f(x) = \frac{1}{3}(3+2x)^{\frac{3}{2}}$ في الفترة $[0, 6]$

الحل

$$f(x) = \frac{1}{3}(3+2x)^{\frac{3}{2}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2}(3+2x)^{\frac{1}{2}} \cdot 2$$

$$f'(x) = (3+2x)^{\frac{1}{2}}$$

$$(f'(x))^2 = \left((3+2x)^{\frac{1}{2}}\right)^2$$

$$= 3 + 2x$$

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}dx$$

$$L = \int_0^2 \sqrt{1 + (3+2x)}dx$$

$$= \int_0^2 \sqrt{4+2x}dx$$

$$= \int_0^2 (4+2x)^{\frac{1}{2}}dx$$

$$L = \frac{1}{2}\int_0^2 2(4+2x)^{\frac{1}{2}}dx = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3}\left[(4+2x)^{\frac{3}{2}}\right]_0^2$$

$$= \frac{1}{3}\left[(4+2(2))^{\frac{3}{2}} - (4+2(0))^{\frac{3}{2}}\right]$$

$$L \approx 4.87 \text{ units}$$

❖ أوجد طول القوس من منحنى الدالة f : $f(x) = 5 + 2\sqrt{x^3}$ في الفترة $\left[0, \frac{1}{3}\right]$

الحل

$$f(x) = 5 + 2x^{\frac{3}{2}}$$

$$f'(x) = 3x^{\frac{1}{2}}$$

$$(f'(x))^2 = 9x$$

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$$

$$L = \int_0^{\frac{1}{3}} \sqrt{1 + 9x}\, dx = \int_0^{\frac{1}{3}} (1 + 9x)^{\frac{1}{2}}\, dx$$

$$L = \frac{1}{9}\int_0^{\frac{1}{3}} 9(1 + 9x)^{\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{9}\left[\frac{2}{3}(1 + 9x)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{\frac{1}{3}}$$

$$L = \frac{1}{9} \times \frac{2}{3}\left[(4)^{\frac{3}{2}} - (1)^{\frac{3}{2}}\right] = \frac{14}{27} \text{ units}$$

❖ أوجد معادلة منحنى الدالة f الذي ميله عند اي نقطة $P(x, y)$ يساوى $3x^2 + x$ و يمر بالنقطة $(2, 2)$

الحل

ميل منحنى الدالة هو $f'(x) = 3x^2 + x$

معادلة منحنى الدالة هى $f(x) = \int (3x^2 + x)dx$

$$f(x) = x^3 + \frac{1}{2}x^2 + C$$

لتعيين الثابت C نعوض بالنقطة $(2, 2)$ أي $f(2) = 2$

$$2 = 2^3 + \frac{1}{2}(2)^2 + C$$

$$\therefore C = -8$$

معادلة منحنى الدالة المطلوب هو $f(x) = x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 8$

❖ إذا كان ميل العمودى لمنحنى الدالة f عند اي نقطة عليه (x,y) هو $2x+5$ فأوجد معادلة المنحنى علما بأنه يمر بالنقطة $B(-2,3)$

الحل

ميل العمودى $= \frac{-1}{f'(x)}$ حيث $f'(x) \neq 0$

$$\therefore f'(x) = \frac{-1}{2x+5} = \int f'(x)dx = \int \frac{-1}{2x+5}\,dx$$

لتعيين الثابت C نعوض بالنقطة $P(-2,3)$

$$f(x) = \frac{-1}{2} ln\ |2x+5| + C$$

$$3 = \frac{-1}{2} ln|1| + C \qquad C = 3$$

معادلة منحنى الدالة المطلوب هي :

$$f(x) = \frac{-1}{2} ln\ |2x+5| + 3$$

❖ إذا كان ميل العمودى لمنحنى الدالة f عند أي نقطة عليه (x,y) يساوى $\sqrt{5-4x}$ فأوجد معادلة المنحنى علما بأنه يمر بالنقطة $A\ (-5,3)$

الحل

ميل العمودى $= -\frac{1}{f'(x)}$

$$f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{5-4x}} = -1(5-4x)^{-\frac{1}{2}}$$

$$f(x) = \int f'(x)dx = \int -1(5-4x)^{-\frac{1}{2}}\,dx$$

$$f(x) = \frac{-1.2}{-4\times 1}(5-4x)^{\frac{1}{2}} + C$$

$$f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{5-4x} + c \qquad A(-5-3)$$

$$3 = \frac{1}{2}\sqrt{5-4(-9)} + c \qquad c = \frac{1}{2}$$

$$f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{5-4x} + \frac{1}{2}$$

❖ حل المعادلة التفاضلية : $y' - 2xy = 0$

الحل

$$\frac{dy}{dx} - 2xy = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = 2xy \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{y} = 2xdx$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int 2xdx \quad \Rightarrow \quad ln|y| = x^2 + C \quad \Rightarrow \quad |y| = e^{x^2+C}$$

$$y = \pm e^{x^2} \cdot e^C \quad \Rightarrow \quad = \pm e^C \cdot e^{x^2} \quad (k = \pm e^C)$$

$$y = k \cdot e^{x^2}$$

❖ حل المعادلة : $2y' + y = 1$ ثم اوجد الحل الذي يحقق $y = 2$ عند $x = 1$

الحل

$$y' = -\frac{1}{2}y + \frac{1}{2} \qquad a = \frac{-1}{2} \qquad b = \frac{1}{2}$$

$$y = ke^{ax} - \frac{b}{a}$$

بالتعويض عن $x = -1 \,,\; y = 2$ $\quad \therefore y = Ke^{\frac{-1}{2}x} + 1$

$$2 = Ke^{+\frac{1}{2}} + 1 \qquad K = e^{-\frac{1}{2}}$$

$$y = e^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{1}{2}x} + 1 = e^{-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}} + 1$$

❖ حل المعادلة التفاضلية : $3y' - 2y = 4$ ثم أوجد الحل الخاص الذي يحقق $y = 3$ عندما $x = 0$

الحل

$$3y' = 2y + 4$$

$$y' = \frac{2}{3}y + \frac{4}{3} \qquad a = \frac{2}{3} \; , b = \frac{4}{3}$$

$$y = Ke^{ax} - \frac{b}{a}$$

$$y = Ke^{\frac{2}{3}x} - 2$$

عندما $x = 0 \, , \; y = 3$

$$3 = K - 2 \qquad K = 5$$

$$y = 5e^{\frac{2}{3}x} - 2$$

❖ حل المعادلة : $2y' = x^2 + x + 2$ التى يحقق $y = 4$ عندما $x = 1$

الحل

$$y' = x^2 + x + 2$$

$$y = \int (x^2 + x + 2)dx$$

$$y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 2x + c \qquad x = 1 \, , \quad y = 4$$

$$4 = \frac{1}{3}(1)^3 + \frac{1}{2}(1)^2 + 2(1) + c \qquad c = \frac{7}{6}$$

$$\therefore y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 2x + \frac{7}{6}$$

❖ حل المعادلة : $y'' = 3x^2 - 2x$

الحل

$$y' = \int (3x^2 - 2x)dx$$

$$y' = x^3 - x^2 + C_1$$

$$y = \int (x^3 - x^2 + C_1)dx$$

$$y = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + C_1x + C_2$$

❖ أوجد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل و يمر بالنقطتين $A(-1,4), B(1,4)$ ثم أوجد بؤرته و معادلة دليله

الحل

∵ منحنى القطع المكافئ يمر بالنقطتين $A(-1,4), B(1,4)$ و رأسه نقطة الاصل

∴ معادلة القطع المكافئ هى : $x^2 = 4Py$

بالتعويض عن (x,y) بإحداثيات النقطة B نحصل على :

$$(1)^2 = 4P(4) \qquad 1 = 16P \qquad P = \frac{1}{16}$$

∴ معادلة القطع المكافئ هى : $x^2 = \frac{1}{4}y$

البؤرة : $F(0,P) = F\left(0,\frac{1}{16}\right)$

معادلة الدليل : $y = -P \qquad y = -\frac{1}{16}$

❖ أوجد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل و يمر بالنقطة $A(1,2)$ و خط تماثله $x - axis$

الحل

رأس القطع المكافئ نقطة الأصل

∵ خط تماثله $x - axis$

∴ معادلته على الصورة $y^2 = 4Px$

∴ القطع المكافئ يمر بالنقطة

$A(1,2)$

∴ تحقق المعادلة أي أن :

نعوض في معادلة القطع عن x بـ 1 و عن y بـ 2

$$(2)^2 = 4P(1)$$

$$4 = 4P \implies P = 1$$

$$y^2 = 4Px$$

$$y^2 = 4(1)\,x$$

$$y^2 = 4x$$

❖ أوجد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل و معادلة دليله $x = -3$

الحل

$\because$ معادلة الدليل هى : $x = -3$

$\therefore$ خط التماثل أفقى .$(x - axis)$

$\therefore$ معادلة القطع المكافئ هى على الصورة $y^2 = 4Px$

معادلة الدليل هى على الصورة $x = -P$

$x = -3 \Rightarrow P = 3$

المعادلة : $y^2 = 4Px$

$y^2 = 4(3)x$

$y^2 = 12x$

❖ أوجد البؤرتين و الرأسين و طول المحور الاكبر للقطع الناقص الذي معادلته :
$25x^2 + 16y^2 - 400 = 0$

الحل

$$\because 25x + 16y - 400 = 0 \Rightarrow \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$$

المحور الاكبر ينطبق على محور الصادات

$\therefore$ المعادلة على الصورة $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$

$\therefore\ a^2 = 25 \Rightarrow a = 5$

$\therefore b^2 = 16 \Rightarrow b = 4$

$c^2 = a^2 - b^2 = 25 - 16 = 9$

$\Rightarrow c = 3$

البؤرتين هما :

$F_1\ (0, -3)\ , F_2(0, 3)$

$\therefore$ رأسا القطع الناقص هما :

$A_1\ (0, -5)\ , A_2(0, 5)$

طول المحور الأكبر هو :

$2a = 2 \times 5 = 10$

❖ أوجد معادلة القطع الناقص الذي مركزه $(0,0)$ و محوره الأصغر أفقي طوله $10cm$ و يمر بالنقطة $A(2,2\sqrt{6})$

الحل

المحور الأصغر أفقي

المحور الأكبر رأسي

معادلة القطع $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$

طول المحور الاصغر $2b=10$

$b=5$

النقطة $A(2,2\sqrt{6})$ تحقق المعادلة :

$$\frac{(2)^2}{(5)^2}+\frac{(2\sqrt{6})^2}{a^2}=1$$

$$a=\frac{10\sqrt{14}}{7}$$

∴ معادلة القطع :

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{\frac{200}{7}}=1$$

❖ أوجد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه $F_1\,(0,3)$, $F_2\,(0,3)$ و طول محوره الأصغر 4

الحل

تقع البؤرتان على محور الصادات فتكون المعادلة على الصورة $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$

∵ البؤرتان $F_1\,(0,-3)\,,F_2(0,3)$ $\therefore c=3$

∵ طول محوره الأصغر 4 $\therefore 2b=4 \implies b=2$

$$\therefore b^2=4$$

$$c^2=a^2-b^2$$

$$9=a^2-4$$

$$a^2=13$$

معادلة القطع الناقص هي :

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{13}=1$$

❖ أوجد معادلة معادلة قطع ناقص مركزه $(0,0)$ إذا كان محوره الأكبر ينطبق على المحور السيني و طوله $12cm$ و المسافة بين البؤرتين $8cm$

الحل

$\because$ طول المحور الأكبر هو $12cm$

$$\therefore 2a = 12 \Rightarrow a = 6$$

$\because$ المسافة بين البؤرتين هى $8cm$

$$\therefore 2c = 8 \Rightarrow c = 4$$

$$b^2 = a^2 - c^2$$

$$b^2 = 6^2 - 4^2$$

$$= 36 - 16 = 20$$

$\because$ محوره الأكبر ينطبق على المحور السيني فتكون المعادلة على الصورة

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

بالتعويض نحصل على المعادلة

$$\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{20} = 1$$

❖ أوجد معادلة قطع ناقص مركزه $(0,0)$ و إحدى بؤرتيه $F(4,0)$ و يمر بالنقطة $A(6,0)$ ثم أوجد الاختلاف المركزي له

الحل

$\because$ البؤرة $F(4,0)$ تقع على محور السينات

فتكون معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل هي :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$c = 4$$

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$a^2 = b^2 + 16$$

$\because$ القطع الناقص يمر بالنقطة $A(6,0)$

$$\frac{36}{a^2} + \frac{0}{b^2} = 1$$

$$\therefore a^2 = 36$$

$$\because b^2 = 36 - 16 = 20$$

$\therefore$ المعادلة هي :

$$\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{20} = 1$$

الاختلاف المركزى :

$$e = \frac{c}{a} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

❖ أوجد معادلة القطع الناقص الذي فيه البؤرتان $F_1\ (-2,0)\ ,F_2\ (2,0)$ و نقطتا طرفي المحور الأصغر $B_1\ (0,-3)\ ,B_2\ (0,3)$

الحل

$\because$ البؤرتان $F_1\ (-2,0)\ ,F_2\ (2,0)$

$$\therefore c=2$$

$\therefore$ المحور الاكبر ينطبق على المحور السيني

$\because$ نقطتا طرفي المحور الأصغر $B_1\ (0,-3)\ ,B_2\ (0,3)$

$$\therefore b=3$$

$$a^2=b^2+\ c^2$$

$$a^2=9+4=13$$

معادلة القطع الناقص هي :

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

$$\frac{x^2}{13}+\frac{y^2}{9}=1$$

❖ إذا كانت : $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{36}=1$ معادلة قطع ناقص فأوجد :

- رأسي القطع و طرفي المحور الأصغر
- البؤرتين
- طول كل من المحورين
- معادلتي دليلي القطع

الحل

(1) معادلة القطع الناقص هى : $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

و منها نجد أن :

$$\therefore\ a^2=36\ \Rightarrow a=6$$

$$\therefore b^2=16\ \Rightarrow\ b=4$$

المحور الأكبر ينطبق على محور الصادات

رأسا القطع هما : $A_1\ (0,-6)\ ,A_2\ (0,6)$

طرفا المحور الأصغر هما : $B_1\ (-4,0)\ ,B_2\ (4,0)$

(2) معادلة القطع الناقص هى : $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

و منه : $c=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$

البؤرتين هما : $F_1\ \left(0,-2\sqrt{5}\right)\ ,F_2\ \left(0,2\sqrt{5}\right)$

(3) معادلة الدليلين : $y=\frac{a^2}{c}\ ,y=-\frac{a^2}{c}$ و منه نجد :

$$y=\frac{a^2}{c}=\frac{36}{2\sqrt{5}}=\frac{18}{\sqrt{5}}=\frac{18\sqrt{5}}{5}$$

$$y=\ -\frac{a^2}{c}=-\ \frac{36}{2\sqrt{5}}=-\ \frac{18}{\sqrt{5}}=-\ \frac{18\sqrt{5}}{5}$$

(4) طول المحور الاكبر هو $2a$:

$$2a=2\times 6=12$$

(5) طول المحور الاصغر هو $2b$:

$$2b=2\times 4=8$$

❖ $V_1F_1 + V_1F_2 = 10$ ، حيث إن V_1 هو نقطة على القطع الناقص ، (F_1 , F_2) هما البورتين ، علما أن $F_1(3,0) , F_2(-3,0)$

الحل

$F_1(3,0) \qquad c = 3$

المحور الأكبر ينطبق على السينات :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$V_1F_1 + V_1F_2 = 2a = 10$$

$$a = 5$$

$$c^2 = a^2 - b^2$$

$$3^2 = 5^2 - b^2 \quad \Longrightarrow \quad b^2 = 16$$

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$$

❖ لتكن $9x^2 - 16y^2 = 144$ معادلة قطع زائد فأوجد :

- رأسي القطع الزائد
- البؤرتين
- معادلتي دليلي القطع

الحل

1) المعادلة $9x^2 - 16y^2 = 144$

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$$

المحور القاطع على محور السينات :

$$\therefore \ a^2 = 16 \Rightarrow a = 4$$

$$\therefore b^2 = 9 \Rightarrow b = 3$$

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$c^2 = 16 + 9 = 25$$

$$\Rightarrow c = 5$$

رأسا القطع الزائد هما :

$A_1\,(-4,0) , A_2(4,0)$

1) البؤرتان هما :

$F_1\,(-5,0) , F_2(5,0)$

3) معادلتا دليلي القطع الزائد :

$$y = \pm\frac{a^2}{c}$$

$$y = \pm\frac{16}{5}$$

❖ أوجد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه $F_2(0,3)$, $F_1(0,-3)$ و رأساه $A_2(0,2)$, $A_1(0,-2)$ ثم اوجد معادلة كل من خطيه المقاربين

الحل

∵ البؤرتين على محور الصادات

∴ معادلة القطع الزائد هي

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

∵ إحدى البؤرتين هى $F_2(0,3)$

∴ $c=3$

∵ أحد الرأسين $A_2(0,2)$

∴ $a=2$

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$b^2 = 3^2 - 2^2 = 5 \Rightarrow b=\sqrt{5}$$

∴ معادلة القطع الزائد هي :

$$\frac{y^2}{4}-\frac{x^2}{5}=1$$

معادلتا الخط المقاربين هما :

$$y=\pm\frac{a}{b}x \Rightarrow y=\pm\frac{2}{\sqrt{5}}x \Rightarrow y=\pm\frac{2\sqrt{5}}{5}x$$

❖ أوجد معادلة القطع الزائد الذي مركزه $(0,0)$ و أحد رأسيه $(-4,0)$ و يمر بالنقطة $(5,-2)$

الحل

∵ أحد رأسي القطع الزائد $(-4,0)$

∴ المحور القاطع ينطبق على محور السينات

و معادلة القطع هي $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

من المعطيات : $a=4$ فيكون :

$$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

يمر القطع الزائد بالنقطة $(5,-2)$

بالتعويض $\frac{25}{16}-1=\frac{4}{b^2} \Leftarrow \frac{25}{16}-\frac{4}{b^2}=1$ ∴

$$\frac{9}{16}=\frac{4}{b^2}$$

$$b^2=\frac{64}{9}$$

معادلة القطع الزائد :

$$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{\frac{64}{9}}=1$$

$$\frac{x^2}{16}-\frac{9y^2}{64}=1$$

❖ أوجد معادلة القطع الزائد الذي مركزه $(0,0)$ و أحد بؤرتيه $F(0,\sqrt{34})$ و معادلة أحد خطيه المقاربين هي : $y=\frac{3}{5}x$

الحل

$\because$ إحدى البؤرتين $F(0,\sqrt{34})$

$\therefore$ المحور القاطع ينطبق على محور الصادات و معادلته :

$$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$$

$$\because\ c^2=a^2+b^2$$

$$\therefore 34=a^2+b^2 \qquad (1)$$

معادلة المقارب : $y=\frac{a}{b}x$ حيث من المعطى

$$y=\frac{3}{5}x$$

$$\therefore \frac{3}{5}=\frac{a}{b}$$

$$\therefore a=\frac{3b}{5}$$

بالتعويض في المعادلة (1) :

$$34=\left(\frac{3b}{5}\right)^2+b^2$$

$$b=5$$

لإيجاد قيمة a نستخدم :

$$a=\frac{3b}{5}$$

$$a=\frac{3\times 5}{5}=3$$

و معادلة القطع الزائد هي :

$$\frac{y^2}{9}-\frac{x^2}{25}=1$$

❖ أوجد طول المحور الأكبر للقطع الناقص الذي اختلافه المركزي $\left(e=\frac{\sqrt{5}}{3}\right)$ و طول محوره الأصغر 4 وحدات

الحل

$$\because\ e=\frac{c}{a}$$

$$\therefore \frac{c}{a}=\frac{\sqrt{5}}{3} \qquad c=\frac{a\sqrt{5}}{3}$$

$2b=4$ طول المحور الأصغر

$$b=2$$

$$c^2=a^2-b^2$$

$$\frac{5a^2}{9}=a^2-4 \Rightarrow a^2=4+\frac{5a^2}{9}$$

$$9a^2=36+5a^2 \Rightarrow 4a^2=36$$

$$a^2=9 \Rightarrow a=3$$

$2a=2(3)=6$ طول المحور الأكبر

❖ أوجد الاختلاف المركزي للقطع الذي معادلته : $x - 25y = 1$

الحل

بالمقارنة قطع زائد معادلته :

$$\frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{\frac{1}{25}} = 1$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$a^2 = 1 \to a = 1$$

$$b^2 = \frac{1}{25} \to b = \frac{1}{5}$$

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$c^2 = 1 + \frac{1}{25} = \frac{26}{25}$$

$$c = \sqrt{\frac{26}{25}} = \frac{\sqrt{26}}{5}$$

الاختلاف المركزي :

$$e = \frac{c}{a}$$

$$e = \frac{\frac{\sqrt{26}}{5}}{1} = \frac{\sqrt{26}}{5}$$

❖ حدد نوع القطع المخروطي ثم اوجد معادلته إذا علمت أن اختلافه المركزي $(e = 1)$ و بؤرته : $F\left(\frac{1}{2}, 0\right)$

الحل

$$\because e = 1$$

∴ القطع المخروطي هو قطع مكافئ

∵ البؤرة هي $F\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ تنتمي إلى الجزء الموجب من محور السينات

$$\therefore p = \frac{1}{2}$$

محور التمثل هو محور السينات

فإن معادلة القطع هي : $y^2 = 4px$

$$y^2 = 4\left(\frac{1}{2}\right)x$$

$$y^2 = 2x$$

❖ حدد نوع القطع في كل مما يلي ثم اوجد معادلته . اختلافه المركزي $\left(e=\sqrt{3}\right)$ و معادلة أحد دليليه $x=\frac{1}{3}$

الحل

$e=\sqrt{3}>1$

∴ القطع الزائد

معادلة أحد دليليه $x=\frac{1}{3}$

المحور القاطع ينطبق على محور السينات

∴ معادلة الدليل $x=\frac{a^2}{c}$

$\frac{1}{3}=\frac{a^2}{c}$ $\quad c=3a^2 \quad (1)$

الاختلاف المركزي $e=\frac{c}{a}$

$\sqrt{3}=\frac{c}{a}$ $\quad c=\sqrt{3}\,a \quad (2)$

من 1 و 2 :

$3a^2=\sqrt{3}a$

$3a^2.\sqrt{3}a=0$

$a(3a-\sqrt{3})=0$

$a=0$ $\quad a=\frac{\sqrt{3}}{3}$

$\therefore C=\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}=1$

$c^2=a^2+b^2$

$1=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+b^2$ $\quad b^2=\frac{2}{3}$

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

$\frac{x^2}{1/3}-\frac{y^2}{4/9}=1$

❖ اختلافه المركزي $\left(e=\frac{\sqrt{7}}{4}\right)$ و إحدى بؤرتيه $F\left(0,\sqrt{7}\right)$

الحل

$\because e=\frac{\sqrt{7}}{4}\ ,\ \frac{\sqrt{7}}{4}<1$

∴ القطع هو قطع ناقص

∵ احدى البؤرتين $F\left(0,\sqrt{7}\right)$

∴ المحور الاكبر ينطبق على المحور الصادي و مركزه نقطة الأصل

$\because F\left(0,-\sqrt{7}\right)\Rightarrow c=\sqrt{7}$

$\because e=\frac{c}{a}$

$\therefore \frac{\sqrt{7}}{4}=\frac{\sqrt{7}}{a}$

$\therefore a=4$

في القطع الناقص يكون :

$a^2=b^2+c^2$

$b^2=a^2-c^2$

$b^2=4^2-(\sqrt{7})^2=16-7=9$

معادلة القطع الناقص :

$\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1$

$\frac{y^2}{16}+\frac{x^2}{9}=1$