تمرّنْ 5-1

التكامل غير المحدد

Indefinite Integral

المجموعة A تمارين مقالية

(1) أثبت أن: $F(x) = (3x+2)^5 + 7$ هي مشتقة عكسية للدالة $f(x) = 15(3x+2)^4$.

$$F'(x) = 5(3x+2)^4(3) = 15(3x+2)^4 = f(x)$$

(4) $\int (x^5 - 6x + 3)dx$

$$\int (x^5 - 6x + 3)dx = \frac{x^6}{6} - 3x^2 + 3x + C$$

(5) $\int (3 - 6x^2)dx$

$$\int (3 - 6x^2)dx = 3x - 2x^3 + C$$

(6) $\int \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}dx$

$$\int \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}dx = x^{\frac{1}{3}} + C$$

(7) $\int \left(x^3 - \frac{1}{x^3}\right)dx$

$$\int \left(x^3 - \frac{1}{x^3}\right)dx = \int (x^3 - x^{-3})dx = \frac{x^4}{4} + \frac{x^{-2}}{2} + C = \frac{x^4}{4} + \frac{1}{2x^2} + C$$

(8) $\int \frac{x^4 - 27x}{x^2 - 3x}dx$

$$\int \frac{x^4 - 27x}{x^2 - 3x}dx = \int \frac{x^3 - 27}{x - 3}dx = \int (x^2 + 3x + 9)dx = \frac{x^3}{3} + \frac{3}{2}x^2 + 9x + C$$

(9) $\int (x-2)(2x+3)dx$

$$\int (x-2)(2x+3)dx = \int (2x^2 - x - 6)dx = \frac{2}{3}x^3 - \frac{x^2}{2} - 6x + C$$

(10) $\int \frac{x-1}{\sqrt{x}+1}dx$

$$\int \frac{x-1}{\sqrt{x}+1}dx = \int \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}+1}dx = \int (\sqrt{x}-1)dx = \frac{2}{3}x\sqrt{x} - x + C$$

(11) $\int \frac{x - \sqrt{x}}{x}dx$

$$\int \frac{x - \sqrt{x}}{x}dx = \int \left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx = x - 2\sqrt{x} + C$$

(12) $\int \frac{5+2x}{\sqrt{x}}dx$

$$\int \frac{5+2x}{\sqrt{x}}dx = \int \frac{5}{\sqrt{x}}dx + \int 2\sqrt{x}\,dx = 10\sqrt{x} + \frac{4}{3}x\sqrt{x} + C$$

(13) $\int \left(x+\frac{1}{x}\right)^2 dx$

$$\int \left(x+\frac{1}{x}\right)^2 dx = \int \left(x^2+2+\frac{1}{x^2}\right)dx = \frac{x^3}{3} - \frac{1}{x} + 2x + C$$

(14) $\int (\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[4]{x^3})dx$

$$\int (\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[4]{x^3})dx = \frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}} + \frac{4}{7}x^{\frac{7}{4}} + C = \frac{3}{5}x\sqrt[3]{x^2} + \frac{4}{7}x\sqrt[4]{x^3} + C$$

(15) إذا كان $F(x) = \int (3x^2-5)dx$ وكان $F(2)=3$، فأوجد $F(x)$.

$F(x) = x^3 - 5x + C$

$F(2) = 3 \quad \therefore \quad C = 5 \quad \therefore \quad F(x) = x^3 - 5x + 5$

(16) إذا كان $F(x) = \int (9x^2-4x+5)dx$ وكان $F(-1)=0$، فأوجد $F(x)$.

$F(x) = 3x^3 - 2x^2 + 5x + C$

$F(-1) = 0 \quad \therefore \quad C = 10 \quad \therefore \quad F(x) = 3x^3 - 2x^2 + 5x + 10$

(17) **هامش الدخل.** افرض أنّ هامش الدخل عندما يباع x ألف وحدة هو:

$$\frac{dr}{dx} = 3x^2 - 6x + 12 \text{ (دينارًا لكل وحدة)}$$

أوجد دالة الدخل $r(x)$ إذا كان $r(0)=0$

$r(x) = x^3 - 3x^2 + 12x + C$

$r(0) = 0 \quad \therefore \quad r(x) = x^3 - 3x^2 + 12x$

(18) ألقيت كرة إلى الأعلى بسرعة ابتدائية $16\ m/s$ من سطح برج ارتفاعه $115\,m$ عن سطح الأرض.

(a) في أي زمن t سوف تصل الكرة إلى أعلى ارتفاع؟

(b) في أي زمن t سوف تصل الكرة إلى الأرض؟ (علمًا أن عجلة جاذبية الأرض $a(t) = 9.8\ m/s^2$).

(18) ليكن s ارتفاع الكرة فوق سطح الأرض عند الزمن t. نفرض أن s دالة في t قابلة للاشتقاق مرتين، ونرمز إلى سرعة القذيفة بالرمز v وإلى عجلتها بالرمز a : $v = \frac{ds}{dt}$ ، $a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$

(a) $a = -9.8$

$$a = \frac{dv}{dt} \Longrightarrow -9.8 = \frac{dv}{dt}$$

$$v_{(t)} = -\int 9.8\,dt = -9.8t + C_1$$

$$16 = -9.8(0) + C_1$$

$$v(t) = -9.8t + 16$$

عندما تصل الكرة إلى أعلى ارتفاع، تكون $v(t) = 0$، أي أن:

$$-9.8t + 16 = 0 \qquad \therefore \qquad t = 1.63s$$

(b) $s(t) = \int v(t)dt = \int(-9.8t + 16)dt = -4.9t^2 + 16t + C_2$

$$s(0) = 115 \qquad \therefore \qquad C_2 = 115$$

$$s(t) = -4.9t^2 + 16t + 115$$

عندما تصل الكرة إلى الأرض يكون ارتفاعها $s(t) = 0$، أي أن:

$$-4.9t^2 + 16t + 115 = 0 \qquad \therefore \qquad t = 6.74\,s$$

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (1–5)، ظلّل الدائرة (a) إذا كانت العبارة صحيحة و(b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) $F(x)=x^{-3}$ هي مشتقة عكسية للدالة: $f(x)=-3x^{-4}$ — (a) (b)

(2) $\int(-x^{-3}+x-1)dx=\frac{1}{2}x^{-2}+\frac{1}{2}x^{2}-x+C$ — (a) (b)

(3) $\int\frac{1}{x^{2}}dx=\frac{1}{x}+C$ — (a) (b)

(4) إذا كانت: $f'(x)=\frac{1}{x^{2}}+x$ ، $f(2)=1$ ، فإن: $f(x)=-\frac{1}{x}+\frac{1}{2}x^{2}+\frac{1}{2}$ — (a) (b)

(5) إذا كانت: $F(x)=\int(3x^{2}-12x+15)dx$ ، $F(0)=400$ ، فإن: $F(x)=x^{3}+6x^{2}+15x+400$

(a) (b)

(6) $\int\frac{4}{3}\sqrt[3]{t^{2}}\,dt=$

(a) $\frac{3t^{\frac{5}{3}}}{5}+C$
(b) $\frac{4t^{\frac{5}{3}}}{5}+C$
(c) $\frac{4}{3}\sqrt[3]{t^{5}}+C$
(d) $4\sqrt[3]{t^{5}}+C$

(7) $\int\left(\sqrt[3]{x^{2}}+\frac{1}{\sqrt[3]{x^{2}}}\right)dx=$

(a) $\frac{3}{5}\sqrt[3]{x}\left(x^{\frac{4}{3}}+5\right)+C$
(b) $\frac{3}{5}x^{\frac{2}{3}}\left(x^{-\frac{2}{3}}+5\right)+C$
(c) $\frac{5}{3}\sqrt[3]{x}\left(x^{\frac{4}{3}}+5\right)+C$
(d) $\frac{5}{3}x^{\frac{4}{3}}\left(x^{\frac{2}{3}}+5\right)+C$

(8) إذا كان: $x=-1$ ، $y=-5$ ، $\frac{dy}{dx}=x^{-\frac{2}{3}}$ فإنّ y تساوي:

(a) $-\frac{x^{2}}{3}-\frac{14}{3}$
(b) $3x^{\frac{1}{3}}+2$
(c) $3x^{\frac{1}{3}}-2$
(d) $3x^{\frac{1}{3}}$

(9) $\int\frac{2x+3}{\sqrt{x}}dx=$

(a) $\frac{3}{4}x^{\frac{3}{2}}+\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}+C$
(b) $\frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}}+6x^{\frac{1}{2}}+C$
(c) $\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}+6x^{\frac{1}{2}}+C$
(d) $\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{6}x^{\frac{1}{2}}+C$

(10) $\int \sqrt{x}(2+x^2)dx =$

a) $\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}} + C$

b) $\frac{3}{4}x^{\frac{3}{2}} + \frac{7}{2}x^{\frac{7}{2}} + C$

c) $\frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{7}{2}x^{\frac{7}{2}} + C$

d) $\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{7}{2}x^{\frac{7}{2}} + C$

(11) $\int \frac{2+\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{x}}dx =$

a) $x^{\frac{1}{2}} + \frac{6}{7}x^{\frac{7}{6}} + C$

b) $4x^{\frac{1}{2}} + \frac{6}{7}x^{\frac{7}{6}} + C$

c) $x^{\frac{1}{2}} + \frac{7}{6}x^{\frac{7}{6}} + C$

d) $4x^{\frac{1}{2}} + \frac{7}{6}x^{\frac{7}{6}} + C$

(12) $\int \left(\frac{x^2-4x+4}{x-2} + 2\right)^2 dx =$

a) $x^2 + C$

b) $2x + C$

c) $\frac{x^2}{2} + 2x + C$

d) $\frac{1}{3}x^3 + C$

تمرّنْ
5-2

التكامل بالتعويض

Integration by Substitution

المجموعة A تمارين مقالية

في التمارين (12—1)، استخدم التعويض المناسب لإيجاد التكامل.

(1) $\int (2x-3)\sqrt{x^2-3x+5}\,dx$ (2) $\int (4x-5)^8\,dx$

(1) $u = x^2-3x+5 \quad , \quad du = (2x-3)dx$

$$\int (2x-3)\sqrt{x^2-3x+5}\,dx = \int u^{\frac{1}{2}}du = \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}+C = \frac{2}{3}(x^2-3x+5)^{\frac{3}{2}}+C$$

(2) $u = 4x-5 \quad , \quad du = 4dx$

$$\int (4x-5)^8\,dx = \int \frac{1}{4}u^8\,du = \frac{u^9}{36}+C = \frac{(4x-5)^9}{36}+C$$

(3) $\int (x+2)\sqrt[3]{x^2+4x-1}\,dx$

(3) $u = x^2+4x-1 \quad , \quad du = (2x+4)dx = 2(x+2)dx$

$$\int (x+2)\sqrt[3]{x^2+4x-1}\,dx = \int \frac{1}{2}u^{\frac{1}{3}}du = \frac{3}{8}u^{\frac{4}{3}}+C = \frac{3}{8}(x^2+4x-1)^{\frac{4}{3}}+C$$

(4) $\int (x^2-1)\sqrt{x^3-3x+5}\,dx$

(4) $u = x^3-3x+5 \quad , \quad du = (3x^2-3)dx = 3(x^2-1)dx$

$$\int (x^2-1)\sqrt{x^3-3x+5}\,dx = \int \frac{1}{3}u^{\frac{1}{2}}du = \frac{2}{9}u^{\frac{3}{2}}+C = \frac{2}{9}(x^3-3x+5)^{\frac{3}{2}}+C$$

(5) $\int (x^2-2x)(x^3-3x^2+4)^5\,dx$

(5) $u = x^3-3x^2+4$, $du = (3x^2-6x)dx = 3(x^2-2x)dx$

$$\int (x^2-2x)(x^3-3x^2+4)^5\,dx = \int \frac{1}{3}u^5\,du = \frac{u^6}{18}+C = \frac{(x^3-3x^2+4)^6}{18}+C$$

(6) $\int \frac{x^2}{\sqrt[3]{4+x^3}}dx$

(6) $u = 4+x^3$, $du = 3x^2dx$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt[3]{4+x^3}}dx = \int x^2(4+x^3)^{-\frac{1}{3}}dx = \int \frac{1}{3}u^{-\frac{1}{3}}du = \frac{u^{\frac{2}{3}}}{2}+C = \frac{(4+x^3)^{\frac{2}{3}}}{2}+C$$

(7) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{2-3x}}$

(7) $u = 2-3x$, $du = -3dx$

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{2-3x}} = \int (2-3x)^{-\frac{1}{3}}dx = \int -\frac{1}{3}u^{-\frac{1}{3}}du = -\frac{u^{\frac{2}{3}}}{2}+C = -\frac{(2-3x)^{\frac{2}{3}}}{2}+C$$

(8) $\int x(3x+2)^6\,dx$

(8) $u = 3x+2$, $du = 3dx$, $x = \frac{u}{3}-\frac{2}{3}$

$$\int x(3x+2)^6dx = \int \left(\frac{u}{3}-\frac{2}{3}\right)u^6 \times \frac{1}{3}du = \frac{1}{3}\left[\frac{u^8}{24}-\frac{2u^7}{21}\right]+C$$

$$= \frac{u^8}{72}-\frac{2u^7}{63}+C = \frac{(3x+2)^8}{72}-\frac{2(3x+2)^7}{63}+C$$

(9) $\int \frac{x}{\sqrt{1+3x}}dx$

(9) $u = 1+3x$, $du = 3dx$, $x = \frac{u}{3}-\frac{1}{3}$

$$\int \frac{x}{\sqrt{1+3x}}dx = \int x(1+3x)^{-\frac{1}{2}}dx = \int \left(\frac{u}{3}-\frac{1}{3}\right)u^{-\frac{1}{2}} \times \frac{1}{3}du = \frac{1}{9}\int \left(u^{\frac{1}{2}}-u^{-\frac{1}{2}}\right)du$$

$$= \frac{2}{27}u^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{9}u^{\frac{1}{2}}+C = \frac{2}{27}(1+3x)^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{9}(1+3x)^{\frac{1}{2}}+C$$

(10) $\int x^2 \sqrt{x-1}\, dx$

(10) $u = x - 1 \quad , \quad du = dx \quad , \quad x^2 = (u+1)^2$

$$\int x^2 \sqrt{x-1}\, dx = \int (u+1)^2 \times u^{\frac{1}{2}} \times du = \int \left(u^{\frac{5}{2}} + 2u^{\frac{3}{2}} + u^{\frac{1}{2}}\right) du$$

$$= \frac{2}{7}u^{\frac{7}{2}} + \frac{4}{5}u^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{7}(x-1)^{\frac{7}{2}} + \frac{4}{5}(x-1)^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}} + C$$

(11) $\int x^3 \sqrt{x^2 - 2}\, dx$

(11) $u = x^2 - 2 \quad , \quad du = 2x\, dx \quad , \quad x^2 = u + 2$

$$\int x^2 \cdot x\sqrt{x^2 - 2}\, dx = \frac{1}{2}\int (u+2)u^{\frac{1}{2}} du = \frac{1}{2}\int u^{\frac{3}{2}} du + \int u^{\frac{1}{2}} du$$

$$= \frac{1}{5}(x^2-2)^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3}(x^2-2)^{\frac{3}{2}} + C$$

(12) $\int x^5 \sqrt[3]{x^3 + 1}\, dx$

$u = x^3 + 1 \quad , \quad du = 3x^2 dx \quad , \quad x^3 = u - 1$

$$\int x^3 \cdot x^2 (x^3+1)^{\frac{1}{3}} dx = \frac{1}{3}\int (u-1) \times u^{\frac{1}{3}} du = \frac{1}{3}\int u^{\frac{4}{3}} du - \frac{1}{3}\int u^{\frac{1}{3}} du$$

$$= \frac{1}{7}(x^3+1)^{\frac{7}{3}} - \frac{1}{4}(x^3+1)^{\frac{4}{3}} + C$$

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (5—1)، ظلّل الدائرة (a) إذا كانت العبارة صحيحة و(b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) $\int x(x^2-1)^{10}\,dx = \frac{1}{18}(x^2-1)^9 + C$ — (a) (b)

(2) $\int (x+1)\sqrt[3]{x^2+2x+3}\,dx = \frac{3}{8}\sqrt[3]{(x^2+2x+3)^4} + C$ — (a) (b)

(3) $\int \frac{dx}{\sqrt{3x-2}} = 2\sqrt{3x-2} + C$ — (a) (b)

(4) $\int (2x^2-1)(2x^3-3x+4)^5\,dx = \frac{1}{18}(2x^3-3x+4)^6 + C$ — (a) (b)

(5) $\int x\sqrt[3]{x+2}\,dx = \frac{3}{7}(x+2)^{\frac{7}{3}} - \frac{3}{2}(x+2)^{\frac{4}{3}} + C$ — (a) (b)

(6) $\int x(x^2+2)^7\,dx =$

(a) $\frac{1}{16}(x^2+2)^8 + C$ (b) $\frac{1}{4}(x^2+2)^8 + C$

(c) $\frac{1}{12}(x^2+2)^6 + C$ (d) $\frac{1}{3}(x^2+2)^6 + C$

(7) $\int \frac{x-1}{\sqrt{x-1}}\,dx =$

(a) $\frac{1}{3}(x-1)^{\frac{2}{3}} + C$ (b) $\frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}} + C$

(c) $\frac{2}{3}(x-1)^{\frac{2}{3}} + C$ (d) $\frac{3}{2}(x-1)^{\frac{2}{3}} + C$

(8) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{3x+1}} =$

(a) $\frac{2}{9}(3x+1)^{\frac{2}{3}} + C$ (b) $\frac{2}{3}(3x+1)^{\frac{2}{3}} + C$

(c) $2(3x+1)^{\frac{2}{3}} + C$ (d) $\frac{1}{2}(3x+1)^{\frac{2}{3}} + C$

(9) $\int \frac{(2+\sqrt{x})^{12}}{\sqrt{x}}\,dx =$

(a) $\frac{13}{2}(2+\sqrt{x})^{13} + C$ (b) $\frac{2}{13}(2+\sqrt{x})^{13} + C$

(c) $\frac{1}{26}(2+\sqrt{x})^{13} + C$ (d) $\frac{1}{22}(2+\sqrt{x})^{11} + C$

(10) $\int \frac{(x+1)}{\sqrt[3]{x^2+2x+3}}dx =$

a) $\frac{3}{4}\sqrt[3]{(x^2+2x+3)^2}+C$

b) $\frac{3}{2}\sqrt[3]{(x^2+2x+3)^2}+C$

c) $3\sqrt[3]{(x^2+2x+3)^2}+C$

d) $\frac{3}{4}\sqrt[3]{x^2+2x+3}+C$

(11) $\int \frac{x}{\sqrt{x+1}}dx =$

a) $\frac{3}{2}\sqrt{(x+1)^3}-2\sqrt{x+1}+C$

b) $\frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3}-\frac{1}{2}\sqrt{x+1}+C$

c) $\frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3}-2\sqrt{x+1}+C$

d) $\frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3}+2\sqrt{x+1}+C$

(12) إذا كانت: $F(x)=\int (x+1)(2x^2+4x-1)dx$ ، $F(-2)=\frac{9}{8}$، فإن: $F(x)$ تساوي:

a) $\frac{1}{8}(2x^2+4x-1)^2+\frac{5}{4}$

b) $\frac{1}{8}(2x^2+4x-1)^2+1$

c) $\frac{1}{4}(2x^2+4x-1)^2+1$

d) $4(2x^2+4x-1)^2-1$

تمرين
5−3

تكامل الدوال المثلثية

Integral of Trigonometric Functions

المجموعة A تمارين مقالية

في التمارين (1—14)، أوجد قيمة التكامل

(1) $\int (\sec x \tan x + \sin x)\,dx$

$$\int (\sec x \tan x + \sin x)\,dx = \sec x - \cos x + C$$

(2) $\int (\csc x \cot x + \sec^2 x)\,dx$

$$\int (\csc x \cot x + \sec^2 x)\,dx = -\int -\csc x \cot x\,dx + \int \sec^2 x\,dx = -\csc x + \tan x + C$$

(3) $\int \left(\frac{-1}{x^2} + 5\sin 3x\right)dx$

$$\int \left(-\frac{1}{x^2} + 5\sin 3x\right)dx = \frac{1}{x} - \frac{5}{3}\cos 3x + C$$

(4) $\int \sin^4 x \cos x\,dx$

$$\int \sin^4 x \cos x\,dx = \frac{\sin^5 x}{5} + C$$

(5) $\int \cos^5 x \sin x\,dx$

$$\int \cos^5 x \sin x\,dx = -\frac{\cos^6 x}{6} + C$$

(6) $\int x^2 \sin(x^3+1)\,dx$

$$\int x^2 \sin(x^3+1)\,dx = \frac{1}{3}\int 3x^2 \sin(x^3+1)\,dx = -\frac{1}{3}\cos(x^3+1) + C$$

(7) $\int \frac{\sin x}{\cos^3 x}\,dx$

$$\int \frac{\sin x}{\cos^3 x}\,dx = \int \sin x(\cos x)^{-3}\,dx = -\frac{(\cos x)^{-2}}{-2} + C = \frac{1}{2}\sec^2 x + C$$

(8) $\int \sec^3 x \tan x\,dx$

$$\int \sec^3 x \tan x\,dx = \int \sin x \times (\cos x)^{-4}\,dx = -\frac{(\cos x)^{-3}}{-3} + C = \frac{1}{3}\sec^3 x + C$$

(9) $\int \csc^3 x \cot x \, dx$

$$\int \csc^3 x \cot x \, dx = \int \cos x \times (\sin x)^{-4} dx = \frac{(\sin x)^{-3}}{-3} + C = -\frac{1}{3}\csc^3 x + C$$

(10) $\int \sqrt{\cot x} \csc^2 x \, dx$

$$\int \sqrt{\cot x} \csc^2 x \, dx = -\int \sqrt{\cot x}(-\csc^2 x) dx = -\frac{2}{3}\cot^{\frac{3}{2}} x + C$$

(11) $\int \sqrt{\tan x} \sec^2 x \, dx$

$$\int \sqrt{\tan x} \sec^2 x \, dx = \frac{2}{3}\tan^{\frac{3}{2}} x + C$$

(12) $\int \sqrt{1+\sin x} \cos x \, dx$

$$\int \sqrt{1+\sin x} \cos x \, dx = \frac{2}{3}(1+\sin x)^{\frac{3}{2}} + C$$

(13) $\int \frac{dx}{(\sin^2 x)\sqrt{1+\cot x}}$

$$\int \frac{1}{(\sin^2 x)\sqrt{1+\cot x}} dx = -\int \frac{-1}{\sin^2 x}(1+\cot x)^{-\frac{1}{2}} dx = -2\sqrt{1+\cot x} + C$$

(14) $\int \frac{dx}{(\cos^2 x)\sqrt{1+\tan x}}$

$$\int \frac{1}{(\cos^2 x)\sqrt{1+\tan x}} dx = \int \frac{1}{\cos^2 x}(1+\tan x)^{-\frac{1}{2}} dx = 2\sqrt{1+\tan x} + C$$

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (1—5)، ظلّل الدائرة (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) $\int \sec^2 x\, dx = \tan x + C$ — (a) (b)

(2) $\int \csc^2 x\, dx = \cot x + C$ — (a) (b)

(3) $\left(F'(x) = \sec^2 x\ ,\ F\left(\frac{\pi}{4}\right) = -1\right) \Longrightarrow F(x) = \tan x + 2$ — (a) (b)

(4) $(F'(x) = \cos x + \sin x\ ,\ F(\pi) = 1) \Longrightarrow F(x) = \sin x - \cos x$ — (a) (b)

(5) $(F'(x) = \sec x\ \tan x\ ,\ F(0) = 4) \Longrightarrow F(x) = \sec x + 3$ — (a) (b)

في التمارين (6—12)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(6) الصورة العامة للمشتقة العكسية للدالة f حيث $f(x) = 8 + \csc x \cot x$ هي:

(a) $F(x) = 8x + \csc x + C$ (b) $F(x) = 8x - \cot x + C$

(c) $F(x) = 8x - \csc x + C$ (d) $F(x) = 8x + \cot x + C$

(7) $\int \csc(5x)\cot(5x)\,dx =$

(a) $\frac{1}{5}\csc(5x) + C$ (b) $\csc(5x) + C$

(c) $\frac{1}{5}\cot(5x) + C$ (d) $-\frac{1}{5}\csc(5x) + C$

(8) $\int \sqrt[3]{\cot x}\csc^2 x\,dx =$

(a) $\frac{3}{4}\sqrt[3]{(\cot x)^4} + C$ (b) $-\frac{3}{4}\sqrt[3]{(\cot x)^4} + C$

(c) $-\frac{3}{4}\sqrt[4]{(\cot x)^3} + C$ (d) $3\sqrt[3]{(\cot x)^4} + C$

(9) إذا كانت $y_{\theta=0} = -3\ ,\ \frac{dy}{d\theta} = \sin\theta$ فإنّ y تساوي:

(a) $-\cos\theta$ (b) $2 - \cos\theta$

(c) $-2 - \cos\theta$ (d) $4 - \cos\theta$

(10) $\int \sec^5 x \tan x\,dx =$

(a) $\frac{5}{3}\sec^5 x + C$ (b) $\frac{1}{5}\sec^6 x + C$

(c) $\frac{1}{5}\sec^5 x + C$ (d) $-\frac{5}{3}\sec^5 x + C$

(11) $\int \frac{\csc^2 x}{\sqrt[3]{2+\cot x}} dx =$

a) $\frac{3}{2}(2+\cot x)^{\frac{2}{3}} + C$

b) $-\frac{3}{2}(2+\cot x)^{\frac{2}{3}} + C$

c) $-2\sqrt{2+\cot x} + C$

d) $\frac{4}{3}(2+\cot x)^{\frac{4}{3}} + C$

(12) $\int \frac{\sin(4x)}{\cos^5(4x)} dx =$

a) $-\frac{1}{16}\cos^{-4}(4x) + C$

b) $\frac{1}{16}\cos^{-4}(4x) + C$

c) $-\cos^{-4}(4x) + C$

d) $\cos^{-4}(4x) + C$

تمرّنْ
5–4

الدوالّ الأسيّة واللوغاريتمية

Exponential and Logarithmic Functions

المجموعة A تمارين مقالية

في التمارين (1–15)، أوجد $\frac{dy}{dx}$.

(1) $y = 7^x$

$\frac{dy}{dx} = (\ln 7) \times 7^x$

(2) $y = 5^{\sqrt{x+1}}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{\ln 5}{2\sqrt{x+1}} \times 5^{\sqrt{x+1}}$

(3) $y = 8^{\tan x}$

$\frac{dy}{dx} = (\ln 8)(\sec^2 x) \times 8^{\tan x}$

(4) $y = 2e^x$

$\frac{dy}{dx} = 2e^x$

(5) $y = e^{-x}$

$\frac{dy}{dx} = -e^{-x}$

(6) $y = 3e^{\frac{x}{5}}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{3}{5}e^{\frac{x}{5}}$

(7) $y = e^{x^2-x+1}$

$\frac{dy}{dx} = (2x-1)e^{x^2-x+1}$

(8) $y = e^{2\sqrt{x}+3}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{x}}e^{2\sqrt{x}+3}$

(9) $y = e^{\csc x}$

$\frac{dy}{dx} = -\csc x \cot x \cdot e^{\csc x}$

(10) $y = e^{x^4-5}$

$\frac{dy}{dx} = 4x^3 e^{x^4-5}$

(11) $y = \ln(x^3)$

$\frac{dy}{dx} = \frac{3}{x}$

(12) $y = \ln\left(\frac{1}{x^2}\right)$

(12) $\frac{dy}{dx} = -\frac{2}{x}$

(13) $y = \ln(x+2)$

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x+2}$

(14) $y = \ln(2-\cos x)$

$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin x}{2-\cos x}$

(15) $y = \ln(\ln x)$

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x\ln x}$

في التمارين (16–27)، أوجد التكامل غير المحدد في كل مما يلي:

(16) $\int e^{0.1x}dx$

$\frac{e^{0.1x}}{0.1}+C=10e^{0.1x}+C$

(17) $\int \frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}dx$

$-e^{\frac{1}{x}}+C$

(18) $\int (2x+1)e^{x^2+x+4}dx$

$e^{x^2+x+4}+C$

(19) $\int (x^2-2)e^{x^3-6x}dx$

$\frac{1}{3}e^{x^3-6x}+C$

(20) $\int \left(e^{0.5x}+\frac{0.5}{x}\right)dx$

$\frac{1}{0.5}e^{0.5x}+0.5\ln|x|+C$

(21) $\int \frac{e^x}{e^x+1}dx$

$\ln(e^x+1)+C$

(22) $\int \frac{x+1}{x^2+2x+5}dx$

$\frac{1}{2}\ln(x^2+2x+5)+C$

(23) $\int \frac{x^3-x}{x^4-2x^2}dx$

$\frac{1}{4}\ln|x^4-2x^2|+C$

(24) $\int \frac{x^2+1}{x}dx$

$\frac{x^2}{2}+\ln|x|+C$

(25) $\int \frac{2}{3x+1}dx$

$\frac{2}{3}\ln|3x+1|+C$

(26) $\int (2\tan x-\csc^2 x)dx$

$-2\ln|\cos x|+\cot x+C$

(27) $\int (\cot x+x^2)dx$

$\ln|\sin x|+\frac{x^3}{3}+C$

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (1–6)، ظلّل الدائرة (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) إذا كانت: $y = 4^{x-2}$ فإن: $\frac{dy}{dx} = 4x$ — (a) (b)

(2) إذا كانت: $f(x) = e^{x^2}$ فإن: $f'(x) = 2xe^{2x}$ — (a) (b)

(3) إذا كانت: $g(x) = \ln(2x+2)$ فإن: $g'(x) = \frac{1}{2x+2}$ — (a) (b)

(4) إذا كانت: $y = x\ln x - x$ فإن: $y' = \ln x$ — (a) (b)

(5) $\int \frac{1}{2x}dx = \frac{\ln x}{2} + C$ — (a) (b)

(6) $\int \frac{1}{3x+1}dx = \ln(3x+1) + C$ — (a) (b)

في التمارين (7–14)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(7) إذا كانت $y = e^{-5x}$، فإنّ $\frac{dy}{dx}$ تساوي:

(a) e^{-5x}
(b) $-e^{-5x}$
(c) $-5e^{-5x}$
(d) $5e^{-5x}$

(8) إذا كانت $y = x^2e^x - xe^x$، فإنّ $\frac{dy}{dx}$ تساوي:

(a) $e^x(x^2 + x - 1)$
(b) $e^x(x^2 - x)$
(c) $2xe^x - e^x$
(d) $e^x(x^2 + 2x + 1)$

(9) إذا كانت $y = (\ln x)^2$، فإنّ $\frac{dy}{dx}$ تساوي:

(a) $\frac{\ln x}{x}$
(b) $\frac{2\ln x}{x}$
(c) $\frac{x\ln x}{2}$
(d) $\frac{2\ln^2 x}{x}$

(10) إذا كانت $y = \ln\left(\frac{10}{x}\right)$، فإنّ $\frac{dy}{dx}$ تساوي:

(a) $-\frac{10}{x}$
(b) $\frac{10}{x}$
(c) $\frac{1}{x}$
(d) $-\frac{1}{x}$

(11) إذا كانت $y = \ln(x^2 + 1)$، فإنّ $\frac{dy}{dx}$ تساوي:

(a) $\frac{x}{x^2+1}$
(b) $\frac{2}{x^2+1}$
(c) $\frac{2x}{x^2+1}$
(d) $-\frac{2x}{x^2+1}$

(12) $\int \frac{2x}{x^2+1}dx =$

(a) $2\ln(x^2+1)+C$

(b) $\ln(x^2+1)+C$

(c) $\frac{x^2}{x^2+1}+C$

(d) $\frac{x}{\frac{1}{3}x^2+1}+C$

(13) $\int \frac{e^x+e^{-x}}{2}dx =$

(a) $\frac{e^x-e^{-x}}{2}+C$

(b) $\frac{e^x+e^{-x}}{2}+C$

(c) $\frac{e^{-x}-e^x}{2}+C$

(d) $\frac{e^{2x}-e^{-2x}}{2}+C$

(14) $\int \frac{e^x}{e^x-4}dx =$

(a) $-\frac{1}{2}(e^x-4)+C$

(b) $\ln|e^x-4|+C$

(c) $-\ln|e^x-4|+C$

(d) $\frac{1}{2}\ln|e^x-4|+C$

تمرّن
5-5

التكامل بالتجزيء

Integration by Parts

المجموعة A تمارين مقالية

في التمارين (1–14)، أوجد التكامل.

(1) $\int x\cos(3x)dx$

(2) $\int x\sin(5x)dx$

(1) $u = x$ $\qquad dv = \cos(3x)dx$

$du = dx$ $\qquad v = \frac{\sin(3x)}{3}$

$$\int x\cos(3x)dx = \frac{x}{3}\sin(3x) - \frac{1}{3}\int \sin(3x)dx$$

$$= \frac{x}{3}\sin(3x) + \frac{1}{9}\cos(3x) + C$$

(2) $u = x$ $\qquad dv = \sin(5x)dx$

$du = dx$ $\qquad v = -\frac{1}{5}\cos(5x)$

$$\int x\sin(5x)dx = -\frac{x}{5}\cos(5x) + \frac{1}{5}\int \cos(5x)dx$$

$$= -\frac{x}{5}\cos(5x) + \frac{1}{25}\sin(5x) + C$$

(3) $\int x e^{x-3} dx$

$u = x \quad , \quad du = dx$

$dv = e^{x-3} dx \qquad v = e^{x-3}$

$$\int x e^{x-3} dx = x e^{x-3} - \int e^{x-3} dx = x e^{x-3} - e^{x-3} + C$$

(4) $\int (x-5) e^{x-5} dx$

$$\int (x-5) e^{x-5} dx = (x-6) e^{x-5} + C$$

(إرشاد: $u = x-5 \quad , \quad dv = e^{x-5} dx$)

(5) $\int \ln \sqrt[4]{x}\, dx$

$u = \ln \sqrt[4]{x} = \ln x^{\frac{1}{4}} = \frac{1}{4} \ln x \qquad du = \frac{1}{4x} dx$

$dv = dx \qquad v = x$

$$\int \ln \sqrt[4]{x}\, dx = \frac{x}{4} \ln x - \int \frac{1}{4x} \times x\, dx = \frac{1}{4}(x \ln x - x) + C$$

(6) $\int \ln(2x-1) dx$

$u = \ln(2x-1) \qquad du = \frac{2}{2x-1} dx$

$dv = dx \qquad v = x$

$$\int \ln(2x-1) dx = x \ln(2x-1) - \int \frac{2x}{2x-1} dx = x \ln(2x-1) - \int \frac{2x-1+1}{2x-1} dx$$

$$= x \ln(2x-1) - \int \left(1 + \frac{1}{2x-1}\right) dx$$

$$= x \ln(2x-1) - x - \frac{1}{2} \ln(2x-1) + C$$

(7) $\int (2x+1) \ln(x+1) dx$

$$\int (2x+1) \ln(x+1) dx = (x^2 + x) \ln(x+1) - \frac{x^2}{2} + C$$

(إرشاد: $u = \ln(x+1) \quad , \quad dv = (2x+1) dx$)

(8) $\int \frac{\ln(x)}{x^2} dx$

$u = \ln x \qquad du = \frac{1}{x} dx$

$dv = \frac{1}{x^2} dx \qquad v = -\frac{1}{x}$

$$\int \frac{1}{x^2} \ln x\, dx = \frac{-\ln x}{x} + \int \frac{1}{x^2} dx = \frac{-\ln x}{x} - \frac{1}{x} + C$$

(9) $\int \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}} dx$

$u = \ln x^2 = 2 \ln x \qquad du = \frac{2}{x} dx$

$dv = x^2 dx \qquad v = \frac{x^3}{3}$

$$\int x^2 \ln x^2 dx = \frac{1}{3} x^3 \ln x^2 - \frac{2}{3} \int \frac{1}{x} \times x^3 dx = \frac{1}{3} x^3 \ln x^2 - \frac{2}{9} x^3 + C$$

(10) $\int x^2 \ln x^2 dx$

$u = x^2 - 2x \qquad du = 2(x-1) dx$

$dv = \cos x\, dx \qquad v = \sin x$

(11) $\int (x^2 - 2x)\cos x \, dx$

$u = x^2 - 2x \qquad du = 2(x-1)dx$

$dv = \cos x \, dx \qquad v = \sin x$

$\int (x^2 - 2x)\cos x \, dx = (x^2 - 2x)\sin x - 2\int (x-1)\sin x \, dx$

نستخدم القاعدة مرّة ثانية لإيجاد $\int (x-1)\sin x \, dx$

$u = x - 1 \qquad du = dx$

$dv = \sin x \, dx \qquad v = -\cos x$

$\int (x^2 - 2x)\cos x \, dx = (x^2 - 2x)\sin x - 2\left[-(x-1)\cos x + \int \cos x \, dx\right]$

$= (x^2 - 2x - 2)\sin x + 2(x-1)\cos x + C$

(12) $\int (x^2 + 3x)\sin x \, dx$

$u = x^2 + 3x \qquad du = (2x+3)dx$

$dv = \sin x \, dx \qquad v = -\cos x$

$\int (x^2 + 3x)\sin x \, dx = -(x^2 + 3x)\cos x + \int (2x+3)\cos x \, dx$

نستخدم القاعدة مرّة ثانية لإيجاد $\int (2x+3)\cos x \, dx$

$u = 2x + 3 \qquad du = 2dx$

$dv = \cos x \, dx \qquad v = \sin x$

$\int (x^2 + 3x)\sin x \, dx = -(x^2 + 3x)\cos x + (2x+3)\sin x - 2\int \sin x \, dx$

$= -(x^2 + 3x - 2)\cos x + (2x+3)\sin x + C$

(13) $\int x^2 e^{x+1} dx$

$u = x^2 \qquad du = 2x \, dx$

$dv = e^{x+1} dx \qquad v = e^{x+1}$

$\int x^2 e^{x+1} dx = x^2 e^{x+1} - \int 2x e^{x+1} dx$

نستخدم القاعدة مرّة ثانية لإيجاد $\int x e^{x+1} dx$

$u = x \qquad du = dx$

$dv = e^{x+1} dx \qquad v = e^{x+1}$

$\int x^2 e^{x+1} dx = x^2 e^{x+1} - 2x e^{x+1} + 2\int e^{x+1} dx = e^{x+1}(x^2 - 2x + 2) + C$

(14) $\int x^2 e^{2x-3} dx$

$u = x^2 \qquad du = 2x\,dx$

$dv = e^{2x-3}\,dx \qquad v = \frac{1}{2}e^{2x-3}$

$\int x^2 e^{2x-3}\,dx = \frac{x^2}{2} e^{2x-3} - \int x\, e^{2x-3}\,dx$

نستخدم القاعدة مرّة ثانية لإيجاد $\int x\, e^{2x-3}\,dx$

$u = x \qquad du = dx$

$dv = e^{2x-3}dx \qquad v = \frac{1}{2}e^{2x-3}$

$\int x^2 e^{2x-3} dx = \frac{x^2}{2} e^{2x-3} - \left[\frac{x}{2}e^{2x-3} - \int \frac{1}{2}e^{2x-3}\,dx\right]$

$= \frac{x^2}{2}e^{2x-3} - \frac{x}{2}e^{2x-3} + \frac{1}{4}e^{2x-3} + C = e^{2x-3}\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\right) + C$

(15) $\int (\ln(x))^2\, dx$

$u = (\ln(x))^2 \qquad du = 2\frac{\ln(x)}{x}dx$

$dv = dx \qquad v = x$

$\int (\ln(x))^2\, dx = x(\ln(x))^2 - 2\int \ln x\, dx$

نستخدم القاعدة مرّة ثانية لإيجاد $\int \ln x\, dx$

$u = \ln x \qquad du = \frac{dx}{x}$

$dv = dx \qquad v = x$

$\int (\ln(x))^2 dx = x(\ln(x))^2 - 2\left[x\ln x - \int dx\right] = x(\ln(x))^2 - 2x\ln x + 2x + C$

(16) $\int e^{2x} \sin x\, dx$

$u = \sin x \qquad dv = e^{2x}dx$

$du = \cos x\, dx \qquad v = \frac{1}{2}e^{2x}$

$\int e^{2x}\sin x\, dx = \frac{1}{2}\sin x\, e^{2x} - \frac{1}{2}\int \cos x\, e^{2x} dx$

نستخدم القاعدة مرّة ثانية فنحصل على:

$u = \cos x \qquad dv = e^{2x}dx$

$du = -\sin x\, dx \qquad v = \frac{1}{2}e^{2x}$

$\int e^{2x}\sin x\, dx = \frac{1}{2}\sin x\, e^{2x} - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\cos x\, e^{2x} + \frac{1}{2}\int e^{2x}\sin x\, dx\right]$

$= \frac{1}{2}\sin x\, e^{2x} - \frac{1}{4}\cos x\, e^{2x} - \frac{1}{4}\int e^{2x}\sin x\, dx$

$\frac{5}{4}\int e^{2x}\sin x\, dx = \frac{1}{2}\sin x\, e^{2x} - \frac{1}{4}\cos x\, e^{2x} \Longrightarrow \int e^{2x}\sin x\, dx = \frac{2}{5}e^{2x}\sin x - \frac{1}{5}e^{2x}\cos x + C$

(17) $\int \sin(\ln x)dx$

$u = \sin x(\ln x) \qquad du = \frac{\cos(\ln x)}{x}dx$

$dv = dx \qquad v = x$

$\int \sin(\ln x)dx = x\sin(\ln x) - \int \cos(\ln x)dx$

نستخدم القاعدة مرّة ثانية لإيجاد $\int \cos(\ln x)dx$

$u = \cos(\ln x) \qquad du = -\frac{\sin(\ln x)}{x}$

$dv = dx \qquad v = x$

$\int \sin(\ln x)dx = x\sin(\ln x) - [x\cos(\ln x)] + \int x \cdot \frac{\sin(\ln x)}{x}dx = x\sin(\ln x) - x\cos(\ln x) - \int \sin(\ln x)dx$

$\Longrightarrow 2\int \sin(\ln x)dx = x\sin(\ln x) - x\cos(\ln x)$

$\int \sin(\ln x)dx = \frac{x}{2}[\sin(\ln x) - \cos(\ln x)] + C$

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (5—1)، ظلّل الدائرة (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) $\int x\cos(2x)dx = \frac{1}{2}x\sin(2x) + \frac{1}{4}\cos 2x + C$ (a) (b)

(2) $\int x\sin(\pi x)dx = -\frac{x}{\pi}\cos(\pi x) + \frac{1}{\pi^2}\sin(\pi x) + C$ (a) (b)

(3) $\int xe^{6x}dx = \frac{1}{6}xe^{6x} - \frac{1}{36}e^{6x} + C$ (a) (b)

(4) $\int xe^{-x}dx = -xe^{-x} + e^{-x} + C$ (a) (b)

(5) $\int x\sec^2 x\,dx = x\tan x - \ln|\sec x| + C$ (a) (b)

في التمارين (6–11)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(6) $\int (2x+1)\sin x\, dx$

ⓐ $(2x+1)\cos x + 2\sin x + C$

ⓑ $-(2x+1)\cos x + 2\sin x + C$

ⓒ $-(x+1)\cos x - 2\sin x + C$

ⓓ $(2x+1)\cos x - \sin x + C$

(7) $\int x^2 \ln(x) dx =$

ⓐ $\frac{1}{3}x^3\ln(x) - \frac{x^3}{3} + C$

ⓑ $\frac{1}{3}x^3\ln(x) - \frac{x^3}{9} + C$

ⓒ $\frac{1}{3}x^3\ln(x) + \frac{x^3}{9} + C$

ⓓ $-\frac{1}{3}x^3\ln(x) - \frac{x^3}{9} + C$

في التمرينين (8–9)، إذا كان $\int (2x+1)\ln x\, dx = uv - \int v du$ فإن:

(8) $uv =$

ⓐ $(2x+1)\ln x$

ⓑ $2x\ln x$

ⓒ $\frac{2x+1}{2}\ln x$

ⓓ $x(x+1)\ln x$

(9) $\int v du =$

ⓐ $\frac{1}{2}x\ln x + C$

ⓑ $\frac{1}{2}x^2 + x + C$

ⓒ $(2x+1)\ln x + C$

ⓓ $\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + C$

في التمرينين (10–11)، إذا كان $\int (3x-1)e^{3x+2}\, dx = uv - \int v du$ فإن:

(10) $uv =$

ⓐ $(3x-1)e^{3x+2}$

ⓑ $\frac{1}{3}(3x-1)e^{3x+2}$

ⓒ $(3x-1)e^{x+2}$

ⓓ $\frac{1}{3}(x-1)e^{3x+2}$

(11) $\int v du =$

ⓐ $-\frac{1}{3}e^{3x+2} + C$

ⓑ $-e^{3x+2} + C$

ⓒ $\frac{1}{3}e^{3x+2} + C$

ⓓ $e^{3x+2} + C$

تمرّن
5-6

التكامل باستخدام الكسور الجزئية

Integration Using Partial Fractions

المجموعة A تمارين مقالية

في التمارين (1–4)، أوجد الكسور الجزئية لكل دالة f مما يلي ثم أوجد $\int f(x)dx$.

(1) $f(x) = \frac{2}{(x-5)(x-3)}$ (2) $f(x) = \frac{1}{x^2+2x}$

(1) $f(x) = \frac{A_1}{x-5} + \frac{A_2}{x-3}$

$2 = A_1(x-3) + A_2(x-5)$

عوّض عن x بـ 3 $\therefore$ $A_2 = -1$

عوّض عن x بـ 5 $\therefore$ $A_1 = 1$

$\therefore\ f(x) = \frac{1}{x-5} - \frac{1}{x-3}$

$\int f(x)\,dx = \ln|x-5| - \ln|x-3| + C$

(2) $x^2 + 2x = x(x+2)$

$f(x) = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{(x+2)}$

$1 = A_1(x+2) + A_2 x$

عوّض عن x بـ -2 $\therefore$ $A_2 = -\frac{1}{2}$

عوّض عن x بـ 0 $\therefore$ $A_1 = \frac{1}{2}$

$\therefore\ f(x) = \frac{1}{2x} - \frac{1}{2(x+2)}$

$\int f(x)\,dx = \frac{1}{2}\ln|x| - \frac{1}{2}\ln|x+2| + C$

(3) $f(x) = \frac{-x+10}{x^2+x-12}$

$$f(x) = \frac{A_1}{x-3} + \frac{A_2}{x+4}$$

$$-x + 10 = A_1(x+4) + A_2(x-3)$$

عوّض عن x بـ -4 $\quad \therefore \quad A_2 = -2$

عوّض عن x بـ 3 $\quad \therefore \quad A_1 = 1$

$$\therefore \ f(x) = \frac{1}{x-3} - \frac{2}{x+4}$$

$$\int f(x)\,dx = \ln|x-3| - 2\ln|x+4| + C$$

(4) $f(x) = \dfrac{12}{x^3 + 2x^2 - 3x}$

$$f(x) = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x-1} + \frac{A_3}{x+3}$$

$$12 = A_1(x-1)(x+3) + A_2(x)(x+3) + A_3(x)(x-1)$$

عوّض عن x بـ 0 $\quad \therefore \quad A_1 = -4$

عوّض عن x بـ 1 $\quad \therefore \quad A_2 = 3$

عوّض عن x بـ -3 $\quad \therefore \quad A_3 = 1$

$$f(x) = \frac{-4}{x} + \frac{3}{x-1} + \frac{1}{x+3}$$

$$\int f(x)\,dx = -4\ln|x| + 3\ln|x-1| + \ln|x+3| + C$$

(5) $\displaystyle\int \frac{x+17}{2x^2+5x-3}\,dx$

$$2x^2 + 5x - 3 = (2x-1)(x+3)$$

$$\frac{x+17}{(2x-1)(x+3)} = \frac{A_1}{2x-1} + \frac{A_2}{x+3}$$

$$x + 17 = A_1(x+3) + A_2(2x-1)$$

عوّض عن x بـ $\frac{1}{2}$ $\quad \therefore \quad A_1 = 5$

عوّض عن x بـ -3 $\quad \therefore \quad A_2 = -2$

$$\int \frac{x+17}{2x^2+5x-3}\,dx = \int \left(\frac{5}{2x-1} - \frac{2}{x+3}\right)dx$$

$$= \frac{5}{2}\ln|2x-1| - 2\ln|x+3| + C$$

(6) $\int \frac{-6x+25}{x^3-6x^2+9x}\,dx$

$x^3-6x^2+9x = x(x^2-6x+9) = x(x-3)^2$

$\frac{-6x+25}{x^3-6x^2+9x} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{(x-3)} + \frac{A_3}{(x-3)^2}$

$\therefore\ -6x+25 = A_1(x-3)^2 + A_2x(x-3) + A_3x$

عوّض عن x بـ 3 $\therefore$ $A_3 = \frac{7}{3}$

عوّض عن x بـ 0 $\therefore$ $A_1 = \frac{25}{9}$

عوّض في المعادلة عن $A_1 = \frac{25}{9}$ و $A_3 = \frac{7}{3}$ ولتكن $x = 1$ لإيجاد قيمة A_2.

$\therefore\ A_2 = -\frac{25}{9}$

$\frac{-6x+25}{x^3-6x^2+9x} = \frac{25}{9x} - \frac{25}{9(x-3)} + \frac{7}{3(x-3)^2}$

$\int \frac{-6x+25}{x^3-6x^2+9x}\,dx = \frac{25}{9}\ln|x| - \frac{25}{9}\ln|x-3| - \frac{7}{3}\times\frac{1}{(x-3)} + C$

(7) $\int \frac{3x^2-4x+3}{x^3-3x^2}\,dx$

$x^3-3x^2 = x^2(x-3)$

$\frac{3x^2-4x+3}{x^3-3x^2} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \frac{A_3}{x-3}$

$\therefore\ 3x^2-4x+3 = A_1x(x-3) + A_2(x-3) + A_3x^2$

عوّض عن x بـ 0 $\therefore$ $A_2 = -1$

عوّض عن x بـ 3 $\therefore$ $A_3 = 2$

عوّض في المعادلة عن $A_2 = -1$ و $A_3 = 2$ ولتكن $x = 1$ لإيجاد قيمة A_1.

$\therefore\ A_1 = 1$

$\frac{3x^2-4x+3}{x^3-3x^2} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x-3}$

$\int \frac{3x^2-4x+3}{x^3-3x^2}\,dx = \ln|x| + \frac{1}{x} + 2\ln|x-3| + C$

$$(8)\quad \int \frac{x^2+3x+2}{(x-3)^2}\,dx$$

$$\frac{x^2+3x+2}{(x-3)^2}=1+\frac{9x-7}{(x-3)^2}$$

$$\frac{9x-7}{(x-3)^2}=\frac{A_1}{x-3}+\frac{A_2}{(x-3)^2}$$

$$9x-7=A_1(x-3)+A_2$$

عوض عن x بـ 3 $\therefore\ A_2=20$

عوض عن A_2 بـ 20 ولتكن $x=1$ لإيجاد قيمة A_1.

$$\therefore\ A_1=9$$

$$\frac{x^2+3x+2}{(x-3)^2}=1+\frac{9}{x-3}+\frac{20}{(x-3)^2}$$

$$\int \frac{x^2+3x+2}{(x-3)^2}\,dx=x+9\ln|x-3|-\frac{20}{x-3}+C$$

$$(9)\quad \int \frac{2x^2+x+3}{x^2-1}\,dx$$

$$\frac{2x^2+x+3}{x^2-1}=2+\frac{x+5}{x^2-1}$$

$$\frac{x+5}{x^2-1}=\frac{A_1}{x-1}+\frac{A_2}{x+1}$$

$$x+5=A_1(x+1)+A_2(x-1)$$

عوض عن x بـ 1 $\therefore\ A_1=3$

عوض عن x بـ -1 $\therefore\ A_2=-2$

$$\frac{2x^2+x+3}{x^2-1}=2+\frac{3}{x-1}-\frac{2}{x+1}$$

$$\int \frac{2x^2+x+3}{x^2-1}\,dx=\int\left(2+\frac{3}{x-1}-\frac{2}{x+1}\right)dx$$

$$=2x+3\ln|x-1|-2\ln|x+1|+C$$

(10) $\int \frac{x^3 - 2}{x^2 + x}\,dx$

$$\frac{x^3-2}{x^2+x} = x - 1 + \frac{x-2}{x^2+x}$$

$$\frac{x-2}{x^2+x} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x+1}$$

$$x - 2 = A_1(x+1) + A_2 x$$

عوّض عن x بـ 0 $\therefore$ $A_1 = -2$

عوّض عن x بـ -1 $\therefore$ $A_2 = 3$

$$\frac{x^3-2}{x^2+x} = x - 1 - \frac{2}{x} + \frac{3}{x+1}$$

$$\int \frac{x^3-2}{x^2+x}\,dx = \frac{x^2}{2} - x - 2\ln|x| + 3\ln|x+1| + C$$

(11) $\int \frac{x^4 - 2x^3 + x^2 + 2x - 1}{x^2 - 2x + 1}\,dx$

$$\frac{x^4-2x^3+x^2+2x-1}{x^2-2x+1} = x^2 + \frac{2x-1}{x^2-2x+1}$$

$$\frac{2x-1}{(x-1)^2} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{(x-1)^2}$$

$$2x - 1 = A_1(x-1) + A_2$$

عوّض عن x بـ 1 $\therefore$ $A_2 = 1$

عوّض عن A_2 بـ 1 ولكن $x = 0$ $\therefore$ $A_1 = 2$

$$\frac{x^4-2x^3+x^2+2x-1}{x^2-2x+1} = x^2 + \frac{2}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}$$

$$\int \frac{x^4-2x^3+x^2+2x-1}{x^2-2x+1}\,dx = \frac{x^3}{3} + 2\ln|x-1| - \frac{1}{(x-1)} + C$$

(12) لنأخذ $f(x)=\dfrac{2x^4-5x^3-7x^2+32x-28}{x^3-2x^2-4x+8}$

(a) اكتب $f(x)$ على صورة $q(x)+\dfrac{r(x)}{h(x)}$، حيث درجة $r(x)$ أصغر من درجة $h(x)$.

(b) أوجد الكسور الجزئيّة للحدودية النسبية $\dfrac{r(x)}{h(x)}$.

(c) أوجد $\int f(x)\,dx$.

(12) (a) $f(x)=\dfrac{(x-2)(2x^3-x^2-9x+14)}{(x-2)^2(x+2)}=\dfrac{2x^3-x^2-9x+14}{x^2-4}$

$=2x-1+\dfrac{-x+10}{(x-2)(x+2)}$

(b) $\dfrac{-x+10}{(x-2)(x+2)}=\dfrac{A_1}{x-2}+\dfrac{A_2}{x+2}=\dfrac{2}{x-2}-\dfrac{3}{x+2}$

(c) $f(x)=2x-1+\dfrac{2}{x-2}+\dfrac{-3}{x+2}$

$\int f(x)\,dx=x^2-x+2\ln|x-2|-3\ln|x+2|+C$

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (1–4)، ظلّل الدائرة (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) $\int \dfrac{4dx}{(x+3)(x+7)}=\ln|x+3|+\ln|x+7|+C$ (a) (b)

(2) $\int \dfrac{-6dx}{x^2+3x}=-2\ln|x+3|+2\ln|x|+C$ (a) (b)

(3) الدالة $f(x)=\dfrac{4x-11}{2x^2-x-3}$ على صورة كسور جزئية هي: $f(x)=\dfrac{3}{x+1}-\dfrac{2}{2x-3}$ (a) (b)

(4) للحدودية النسبية $\dfrac{x^2-x+2}{x^3-2x^2+x}$ ثلاثة كسور جزئية. (a) (b)

في التمارين (5—10)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(5) $\int \frac{6}{x^2-9}dx =$

ⓐ $\ln|x+3|-\ln|x-3|+C$

ⓑ $\ln(x-3)-\ln(x+3)+C$

ⓒ $\ln|x+3|+\ln|x-3|+C$

ⓓ $\ln|x-3|-\ln|x+3|+C$

(6) $\int \frac{7x-7}{x^2-3x-10}dx =$

ⓐ $4\ln|x+2|+3\ln|x-5|+C$

ⓑ $3\ln|x+2|+2\ln|x-5|+C$

ⓒ $4\ln|x-5|+3\ln|x+2|+C$

ⓓ $4\ln|x-5|-3\ln|x+2|+C$

(7) الدالة النسبية $f(x)=\frac{x}{x^2-4}$ على صورة كسور جزئية هي $f(x)$ تساوي:

ⓐ $\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x+2}$

ⓑ $\frac{1}{2(x-2)}+\frac{1}{2(x+2)}$

ⓒ $\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+2}$

ⓓ $\frac{1}{2(x-2)}-\frac{1}{2(x+2)}$

(8) $\int \frac{2x^2-4x+3}{x^2-1}dx =$

ⓐ $2+2\ln|x-1|-\frac{9}{2}\ln|x+1|+C$

ⓑ $\frac{1}{2}\ln|x-1|-\frac{9}{2}\ln|x+1|+C$

ⓒ $2x+\frac{1}{2}\ln|x-1|-\frac{9}{2}\ln|x+1|+C$

ⓓ $x+\frac{1}{2}\ln|x-1|-9\ln|x+1|+C$

(9) $\int \frac{3x^2+2x}{x^2-4}dx =$

ⓐ $4\ln|x-2|-2\ln|x+2|+C$

ⓑ $3x+2\ln|x-2|-2\ln|x-2|+C$

ⓒ $3x+4\ln|x-2|-2\ln|x+2|+C$

ⓓ $3x+4\ln|x-2|+2\ln|x+2|+C$

(10) $\int \frac{x^3+2}{x^2-x}dx =$

ⓐ $\frac{x^2}{2}+3\ln|x-1|+2\ln|x|+C$

ⓑ $\frac{x^2}{2}-x+3\ln|x-1|+2\ln|x|+C$

ⓒ $\frac{x^2}{2}-3\ln|x-1|+2\ln|x|+C$

ⓓ $\frac{x^2}{2}+x+3\ln|x-1|-2\ln|x|+C$

تمرّن
5–7

التكامل المحدد

Definite Integral

المجموعة A تمارين مقالية

في التمارين (1–7)، أوجد:

(1) $\int_{-1}^{1} 3x(x-4)\,dx$

$\int_{-1}^{1}(3x^2-12x)dx = [x^3-6x^2]_{-1}^{1} = 2$

(2) $\int_{0}^{2} (x+1)^2\,dx$

$\int_{0}^{2}(x^2+2x+1)dx = \left[\frac{x^3}{3}+x^2+x\right]_0^2 = \frac{26}{3}$

(3) $\int_{0}^{4} \frac{x^2-1}{x+1}\,dx$

$\int_0^4 \frac{(x-1)(x+1)}{(x+1)}dx = \int_0^4 (x-1)dx = \left[\frac{x^2}{2}-x\right]_0^4 = 4$

(4) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos 3x\,dx$

$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos 3x\,dx = \frac{1}{3}\sin 3x\Big]_0^{\frac{\pi}{3}} =$

$\frac{1}{3}[\sin\pi - \sin 0] = 0$

(5) $\int_1^4 \frac{8-x^4}{2x^2}\,dx$

$= \int_1^4 \left(\frac{4}{x^2}-\frac{x^2}{2}\right)dx = \left(-\frac{4}{x}\right)_1^4 - \left(\frac{x^3}{6}\right)_1^4 = -\frac{15}{2}$

(6) $\int_0^1 x\sqrt{x}\,dx$

$\int_0^1 x \cdot x^{\frac{1}{2}}dx = \int_0^1 x^{\frac{3}{2}}dx = \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}\Bigg]_0^1 = \frac{2}{5}$

(7) $\int_1^2 \left(3e^x+\frac{5}{x}\right)dx$

$[3e^x + 5\ln|x|]_1^2 = 3(e^2-e)+5\ln 2$

في التمارين (8–10)، أوجد:

(8) $\int_{-1}^{3} |x-2|\,dx$

(9) $\int_{-1}^{1} |x^3|\,dx$

(10) $\int_{-2}^{3} (x|x|+3)\,dx$

(8) $\int_{-1}^{2}(-x+2)dx + \int_2^3 (x-2)dx = \left[-\frac{x^2}{2}+2x\right]_{-1}^{2} + \left[\frac{x^2}{2}-2x\right]_2^3 = 5$

(9) $\int_{-1}^{0} -x^3\,dx + \int_0^1 x^3\,dx = -\frac{x^4}{4}\Big]_{-1}^{0} + \frac{x^4}{4}\Big]_0^1 = \frac{1}{2}$

(10) $\int_{-2}^{0}(-x^2+3)dx + \int_0^3 (x^2+3)dx = \left[-\frac{x^3}{3}+3x\right]_{-2}^{0} + \left[\frac{x^3}{3}+3x\right]_0^3 = \frac{64}{3}$

في التمارين (11–13)، دون حساب قيمة التكامل أثبت أن:

(11) $\int_{-4}^{2}(x^2+2x-8)\,dx \le 0$

$x^2+2x-8=(x-2)(x+4)$

$x_1=-4 \quad , \quad x_2=2$

x		-4		2	
x^2+2x-8	$+$	0	$-$	0	$+$

$\therefore\ x^2+2x-8 \leqslant 0 \ \therefore\ \forall x\in[-4,2]$

$\int_{-4}^{2}(x^2+2x-8)\,dx \leqslant 0$

(12) $\int_{-1}^{0}(x^3-5x^2-6x)\,dx \ge 0$

$x^3-5x^2-6x=x(x^2-5x-6)=x(x+1)(x-6)$

x		-1		0		6	
	$-$		$+$		$-$		$+$

$x^3-5x^2-6x \geqslant 0 \qquad \forall x\in[-1,0]$

$\int_{-1}^{0}(x^3-5x^2-6x)\,dx \geqslant 0$

(13) $\int_{0}^{1}(x^2-3x+7)\,dx \ge \int_{0}^{1}(4x-5)\,dx$

$f(x)=x^2-3x+7$

$g(x)=4x-5$

$f(x)-g(x)=x^2-7x+12=(x-3)(x-4)$

x	$0 \quad 1$	3		4	
$f(x)-g(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

$f(x)-g(x) \geqslant 0 \qquad \forall x\in[0,1]$

$\int_{0}^{1}(f(x)-g(x))\,dx \geqslant 0 \Longrightarrow \int_{0}^{1}f(x)\,dx \geqslant \int_{0}^{1}g(x)\,dx$

$\int_{0}^{1}(x^2-3x+7)\,dx \geqslant \int_{0}^{1}(4x-5)\,dx$

في التمارين (14–15)، استعن برسم بيان الدوال لإيجاد:

(14) $\int_{-3}^{3} \sqrt{9-x^2}\, dx$

$y=\sqrt{9-x^2} \quad \therefore \quad y^2=9-x^2 \quad \therefore \quad y^2+x^2=9$

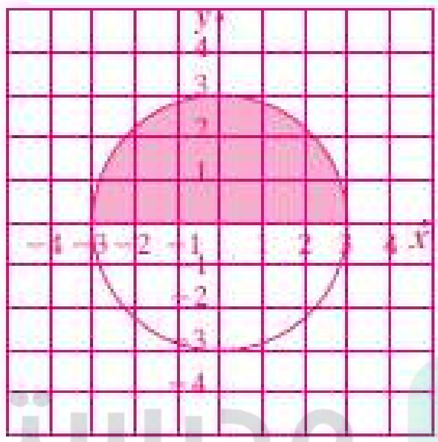
وهي معادلة دائرة مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها 3 وحدات.

والدالة $y=\sqrt{9-x^2}$ تمثل معادلة النصف العلوي للدائرة.

$\therefore$ مساحة المنطقة المظللة تساوي:

$\therefore \int_{-3}^{3} \sqrt{9-x^2}\, dx$

$=\frac{1}{2}\pi(3)^2=\frac{9}{2}\pi$



في التمارين (14–15)، استعن برسم بيان الدوال لإيجاد:

(15) $\int_{-5}^{0} -\sqrt{25-x^2}\, dx$

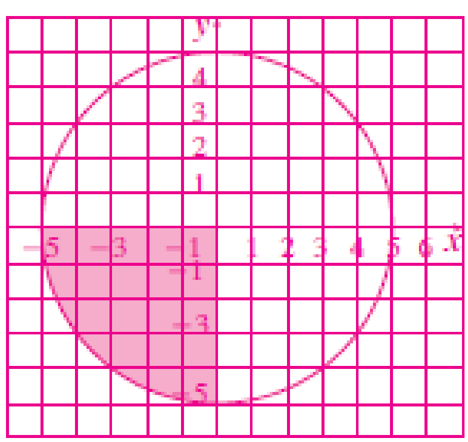
$y=-\sqrt{25-x^2} \quad \therefore \quad y^2=25-x^2 \quad \therefore \quad y^2+x^2=25$

وهي معادلة دائرة مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها 5 وحدات.

والدالة $y=-\sqrt{25-x^2}$ تمثل معادلة النصف السفلي للدائرة.

$\int_{-5}^{0} -\sqrt{25-x^2}\, dx = -A$

$=\frac{-1}{4}\pi(5)^2=\frac{-25}{4}\pi$



في التمارين (16–19)، استخدم التعويض المناسب لحساب التكامل.

(16) $\int_0^3 \frac{dx}{(1+x)^2}$ (17) $\int_e^6 \frac{dx}{x\ln x}$

(18) $\int_1^e \frac{\ln^6 x}{x}dx$ (19) $\int_{-1}^3 \frac{x\,dx}{x^2+1}$

(16) $u = 1 + x \quad , \quad du = dx$

$$\int_0^3 \frac{dx}{(1+x)^2} = \int_1^4 \frac{1}{u^2}du = -\frac{1}{u}\Big]_1^4 = \frac{3}{4}$$

(17) $u = \ln x \quad , \quad du = \frac{dx}{x}$

$x = e \quad , \quad u = 1$

$x = 6 \quad , \quad u = \ln 6$

$$\int_1^{\ln 6} \frac{du}{u} = [\ln|u|]_1^{\ln 6} = \ln(\ln 6)$$

(18) $u = \ln x \quad , \quad du = \frac{dx}{x}$

$$\int_1^e \frac{(\ln x)^6}{x}dx = \int_0^1 u^6 du = \left[\frac{u^7}{7}\right]_0^1 = \frac{1}{7}$$

(19) $u = x^2 + 1 \quad , \quad du = 2x\,dx$

$x = -1 \Longrightarrow u = 2 \quad , \quad x = 3 \Longrightarrow u = 10$

$$\int_{-1}^3 \frac{x\,dx}{x^2+1} = \frac{1}{2}\int_2^{10} \frac{du}{u} = \frac{1}{2}[\ln|u|]_2^{10} = \frac{1}{2}\ln 5$$

في التمارين (20—23)، أوجد:

(20) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\,dx$

$u = x \quad , \quad du = dx$

$dv = \sin x\,dx \quad , \quad v = -\cos x$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\,dx = -x\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx = [\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$$

(21) $\int_0^{\pi} x\cos 3x\,dx$

$u = x \quad , \quad du = dx$

$dv = \cos 3x\,dx \quad , \quad v = \frac{1}{3}\sin 3x$

$$\int_0^{\pi} x\cos 3x\,dx = \frac{x}{3}\sin x]_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\frac{1}{3}\sin 3x\,dx = \left[\frac{1}{9}\cos 3x\right]_0^{\pi} = -\frac{2}{9}$$

(22) $\int_1^{3} x^3\ln x\,dx$

$u = \ln x \quad du = \frac{dx}{x}$

$dv = x^3 \quad , \quad v = \frac{x^4}{4}$

$$\int_1^3 x^3\ln x\,dx = \frac{x^4}{4}\ln x]_1^3 - \int_1^3 \frac{x^3}{4}dx = \frac{81}{4}\ln 3 - \left[\frac{x^4}{16}\right]_1^3 = \frac{81}{4}\ln 3 - 5$$

(23) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\cos x\,dx$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\cos x\,dx$

$u = \cos x \qquad dv = e^{2x}dx$

$du = -\sin x\,dx \qquad v = \frac{1}{2}e^{2x}$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\cos x\,dx = \frac{1}{2}[e^{2x}\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\sin x\,dx$$

$$= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\sin x\,dx$$

نطبق القاعدة مرة ثانية على التكامل المحدد:

$u = \sin x \qquad dv = e^{2x}dx$

$du = \cos x\,dx \qquad v = \frac{1}{2}e^{2x}$

فيكون:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\cos x\,dx = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{2}e^{2x}\sin x\right)_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\cos x\,dx\right]$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\cos x\,dx = -\frac{1}{2} + \frac{1}{4}e^{\pi} - \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\cos x\,dx \Longrightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\cos x\,dx = \frac{e^{\pi}}{5} - \frac{2}{5}$$

في التمارين (24–26)، أوجد:

(24) $\int_{-1}^{1} \frac{4}{x^2-4}\,dx$

$$\frac{4}{x^2-4}=\frac{A_1}{(x-2)}+\frac{A_2}{(x+2)}$$

$$4=A_1(x+2)+A_2(x-2)$$

عوض عن x بـ -2 $\therefore$ $A_2=-1$

عوض عن x بـ 2 $\therefore$ $A_1=1$

$$\frac{4}{x^2-4}=\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+2}$$

$$\int_{-1}^{1}\frac{4}{x^2-4}dx=[\ln|x-2|-\ln|x+2|]_{-1}^{1}=-2\ln 3$$

(25) $\int_{-2}^{0} \frac{5x-1}{x^2+2x-3}\,dx$

$$x^2+2x-3=(x-1)(x+3)$$

$$\frac{5x-1}{x^2+2x-3}=\frac{A_1}{x-1}+\frac{A_2}{x+3}$$

$$5x-1=A_1(x+3)+A_2(x-1)$$

عوض عن x بـ -3 $\therefore$ $A_2=4$

عوض عن x بـ 1 $\therefore$ $A_1=1$

$$\frac{5x-1}{x^2+2x-3}=\frac{1}{x-1}+\frac{4}{x+3}$$

$$\int_{-2}^{0}\frac{5x-1}{x^2+2x-3}dx=[\ln|x-1|+4\ln|x+3|]_{-2}^{0}=3\ln 3$$

(26) $\int_1^3 \frac{x^2}{(x+1)^2}\,dx$

(26) $x^2+2x+1 \overline{\big) \; x^2}$

$$\begin{array}{r} x^2 \\ -\;\underline{x^2+2x+1} \\ -2x-1 \end{array}$$

$$\frac{x^2}{(x+1)^2} = 1 + \frac{-2x-1}{(x+1)^2}$$

$$\frac{-2x-1}{(x+1)^2} = \frac{A_1}{x+1} + \frac{A_2}{(x+1)^2}$$

$$-2x-1 = A_1(x+1) + A_2$$

عوّض عن x بـ -1 ، $A_2 = +1$

عوّض عن x بـ 0 مع قيمة A_2 نجد $A_1 = -2$

$$\frac{x^2}{(x+1)^2} = 1 + \frac{-2}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2}$$

$$\int_1^3 \frac{x^2}{(x+1)^2}\,dx = \int_1^3 \left[1 - \frac{2}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2}\right] dx = \left[x - 2\ln|x+1| - \frac{1}{x+1}\right]_1^3 = \frac{9}{4} - 2\ln 2$$

حل آخر

$$\int_1^3 \frac{x^2}{(x+1)^2}\,dx$$

$u = x+1 \longrightarrow du = dx$

$x = u-1$

$$\int_1^3 \frac{x^2}{(x+1)^2}\,dx = \int_2^4 \frac{(u-1)^2}{u^2}\,du$$

$$= \int_2^4 \frac{(u^2-2u+1)}{u^2}\,du$$

$$= \int_2^4 \left(1 - \frac{2}{u} + \frac{1}{u^2}\right) du$$

$$= \left[u - 2\ln|u| - \frac{1}{u}\right]_2^4$$

$$= \left(4 - 2\ln 4 - \frac{1}{4}\right) - \left(2 - 2\ln 2 - \frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{9}{4} - 2\ln 2$$

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (1–7)، ظلّل الدائرة (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\,dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \cos^2 x\,dx = \frac{\pi}{2}$ — (a) (b)

(2) $\int_{-3}^{-2} (|x| + x + 5)dx = -2$ — (a) (b)

(3) $\int_{-1}^{1} (|x|)^3 dx = -\frac{1}{2}$ — (a) (b)

(4) $\int_{0}^{1} 12(3x-2)^3 dx = -15$ — (a) (b)

(5) $\int_{-1}^{1} \frac{1}{\pi}\sqrt{1-x^2}\,dx = 1$ — (a) (b)

(6) $\int_{2}^{3} f(x)dx + \int_{3}^{5} f(x)dx - \int_{5}^{2} f(x)dx = 0$ — (a) (b)

(7) $\int_{2}^{4} f(x)dx + \int_{4}^{2} g(x)dx = 0$ — (a) (b)

في التمارين (8–12)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(8) إذا كان: $\int_{3}^{-1} g(x)dx = 2$ ، $\int_{-1}^{3} f(x)dx = 4$ فإن $\int_{-1}^{3} (2f(x) + 3g(x) + 1)dx$ تساوي:

(a) 18 (b) -6 (c) 6 (d) 12

(9) $\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{18}} \sqrt{2}\,dx =$

(a) 2 (b) $2\sqrt{2}$ (c) 4 (d) 8

(10) $\int_{-1}^{1} (1 - |x|)dx =$

(a) 1 (b) -1 (c) 0 (d) $\frac{1}{2}$

(11) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin x + \cos x)dx =$

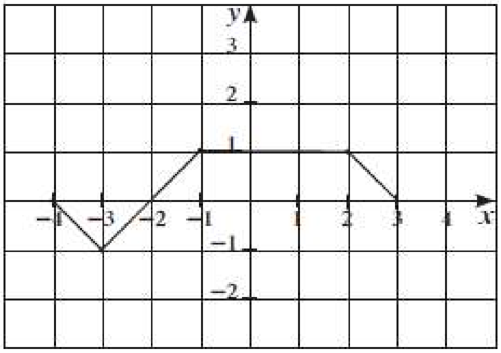
(a) 4 (b) 2 (c) 0 (d) π

(12) لتكن: $f(x) = x^2 + 5$ فإن: $\int_{-a}^{a} f(x)dx > 0$ لكل قيم a تنتمي إلى:

(a) $\mathbb{R} - \mathbb{R}^-$ (b) $\mathbb{R} - \mathbb{R}^+$ (c) $\mathbb{R}^-$ (d) $\mathbb{R}^+$

في التمارين (13–15)، لديك قائمتان، اختر من القائمة (2) ما يناسب كل تمرين من القائمة (1) لتحصل على عبارة صحيحة.

إذا كان بيان الدالة f كما في الشكل المقابل، فإن:



(1)	(2)
(13) $\int_{-4}^{3} f(x)\,dx$ يساوي: d	(a) 6
(14) مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f ومحور السينات هي: b	(b) 5
(15) $\int_{-4}^{-1}\left(f(x)+\frac{1}{6}\right)dx$ يساوي: c	(c) 0
	(d) 3

اختبار الوحدة الخامسة

(1) أثبت أن: $F(x)=\frac{1}{3}\sqrt{(2x^2+6x+5)^3}+8$ هي مشتقة عكسية للدالة $f(x)=(2x+3)\sqrt{2x^2+6x+5}$.

(2) إذا كان: $F(x)=\int(3x^2-2x)dx$ وكان: $F(2)=6$، فأوجد $F(x)$.

(1) $F'(x)=\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2}(2x^2+6x+5)^{\frac{1}{2}}(4x+6)=(2x+3)\sqrt{2x^2+6x+5}=f(x)$

(2) $F(x)=x^3-x^2+C$

$F(2)=6 \quad ; \quad C=2$

$F(x)=x^3-x^2+2$

(3) $\int (x+2)\sqrt{x^2+4x+7}\,dx$

(4) $\int \frac{2x-1}{(x^2-x+7)^5}\,dx$

(3) $\frac{1}{2}\int (2x+4)(x^2+4x+7)^{\frac{1}{2}}dx = \frac{(x^2+4x+7)^{\frac{3}{2}}}{3}+C$

(4) $\int (2x-1)(x^2-x+7)^{-5}dx = \frac{(x^2-x+7)^{-4}}{-4}+C = \frac{-1}{4(x^2-x+7)^4}+C$

(5) $\int x^2\sqrt[3]{x-3}\,dx$

(6) $\int x^3\sqrt{x^2-8}\,dx$

(5) $u = x-3$, $x^2 = (u+3)^2$, $du = dx$

$$\int x^2\sqrt[3]{x-3}\,dx = \int (u+3)^2\cdot u^{\frac{1}{3}}du = \int \left(u^{\frac{5}{3}}+6u^{\frac{4}{3}}+9u^{\frac{1}{3}}\right)du$$

$$= \frac{3u^{\frac{8}{3}}}{8}+\frac{18u^{\frac{7}{3}}}{7}+\frac{27}{4}u^{\frac{4}{3}}+C = \frac{3(x-3)^{\frac{8}{3}}}{8}+\frac{18(x-3)^{\frac{7}{3}}}{7}+\frac{27}{4}(x-3)^{\frac{4}{3}}+C$$

(6) $u = x^2-8$, $x^2 = u+8$, $du = 2xdx \Longrightarrow xdx = \frac{1}{2}du$

$$\int x^3\sqrt{x^2-8}\,dx = \int x^2\sqrt{x^2-8}\,(x\,dx)$$

$$= \frac{1}{2}\int (u+8)u^{\frac{1}{2}}du = \frac{1}{2}\int \left(u^{\frac{3}{2}}+8u^{\frac{1}{2}}\right)du = \frac{u^{\frac{5}{2}}}{5}+\frac{8u^{\frac{3}{2}}}{3}+C$$

$$= \frac{(x^2-8)^{\frac{5}{2}}}{5}+\frac{8(x^2-8)^{\frac{3}{2}}}{3}+C$$

(7) $\int \frac{x+1}{\sqrt[3]{x}+1}\,dx$

(8) $\int \frac{\cos x}{\sin^3 x}\,dx$

(7) $\int \frac{x+1}{\sqrt[3]{x}+1}dx = \int \frac{(\sqrt[3]{x}+1)(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}+1)}{(\sqrt[3]{x}+1)}dx$

$= \int (x^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{1}{3}} + x)dx = \frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}} - \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} + x + C$

(8) $\int \cos x(\sin x)^{-3}dx = \frac{(\sin x)^{-2}}{-2} + C = -\frac{1}{2\sin^2 x} + C$

(9) $\int \sin x\sqrt[3]{\cos^2 x}\,dx$

(10) $\int \sec^7 x \tan x\,dx$

(9) $-\int -\sin x(\cos x)^{\frac{2}{3}}dx = -\frac{3\cos x^{\frac{5}{3}}}{5} + C$

(10) $\int \sec^7 x \tan x\,dx = \int \sec^6 x(\tan x \cdot \sec x\,dx)$

$u = \sec x \quad , \quad du = \tan x \sec x\,dx$

$\int \sec^6 x(\tan x \sec x\,dx) = \int u^6 du = \frac{\sec^7 x}{7} + C$

(11) $\int \left(e^{3x} + \frac{4}{2x-1}\right)dx$

(12) $\int \frac{1}{\sqrt{x}}e^{\sqrt{x}}\,dx$

(11) $\frac{1}{3}\int 3e^{3x}dx + \frac{1}{2}\int \frac{2}{2x-1}dx = \frac{1}{3}e^{3x} + \frac{1}{2}\ln|2x-1| + C$

(12) $2\int \frac{1}{2\sqrt{x}}e^{\sqrt{x}}dx = 2\,e^{\sqrt{x}} + C$

(13) $\int \frac{x^2-4x}{x^3-6x^2+1}\,dx$

(14) $\int \frac{e^{2x}+x}{e^{2x}+x^2+3}\,dx$

(13) $\frac{1}{3}\int \frac{3x^2-12}{x^3-6x^2+1}\,dx = \frac{1}{3}\ln\left|x^3-6x^2+1\right|+C$

(14) $\frac{1}{2}\int \frac{2e^{2x}+2x}{e^{2x}+x^2+3}\,dx = \frac{1}{2}\ln\left|e^{2x}+x^2+3\right|+C$

(15) $\int (x^2-4)\cos x\,dx$

(16) $\int \ln(3x+2)\,dx$

(15) $\int (x^2-4)\cos x\,dx = \int x^2\cos x\,dx - 4\int \cos x\,dx = \int x^2\cos x\,dx - 4\sin x + C_1$

في التكامل، $\int x^2\cos x\,dx$

نأخذ،

$u = x^2 \qquad dv = \cos x\,dx$

$du = 2x\,dx \qquad v = \sin x$

$\int x^2\cos x\,dx = x^2\sin x - 2\int x\sin x\,dx$

نستخدم القاعدة مرة ثانية لنجد $\int x\sin x\,dx$

$\int x^2\cos x\,dx = x^2\sin x + 2x\cos x - 2\sin x + C_2$

$\int (x^2-4)\cos x\,dx = x^2\sin x + 2x\cos x - 6\sin x + C$

(16) $u = \ln(3x+2) \Longrightarrow du = \frac{3}{3x+2}\,dx$

$dv = dx \Longrightarrow v = x$

$\int \ln(3x+2)\,dx = x\ln(3x+2) - \int \frac{3x}{3x+2}\,dx = x\ln(3x+2) - \int \frac{3x+2-2}{3x+2}\,dx$

$= x\ln(3x+2) - x + \frac{2}{3}\ln|3x+2| + C$

(17) $\int 3x\, e^{2x+1}\, dx$

(17) $u = 3x \qquad dv = e^{2x+1}dx$

$du = 3dx \qquad v = \frac{1}{2} e^{2x+1}$

$\int 3x\, e^{2x+1} dx = \frac{1}{2} \cdot 3x\, e^{2x+1} - \frac{3}{2} \int e^{2x+1} dx$

$\int 3x\, e^{2x+1} dx = \frac{3}{2} x\, e^{2x+1} - \frac{3}{4} e^{2x+1} + C$

$\int 3x\, e^{2x+1} dx = \left(\frac{3}{2} x - \frac{3}{2}\right) e^{2x+1} + C$

(18) $\int x^2 e^{2x-1}\, dx$

(18) $u = x^2 \qquad du = 2x\, dx$

$dv = e^{2x-1} dx \qquad v = \frac{1}{2} e^{2x-1}$

$\int x^2\, e^{2x-1} dx = \frac{x^2}{2} e^{2x-1} - \int x\, e^{2x-1} dx$

نستخدم القاعدة مرة ثانية

$u = x \qquad du = dx$

$dv = e^{2x-1} dx \qquad v = \frac{1}{2} e^{2x-1}$

$\int x^2\, e^{2x-1} dx = \frac{x^2}{2} e^{2x-1} - \frac{x}{2} e^{2x-1} + \int \frac{1}{2} e^{2x-1} dx = e^{2x-1}\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\right) + C$

(19) $\int \frac{x^2 - 3x}{x^2 - 3x - 28}\, dx$

(19) $\frac{x^2 - 3x - 28 + 28}{x^2 - 3x - 28} = 1 + \frac{28}{x^2 - 3x - 28}$

$x^2 - 3x - 28 = (x-7)(x+4)$

$\frac{28}{x^2 - 3x - 28} = \frac{A_1}{x-7} + \frac{A_2}{x+4}$

$28 = A_1(x+4) + A_2(x-7)$

عوّض عن x بـ -4 $\therefore$ $A_2 = -\frac{28}{11}$

عوّض عن x بـ 7 $\therefore$ $A_1 = \frac{28}{11}$

$\frac{x^2 - 3x}{x^2 - 3x - 28} = 1 + \frac{28}{11(x-7)} - \frac{28}{11(x+4)}$

$\int \frac{x^2 - 3x}{x^2 - 3x - 28} dx = x + \frac{28}{11} \ln|x-7| - \frac{28}{11} \ln|x+4| + C$

(20) $\int \frac{x^4+2x^2+6x}{x^3+4x^2+4x}\,dx$

(20) $\frac{x^4+2x^2+6x}{x^3+4x^2+4x}=\frac{x(x^3+2x+6)}{x(x^2+4x+4)}=\frac{x^3+2x+6}{x^2+4x+4}$

$\frac{x^3+2x+6}{x^2+4x+4}=x-4+\frac{14x+22}{(x+2)^2}$ (باستخدام القسمة المطولة)

$\frac{14x+22}{(x+2)^2}=\frac{A_1}{x+2}+\frac{A_2}{(x+2)^2}$

$14x+22=A_1(x+2)+A_2$

عوض عن x بـ -2 نحصل على $A_2=-6$

نضع $A_2=-6$ ونأخذ $x=0$ نحصل على $A_1=14$

$\int \frac{x^4+2x^2+6x}{x^3+4x^2+4x}\,dx=\frac{x^2}{2}-4x+14\ln|x+2|+\frac{6}{x+2}+C$

في التمارين (21–26)، أوجد:

(21) $\int_1^e \frac{1}{x}\,dx$

(22) $\int_{-1}^1 2x\sin(1-x^2)\,dx$

(23) $\int_0^5 |2x-5|\,dx$

(21) $[\ln|x|]_1^e=\ln e-\ln 1=1$

(22) $-\int_{-1}^1 -2x\sin(1-x^2)dx=[\cos(1-x^2)]_{-1}^1=0$

(23) $\int_0^{\frac{5}{2}}(-2x+5)dx+\int_{\frac{5}{2}}^5(2x-5)dx=[-x^2+5x]_0^{\frac{5}{2}}+[x^2-5x]_{\frac{5}{2}}^5=\frac{25}{2}$

(24) $\int_{-6}^0 -\sqrt{36-x^2}\,dx$

(24) $y=-\sqrt{36-x^2}\quad\therefore\quad y^2=36-x^2\quad\therefore\quad y^2+x^2=36$

وهي معادلة دائرة مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها 6 وحدات.

والدالة $y=-\sqrt{36-x^2}$ تمثل النصف السفلي للدائرة.

$\therefore$ مساحة المنطقة المظلّلة تساوي:

$\int_{-6}^0 -\sqrt{36-x^2}\,dx$

$=\frac{1}{4}\pi(6)^2=9\pi\ \text{units}^2$

(25) $\int_3^5 \frac{x^2-3}{x^2-3x+2}\,dx$

(25) $\frac{x^2-3}{x^2-3x+2} = 1 + \frac{3x-5}{x^2-3x+2}$ (باستخدام القسمة المطولة)

$$\frac{3x-5}{x^2-3x+2} = \frac{A_1}{(x-2)} + \frac{A_2}{(x-1)}$$

$$3x-5 = A_1(x-1) + A_2(x-2)$$

عوّض عن x بـ 1 $\therefore$ $A_2 = 2$

عوّض عن x بـ 2 $\therefore$ $A_1 = 1$

$$\frac{x^2-3}{x^2-3x+2} = 1 + \frac{1}{x-2} + \frac{2}{x-1}$$

$$\int \frac{x^2-3}{x^2-3x+2}\,dx = \left[x + \ln|x-2| + 2\ln|x-1|\right]_3^5 = 2 + \ln 3 + 2\ln 2$$

(26) $\int_1^3 \frac{x^3-2x^2+2}{x^3+6x^2+9x}\,dx$

(26) $\frac{x^3-2x^2+2}{x^3+6x^2+9x} = 1 + \frac{-8x^2-9x+2}{x(x+3)^2}$ (باستخدام القسمة المطولة)

$$\frac{-8x^2-9x+2}{x(x+3)^2} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x+3} + \frac{A_3}{(x+3)^2}$$

$$-8x^2-9x+2 = A_1(x+3)^2 + A_2x(x+3) + A_3x$$

عوّض عن x بـ 0 $\therefore$ $A_1 = \frac{2}{9}$

عوّض عن x بـ -3 $\therefore$ $A_3 = \frac{43}{3}$

عوّض عن A_1 بـ $\frac{2}{9}$ وعن A_3 بـ $\frac{43}{3}$ ولتكن $x = 1$ $\therefore$ $A_2 = -\frac{74}{9}$

$$\frac{x^3-2x^2+2}{x^3+6x^2+9x} = 1 + \frac{2}{9x} - \frac{74}{9(x+3)} + \frac{43}{3(x+3)^2}$$

$$\int_1^3 \frac{x^3-2x^2+2}{x^3+6x^2+9x}\,dx = \left[x + \frac{2}{9}\ln|x| - \frac{74}{9}\ln|x+3| - \frac{43}{3(x+3)}\right]_1^3$$

$$= 2 + \frac{2}{9}\ln 3 + \frac{43}{36} - \frac{74}{9}(\ln 6 - \ln 4)$$

$$= \frac{115}{36} + \frac{2}{9}\ln 3 - \frac{74}{9}(\ln 6 - \ln 4)$$

في التمارين (27–29)، دون حساب قيمة التكامل أثبت أن:

(27) $\int_2^5 (-x^2+7x+8)\,dx \geq 0$

(28) $\int_{-4}^{-2} (x^2+7x+10)\,dx \leq 0$

(29) $\int_{-5}^{-4} (x^2+13x+9)dx \leq \int_{-5}^{-4} (5x-6)dx$

(27) $-x^2+7x+8=(x+1)(-x+8)$

			$2 \quad 5$		
x		-1		8	
$-x^2+7x+8$	$-$	0	$+$	0	$-$

$-x^2+7x+8 \geqslant 0 \qquad \forall x \in [2,5]$

$\therefore \int_2^5 (-x^2+7x+8)dx \geqslant 0$

(28) $x^2+7x+10=(x+2)(x+5)$

x		-5		-2	
$x^2+7x+10$	$+$	0	$-$	0	$+$

$x^2+7x+10 \leqslant 0 \qquad \forall x \in [-4,-2]$

$\therefore \int_{-4}^{-2} (x^2+7x+10)dx \leqslant 0$

(29) $f(x)=x^2+13x+9$

$g(x)=5x-6$

$f(x)-g(x)=x^2+8x+15$

$f(x)-g(x)=(x+3)(x+5)$

			-4		
x		-5		-3	
$f(x)-g(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

$f(x)-g(x) \leqslant 0 \qquad \forall x \in [-5,-4]$

$\therefore \int_{-5}^{-4} (f(x)-g(x))\,dx \leqslant 0 \Longrightarrow \int_{-5}^{-4} f(x)\,dx \leqslant \int_{-5}^{-4} g(x)\,dx$

$\Longrightarrow \int_{-5}^{-4} (x^2+13x+9)dx \leqslant \int_{-5}^{-4} (5x-6)\,dx$

تمارين إثرائية

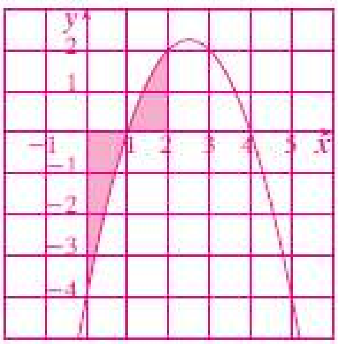
في التمرينين (2—1)، ارسم بيانيًا الدالة على الفترة المعطاة، ثمّ أوجد:

(a) تكامل الدالّة على الفترة.

(b) المساحة للمنطقة بين المنحنى ومحور السينات.

(1) $y = -x^2 + 5x - 4 \; , [0,2]$

(a) $\int_0^2 (-x^2 + 5x - 4)\,dx = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} - 4x\right]_0^2 = -\frac{2}{3}$

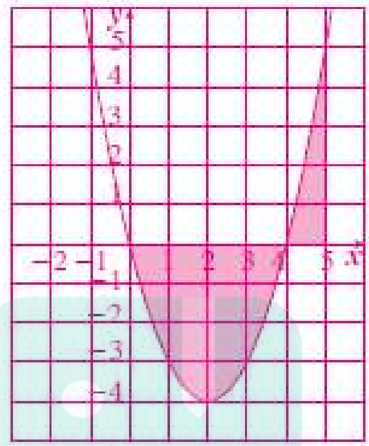


(b) $A = \int_0^1 (x^2 - 5x + 4)dx + \int_1^2 (-x^2 + 5x - 4)dx$

$= \left[\frac{x^3}{3} - \frac{5}{2}x^2 + 4x\right]_0^1 + \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{5}{2}x^2 - 4x\right]_1^2 = 3$ units square

(2) $y = x^2 - 4x \; , [0,5]$

(a) $\int_0^5 (x^2 - 4x)\,dx = \left[\frac{x^3}{3} - 2x^2\right]_0^5 = -\frac{25}{3}$



(b) $A = \int_0^4 (-x^2 + 4x)dx + \int_4^5 (x^2 - 4x)dx$

$= \left[-\frac{x^3}{3} + 2x^2\right]_0^4 + \left[\frac{x^3}{3} - 2x^2\right]_4^5 = 13$ units square

في التمرينين (4—3)، أوجد قيمة y.

(3) $\frac{dy}{dx} = x^2 \ln x$

$u = \ln x \qquad du = \frac{dx}{x}$

$dv = x^2\,dx \qquad v = \frac{x^3}{3}$

$\int x^2 \ln x\,dx = \left(\frac{x^3}{3}\right)\ln x - \int \frac{x^2}{3}\,dx = \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{x^3}{9} + C$

(4) $\frac{dy}{d\theta} = \csc\theta \cot\theta$

$\int \cos\theta \cdot (\sin\theta)^{-2}\,d\theta = -\frac{1}{\sin\theta} + C$

(5) أوجد المشتقة العكسية لِـ y باستخدام القيمة الابتدائية: $\frac{d^2y}{dx^2} = 2 - 6x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 4$

(5) $\frac{dy}{dx} = 2x - 3x^2 + C_1$

$y'(0) = 4 \quad \therefore \quad C_1 = 4$

$\frac{dy}{dx} = 2x - 3x^2 + 4$

$y = x^2 - x^3 + 4x + C_2$

$y(0) = 1 \quad \therefore \quad C_2 = 1$

$y = x^2 - x^3 + 4x + 1$

(6) تكلفة الطباعة. يتكلّف طبع 25 نسخة من إحدى الأوراق 50 دينارًا، ولطبع x نسخة تعطى التكلفة الحديّة بالعلاقة $\frac{dc}{dx} = \frac{2}{\sqrt{x}}$ دينارًا كويتيًا لكلّ نسخة.

أوجد التكلفة الكلّيّة لطبع 2 500 نسخة.

(6) $C(x) = \int \frac{2}{\sqrt{x}} dx = 4\sqrt{x} + C_1$

$C(x) =$ التكلفة

$x =$ عدد النسخات

$\therefore \; C = (25) = 50 \Longrightarrow 50 = 4\sqrt{25} + C_1 \Longrightarrow C_1 = 30$

$C(x) = 4\sqrt{x} + 30$

$C(2\,500) = 4\sqrt{2\,500} + 30 = 230$

التكلفة: 230 دينارًا

في التمرينين (7–8)، أوجد التكامل:

(7) $\int x^3 e^x \, dx$

(8) $\int x^3 \ln x \, dx$

(7) $u = x^3 \qquad du = 3x^2 dx$

$dv = e^x dx \qquad v = e^x$

$\int x^3 e^x dx = x^3 e^x - 3\int x^2 e^x dx$

نستخدم القاعدة مرّة ثانية

$u = x^2 \qquad du = 2x\,dx$

$dv = e^x dx \qquad v = e^x$

$\int x^3 e^x dx = x^3 e^x - 3x^2 e^x + 6\int x e^x dx$

نستخدم القاعدة مرّة ثالثة

$u = x \qquad du = dx$

$dv = e^x dx \qquad v = e^x$

$\int x^3 e^x dx = x^3 e^x - 3x^2 e^x + 6x\, e^x - 6\int e^x dx$

$= e^x(x^3 - 3x^2 + 6x - 6) + C$

(8) $\int x^3 \ln x \, dx$

(8) $u = \ln x \qquad du = \frac{dx}{x}$

$dv = x^3 dx \qquad v = \frac{x^4}{4}$

$\int x^3 \ln x \, dx \frac{x^4}{4} \cdot \ln x - \int \frac{x^3}{4} dx = \frac{x^4}{4} \ln x - \frac{x^4}{16} + C$

(9) استخدم الكسور الجزئية لتوجد التكاملات التالية:

(a) $\int \frac{x-2}{2x^2 - 5x + 3} dx$

(b) $\int \frac{x^2 - 9}{(2x+1)(x^2 + 10x + 25)} dx$

(c) $\int \frac{x^4 + 3x^2 - 7}{(x-1)(x^2 + 5x - 6)} dx$

(9) (a) $2x^2 - 5x + 3 = (2x-3)(x-1)$

$\frac{x-2}{2x^2 - 5x + 3} = \frac{A_1}{2x-3} + \frac{A_2}{x-1}$

$x - 2 = A_1(x-1) + A_2(2x-3)$

عوّض عن x بـ 1 $\therefore$ $A_2 = 1$

عوّض عن x بـ $\frac{3}{2}$ $\therefore$ $A_1 = -1$

$\frac{x-2}{2x^2 - 5x + 3} = \frac{-1}{2x-3} + \frac{1}{x-1}$

$\int \frac{x-2}{2x^2 - 5x + 3} dx = -\frac{1}{2} \ln|2x-3| + \ln|x-1| + C$

(b) $x^2 + 10x + 25 = (x+5)^2$

$\frac{x^2 - 9}{(2x+1)(x^2 + 10x + 25)} = \frac{A_1}{2x+1} + \frac{A_2}{x+5} + \frac{A_3}{(x+5)^2}$

$x^2 - 9 = A_1(x+5)^2 + A_2(2x+1)(x+5) + A_3(2x+1)$

عوّض عن x بـ -5 $\therefore$ $A_3 = -\frac{16}{9}$

عوّض عن x بـ $-\frac{1}{2}$ $\therefore$ $A_1 = -\frac{35}{81}$

عوّض عن A_3 بـ $-\frac{16}{9}$ و A_2 بـ $-\frac{35}{81}$ ولتكن $x = 0$ $\therefore$ $A_2 = \frac{58}{81}$

$\frac{x^2 - 9}{(2x+1)(x+5)^2} = \frac{-35}{81(2x+1)} + \frac{58}{81(x+5)} - \frac{16}{9(x+5)^2}$

$\int \frac{x^2 - 9}{(2x+1)(x+5)^2} dx = \frac{-35}{162} \ln|2x+1| + \frac{58}{81} \ln|x-5| + \frac{16}{9(x+5)} + C$

(c) $\frac{x^4 + 3x^2 - 7}{(x-1)(x^2 + 5x - 6)} = x - 4 + \frac{30x^2 - 50x + 17}{(x-1)^2(x+6)}$ (باستخدام القسمة المطولة)

$\frac{30x^2 - 50x + 17}{(x+6)(x-1)^2} = \frac{A_1}{x+6} + \frac{A_2}{x-1} + \frac{A_3}{(x-1)^2}$

$30x^2 - 50x + 17 = A_1(x-1)^2 + A_2(x-1)(x+6) + A_3(x+6)$

عوّض عن x بـ 1 $\therefore$ $A_3 = -\frac{3}{7}$

عوّض عن x بـ -6 $\therefore$ $A_1 = \frac{1397}{49}$

عوّض عن A_1 بـ $\frac{1397}{49}$ و A_2 بـ $-\frac{3}{7}$ ولتكن $x = 0$ $\therefore$ $A_2 = \frac{73}{49}$

$\frac{x^4 + 3x^2 - 7}{(x-1)(x^2 + 5x - 6)} = x - 4 + \frac{1397}{49(x+6)} + \frac{73}{49(x-1)} - \frac{3}{7(x-1)^2}$

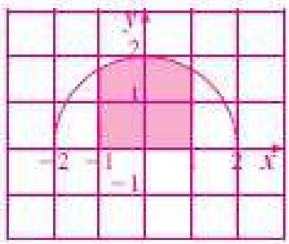
$\int \frac{x^4 + 3x^2 - 7}{(x-1)(x^2 + 5x - 6)} dx = \frac{x^2}{2} - 4x + \frac{1397}{49} \ln|x+6| + \frac{73}{49} \ln|x-1| + \frac{3}{7(x-1)} + C$

في التمرينين (10–11) استعن برسم بيان الدوال لايجاد:

(10) $\int_{-1}^{1} \sqrt{4-x^2}\, dx$

(11) $\int_{-4}^{4} \left(\frac{1}{\pi} - x\right)\sqrt{16-x^2}\, dx$

(10)



لايجاد التكامل المحدد $\int_{-1}^{1} \sqrt{4-x^2}\, dx$

نفترض: $x = 2\cos\theta \Longrightarrow dx = -2\sin\theta\, d\theta$

عند $x = -1$ تكون $\theta = \frac{2\pi}{3}$ ، عند $x = 1$ تكون $\theta = \frac{\pi}{3}$

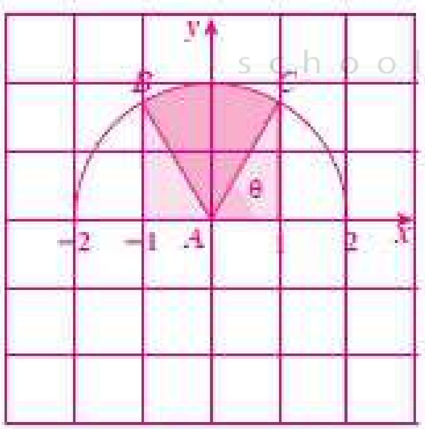
لذا

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{4-x^2}\, dx = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \left(\sqrt{4-4\cos^2\theta}\right)(2\sin\theta\, d\theta)$$

$$= \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} 4\sin^2\theta\, d\theta = 2\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} (1-\cos 2\theta)\, d\theta = \frac{2\pi}{3} + \sqrt{3}$$

حل آخر

$\cos\theta = \frac{1}{2} \Longrightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$



قياس زاوية القطاع الدائري (ABC) هو أيضًا $\frac{\pi}{3}$

فتكون مساحته تساوي $\frac{1}{2} \times \frac{\pi}{3}(2)^2$

أي أن مساحة $(ABC) = \frac{2\pi}{3}$

مساحة كل مثلث $= \frac{1}{2} \times 1 \times \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

مساحة المثلثين $= 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$

المساحة الإجمالية $= \frac{2\pi}{3} + \sqrt{3}$

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{4-x^2}\, dx = \frac{2\pi}{3} + \sqrt{3}$$

(11) $\int_{-4}^{4}\left(\frac{1}{\pi}-x\right)\sqrt{16-x^2}\,dx$

(11) $\int_{-4}^{4}\frac{1}{\pi}\sqrt{16-x^2}\,dx-\int_{-4}^{4}x\sqrt{16-x^2}\,dx$

$=\frac{1}{\pi}\int_{-4}^{4}\sqrt{16-x^2}\,dx+\frac{1}{2}\int_{-4}^{4}-2x\sqrt{16-x^2}\,dx$

$=\frac{1}{p}\left(\frac{1}{2}\right)(p)(4)^2+\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\left[(16-x^2)^{\frac{3}{2}}\right]_{-4}^{4}=8+\frac{1}{3}(0)=8$

(12) $\int_{0}^{2}\frac{2x+3}{x^2+5x+4}\,dx$

(12) $x^2+5x+4=(x+1)(x+4)$

$\frac{2x+3}{x^2+5x+4}=\frac{A_1}{x+1}+\frac{A_2}{x+4}$

$2x+3=A_1(x+4)+A_2(x+1)$

عوّض عن x بـ -1 $\therefore$ $A_1=\frac{1}{3}$

عوّض عن x بـ -4 $\therefore$ $A_2=\frac{5}{3}$

$\frac{2x+3}{x^2+5x+4}=\frac{1}{3(x+1)}+\frac{5}{3(x+4)}$

$\int\frac{2x+3}{x^2+5x+4}\,dx=\left[\frac{1}{3}\ln|x+1|+\frac{5}{3}\ln|x+4|\right]_0^2=\frac{1}{3}\ln 3+\frac{5}{3}\ln 6-\frac{5}{3}\ln 4=2\ln 3-\frac{5}{3}\ln 2$

(13) $\int_{1}^{2}\frac{x^3-6x^2+3}{x^3-6x^2+9x}\,dx$

(13) $\frac{x^3-6x^2+3}{x^3-6x^2+9x}=1+\frac{-9x+3}{x^3-6x^2+9x}$ (باستخدام القسمة المطولة)

$x^3-6x^2+9x=x(x-3)^2$

$\frac{-9x+3}{x(x-3)^2}=\frac{A_1}{x}+\frac{A_2}{x-3}+\frac{A_3}{(x-3)^2}$

$-9x+3=A_1(x-3)^2+A_2x(x-3)+A_3x$

عوّض عن x بـ 0 $\therefore$ $A_1=\frac{1}{3}$

عوّض عن x بـ 3 $\therefore$ $A_3=-8$

عوّض عن A_1 بـ $\frac{1}{3}$ وعن A_3 بـ -8 ولتكن $x=1$ $\therefore$ $A_2=-\frac{1}{3}$

$\frac{x^3-6x^2+3}{x^3-6x^2+9x}=1+\frac{1}{3x}-\frac{1}{3(x-3)}-\frac{8}{(x-3)^2}$

$\int_{1}^{2}\frac{x^3-6x^2+3}{x^3-6x^2+9x}\,dx=\left[x+\frac{1}{3}\ln|x|-\frac{1}{3}\ln|x-3|+\frac{8}{x-3}\right]_1^2=-3+\frac{2}{3}\ln 2$

(14) $\int_3^5 x^3\sqrt{x^2-4}\,dx$

(14) $\int_3^5 x^3\sqrt{x^2-4}\,dx = \int_3^5 x^2\sqrt{x^2-4}\,(x\,dx)$

$u = x^2-4 \Longrightarrow du = 2x\,dx$

$x^2 = u+4$

$\frac{1}{2}\int_5^{21}(u+4)u^{\frac{1}{2}}du = \frac{1}{2}\int_5^{21}u^{\frac{3}{2}}du + 2\int_5^{21}u^{\frac{1}{2}}du = \frac{1}{5}\left[u^{\frac{5}{2}}\right]_5^{21} + \frac{4}{3}\left[u^{\frac{3}{2}}\right]_5^{21} = \frac{581}{5}\sqrt{21} - \frac{35}{3}\sqrt{5}$

في التمرينين (15–16)، دون حساب قيمة التكامل أثبت أن:

(15) $\int_0^2(-x^2+9x-18)dx \le 0$

(16) $\int_{-1}^2(x^2+13x+15)dx \ge \int_{-1}^2(3x-6)dx$

(15) $-x^2+9x-18 = (-x+6)(x-3)$

x		0	2		3		6	
$-x^2+9x-18$	$-$				0	$+$	0	$-$

$-x^2+9x-18 \leqslant 0 \qquad \forall x\in[0,2]$

$\therefore \int_0^2(-x^2+9x-18)\leqslant 0$

(16) $f(x)-g(x) = x^2+13x+15-3x+6 = x^2+10x+21$

$f(x)-g(x) = (x+3)(x+7)$

x		-7		-3	-1		2
$f(x)-g(x)$	$+$	0	$-$	0		$+$	

$f(x)-g(x)\geqslant 0 \qquad \forall x\in[-1,2]$

$\int_{-1}^2(f(x)-g(x))dx \geqslant 0$

$\therefore \int_{-1}^2 f(x)dx \geqslant \int_{-1}^2 g(x)dx$

$\therefore \int_{-1}^2(x^2+13x+15)dx \geqslant \int_{-1}^2(3x-6)dx$

$\therefore \int_{-1}^2 f(x)dx \geqslant \int_{-1}^2 g(x)dx$

$\therefore \int_{-1}^2(x^2+13x+15)dx \geqslant \int_{-1}^2(3x-6)dx$

تمرَّنْ
6−1

المساحات في المستوي

Areas in the Plane

المجموعة A تمارين مقالية

(1) أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f : $f(x) = 8x^3$ ومحور السينات والمستقيمين $x = 1$, $x = 3$

(1) $A = \int_1^3 8x^3\,dx = 2x^4\Big]_1^3 = 160$ units square

(2) أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f : $f(x) = x^2 - 5x$ ومحور السينات.

(2) $A = \int_0^5 (-x^2 + 5x)dx = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{5}{2}x^2\right]_0^5 = \frac{125}{6}$ units square

(3) أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f : $f(x) = 12 - x^2$ ومحور السينات.

(3) $A = \int_{-2\sqrt{3}}^{2\sqrt{3}} (12 - x^2)dx = \left[12x - \frac{x^3}{3}\right]_{-2\sqrt{3}}^{2\sqrt{3}} = 32\sqrt{3}$ units square

في التمارين (6−4)، أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f ومحور السينات في الفترة المحددة:

(4) $f(x) = x^2 - x - 6$, $[-3,2]$

(4) $A = \int_{-3}^{-2} (x^2 - x - 6)dx + \int_{-2}^{2} (-x^2 + x + 6)dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 6x\right]_{-3}^{-2} + \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 6x\right]_{-2}^{2} = \frac{43}{2}$ units square

(5) $f(x) = x^3 - 6x$, $[0,3]$

(5) يتقاطع منحنى الدالة مع محور السينات إذا كان: $f(x) = 0$

فيكون: $\Longrightarrow x(x^2 - 6) = 0 \Longrightarrow x = -\sqrt{6}$, $x = 0$, $x = \sqrt{6}$

$A = \int_0^{\sqrt{6}} (-x^3 + 6x)dx + \int_{\sqrt{6}}^{3} (x^3 - 6x)dx = \left[-\frac{x^4}{4} + 3x^2\right]_0^{\sqrt{6}} + \left[\frac{x^4}{4} - 3x^2\right]_{\sqrt{6}}^{3} = \frac{45}{4}$ units square

(6) $f(x) = \cos 2x \ , \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$

$$A = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x \, dx - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x \, dx = \left[\frac{1}{2}\sin 2x\right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} - \left[\frac{1}{2}\sin 2x\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{2} \text{ units square}$$

(7) أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f : $f(x) = 4x - x^2$ ومنحنى الدالة g : $g(x) = 5 + x^2$ والمستقيمين $x = 0$, $x = 2$ علمًا بأن منحنيي الدالتين g , f غير متقاطعين.

$$\textbf{(7)} \quad A = \int_0^2 (x^2 + x^2 - 4x + 5)dx = \int_0^2 (2x^2 - 4x + 5)dx = \left[2\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 5x\right]_0^2 = \frac{22}{3} \text{ units square}$$

(8) أوجد مساحة المنطقة المحددة بالمنحنيين $g(x) = \sqrt[3]{x}$, $f(x) = x$ ، والمستقيمين $x = 8$, $x = 1$.

$$\textbf{(8)} \quad A = \int_1^8 (x - \sqrt[3]{x})dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}\right]_1^8 = \frac{81}{4} \text{ units square}$$

(9) أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f : $f(x) = 2x^2$ ومنحنى الدالة g : $g(x) = 3 - x$ والمستقيمين $x = 3$, $x = 0$.

(9) حل $3 - x = 2x^2$ ، إذًا تتقاطع المنحنيات عند $x = 1$

$$A = \int_0^1 (3 - x - 2x^2)dx + \int_1^3 (2x^2 - 3 + x)dx$$

$$= \left[3x - \frac{x^2}{2} - \frac{2}{3}x^3\right]_0^1 + \left[\frac{2}{3}x^3 - 3x + \frac{x^2}{2}\right]_1^3 = \frac{103}{6} \textit{ units} \text{ square}$$

(10) أوجد مساحة المنطقة بين المنحنى $f(x) = 3 - x^2$ والمستقيم $g(x) = -1$.

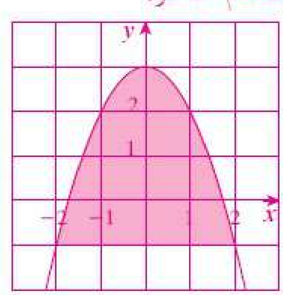
(10) تقاطع المنحنيات عند $x = \pm 2$

استخدم التناظر:

$$A = 2\int_0^2 (3 - x^2 + 1)dx = 2\int_0^2 (4 - x^2)dx$$

$$= 2\left[4x - \frac{1}{3}x^3\right]_0^2 = 2\left[\left(8 - \frac{8}{3}\right) - 0\right]$$

$$= \frac{32}{3} \text{ units square}$$



حل آخر

$$f(x) > g(x)$$

$$A = \int_{-2}^{2} (f(x) - g(x))dx = \int_{-2}^{2} (3 - x^2 + 1)dx$$

$$= \left[3x - \frac{x^3}{3} + x\right]_{-2}^{2} = \left(6 - \frac{8}{3} + 2\right) - \left(-6 + \frac{8}{3} - 2\right) = \frac{32}{3} \text{ units square}$$

في التمارين (11–13)، أوجد مساحة المنطقة المحددة بالمنحنيات التالية:

(11) $f(x) = x^2 - 2 \ , \ g(x) = 2$

(12) $f(x) = 2x - x^2 \ , \ g(x) = -2x$

(13) $f(x) = 7 - 2x^2 \ , \ g(x) = x^2 + 4$

(11) حل $x^2 - 2 = 2$ ؛ $x^2 = 4$، إذًا تتقاطع المنحنيات عند $x = \pm 2$

$$A = \int_{-2}^{2}[2-(x^2-2)]dx = \int_{-2}^{2}(4-x^2)dx = \left[4x - \frac{1}{3}x^3\right]_{-2}^{2} = \left(8-\frac{8}{3}\right)-\left(-8+\frac{8}{3}\right) = \frac{32}{3}\text{units square}$$

(12) حل $2x - x^2 = -2x$ ؛ $4x - x^2 = 0$

إذًا، تتقاطع المنحنيات عند $x = 4$ ، $x = 0$

$$A = \int_{0}^{4}(4x-x^2)dx = \left[2x^2 - \frac{1}{3}x^3\right]_{0}^{4} = \frac{32}{3}\text{units square}$$

(13) حل $7 - 2x^2 = x^2 + 4$ ؛ $x^2 = 1$، إذًا تتقاطع المنحنيات عند $x = \pm 1$

$$A = \int_{-1}^{1}[((7-2x^2)-(x^2+4)]dx = \int_{-1}^{1}(-3x^2+3)\,dx = 3\int_{-1}^{1}(1-x^2)dx$$

$$= 3\left[x - \frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^{1} = 3\left[\frac{2}{3}-\left(-\frac{2}{3}\right)\right] = 4 \text{ units square}$$

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (1–5)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f ومحور السينات والمستقيمين $x = a \ , \ x = b$ هي: $\int_a^b f(x)\,dx$ — (a) (b)

(2) مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f: $f(x) = 4 - x^2$ ومحور السينات في $[-2,2]$ هي: $2\int_0^2 f(x)\,dx$ — (a) (b)

(3) إذا كانت: $f(x) \le 0 \quad \forall x \in [a,b]$ فإن مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f ومحور السينات في $[a,b]$ هي: $\int_b^a f(x)\,dx$ — (a) (b)

(4) إذا كان منحنى الدالة f : $f(x) = x^2 - 2x - 3$ يقطع محور السينات عند $x = -1$ ، $x = 3$. فإن مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f ومحور السينات هي: $A = \int_{-1}^{3} f(x)\,dx$ — (a) (b)

(5) مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f : $f(x) = |x|$ ومحور السينات. في الفترة $[-2,2]$ هي: 2 وحدة مساحة — (a) (b)

في التمارين (10–6)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(6) مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f : $f(x)=\sqrt{9-x^2}$ ومحور السينات هي:

ⓐ 9π units^2 ⓑ 6π units^2

ⓒ 3π units^2 ⓓ $\frac{9}{2}\pi$ units^2

(7) مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة g : $g(x)=(x-2)^3$ ومحور السينات في الفترة $[0,4]$ بالوحدات المربعة هي:

ⓐ $2\int_0^2 g(x)dx$ ⓑ $-2\int_0^2 g(x)dx$

ⓒ $\int_0^4 g(x)dx$ ⓓ $-2\int_2^4 g(x)dx$

(8) مساحة المنطقة المحددة بين منحنى الدالة $f(x)=2$ ومنحنى الدالة g : $g(x)=-\sqrt{x}$ والمستقيمين $x=0$ ، $x=4$ هي:

ⓐ 20 units^2 ⓑ $\frac{8}{3}$ units^2

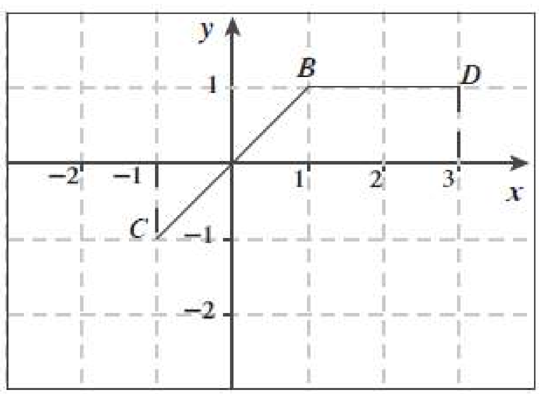
ⓒ $\frac{40}{3}$ units^2 ⓓ 8 units^2

(9) مساحة المنطقة المحددة بين منحنى الدالة f : $f(x)=\sqrt{4-x^2}$ ومنحنى الدالة g : $g(x)=x+2$ في $[-2,2]$ هي:

ⓐ $\pi-2$ units^2 ⓑ π units^2

ⓒ $\pi+2$ units^2 ⓓ 2 units^2

(10) إذا كان بيان الدالة f يمثله $\overline{CB}\cup\overline{BD}$ كما هو موضح بالشكل فإن مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f ومحور السينات والمستقيمين $x=3$ ، $x=-1$ هي:



ⓐ 3 units^2 ⓑ 4 units^2 ⓒ 2 units^2 ⓓ 5 units^2

تمرّنْ
6−2

حجوم الأجسام الدورانية

Volumes of Revolution Solids

المجموعة A تمارين مقالية

في التمارين (1−8)، أوجد حجم المجسّم الناتج من دوران المنطقة المستوية دورة كاملة حول محور السينات والمحددة بكل من المستقيمات والمنحنيات التالية:

(1) $y_1 = x^2$, $y_2 = 0$, $x = 2$, $x = 0$

الحجم $V = \int_0^2 \pi x^4 dx = \left[\pi \frac{1}{5} x^5\right]_0^2 = \frac{32\pi}{5}$ units cube

(2) $y_1 = \frac{1}{x}$, $y_2 = 0$, $x = 1$, $x = 4$

الحجم $V = \pi \int_1^4 \frac{1}{x^2} dx = \pi\left[-\frac{1}{x}\right]_1^4 = \frac{3\pi}{4}$ units cube

(3) $y_1 = \sqrt{1 - x^2}$, $y_2 = 0$

$V = \pi \int_{-1}^{1} (1 - x^2) dx = 2\pi\left[x - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{4}{3}\pi$ units cube

(4) $y_1 = x^2 + 1$, $y_2 = x + 3$

(4) نقاط التقاطع عند $x = 2$ ، $x = -1$

$V = \pi \int_{-1}^{2} \left[(x+3)^2 - (x^2+1)^2\right] dx = \pi \int_{-1}^{2} (-x^4 - x^2 + 6x + 8) dx$

$= \pi\left[-\frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3} + 3x^2 + 8x\right]_{-1}^{2} = \frac{117\pi}{5}$ units cube

(5) $y_1 = \sec x$, $y_2 = \sqrt{2}$, $-\frac{\pi}{4} \le x \le \frac{\pi}{4}$

(5) تمتدّ المنطقة المظلّلة من $x = -\frac{\pi}{4}$ إلى $x = \frac{\pi}{4}$

$V = \pi \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (2 - \sec^2 x) dx = \pi[2x - \tan x]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = \pi^2 - 2\pi$ units cube

(6) $y_1 = x+1$, $y_2 = x-1$, $x = 1$, $x = 4$

(6) تمتدّ المنطقة المظلّلة من $x = 1$ إلى $x = 4$

$V = \pi\int_1^4 ((x+1)^2 - (x-1)^2)dx = \pi\int_1^4 4x = [2\pi x^2]_1^4 = 30\pi$ units cube

(7) $y_1 = x$, $y_2 = 1$, $x = 0$

(7) تمتدّ المنطقة المظلّلة من $x = 0$ إلى $x = 1$

$V = \pi\int_0^1 (1-x^2)dx = \pi\left[x - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = 2\frac{\pi}{3}$ units cube

(8) $y_1 = \sqrt{x}$, $y_2 = 0$, $x = 4$

(8) تمتدّ المنطقة المظلّلة من $x = 0$ إلى $x = 4$

$V = \pi\int_0^4 x\,dx \Longrightarrow V = \pi\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^4 = 8\pi$ units cube

(9) باستخدام التكامل المحدد استنتج الصيغة التي تعطى حجم مخروط دائري قائم ارتفاعه h (وحدة طول) وطول نصف قطر قاعدته r (وحدة طول) من دوران منطقة مستوية دورة كاملة حول محور السينات.
(إرشاد: استخدم الدالة f : $f(x) = \frac{r}{h}x$ في الفترة $[0, h]$)

(9) $V = \pi\int_0^h \left(\frac{r}{h}x\right)^2 dx = \pi\frac{r^2}{h^2}\int_0^h x^2\,dx = \pi\frac{r^2}{h^2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^h$

$V = \pi\frac{r^2}{h^2}\times\frac{h^3}{3} = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ units cube

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (1—4)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) حجم المجسم الناتج من دوران دورة كاملة حول محور السينات للمنطقة المحددة بمنحنى الدالة f : $f(x)=\sqrt[3]{x}$ في الفترة $[1,8]$ هو: $V=\pi\int_8^1 (\sqrt[3]{x})^2 dx$

(a) (b)

(2) حجم المجسم الناتج من دوران دورة كاملة حول محور السينات للمنطقة المحددة بمنحنى الدالة f : $f(x)=2\sqrt{x}$ في الفترة $[1,4]$ هو: $V=\pi\int_0^4 4xdx-\pi\int_0^1 4xdx$

(a) (b)

(3) حجم المجسم الناتج من دوران دورة كاملة حول محور السينات للمنطقة المحددة بمنحنى الدالة f : $f(x)=x$ ومنحنى الدالة g : $g(x)=\frac{1}{2}x^2$ هو: $V=\pi\int_0^2\left(x-\frac{1}{2}x^2\right)dx$

(a) (b)

(4) حجم المجسم الناتج من دوران دورة كاملة حول محور السينات للمنطقة المحددة بمنحنى الدالة f : $f(x)=x^3$ ومنحنى الدالة g : $g(x)=8$ و $x=0$ يساوي حجم المجسم الناتج من دوران دورة كاملة حول محور السينات لمنحنى الدالة f ومنحنى الدالة h: $h(x)=-8$, $x=0$

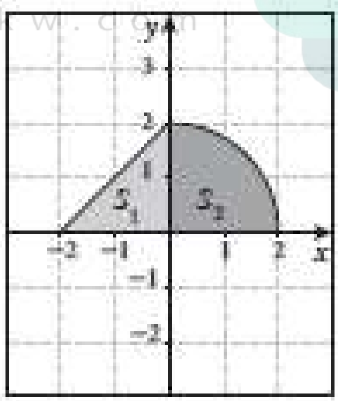
(a) (b)

في التمارين (5—12)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(5) حجم المجسم الناتج من دوران دورة كاملة حول محور السينات للمنطقة المحددة بمنحنى الدالة f : $f(x)=3$ ومحور السينات في الفترة $[-1,1]$ بالوحدات المكعبة هو:

(a) 6π (b) 18 (c) 18π (d) 81π

(6) المنطقة المظللة $S=S_1\cup S_2$ حيث S_1 منطقة مثلثة، S_2 منطقة ربع دائرة كما هو موضح بالشكل.



حجم المجسم الناتج من دوران دورة كاملة حول محور السينات للمنطقة S بالوحدات المكعبة يساوي:

(a) $\frac{40}{3}\pi$ (b) $4+2\pi$ (c) $\frac{16}{3}\pi$ (d) 8π

(7) حجم المجسم الناتج من دوران دورة كاملة حول محور السينات للمنطقة المحددة بمنحنى الدالة $y=-\sqrt{4-x^2}$ بالوحدات المكعبة هو:

(a) 4π (b) 6π (c) $\frac{16}{3}\pi$ (d) $\frac{32}{3}\pi$

(8) حجم المجسم الناتج من دوران دورة كاملة حول محور السينات للمنطقة المحددة بين منحنى الدالة f : $f(x) = \frac{1}{x}$ والمستقيمات $x = 1$, $x = 2$, $y = 0$ هو:

(a) π units^3 (b) $\frac{\pi}{3}$ units^3 (c) $\frac{\pi}{2}$ units^3 (d) $\frac{\pi}{4}$ units^3

(9) حجم المجسم الناتج من دوران دورة كاملة حول محور السينات للمنطقة المحددة بين منحنى الدالة f : $f(x) = \sqrt{x+1}$ ومحور السينات والمستقيمين $x = 3$, $x = -1$ بالوحدات المكعبة هو:

(a) 8π (b) 7π (c) 8 (d) $\frac{5}{2}\pi$

(10) حجم المجسم الناتج من دوران دورة كاملة حول محور السينات للمنطقة المحددة بالمستقيمات $x = 0$, $y = -2$ ومنحنى الدالة f : $f(x) = -\sqrt{x}$ بالوحدات المكعبة هو:

(a) 4π (b) 16π (c) 8π (d) 2π

(11) حجم المجسم الناتج من دوران دورة كاملة حول محور السينات للمنطقة المحددة بين المنحنيين $y = \sqrt{x}$, $x = 2y$ هو:

(a) $\int_0^4 \left(x - \frac{x}{2}\right)^2 dx$ (b) $\pi \int_0^4 \left(\frac{x^2}{4} - x\right) dx$ (c) $\int_0^4 \left(x - \frac{x^2}{4}\right) dx$ (d) $\pi \int_0^4 \left(x - \frac{x^2}{4}\right) dx$

(12) حجم المجسم الناتج من دوران دورة كاملة حول محور السينات للمنطقة المحددة بين منحنى $y = \sqrt{x}$ ومنحنى $x = 2y$، هو:

(a) $\frac{64\pi}{15}$ units^3 (b) $\frac{32\pi}{15}$ units^3 (c) $\frac{64\pi}{5}$ units^3 (d) $\frac{8\pi}{3}$ units^3

تمرين
6-3

طول قوس ومعادلة منحنى دالة
Arc Length and Equation of Function Curve

المجموعة A تمارين مقالية

(1) أوجد طول القوس من منحنى الدالة f، $f(x)=5+2\sqrt{x^3}$ في الفترة $\left[0,\frac{1}{3}\right]$.

(2) أوجد طول القوس من منحنى الدالة f، $f(x)=\frac{1}{3}(7+4x)^{\frac{3}{2}}$ في الفترة $\left[1,\frac{5}{4}\right]$.

(3) أوجد طول القوس من منحنى الدالة f، $f(x)=\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{2x}$ في الفترة $[1,2]$.

(1) $f'(x)=3x^{\frac{1}{2}}$

$$L=\int_0^{\frac{1}{3}}\sqrt{1+\left(3x^{\frac{1}{2}}\right)^2}\,dx=\int_0^{\frac{1}{3}}\sqrt{1+9x}\,dx=\frac{2}{27}\left[(1+9x)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{\frac{1}{3}}=\frac{14}{27}\text{ units}$$

(2) $f'(x)=2(7+4x)^{\frac{1}{2}}$

$$L=\int_1^{\frac{5}{4}}\sqrt{1+4(7+4x)}\,dx=\int_1^{\frac{5}{4}}\sqrt{29+16x}\,dx=\left[\frac{(29+16x)^{\frac{3}{2}}}{24}\right]_1^{\frac{5}{4}}$$

$$L=\frac{343-135\sqrt{5}}{24}\approx 1.714\text{ units}$$

(3) $f'(x)=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2x^2}$

$$L=\int_1^2\sqrt{1+\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2x^2}\right)^2}\,dx=\int_1^2\sqrt{\left(\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2x^2}\right)^2}\,dx=\int_1^2\left(\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2x^2}\right)dx$$

$$L=\left[\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{2x}\right]_1^2=\frac{17}{12}\text{ units}$$

(4) أوجد معادلة منحنى الدالة f الذي ميله عند أي نقطة عليه (x,y) هو: $-x^2+2x-4$ ويمر بالنقطة $A(3,7)$

(5) أوجد معادلة منحنى الدالة f الذي ميله عند أي نقطة عليه (x,y) هو: $-4x^3+2x+5$ ويمر بالنقطة $A(1,3)$

(6) أوجد معادلة منحنى الدالة f الذي ميله عند أي نقطة عليه (x,y) هو: $\cos 2x$ ويمر بالنقطة $A\left(\frac{-\pi}{4},\frac{5}{2}\right)$

(7) أوجد معادلة منحنى الدالة f الذي ميله عند أي نقطة عليه (x,y) هو: $\sin 3x$ ويمر بالنقطة $A\left(\frac{2\pi}{9},\frac{7}{6}\right)$

(4) $f(x)=-\frac{x^3}{3}+x^2-4x+19$

(5) $f(x)=-x^4+x^2+5x-2$

(6) $f(x)=\frac{1}{2}\sin 2x+3$

(7) $f(x)=-\frac{1}{3}\cos 3x+1$

(8) إذا كان ميل العمودي على منحنى الدالة f عند أي نقطة عليه (x, y) هو $2x+5$ فأوجد معادلة منحنى الدالة f إذا كان يمر بالنقطة $B(-2, 3)$

(9) لتكن: $f''(x) = 12x^2 - 24x - 1$

أوجد معادلة الدالة f إذا كان لها نقطة عظمى محلية عند $A\left(-\frac{1}{2}, \frac{15}{16}\right)$

(8) $f(x) = -\frac{1}{2}\ln|2x+5| + 3$

(9) $f'(x) = 4x^3 - 12x^2 - x + C_1$

$f'\left(-\frac{1}{2}\right) = 0 \Longrightarrow C_1 = 3$

$f(x) = x^4 - 4x^3 - \frac{x^2}{2} + 3x + C_2$

$f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{15}{16} \Longrightarrow C_2 = 2$

$\Longrightarrow f(x) = x^4 - 4x^3 - \frac{x^2}{2} + 3x + 2$

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (1–4)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) طول القوس من منحنى الدالة f: $f(x) = \frac{1}{3}(1+4x)^{\frac{3}{2}}$ في الفترة $[0, 1]$ هو $L = \frac{2}{3}$ وحدة طول.

(a) (b)

(2) منحنى الدالة f الذي ميله عند أي نقطة عليه (x, y) هو: $x^3 + 2$ ويمر بالنقطة $A(2, 6)$ معادلته: $f(x) = \frac{x^4}{4} + 2x + 2$

(a) (b)

(3) منحنى الدالة f الذي ميله عند أي نقطة عليه (x, y) هو: $x + \sqrt{x}-$ ويمر بالنقطة $A(1, 1)$ معادلته: $f(x) = -\frac{2}{3}x\sqrt{x} + x^2 + \frac{2}{3}$

(a) (b)

(4) لتكن $A(1, 3)$ نقطة على منحنى الدالة f : $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$ فإن معادلة الدالة f هي $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$

(a) (b)

في التمارين (5–9)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(5) طول القوس من منحنى الدالة f: $f(x)=\frac{1}{3}$ في الفترة $[-2,3]$ هو:

ⓐ 7 units ⓑ 6 units ⓒ 5 units ⓓ 1 unit

(6) طول القوس من منحنى الدالة f: $f(x)=x-3$ في الفترة $[0,2]$ هو:

ⓐ $\sqrt{2}$ units ⓑ $2\sqrt{2}$ units ⓒ $3\sqrt{2}$ units ⓓ $\frac{\sqrt{2}}{2}$ units

(7) معادلة منحنى الدالة الذي ميل العمودي عليه عند أي نقطة (x,y) هو: $-x+3$ ويمر بالنقطة $A(2,3)$ هي y تساوي:

ⓐ $-\frac{x^2}{2}+3x-4$ ⓑ $\ln|3-x|+3$ ⓒ $-\frac{x^2}{2}+3x+4$ ⓓ $3-\ln|3-x|$

(8) معادلة منحنى الدالة الذي ميله عند أي نقطة (x,y) هو: $2x-3\sqrt{x}$ ويمر بالنقطة $A(4,-2)$ هي:

ⓐ $x^2+2\sqrt{x^3}-2$ ⓑ $x^2-2\sqrt{x^3}$ ⓒ $x^2-2\sqrt{x^3}-2$ ⓓ $\frac{x^2}{2}-2\sqrt{x^3}+2$

(9) إذا كانت النقطة $A(0,2)$ نقطة حرجة لمنحنى الدالة f : $f''(x)=12x-6$ فإن النقطة الحرجة الأخرى للدالة f هي:

ⓐ $B(-2,0)$ ⓑ $B(0,-2)$ ⓒ $B(1,-1)$ ⓓ $B(1,1)$

تمرَّنْ
6−4

المعادلات التفاضلية

Differential Equation

المجموعة A تمارين مقالية

(1) أثبت أن الدالة: $y = 3e^x$ هي حل للمعادلة التفاضلية $y'' - y' + 2x = 2x$

(2) أثبت أن الدالة: $y = e^x$ هي حل للمعادلة التفاضلية $y + y'' = 2e^x$

(1) $y' = y'' = 3e^x \Longrightarrow 3e^x - 3e^x + 2x = 2x \Longrightarrow 2x = 2x$

إذًا الدالة $y = 3e^x$ هي حل للمعادلة التفاضلية $y'' - y' + 2x = 2x$

(2) $y' = y'' = e^x \Longrightarrow e^x + e^x = 2e^x$

إذًا الدالة $y = e^x$ هي حل للمعادلة التفاضلية $y + y'' = 2e^x$

(3) $y' = x^2 + x + 2$ التي تحقق $y = 4$ عند $x = 1$

(3) $y = \int (x^2 + x + 2)dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x + C$

$y(1) = 4$

$\therefore\ C = \frac{7}{6}$

$\therefore\ y = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x + \frac{7}{6}$

(4) $xy' = 1 - x^2$

(4) $y' = \frac{1}{x} - x$

$\therefore\ y = \ln|x| - \frac{x^2}{2} + C$

(5) $xy' = 4y$ التي تحقق $y = 1$ عند $x = 1$

(5) $y = 4\ln|x| + C$

$\therefore\ C = 1$

$\therefore\ y = 4\ln|x| + 1$

(6) $y' = 3y$

(6) $y(x) = ke^{3x}$

(7) $y' = 5y$

(7) $y = ke^{5x}$

(8) $2y' - 5y = 0$ التي تحقق $y = 4$ عند $x = 2$

(8) $y = ke^{\frac{5}{2}x}$

$\therefore\ k = 4e^{-5}$

$\therefore\ y = 4e^{\frac{5}{2}x-5}$

(9) $\sqrt{2}y' + y = 0$ التي تحقق $y = \sqrt{2}$ عند $x = 0$

(9) $y = ke^{-\frac{1}{\sqrt{2}}x}$

$y(0) = \sqrt{2}$

$\therefore\ k = \sqrt{2}$

(10) $y' = y + 1$

(10) $y = ke^{x} - 1$

(11) $\frac{1}{2}y' + 4y = 1$ التي تحقق $y = \frac{3}{4}$ عند $x = \frac{1}{4}$

(11) $y = ke^{-8x} + \frac{1}{4}$

$ke^{-8x} + \frac{1}{4}$

$k = \frac{e^2}{2}$

$\therefore\ y = \frac{1}{2}e^{2-8x} + \frac{1}{4}$

(12) $2y' + y = 4$ التي تحقق $y = 2$ عند $x = 0$

(12) $y = ke^{-\frac{1}{2}x} + 4$

$y(0) = 2$

$\therefore\ k = -2$

$\therefore\ y = -2e^{-\frac{1}{2}x} + 4$

(13) $y'' = -4\sin 4x$

$y' = \cos 4x + C_1$

$y = \frac{1}{4}\sin 4x + C_1 x + C_2$

(14) $y'' = 6x - 8$

$y' = 3x^2 - 8x + C_1$

$y = x^3 - 4x^2 + C_1 x + C_2$

(15) $2y'' + y' - 15y = 0$

$y = C_1 e^{\frac{5}{2}x} + C_2 e^{-3x}$

(16) $y'' - 6y' + 9y = 0$

$y = (C_1 + C_2 x)e^{3x}$

(17) $y'' + 9y = 0$

$y = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x$

(18) $y'' - 2y' + y = 0$

$y = (C_1 x + C_2)e^{x}$

(19) $2y'' + 4y' = -3y$

(19) $y = e^{-x}\left(C_1 \cos\frac{\sqrt{2}}{2}x + C_2 \sin\frac{\sqrt{2}}{2}x\right)$

(20) (a) حل المعادلة التفاضلية: $y' + 2y = 0$

(b) أوجد الحل الذي يحقق $y = \frac{1}{2}$ عند $x = 0$

(20) (a) $y = ke^{-2x}$

(b) $k = \frac{1}{2}$ $\quad\therefore\quad$ $y = \frac{1}{2}e^{-2x}$

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (1—7)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) المعادلة التفاضلية التالية: $x^2y''' + (y')^2 + y = 0$ من الرتبة الثالثة والدرجة الأولى. (a) (b)

(2) المعادلة التفاضلية التالية: $(y')^2 + 2xy = 0$ من الرتبة الثانية والدرجة الأولى. (a) (b)

(3) إذا كان $y = \frac{1}{2}$ عند $x = 0$ و $y' + 2y = 0$ فإن $y = \frac{1}{4}e^{-2x} + \frac{1}{4}$ (a) (b)

(4) إذا كان $y = 1$ عند $x = 0$ و $y' + y = 2$ فإن $y = 2e^{-x}$ (a) (b)

(5) إذا كان $y'' + 2y' + 2y = 0$ فإن $y = (c_1\cos x + c_2\sin x)e^{-x}$ (a) (b)

(6) إذا كان $y'' + y = 0$ فإن $y = c_1\cos x + c_2\sin x$ (a) (b)

(7) إذا كان $y'' - y = 0$ فإن $y = c_1e^{x} + c_2e^{-x}$ (a) (b)

في التمارين (8—14)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(8) المعادلة التفاضلية التالية: $\frac{(2y''+x)^2}{xy} = 3$ من:

(a) الرتبة الأولى والدرجة الثانية.

(b) الرتبة الثانية والدرجة الأولى.

(c) الرتبة الثانية والدرجة الثانية.

(d) الرتبة الأولى والدرجة الأولى.

(9) حل المعادلة التفاضلية $\frac{dy}{dx} = 2x$ الذي يحقق $y = -2$ عندما $x = 1$ هو:

(a) $y = x^2 + 3$

(b) $y = x^2 - 3$

(c) $y = \frac{x^2}{2} - 3$

(d) $y = \frac{x^2}{2} + 3$

(10) إذا كان $y'' = 2x^2 + 3x$ فإنّ:

(a) $y = \frac{2x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + c$

(b) $y = \frac{2x^3}{3} + \frac{3x^2}{2}$

(c) $y = \frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{2}x^3 + c_1x + c_2$

(d) $y = \frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{2}x^3 + c_1x$

(11) حل المعادلة التفاضلية $2y' + y = 1$ الذي يحقق $y = 3$ عند $x = 5$ هو:

(a) $y = 2e^{\frac{5}{2}}$

(b) $y = \frac{2}{e^{\frac{5}{2}}}$

(c) $y = 2e^{\left(-\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}\right)} + 1$

(d) $y = 2e^{\left(-\frac{1}{2}x - \frac{5}{2}\right)} + 1$

(12) إذا كان $y'' - 3y' + 2y = 0$ فإنّ:

(a) $y = c_1e^{x} + c_2e^{-2x}$

(b) $y = c_1e^{-x} + c_2e^{2x}$

(c) $y = c_1e^{-x} + c_2e^{-2x}$

(d) $y = c_1e^{x} + c_2e^{2x}$

(13) إذا كان $y'' + 2y' + y = 0$ فإنّ:

(a) $y = (c_1x + c_2)e^{-x}$

(b) $y = (c_1x + c_2)e^{x}$

(c) $y = (c_1x + c_2)e^{2x}$

(d) $y = (c_1x + c_2)e^{-2x}$

(14) إذا كان $y'' - 4y' + 13y = 0$ فإنّ:

(a) $y = e^{x}(c_1\cos 3x + c_2\sin 3x)$

(b) $y = e^{-2x}(c_1\cos 2x + c_2\sin 2x)$

(c) $y = e^{-x}(c_1\cos 3x + c_2\sin 3x)$

(d) $y = e^{2x}(c_1\cos 3x + c_2\sin 3x)$

اختبار الوحدة السادسة

(1) أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f : $f(x) = x^2 - 4x + 3$، محور السينات في الفترة $[0,1]$.

(1) تمتدّ المنطقة المظلّلة من $x = 0$ إلى $x = 1$.

$$A = \int_0^1 (x^2 - 4x + 3)dx = \left[\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x\right]_0^1 = \frac{4}{3} \text{ units square}$$

(2) أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f : $f(x) = x^2 - 6x + 5$، محور السينات في الفترة $[1,5]$.

(2) تمتدّ المنطقة المظلّلة من $x = 1$ إلى $x = 5$.

$$A = \int_1^5 (-x^2 + 6x - 5)dx = \left[-\frac{x^3}{3} + 3x^2 - 5x\right]_1^5 = \frac{32}{3} \textit{ units} \text{ square}$$

(3) أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f : $f(x) = x^3 - 4x$، محور السينات في الفترة $[-2,2]$.

(3) $A = \int_{-2}^0 (x^3 - 4x)dx + \left|\int_0^2 (x^3 - 4x)dx\right| = \left[\frac{x^4}{4} - 2x^2\right]_{-2}^0 - \left[\frac{x^4}{4} - 2x^2\right]_0^2 = 4 + 4 = 8 \text{ units square}$

(4) أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f : $f(x) = x^2 + 1$ ومنحنى الدالة g : $g(x) = \sqrt{x}$ في الفترة $[1,2]$.

(4) $A = \int_1^2 (x^2 + 1 - \sqrt{x})dx = \left[\frac{x^3}{3} + x - \frac{2}{3}x\sqrt{x}\right]_1^2 = 4 - \frac{4}{3}\sqrt{2} \text{ units square}$

(5) أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f : $f(x) = x^3 + 1$ ومنحنى الدالة g : $g(x) = x + 1$.

5) يتقاطع المنحنيات عند النقط $x = -1$ ، $x = 0$ و $x = 1$.

$$A = \int_{-1}^0 (x^3 + 1 - x - 1)dx + \int_0^1 (x + 1 - x^3 - 1)dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right]_{-1}^0 + \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{2} \text{ units square}$$

(6) أوجد حجم المجسم الناتج من دورة كاملة حول محور السينات للمنطقة المحددة بمنحنى الدالة f : $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ والمستقيم $y = 2$ في الفترة $[-2,2]$.

(6) يتقاطع المنحنيات عند $x = -2$ و $x = 2$.

$$V = \pi\int_{-2}^2 \left(4 - \frac{1}{4}x^4\right)dx = \pi\left[4x - \frac{1}{20}x^5\right]_{-2}^2 = \frac{64}{5}\pi \text{ units cube}$$

(7) أوجد حجم المجسم الناتج من دورة كاملة حول محور السينات للمنطقة المحددة بمنحنى الدالة f : $f(x) = x + 2$ والدالة g : $g(x) = -x + 3$ في الفترة $[-1,2]$.

(7) تمتدّ المنطقة المظلّلة من $x = -1$ إلى $x = 2$ ويتقاطعا عند النقطة $x = \frac{1}{2}$.

$$V = \pi\int_{-1}^{\frac{1}{2}}[(-x+3)^2-(x+2)^2]dx + \pi\int_{\frac{1}{2}}^{2}[(x+2)^2-(-x+3)^2]dx = \int_{-1}^{\frac{1}{2}}(5-10x)dx + \int_{\frac{1}{2}}^{2}(-5+10x)dx$$

$$= [5x-5x^2]_{-1}^{\frac{1}{2}} + [-5x+5x^2]_{\frac{1}{2}}^{2} = \frac{135}{4}\pi \text{ units cube}$$

(8) أوجد حجم المجسم الناتج من دورة كاملة حول محور السينات للمنطقة المحددة بمنحنى الدالة f : $f(x) = -x^2 + 4$ والدالة g : $g(x) = x + 2$ في الفترة $[-2,1]$.

(8) $V = \pi\int_{-2}^{1}[(-x^2+4)^2-(x+2)^2]dx = \pi\int_{-2}^{1}(x^4-9x^2-4x+12)dx$

$$V = \pi\left[\frac{x^5}{5}-3x^3-2x^2+12x\right]_{-2}^{1} = \frac{108}{5}\pi \text{ units cube}$$

(9) أوجد طول القوس من منحنى الدالة f : $f(x) = 2 + \frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}}$ في الفترة $[0,12]$.

(9) $f'(x) = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}$

$$L = \int_0^{12}\sqrt{1+\frac{1}{4}x}\,dx = \frac{8}{3}\left[\left(1+\frac{1}{4}x\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{12} = \frac{56}{3} \text{ units}$$

(10) أوجد طول القوس من منحنى الدالة f : $f(x) = 2 - \sqrt{3}x$ في الفترة $[-3,1]$.

(10) $f'(x) = -\sqrt{3}$

$$L = \int_{-3}^{1}\sqrt{1+3}\,dx = \int_{-3}^{1}2dx = 8 \text{ units}$$

(11) أوجد طول القوس من منحنى الدالة f : $f(x) = \frac{1}{3}(-1+2x)^{\frac{3}{2}}$ في الفترة $[2,8]$.

(11) $f'(x) = (-1+2x)^{\frac{1}{2}}$

$$L = \int_2^8\sqrt{1+(-1+2x)}\,dx = \int_2^8\sqrt{2x}\,dx = \frac{56}{3} \text{ units}$$

(12) أوجد معادلة منحنى الدالة الذي ميله عند أي نقطة (x,y) هو: $3x^2 - 2x + 1$ ويمر بالنقطة $A(-1,-5)$.

(12) $f'(x) = 3x^2 - 2x + 1 \quad \therefore \quad f(x) = x^3 - x^2 + x + C$

يمر بالنّقطة $A(-1,-5) \quad \therefore \quad C = -2$

(13) أوجد معادلة منحنى الدالة إذا كان ميل العمودي عند أي نقطة (x, y) على هذا المنحنى هو: $3x - 2$ ويمر بالنقطة $(1, -1)$.

(13) $f'(x) = \frac{-1}{3x-2}$ $\quad \therefore \quad f(x) = -\frac{1}{3}\ln|3x-2| + C$

يمر بالنقطة $A(1, -1)$ $\quad \therefore \quad C = -1$

$\therefore \quad f(x) = -\frac{1}{3}\ln|3x-2| - 1$

(14) لتكن: $f''(x) = 12x^2 - 4$، أوجد معادلة الدالة f إذا كان لها نقطة صغرى محلية عند $A(-1, 3)$

(14) $A(-1, 3)$ نقطة صغرى محليّة إذًا:

$f'(-1) = 0$

$f'(x) = 4x^3 - 4x + C_1 \quad \therefore \quad C_1 = 0$

$f(x) = x^4 - 2x^2 + C_2$

منحنى f يمرّ بالنقطة $A(-1, 3)$ إذًا:

$C_2 = 4$

$\therefore \quad f(x) = x^4 - 2x^2 + 4$

في التمارين (15–20)، حلّ المعادلات التفاضلية التالية:

(15) $3y' + 5y = 2$

(16) $3xy' = 5y$

(17) $y'' - 7y' + 12y = 0$

(18) $y'' - 6y' + 9y = 0$

(19) $y'' + 4y' + 20y = 0$

(20) $y'' + 16y = 0$

(15) $y = ke^{-\frac{5}{3}x} + \frac{2}{5}$

(16) $y = k|x|^{\frac{5}{3}}$

(17) $y = C_1e^{3x} + C_2e^{4x}$

(18) $y = (C_1 + C_2x)e^{3x}$

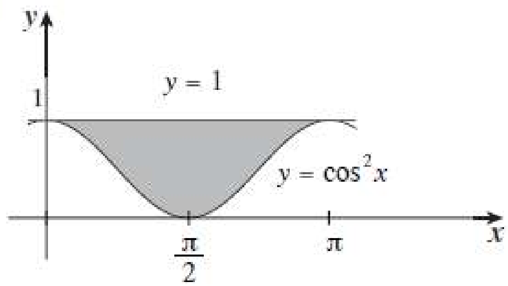
(19) $y = e^{-2x}(C_1\cos 4x + C_2\sin 4x)$

(20) $y = C_1\cos 4x + C_2\sin 4x$

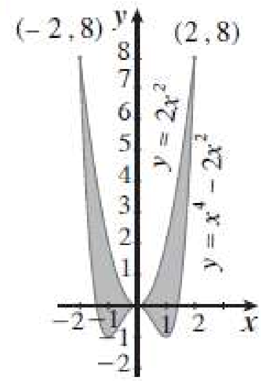
تمارين إثرائية

في التمارين (1–3)، أوجد مساحة المنطقة المظلّلة تحليليًا (جبريًا):

(1)



(2)



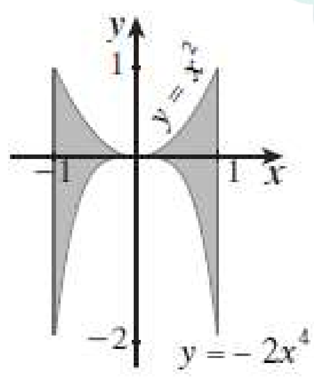
(1) $A = \int_0^{\pi} (1 - \cos^2 x)dx = \int_0^{\pi} \sin^2 x\, dx = \left[\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x\right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}$ units square $\qquad \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$

(2) استخدم التناظر:

$$2\int_0^2 [2x^2 - (x^4 - 2x^2)]dx = 2\int_0^2 (-x^4 + 4x^2)dx = 2\left[-\frac{1}{5}x^5 + \frac{4}{3}x^3\right]_0^2 = 2\left[\left(-\frac{32}{5} + \frac{32}{3}\right) - 0\right]$$

$= \frac{128}{15}$ units square

(3)



(3) استخدم التناظر:

$$2\int_0^1 (x^2 + 2x^4)dx = 2\left[\frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{5}x^5\right]_0^1 = 2\left(\frac{1}{3} + \frac{2}{5}\right) = \frac{22}{15} \text{ units square}$$

(4) أوجد مساحة المنطقة المحددة بين منحنى الدالة: $y = 2x^2 + 8$ ومنحنى الدالة: $y = x^4$.

(4) $A = \int_{-2}^{2}(8 + 2x^2 - x^4)dx = \frac{448}{15} \approx 32.5\overline{3}$ units square

(5) أوجد مساحة المنطقة المحددة بين منحنى الدالة: $y = 2x - 15$ ومنحنى الدالة: $y = -x^2 + 4x$.

(5) $A(x) = \int_{-3}^{5}(15 + 2x - x^2)dx = \frac{256}{3}$ units square

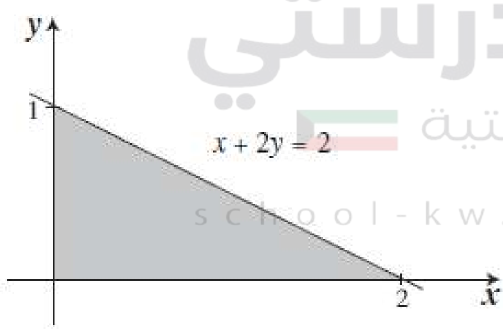
(6) أوجد مساحة المنطقة المحددة بالمنحنيين $g(x) = x$, $f(x) = \frac{1}{x^2}$، والمستقيم $x = 2$ ومحور السينات.

(6) يتقاطع منحنيا $g(x) = x$ ، $f(x) = \frac{1}{x^2}$ عند $x = 1$ ومنه تكون:

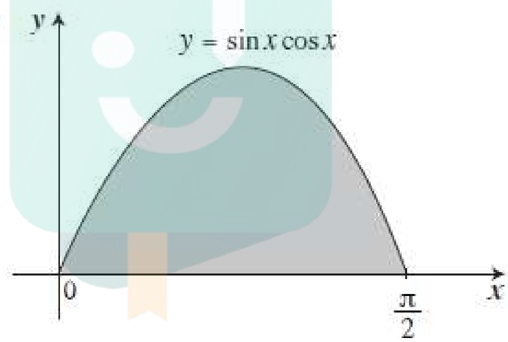
$$A = \int_0^1 x\,dx + \int_1^2 \frac{1}{x^2}dx = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1 + \left[-\frac{1}{x}\right]_1^2 = \frac{1}{2} + \left[-\frac{1}{2} - (-1)\right] = 1 \text{ units square}$$

في التمرينين (7–8)، أوجد حجم المجسّم الناتج من دورة كاملة للمنطقة المظلّلة حول محور السينات.

(7)



(8)



(7) $V = \pi\int_0^2 \left(\frac{2-x}{2}\right)^2 dx = \frac{\pi}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)[(2-x)^3]_0^2 = \frac{2\pi}{3}$ units cube

(8) $V = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2 \cos^2 x)dx$

$= \frac{\pi}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(2x)\,dx$

$= \frac{\pi}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 4x)dx$

$= \frac{\pi}{8}\left[x - \frac{1}{4}\sin 4x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$= \frac{\pi^2}{16}$ units cube

(9) أوجد معادلة منحنى الدالة f الذي ميله عند أي نقطة x هو: $\sin 3x$ ويمر بالنقطة $A\left(\frac{\pi}{3}, \frac{4}{3}\right)$

(9) $f(x) = -\frac{1}{3}\cos 3x + C$

$\frac{4}{3} = -\frac{1}{3}\cos 3 \times \frac{\pi}{3} + C$

$\therefore\ C = 1$

$f(x) = -\frac{1}{3}\cos 3x + 1$

(10) أوجد طول القوس من منحنى الدالة f: $f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x^3}$ في الفترة $[0, 27]$

(10) $f'(x) = \frac{3}{4}x^{\frac{1}{2}}$

$$L = \int_0^{27} \sqrt{1 + \frac{9}{16}x}\, dx = \frac{32}{27}\left[\frac{259}{64}\sqrt{259} - 1\right] \approx 76 \text{ units}$$

في التمارين (13–11)، حل المعادلات التفاضلية التالية:

(11) $2y' + 3y = 4$

(12) $y'' + y = 0$

(13) $y'' - y = 0$

(11) $y(x) = Ae^{-\frac{3}{2}x} + \frac{4}{3}$

(12) $y(x) = A\sin(x) + B\cos(x)$

(13) $y(x) = Ae^{x} + Be^{-x}$

(14) نتيجة لحادث نووي، تبيّن أن الجزئيات المشعة $y(t)$ في الزمن t (بالساعات) بواسطة عداد جيجر (Geiger) تعطى بالمعادلة التفاضلية: $(E): y' = a(y-2)$، حيث a ثابت موجب.

(a) أوجد الحل العام للمعادلة (E).

(b) أوجد حل (E) الذي يحقق $y(0) = 170$.

(c) إذا علمنا أن $y(6) = 9$ فما قيمة الثابت a؟

(14) **(a)** $y = ke^{ax} + 2$

(b) $k = 168 \quad \therefore \quad y = 168e^{ax} + 2$

(c) $7 = 168e^{6a} \Longrightarrow a = -\dfrac{\ln 24}{6}$

(15) إذا كانت النقطة $A(3,-2)$ نقطة حرجة لمنحنى الدالة f، $f''(x) = 6x - 6$ فأوجد معادلة الدالة f.

(15) $f'(x) = 3x^2 - 6x + C_1$

$A(3,-2)$ نقطة حرجة لمنحنى الدالة f إذاً:

$f'(3) = 0 \quad \therefore \quad C_1 = -9$

$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + C_2$

$A(3,-2)$ هي نقطة على منحنى الدالة f إذاً:

$f(3) = -2 \quad \therefore \quad C_2 = 25$

$\therefore \quad f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 25$

القطوع المخروطية – القطع المكافئ
Conic Sections – Parabola

المجموعة A تمارين مقالية

في التمارين (3–1)، أوجد معادلة القطع المكافئ، الذي:

(1) رأسه نقطة الأصل والبؤرة $(-3,0)$ **(2)** رأسه نقطة الأصل والبؤرة $(0,-2)$

(3) بؤرته $F(0,2)$ ومعادلة دليله $y=-2$

(1) $y^2=-12x$ (2) $x^2=-8y$ (3) $x^2=8y$

في التمارين (7–4)، أوجد البؤرة، والدليل، وخط تماثل القطع المكافئ. ارسم تخطيطاً للرسم البياني للقطع المكافئ.

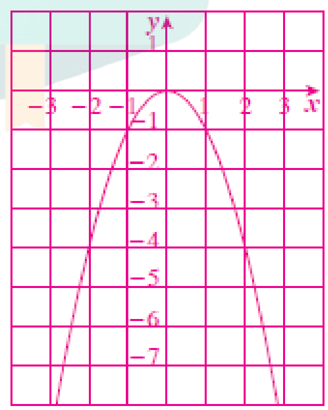
(4) $x^2=-y$ **(5)** $y^2=2x$

(6) $y=4x^2$ **(7)** $x=-8y^2$

(4) $x^2=-y$ البؤرة $\left(0,\frac{-1}{4}\right)$

الدليل: $y=\frac{1}{4}$

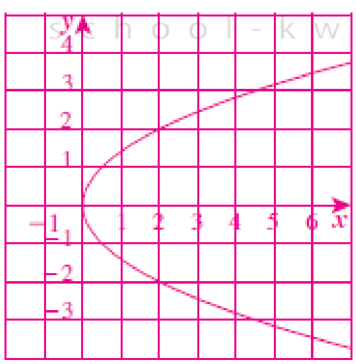
خطّ التماثل محور الصادات



(5) $y^2=2x$ البؤرة $\left(\frac{1}{2},0\right)$

الدليل: $x=\frac{-1}{2}$

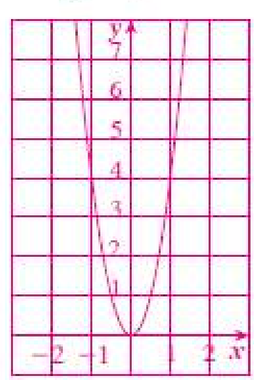
خطّ التماثل محور السينات



(6) $y=4x^2$ $x^2=\frac{1}{4}y$ البؤرة $\left(0,\frac{1}{16}\right)$

الدليل: $y=\frac{-1}{16}$

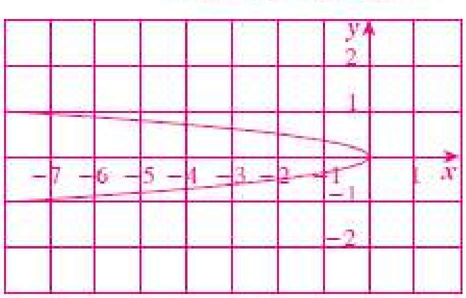
خطّ التماثل محور الصادات



(7) $x=-8y^2$ $y^2=\frac{-x}{8}$ البؤرة $\left(\frac{-1}{32},0\right)$

الدليل: $x=\frac{1}{32}$

خطّ التماثل محور السينات



(8) أوجد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل ويمر بالنقطة $A(-1,2)$ وخط تماثله $x-axis$.

(8) معادلة القطع المكافئ هي: $y^2 = 4px$

وبالتعويض عن (x, y) بإحداثيات A نحصل على:

$$(2^2) = 4p(-1)$$
$$4 = -4p$$
$$p = -1$$

المعادلة:

$$y^2 = -4x$$

(9) أوجد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل ويمر بالنقطتين $A(-3,4)$, $B(3,4)$.

(9) النقطتان $A(-3,4)$, $B(3,4)$ متماثلتان في محور الصادات

معادلة القطع المكافئ هي: $x^2 = 4py$

وبالتعويض عن (x, y) بإحداثيات A (أو بإحداثيات B) نحصل على:

$$(-3)^2 = 4p(4)$$
$$9 = 16p \Longrightarrow p = \frac{9}{16}$$

المعادلة:

$$x^2 = 4 \times \frac{9}{16}y$$
$$x^2 = \frac{9}{4}y$$

(10) أوجد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل ومعادلة دليله $y = 4$.

(10) البورة $(0 ; -4)$ إذًا المعادلة هي: $x^2 = -16y$

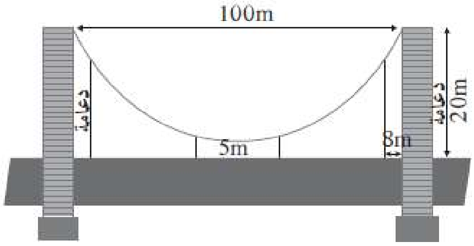
(11) أوجد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل ومعادلة دليله $x = -5$.

(11) البورة $(5 ; 0)$ إذًا المعادلة هي: $y^2 = 20x$

(12) **الميكروفونات المتكافئة.** تستخدم القنوات الرياضية ميكروفونًا مكافئًا لالتقاط كل أصوات لاعبي كرة السلة والمدربين أثناء المباريات. إذا كان لأحد هذه الميكروفونات سطح مكافئ متولد بالقطع المكافئ $x^2 = 10y$ فحدّد موضع البؤرة (المستقبِل الإلكتروني) للقطع المكافئ.

(12) $x^2 = 10y$ $\quad p = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$ إذًا البورة $\left(0 , \frac{5}{2}\right)$

(13) يصل سلك معدني متدلٍ بين رأسي عمودي جسر.
السلك المعدني هو على صورة قطع مكافئ حيث يبعد العمودان عن بعضهما مسافة $100\,m$ ويبلغ ارتفاع كل منهما $20\,m$. يبلغ أصغر ارتفاع للسلك عن الطريق العام $5\,m$، وضعت على الطريق دعامات للسلك المتدلي، أوجد طول الدعامة التي تبعد $8\,m$ عن أي من العمودين.



(13) معادلة القطع المكافئ هي على الصورة: $x^2 = 4py$

لنأخذ النقطة $A(50\,,15)$ وبالتعويض عن $(x\,,y)$ بإحداثيات A نحصل على:

$$(50)^2 = 4p(15)$$
$$2\,500 = 60p$$
$$p = \frac{125}{3}$$

المعادلة:

$$x^2 = \frac{500}{3}y$$

الإحداثي السيني للدعامة: $50 - 8 = 42$

بالتعويض في المعادلة نوجد y: $(42)^2 = \frac{500}{3}y$ ومنه $y \approx 10.6$

طول الدعامة يكون: $10.6 + 5 = 15.6\,m$

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (7—1)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة، و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) معادلة القطع المكافئ الذي رأسه $(0\,,0)$ وبؤرته $(0\,,2)$ هي: $x^2 = 8y$ — (a) (b)

(2) معادلة القطع المكافئ الذي رأسه $(0\,,0)$ ودليله $x = -2$ هي: $x^2 = 8y$ — (a) (b)

(3) معادلة القطع المكافئ الذي بؤرته $(-4\,,0)$ ودليله $x = 4$ هي: $y^2 = -16x$ — (a) (b)

(4) $y^2 = \frac{1}{2}x$ هي معادلة قطع مكافئ، بؤرته $\left(0\,,\frac{-3}{2}\right)$ — (a) (b)

في التمارين (7–5)، معادلة القطع المكافئ هي: $y^2 = -\frac{1}{6}x$

(5) بؤرة القطع المكافئ هي: $\left(-\frac{1}{24}, 0\right)$ — a b

(6) معادلة الدليل هي: $y = \frac{1}{24}$ — a b

(7) خط التماثل هو محور السينات. — a b

في التمارين (15–8)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(8) المعادلة التي تمثل قطعًا مكافئًا رأسه $(0,0)$ وبؤرته $(-5,0)$ هي:

a) $x^2 = 20y$ b) $y^2 = 20x$ c) $x^2 = -20y$ d) $y^2 = -20x$

(9) المعادلة التي تمثل قطع مكافئ مفتوح إلى الأسفل هي:

a) $y^2 = \frac{-1}{2}x$ b) $y^2 = \frac{1}{2}x$ c) $x^2 = \frac{-1}{2}y$ d) $x^2 = \frac{1}{2}y$

(10) النقطة المشتركة بين كل القطوع المكافئة التي هي على الصورة $x^2 = 4py$ هي:

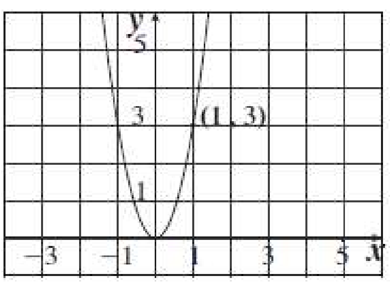
a) $(1,1)$ b) $(1,0)$ c) $(0,1)$ d) $(0,0)$

(11) المعادلة التي تمثل قطعًا مكافئًا رأسه $(0,0)$ ويمر بالنقطتين $A(-5,-2), B(-5,2)$ هي:

a) $y^2 = -\frac{4}{5}x$ b) $x^2 = -\frac{4}{5}y$ c) $y^2 = \frac{4}{5}x$ d) $x^2 = \frac{4}{5}y$

(12) المعادلة التي تمثل قطعًا مكافئًا رأسه $(0,0)$ ويمر بالنقطة $C(-5,-6)$ وخط تماثله $y-axis$ هي:

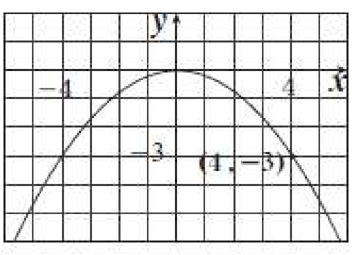
a) $y^2 = -\frac{25}{6}x$ b) $x^2 = -\frac{25}{6}y$ c) $y^2 = -\frac{6}{25}x$ d) $x^2 = -\frac{6}{25}y$



(13) بؤرة القطع المكافئ في الشكل المقابل هي:

a) $\left(0, \frac{-4}{3}\right)$ b) $\left(\frac{9}{20}, 0\right)$

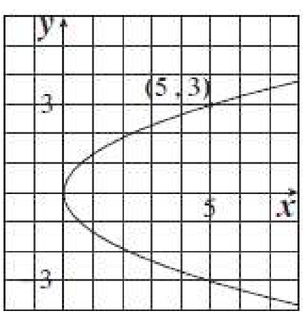
c) $\left(0, \frac{1}{12}\right)$ d) $\left(\frac{1}{12}, 0\right)$



(14) معادلة دليل القطع المكافئ في الشكل المقابل هي:

a) $y = \frac{4}{3}$ b) $y = \frac{9}{20}$

c) $y = -\frac{1}{12}$ d) $y = -\frac{4}{3}$

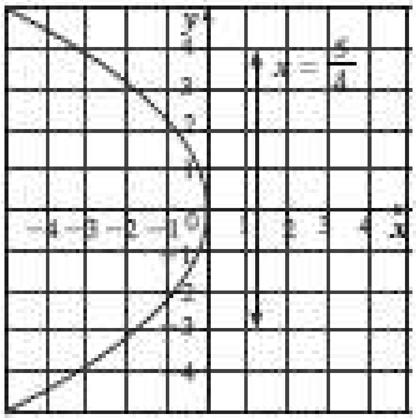
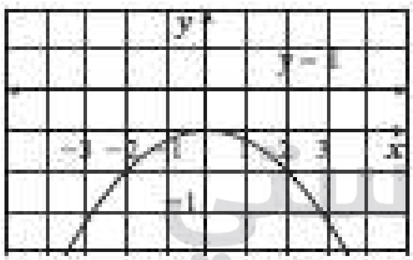
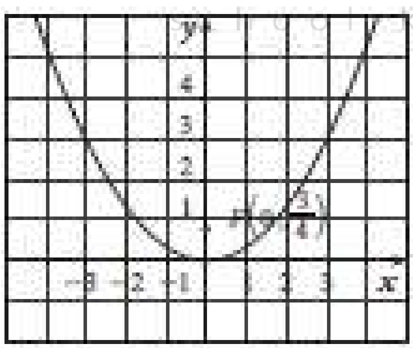
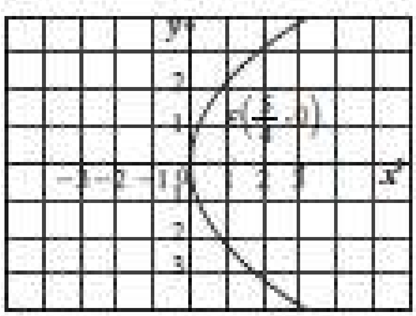


(15) معادلة القطع المكافئ للبيان التالي هي:

a) $x^2 = -\frac{25}{3}y$ b) $y^2 = \frac{9}{5}x$

c) $x^2 = \frac{25}{3}y$ d) $y^2 = \frac{5}{9}x$

في التمارين (16—18)، لديك قائمتان. اختر من القائمة (2) ما يناسب كل تمرين في القائمة (1) لتصل بيان كل دالة بمعادلتها.

القائمة (1)	القائمة (2)
(16) $x^2 = 3y$ c	a 
(17) $x^2 = -4y$ b	b 
(18) $y^2 = 5x$ d	c 
	d 

تمرّنْ
7-2

القطع الناقص

Ellipse

المجموعة A تمارين مقالية

في التمارين (4—1)، لكل معادلة من معادلات القطع الناقص التالية أوجد: رأسي القطع — طرفي المحور الأصغر — البؤرتين — معادلتي دليلي القطع — طول كل من المحورين، ثم ارسم شكلًا تقريبيًا لكل قطع.

(1) $\frac{x^2}{8^2}+\frac{y^2}{6^2}=1$ (2) $\frac{x^2}{4^2}+\frac{y^2}{6^2}=1$

(1) $\frac{x^2}{8^2}+\frac{y^2}{6^2}=1$

$a^2=8^2 \Longrightarrow a=8$

رأسا القطع: $A_1(-8,0)\ ,\ A_2(8,0)$

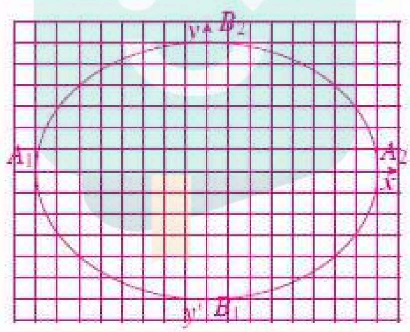
$b^2=6^2 \Longrightarrow b=6$

النقطتان الطرفيتان للمحور الأصغر: $B_1(0,-6)\ ,\ B_2(0,6)$

$a^2=b^2+c^2 \Longrightarrow c^2=a^2-b^2$

$c^2=8^2-6^2=28 \Longrightarrow c=2\sqrt{7}$

البؤرتان: $F_1(-2\sqrt{7},0)\ ,\ F_2(2\sqrt{7},0)$



معادلتا دليلي القطع الناقص: $x=-\frac{a^2}{c}=\frac{-64}{2\sqrt{7}}=\frac{-32\sqrt{7}}{7}$, $x=\frac{a^2}{c}=\frac{64}{2\sqrt{7}}=\frac{32\sqrt{7}}{7}$

طول المحور الأكبر: $2a=2\times 8=16$

طول المحور الأصغر: $2b=2\times 6=12$

(2) $\frac{x^2}{4^2}+\frac{y^2}{6^2}=1$

(2) $\frac{x^2}{4^2}+\frac{y^2}{6^2}=1$

$a^2=6^2 \Longrightarrow a=6$

رأسا القطع: $A_1(0,-6)$, $A_2(0,6)$

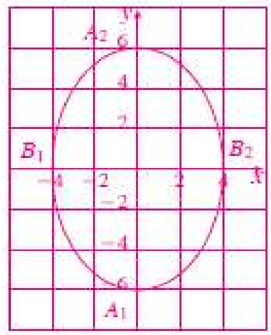
$b^2=4^2 \Longrightarrow b=4$

النقطتان الطرفيتان للمحور الأصغر: $B_1(-4,0)$, $B_2(4,0)$

$a^2=b^2+c^2 \Longrightarrow c^2=a^2-b^2$

$c^2=6^2-4^2=20 \Longrightarrow c=2\sqrt{5}$

البورتان: $F_1(0,-2\sqrt{5})$, $F_2(0,2\sqrt{5})$



معادلتا دليلي القطع الناقص: $y=-\frac{a^2}{c}=\frac{-36}{2\sqrt{5}}=\frac{-18\sqrt{5}}{5}$, $y=\frac{a^2}{c}=\frac{36}{2\sqrt{5}}=\frac{18\sqrt{5}}{5}$

طول المحور الأكبر: $2a=12$

طول المحور الأصغر: $2b=8$

(3) $3x^2+5y^2-225=0$

(3) $3x^2+5y^2-225=0$

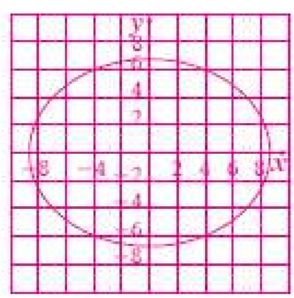
$\frac{3x^2}{225}+\frac{5y^2}{225}=\frac{225}{225}$

معادلة القطع الناقص: $\frac{x^2}{75}+\frac{y^2}{45}=1$

$a^2=75 \Longrightarrow a=5\sqrt{3}$

رأسا القطع: $A_1(5\sqrt{3},0)$, $A_2(-5\sqrt{3},0)$

$b^2=45 \Longrightarrow b=3\sqrt{5}$



النقطتان الطرفيتان للمحور الأصغر: $B_1(0,-3\sqrt{5})$, $B_2(0,3\sqrt{5})$

$a^2=b^2+c^2 \Longrightarrow c^2=a^2-b^2$

$c^2=75-45=30 \Longrightarrow c=\sqrt{30}$

البورتان: $F_1(-\sqrt{30},0)$, $F_2(\sqrt{30},0)$

معادلتا دليلي القطع: $x=-\frac{a^2}{c}=\frac{-75}{\sqrt{30}}=\frac{-5\sqrt{30}}{2}$, $x=\frac{a^2}{c}=\frac{75}{\sqrt{30}}=\frac{5\sqrt{30}}{2}$

طول المحور الأكبر: $2a=10\sqrt{3}$

طول المحور الأصغر: $2b=6\sqrt{5}$

(4) $4x^2+y^2-28=0$

(4) $4x^2+y^2-28=0$

$\frac{4x^2}{28}+\frac{y^2}{28}=\frac{28}{28}$

$\frac{x^2}{7}+\frac{y^2}{28}=1$ معادلة القطع الناقص:

$a^2=28 \Longrightarrow a=2\sqrt{7}$

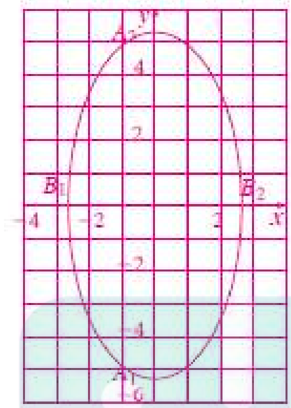
رأسا القطع: $A_1(0,-2\sqrt{7})$, $A_2(0,2\sqrt{7})$

النقطتان الطرفيتان للمحور الأصغر: $B_1(-\sqrt{7},0)$, $B_2(\sqrt{7},0)$

$a^2=b^2+c^2 \Longrightarrow c^2=a^2-b^2$

$c^2=28-7=21 \Longrightarrow c=\sqrt{21}$

البؤرتان: $F_1(0,-\sqrt{21})$, $F_2(0,\sqrt{21})$



معادلتا دليلي القطع الناقص:

$y=\frac{a^2}{c}=\frac{28}{\sqrt{21}}=\frac{28\sqrt{21}}{21}=\frac{4}{3}\sqrt{21}$ $y=-\frac{a^2}{c}=\frac{-28}{\sqrt{21}}=\frac{-28\sqrt{21}}{21}=\frac{-4}{3}\sqrt{21}$

طول المحور الأكبر: $2a=4\sqrt{7}$

طول المحور الأصغر: $2b=2\sqrt{7}$

في التمارين (5–12)، اكتب معادلة القطع الناقص الذي فيه:

(5) البؤرتان $F_2(2,0)$ ، $F_1(-2,0)$ ، ونقطتا طرفي المحور الأصغر $B_2(0,3)$ ، $B_1(0,-3)$.

(5) $c=2$, $b=3$

$a^2=b^2+c^2=3^2+2^2=13$

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad \therefore \quad \frac{x^2}{13}+\frac{y^2}{9}=1$

(6) $V_1F_1+V_1F_2=10$، حيث إنّ V_1 هو نقطة على القطع الناقص، F_2 و F_1 هما البؤرتين، علمًا أنّ $F_1(3,0)$، $F_2(-3,0)$.

(6) $2a=10 \Longrightarrow a=5$; $c=3$

$b^2=a^2-c^2=25-9=16 \Longrightarrow b=4$

$\therefore \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$

(7) نقطتا طرفي المحور الأكبر هما $A_1\ (0,-5)$, $A_2\ (0,5)$ ، طول المحور الأصغر 4.

(7) $a = 5\ ,\ 2b = 4 \Longrightarrow b = 2$

فتكون معادلة القطع الناقص: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1$

(8) نقطتا طرفي المحور الأصغر $B_1\ (0,-4)$, $B_2\ (0,4)$ ، طول المحور الأكبر 10.

(8) $b = 4$

$2a = 10 \Longrightarrow a = 5$

$\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1 \Longrightarrow \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$

(9) مركزه نقطة الأصل وإحدى بؤرتيه $F(5,0)$ ويمر بالنقطة $C(2,3)$.

(9) $c = 5$

$a^2 = b^2 + 5^2 \Longrightarrow a^2 = b^2 + 25$

$\frac{2^2}{a^2} + \frac{3^2}{b^2} = 1$

$\Longrightarrow a^2b^2 = 4b^2 + 9a^2 \Longrightarrow (b^2+25)b^2 = 4b^2 + 9(b^2+25) \Longrightarrow b^4 + 25b^2 = 4b^2 + 9b^2 + 225$

$\Longrightarrow b^4 + 12b^2 - 225 = 0 \Longrightarrow b^2 = -6 + 3\sqrt{29}$

$\Longrightarrow a^2 = 19 + 3\sqrt{29}$

$\frac{x^2}{(19+3\sqrt{29})} + \frac{y^2}{(-6+3\sqrt{29})} = 1$

(10) محوره الأكبر نقطتاه الطرفيتان $A_1(-6,0)$, $A_2(6,0)$ ومحوره الأصغر إحدى نقطتيه الطرفيتين $B_1(0,-4)$.

(10) $a = 6\ ;\ b = 4$

معادلة القطع الناقص: $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} = 1$

(11) بؤرتاه $F_1(5,0)$, $F_2(-5,0)$ وطول محوره الأصغر 6.

(11) $c = 5\ ;\ 2b = 6 \Longrightarrow b = \frac{6}{2} = 3$

$a^2 = c^2 + b^2 \Longrightarrow a^2 = 5^2 + 3^2 = 25 + 9 = 34$

$\frac{x^2}{34} + \frac{y^2}{9} = 1$

(12) طول المحور الأكبر الذي ينطبق على محور السينات 10 والمسافة بين البؤرتين 6 ومركزه نقطة الأصل.

(12) $2a = 10 \Longrightarrow a = 5\ ;\ 2c = 6 \Longrightarrow c = \frac{6}{2} = 3$

$b^2 = a^2 - c^2 = 25 - 9 = 16$

$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (5–1)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة، و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) رأسي القطع للقطع الناقص الذي معادلته: $\frac{x^2}{9^2}+\frac{y^2}{5^2}=1$ هما: $(-9,0)$، $(9,0)$ — (a) (b)

(2) النقطة $(\sqrt{33},0)$ هي إحدى بؤرتي القطع الناقص الذي معادلته: $\frac{x^2}{7^2}+\frac{y^2}{4^2}=1$ — (a) (b)

(3) طول المحور الأكبر للقطع الناقص الذي معادلته $25x^2+9y^2=225$ يساوي 10 units — (a) (b)

(4) بؤرتا القطع الناقص الذي معادلته: $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25}=1$، هما $(\pm 3,0)$ — (a) (b)

(5) في القطع الناقص الذي معادلته: $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{36}=1$، طول المحور الأصغر يساوي 8 — (a) (b)

في التمارين (12–6)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(6) النقطتان الطرفيتان للمحور الأصغر للقطع الناقص الذي معادلته $4x^2+9y^2=36$ هما:

(a) $(\pm 2,0)$ (b) $(\pm 3,0)$

(c) $(0,\pm 2)$ (d) $(0,\pm 3)$

(7) معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه $(\pm 7,0)$ والنقطتان الطرفيتان لمحوره الأصغر $(0,\pm 6)$ هي:

(a) $\frac{x^2}{85}+\frac{y^2}{36}=1$ (b) $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{85}=1$

(c) $\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{36}=1$ (d) $\frac{x^2}{85}+\frac{y^2}{49}=1$

(8) معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه على محور السينات ومركزه نقطة الأصل وطول محوره الأكبر 9 units وطول محوره الأصغر 4 units هي:

(a) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ (b) $\frac{x^2}{20.25}+\frac{y^2}{4}=1$

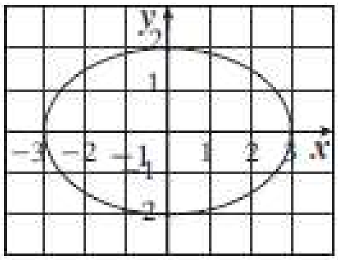
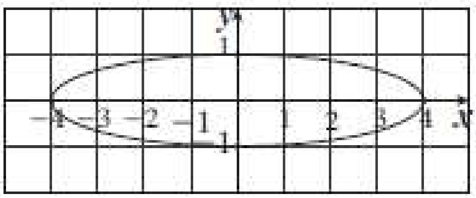
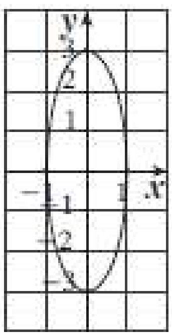
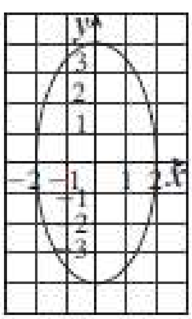
(c) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ (d) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{20.25}=1$

(9) النقطة $A(-10,0)$ تنتمي إلى القطع الناقص الذي معادلته $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{64}=1$. مجموع المسافتين AF_1+AF_2 حيث F_1 , F_2 هما البؤرتان يساوي:

(a) 10 units (b) 12 units

(c) 14 units (d) 20 units

في التمارين (13–15)، لديك قائمتان. اختر من القائمة (2) ما يناسب كل تمرين في القائمة (1) لتصل بيان كل قطع ناقص بمعادلته.

القائمة (2)	القائمة (1)
a 	b $\frac{x^2}{16}+y^2=1$ (13)
b 	c $x^2+\frac{y^2}{9}=1$ (14)
c 	d $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16}=1$ (15)
d 	

تمرَّن
7–3

القطع الزائد
Hyperbola

المجموعة A تمارين مقالية

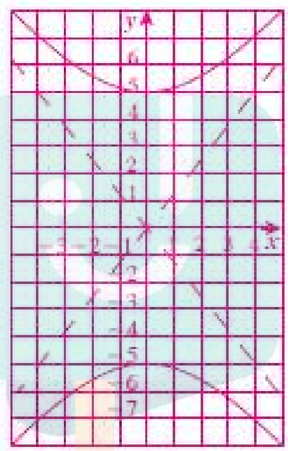
في التمرينين (2–1)، لكل معادلة من معادلات القطع الزائد التالية أوجد: رأسي القطع – البؤرتين – معادلة كل من الخطين المقاربين – معادلة كل من الدليلين – طول كل من المحورين، ثم ارسم شكلًا تخطيطيًا للقطع الزائد.

(1) $\frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{16} = 1$

البؤرتان: $F_1(0, \sqrt{41})$, $F_2(0, -\sqrt{41})$

معادلتا الخطين المقاربين: $y = \pm\frac{a}{b}x = \pm\frac{5}{4}x$

معادلتا الدليلين: $y = \pm\frac{a^2}{c} = \pm\frac{25\sqrt{41}}{41}$



طول المحور الأكبر: $2a = 4 \times 5 = 10$

طول المحور المرافق: $2b = 2 \times 4 = 8$

(2) $24x^2 - 12y^2 - 192 = 0$

(2) $24x^2 - 12y^2 - 192 = 0$

$\frac{24x^2}{192} - \frac{12y^2}{192} = \frac{192}{192}$

$\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{16} = 1$

$a^2 = 8 \Longrightarrow a = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

رأسا القطع: $A_1(2\sqrt{2}, 0)$, $A_2(-2\sqrt{2}, 0)$

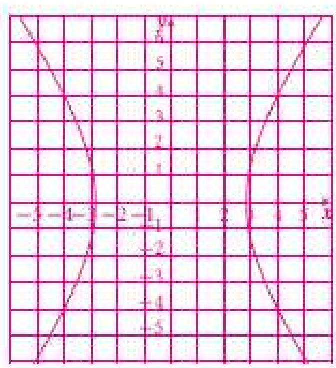
$b^2 = 16 \Longrightarrow b = 4$

$c^2 = a^2 + b^2 = 8 + 16 = 24 \Longrightarrow c = 2\sqrt{6}$

البؤرتان: $F_1(2\sqrt{6}, 0)$, $F_2(-2\sqrt{6}, 0)$

معادلتا الخطين المقاربين: $y = \pm\frac{b}{a}x = \pm\frac{4x}{2\sqrt{2}} = \pm\sqrt{2}x$

معادلتا الدليلين: $x = \pm\frac{a^2}{c} = \pm\frac{8}{2\sqrt{6}} = \pm\frac{2\sqrt{6}}{3}$



طول المحور الأكبر: $2a = 4\sqrt{2}$

طول المحور المرافق: $2b = 2 \times 4 = 8$

(3) أوجد معادلة القطع الزائد الذي إحدى بؤرتيه $F_1(-5,0)$ ورأساه $A_2(3,0)$, $A_1(-3,0)$ ثم أوجد معادلة كل من خطيه المقاربين وارسم شكلًا تقريبيًا له.

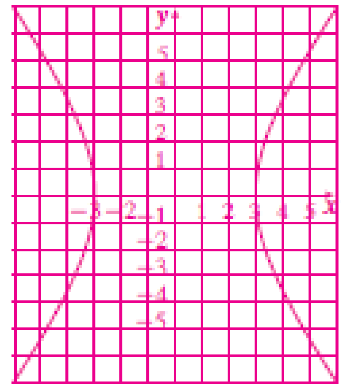
(3) $c = 5$, $a = 3$

$c^2 = a^2 + b^2 = b^2 = c^2 - a^2$

$b^2 = 25 - 9 = 16 \Longrightarrow b = 4$

$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ معادلة القطع الزائد:

$y = \pm \frac{b}{a} x = \pm \frac{4x}{3}$ معادلتا الخطين المقاربين:



(4) أوجد معادلة القطع الزائد الذي مركزه $(0\ ,\ 0)$ وإحدى بؤرتيه $F_1(0,-\sqrt{5})$ ومعادلة أحد خطيه المقاربين $y = 2x$.

(4) $\frac{a}{b} = 2 \Longrightarrow a = 2b$

$c = \sqrt{5}$

$c^2 = a^2 + b^2 \Longrightarrow (2b^2) + b^2 = 5 \Longrightarrow 5b^2 = 5$

$\Longrightarrow b^2 = 1 \Longrightarrow b = 1$

$\therefore\ a = 2$

$\Longrightarrow \frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{1} = 1\ ,\ \frac{y^2}{4} - x^2 = 1$ معادلة القطع الزائد:

(5) أوجد معادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الأصل وأحد رأسيه $A_2\left(\frac{2}{3},0\right)$ ويمر بالنقطة $(1,1)$.

(5) $a = \frac{2}{3}$

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Longrightarrow \frac{x^2}{\frac{4}{9}} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

لنضع إحداثيات النقطة $(1, 1)$ في المعادلة:

$\frac{1}{\frac{4}{9}} - \frac{1}{b^2} = 1 \Longrightarrow b^2 = \frac{4}{5}$

$\Longrightarrow \frac{x^2}{\frac{4}{9}} - \frac{y^2}{\frac{4}{5}} = 1$ معادلة القطع الزائد:

(6) أوجد معادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الأصل ويمر بالنقطتين $A(2,1)$, $B(4,3)$ ومحوره الأساسي جزء من محور السينات.

(6) بما أن محوره الأساسي هو جزء من محور السينات فالمعادلة هي: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

لنضع إحداثيات A في المعادلة:

$$\frac{4}{a^2}-\frac{1}{b^2}=1$$

$$\frac{4}{a^2}=\frac{1}{b^2}+1 \Longrightarrow \frac{1}{a^2}=\frac{1}{4b^2}+\frac{1}{4}$$

لنضع إحداثيات B في المعادلة:

$$\frac{16}{a^2}-\frac{9}{b^2}=1$$

بالتعويض نوجد المعادلة التالية:

$$16\left(\frac{1}{4b^2}+\frac{1}{4}\right)-\frac{9}{b^2}=1$$

$$4+\frac{4}{b^2}-\frac{9}{b^2}=1 \Longrightarrow \frac{5}{b^2}=3 \Longrightarrow b^2=\frac{5}{3}$$

$$\frac{4}{a^2}-\frac{1}{\frac{5}{3}}=1 \Longrightarrow \frac{4}{a^2}=\frac{8}{5} \Longrightarrow a^2=\frac{5}{2}$$

المعادلة هي: $\frac{x^2}{\frac{5}{2}}-\frac{y^2}{\frac{5}{3}}=1$

(7) سمع صوت طلق ناري عند النقطة $A(150,0)$ وبعده بثانيتين سمع الصوت نفسه عند النقطة $B(-150,0)$.
أثبت أن مجموعة النقاط $P(x,y)$ التي يمكن أن تكون مصدرًا للصوت تمثل قطعًا زائدًا، ثم أوجد معادلته علمًا بأن سرعة الصوت في الهواء 50 units/s

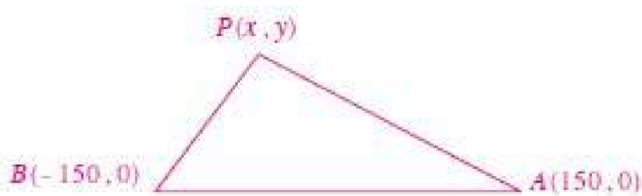
(7) نستخدم قاعدة المسافة بدلالة الزمن والسرعة:

$$d=vt \Longleftrightarrow t=\frac{d}{v}$$

$$t_1=\frac{PA}{50}$$

$$t_2=\frac{PB}{50}$$

$$t_1-t_2=\frac{PA}{50}-\frac{PB}{50}$$



ولكن: $t_1-t_2=2$

$$2=\frac{PA}{50}-\frac{PB}{50} \Longrightarrow PA-PB=100$$

بما أن A, B نقطتان ثابتتان فيكون منحنى النقاط المتغيرة P هي قطع زائد بؤرتاه هما A, B حيث: $2a=100$

$$c=150\ ,\ a=50$$

$$b^2=(150)^2-(50)^2=20\,000$$

معادلة القطع الزائد: $\frac{x^2}{2\,500}-\frac{y^2}{20\,000}=1$

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (4–1)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة، و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) $x^2 - y^2 = 4$ هي معادلة قطع زائد. — a — b

(2) الخطّان المقاربان للقطع الزائد الذي معادلته $x^2 - y^2 = 12$ هما متعامدان. — a — b

(3) إحداثيات بؤرتي القطع الزائد الذي معادلته $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{18} = 1$ هما: $(0,3)$, $(0,-3)$. — a — b

(4) نقطتا طرفي المحور المرافق للقطع الزائد الذي معادلته $\frac{x^2}{25} - y^2 = 1$ هما: $B_1(1,0)$, $B_2(-1,0)$. — a — b

في التمارين (11–5)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(5) معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه $(0,\pm 3)$ وطول محوره القاطع 4 هي:

- (a) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$
- (b) $\frac{y^2}{5} - \frac{x^2}{4} = 1$
- (c) $\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{5} = 1$
- (d) $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = 1$

(6) إذا كانت معادلة القطع الزائد $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{3} = 1$، فيمرّ أحد الخطين المقاربين له في النقطة:

- (a) $\left(2, 2\sqrt{\frac{3}{5}}\right)$
- (b) $\left(\sqrt{\frac{5}{3}}, 2\right)$
- (c) $\left(2\sqrt{\frac{3}{5}}, 2\right)$
- (d) $\left(\sqrt{\frac{5}{3}}, 2\sqrt{\frac{3}{5}}\right)$

(7) معادلة القطع الزائد الذي نقطتي تقاطعه مع المحور السيني هما $(\pm 6,0)$ هي:

- (a) $y^2 - x^2 = 36$
- (b) $\frac{y^2}{36} - \frac{x^2}{49} = 1$
- (c) $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{36} = 1$
- (d) $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{4} = 1$

(8) البعد بين بؤرتي القطع الزائد الذي معادلته: $50y^2 - 25x^2 - 100 = 0$ بوحدة الطول يساوي:

- (a) $\sqrt{6}$
- (b) $2\sqrt{6}$
- (c) 6
- (d) $2\sqrt{2}$

(9) منحنى أي معادلة مما يلي لا يقطع المحور الصادي في $(0,\pm 4)$:

- (a) $y^2 - x^2 = 16$
- (b) $4y^2 - 16x^2 = 64$
- (c) $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1$
- (d) $\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{9} = 1$

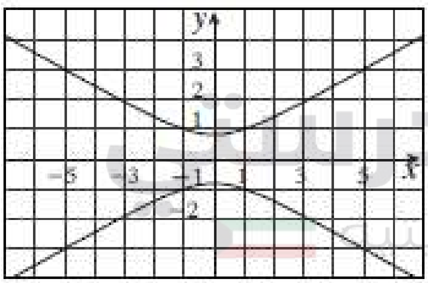
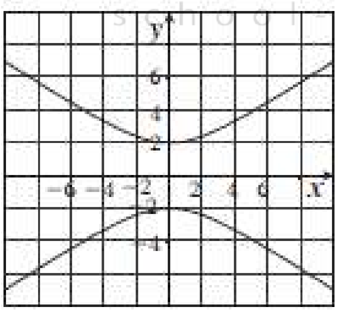
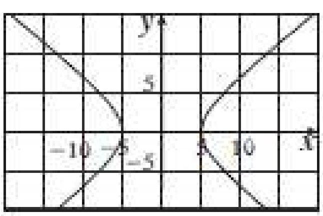
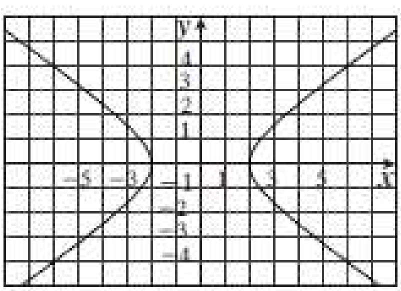
(10) نقطتا تقاطع القطع الزائد الذي معادلته: $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{49}=1$ مع محور السينات هما:

- (a) $(\pm 7, 0)$
- (b) $(\pm 5, 0)$
- (c) $(0, \pm 5)$
- (d) ليس أيًّا مما سبق

(11) معادلتا الخطين المقاربين للقطع الزائد: $\frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{32}=2$ هما:

- (a) $y=\pm 2x$
- (b) $y=\pm\frac{1}{2}x$
- (c) $y=\pm 4x$
- (d) $y=\pm\frac{1}{4}x$

في التمارين (14–12)، لديك قائمتان. اختر من القائمة (2) ما يناسب كل تمرين في القائمة (1) لتصل بيان كل قطع زائد بمعادلته.

<table>
<tr><th>القائمة (1)</th><th>القائمة (2)</th></tr>
<tr><td>(12) $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{16}=1$ c</td><td>(a) 
</td></tr>
<tr><td>(13) $3y^2-x^2=2$ a</td><td>(b) 
</td></tr>
<tr><td>(14) $\frac{1}{2}x^2-y^2-2=0$ d</td><td>(c) 
</td></tr>
<tr><td></td><td>(d) 
</td></tr>
</table>

تمرّنْ
7-4

الاختلاف المركزي

Eccentricity

المجموعة A تمارين مقالية

في التمارين (4-1)، حدّد نوع القطع في كل ممّا يلي، ثم أوجد معادلته.

(1) اختلافه المركزي $e = \frac{3}{2}$ وإحدى بؤرتيه $F(0,3)$

(1) $e = \frac{3}{2}$, $\frac{3}{2} > 1$

إذًا القطع المخروطي هو قطع زائد

$c = 3$, $e = \frac{c}{a} \Longrightarrow \frac{3}{a} = \frac{3}{2} \Longrightarrow a = 2$

ولكن في القطع الزائد:

$c^2 = a^2 + b^2 \Longrightarrow b^2 = 9 - 4$

$b^2 = 5$

معادلة القطع الزائد هي: $\frac{y^2}{5} - \frac{x^2}{4} = 1$

(2) اختلافه المركزي $e = \frac{\sqrt{7}}{4}$ وإحدى بؤرتيه $F(0,-\sqrt{7})$

(2) $e = \frac{\sqrt{7}}{4}$, $\frac{\sqrt{7}}{4} < 1$

إذًا القطع المخروطي هو قطع ناقص

$c = \sqrt{7}$, $e = \frac{c}{a} \Longrightarrow \frac{\sqrt{7}}{4} = \frac{\sqrt{7}}{a} \Longrightarrow a = 4$

$a^2 = b^2 + c^2 \Longrightarrow b^2 = a^2 - c^2$

$b^2 = 16 - 7 \Longrightarrow b^2 = 9$

معادلة القطع الناقص هي: $\frac{y^2}{16} + \frac{x^2}{9} = 1$

(3) اختلافه المركزي $e = \frac{5}{3}$ وأحد رأسيه $A(-4,0)$

(3) $e = \frac{5}{3}$, $\frac{5}{3} > 1$

إذًا القطع المخروطي هو قطع زائد

$a = 4$, $e = \frac{c}{a}$

$\frac{c}{4} = \frac{5}{3} \Longrightarrow c = \frac{5 \times 4}{3} = \frac{20}{3}$

في القطع الزائد: $c^2 = a^2 + b^2 \Longrightarrow b^2 = c^2 - a^2$

$b^2 = \frac{400}{9} - 16 = \frac{256}{9}$

المعادلة هي: $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{\frac{256}{9}} = 1$

(4) اختلافه المركزي $e = \frac{3}{4}$ ومعادلة دليله $x = 8$

(4) $e = \frac{3}{4}$, $\frac{3}{4} < 1$

إذًا القطع المخروطي هو قطع ناقص

معادلة الدليل: $8 = \frac{a^2}{c} \Longrightarrow c = \frac{a^2}{8}$

$\frac{3}{4} = \frac{c}{a} = \frac{\frac{a^2}{8}}{a} \Longrightarrow \frac{3}{4} = \frac{a}{8} \Longrightarrow a = 6$

$c = e \cdot a = \frac{3}{4} \times 6 = \frac{9}{2}$

في القطع الناقص: $a^2 = b^2 + c^2 \Longrightarrow b^2 = a^2 - c^2$

$b^2 = 36 - \frac{81}{4} = \frac{63}{4}$

المعادلة هي: $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{\frac{63}{4}} = 1$

في التمرينين (5–6)، أوجد الاختلاف المركزي لكل قطع ممّا يلي حيث معادلته:

(5) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$

(5) $(a^2 = 9\ ,\ b^2 = 4) \Longrightarrow (a = 3\ ,\ b = 2)$

في القطع الناقص: $a^2 = b^2 + c^2$

$c^2 = 9 - 4 = 5 \Longrightarrow c = \sqrt{5}$

الاختلاف المركزي للقطع الناقص: $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{3}$

(6) $4y^2 - 9x^2 = 36$

(6) $4y^2 - 9x^2 = 36$

$\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{4} = 1$ على الصورة $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$

بالمقارنة $a^2 = 9 \Longrightarrow a = 3$

$b^2 = 4 \Longrightarrow b = 2$

$c^2 = a^2 + b^2 = 9 + 4 = 13 \Longrightarrow c = \sqrt{13}$

$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{13}}{3} > 1$

في التمرينين (7–8)، أوجد الرأسين والبؤرتين والاختلاف المركزي ومعادلتي الدليلين للقطع الزائد.

(7) المعادلة: $\frac{x^2}{7} - \frac{y^2}{16} = 1$

(7) $a^2 = 7 \Longrightarrow a = \sqrt{7}$

$b^2 = 16 \Longrightarrow b = 4$

الرأسان: $A_1(-\sqrt{7},0)$, $A_2(\sqrt{7},0)$

$c^2 = a^2 + b^2 = 7 + 16 \Longrightarrow c = \sqrt{23}$

البؤرتان: $F_1(-\sqrt{23},0)$, $F_2(\sqrt{23},0)$

الاختلاف المركزي: $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{23}}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{161}}{7}$

معادلتا الدليلين: $x = \pm\frac{a^2}{c} = \pm\frac{7}{\sqrt{23}} = \pm\frac{7\sqrt{23}}{23}$

(8) المعادلة: $\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{4} = 1$

(8) $a^2 = 16 \Longrightarrow a = 4$

$b^2 = 4 \Longrightarrow b = 2$

الرأسان: $A_1(0,-4)$, $A_2(0,4)$

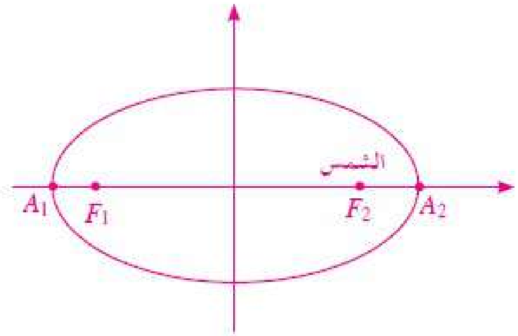
$c^2 = a^2 + b^2 = 16 + 4 = 20 \Longrightarrow c = 2\sqrt{5}$

البؤرتان: $F_1(0,-2\sqrt{5})$, $F_2(0,2\sqrt{5})$

$e = \frac{c}{a} = \frac{2\sqrt{5}}{4} = \frac{\sqrt{5}}{2}$

معادلتا الدليلين: $y = \pm\frac{a^2}{c} = \pm\frac{16}{2\sqrt{5}} = \pm\frac{8\sqrt{5}}{5}$

(9) مسار الأرض حول الشمس هو قطع ناقص، حيث تقع الشمس عند إحدى بؤرتيه. إذا كان طول المحور الأكبر للقطع 300 000 km واختلافه المركزي $e = 0.017$. فأوجد أكبر وأصغر بُعد للأرض عن الشمس.



(9) $2a = 3\,000\,000 \Longrightarrow a = 150\,000$

$e = \frac{c}{a} \Longrightarrow c = e \cdot a = 0.017 \times 150\,000 = 2\,550$

$c = 2\,550$

أصغر بعد للأرض عن الشمس هو: F_2A_2 فيكون:

$F_2A_2 = 150\,000 - 2\,550 = 147\,450$ km

أكبر بعد للأرض عن الشمس هو: F_2A_1 فيكون:

$F_2A_1 = 150\,000 + 2\,550 = 152\,550$ km

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمرينين (1–7)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) إذا كانت $e < 1$، فإن القطع هو قطع ناقص. — a b

(2) إذا $a = 6$ ، $b = 9$ في القطع الزائد فإنّ $c = 3\sqrt{13}$ — a b

(3) معادلتا المقاربين للقطع الزائد $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{9} = 1$ هما: $y = \frac{-1}{2}x$ ، $y = \frac{1}{2}x$ — a b

(4) إذا كانت معادلة القطع الناقص هي: $\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{9} = 1$، فإن طول محوره الأكبر هو 6 وطول محوره الأصغر هو 14. — a b

(5) لأيّ معادلة قطع مكافئ فإنّ $e = 1$ — a b

(6) المحور القاطع للقطع الزائد $\frac{y^2}{15} - \frac{x^2}{10} = 1$ ينطبق على محور الصادات. — a b

(7) رأسا القطع الناقص الذي معادلته: $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{25} = 1$ هما: $(0,6)$, $(0,-6)$ — a b

في التمارين (13–8)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(8) إذا كانت $a = 7$ ، $c = 2\sqrt{10}$ ، فإن معادلة القطع المخروطي الناتج هي:

ⓐ $\frac{x^2}{49} - \frac{y^2}{9} = 1$

ⓑ $\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{9} = 1$

ⓒ $\frac{x^2}{7} + \frac{y^2}{3} = 1$

ⓓ $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{49} = 1$

(9) أيّ معادلة مما يلي تمثل قطعًا زائدًا معادلة أحد دليليه $y = \frac{25}{7}$؟

ⓐ $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{24} = 1$

ⓑ $\frac{x^2}{24} - \frac{y^2}{25} = 1$

ⓒ $\frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{24} = 1$

ⓓ $\frac{y^2}{25} + \frac{x^2}{24} = 1$

(10) إذا كانت معادلة أحد المقاربين $y = \frac{-7}{5}x$ والاختلاف المركزي $e = \frac{\sqrt{74}}{5}$

فمعادلة القطع الزائد هي:

ⓐ $\frac{y^2}{7} - \frac{x^2}{5} = 1$

ⓑ $\frac{x^2}{7} - \frac{y^2}{5} = 1$

ⓒ $\frac{x^2}{49} - \frac{y^2}{25} = 1$

ⓓ $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{49} = 1$

(11) الاختلاف المركزي للمعادلة $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{25} = 1$ هو:

ⓐ $\frac{\sqrt{11}}{6}$

ⓑ $\frac{\sqrt{11}}{5}$

ⓒ $\frac{36}{25}$

ⓓ $\frac{25}{36}$

(12) معادلة قطع ناقص إحدى بؤرتيه $(0, 4)$ وأحد رأسيه $(0, -5)$ هي:

ⓐ $\frac{y^2}{9} + \frac{x^2}{25} = 1$

ⓑ $\frac{y^2}{4} + \frac{x^2}{5} = 1$

ⓒ $\frac{y^2}{25} + \frac{x^2}{9} = 1$

ⓓ $\frac{y^2}{5} + \frac{x^2}{3} = 1$

(13) لأيّ قطع ناقص يكون:

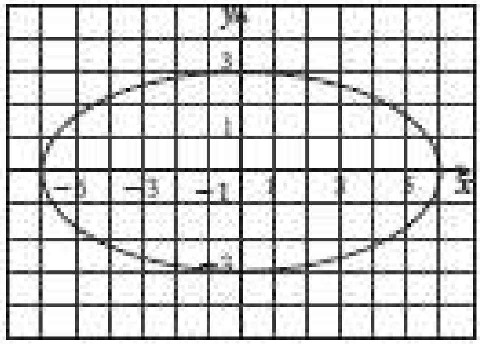
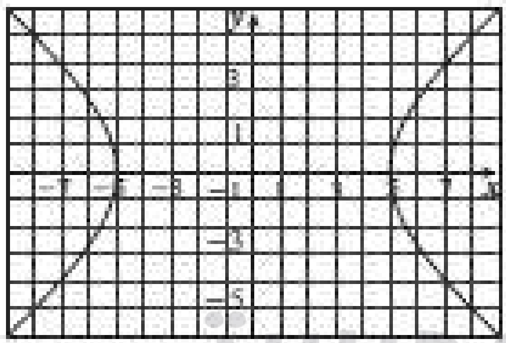
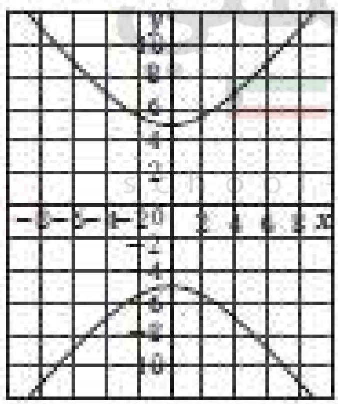
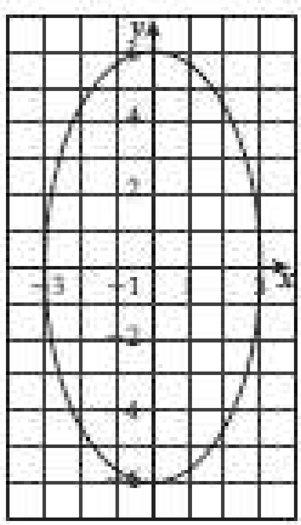
ⓐ $a > c$

ⓑ $a < c$

ⓒ $a = ec$

ⓓ $a = c$

في التمارين (14–16)، لديك قائمتان اختر من القائمة (2) ما يناسب كل تمرين في القائمة (1) لتصل بيان كل قطع مخروطي بمعادلته.

القائمة (1)		القائمة (2)
$\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1$ (14)	b	a 
$\frac{y^2}{36} + \frac{x^2}{9} = 1$ (15)	d	b 
$\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{9} = 1$ (16)	a	c 
		d 

اختبار الوحدة السابعة

في التمارين (4–1)، حدّد نوع القطع المخروطي، ثم اكتب معادلته بالصورة العامة، وحدّد البؤرتين والمركز.

(1) $4y^2-9x^2-36=0$

$4y^2-9x^2=36 \Longrightarrow \frac{y^2}{9}-\frac{x^2}{4}=1$

إذًا هي معادلة قطع زائد مركزه نقطة الأصل.

$a^2=9\ ,\ b^2=4$

$\Longrightarrow c^2=13 \Longrightarrow c=\sqrt{13}$

البؤرتان: $F_1(0,-\sqrt{13})\ ,\ F_2(0,\sqrt{13})$

(2) $-2x^2+3y^2+10=0$

$-2x^2+3y^2+10=0 \Longrightarrow -2x^2+3y^2=-10 \Longrightarrow 2x^2-3y^2=10$

$\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{\frac{10}{3}}=1$

إذًا هي معادلة قطع زائد مركزه نقطة الأصل.

$a^2=5\ ,\ b^2=\frac{10}{3}$

$\Longrightarrow c^2=\frac{25}{3} \Longrightarrow c=\frac{5\sqrt{3}}{3}$

البؤرتان: $F_1\left(-\frac{5\sqrt{3}}{3},0\right)\ ,\ F_2\left(\frac{5\sqrt{3}}{3},0\right)$

(3) $2x^2+y^2=9$

$2x^2+y^2=9$

$\frac{x^2}{\frac{9}{2}}+\frac{y^2}{9}=1$

إذًا هي معادلة قطع ناقص مركزه نقطة الأصل.

$a^2=\frac{9}{2}\ ,\ b^2=9$

$c^2=9-\frac{9}{2}$

$c^2=\frac{9}{2}$

البؤرتان: $F_1\left(0,-\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)\ ,\ F_2\left(0,\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$

(4) $2x^2-y^2+6=0$

$2x^2-y^2+6=0 \Longrightarrow 2x^2-y^2=-6 \Longrightarrow y^2-2x^2=6$

$\frac{y^2}{6}-\frac{x^2}{3}=1$

ذًا هي معادلة قطع زائد مركزه نقطة الأصل.

$a^2=6\ ,\ b^2=3 \Longrightarrow c^2=9$

البؤرتان: $F_1(0,-3)\ ,\ F_2(0,3)$

في التمارين (10–5)، أوجد: الاختلاف المركزي، البؤرة (البؤرتين)، معادلة الدليل (معادلتي الدليلين)، معادلتي الخطين المقاربين (في القطع الزائد).

(5) $\frac{x^2}{2^2}+\frac{y^2}{5^2}=1$

$\frac{x^2}{2^2}+\frac{y^2}{5^2}=1.$

هي معادلة قطع ناقص مركزه نقطة الأصل.

$a^2=5^2 \Longrightarrow a=5$

$b^2=2^2 \Longrightarrow b=2$

في القطع الناقص: $a^2=b^2+c^2 \Longrightarrow c^2=a^2-b^2$

$c^2=5^2-2^2=21 \Longrightarrow c=\sqrt{21}$

الاختلاف المركزي: $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{21}}{5}$

البؤرتان: $F_1(0,-\sqrt{21})$; $F_2(0,\sqrt{21})$

معادلتا الدليلين: $y=\pm\frac{a^2}{c}=\pm\frac{25}{\sqrt{21}}=\pm\frac{25\sqrt{21}}{21}$

(6) $y^2=5x$

$y^2=5x.$

هي معادلة قطع مكافئ مركزه نقطة الأصل.

$4p=5 \Longrightarrow p=\frac{5}{4}$

الاختلاف المركزي: $e=1$

البؤرة: $F\left(\frac{5}{4},0\right)$

معادلة الدليل: $x=-\frac{5}{4}$

(7) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1$

$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1$

هي معادلة قطع زائد مركزه نقطة الأصل.

$a^2=4 \Longrightarrow a=2$

$b^2=9 \Longrightarrow b=3$

في القطع الزائد: $c^2=a^2+b^2=13 \Longrightarrow c=\sqrt{13}$

الاختلاف المركزي: $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{13}}{2}$

البؤرتان: $F_1(-\sqrt{13},0)$; $F_2(\sqrt{13},0)$

معادلتا الدليلين: $x=\pm\frac{a^2}{c}=\pm\frac{4}{\sqrt{13}}=\pm\frac{4\sqrt{13}}{13}$

معادلتا الخطين المقاربين: $y=\pm\frac{b}{a}x=\pm\frac{3}{2}x$

(8) $\frac{x^2}{18^2}+\frac{y^2}{10^2}=1$

$\frac{x^2}{18^2}+\frac{y^2}{10^2}=1$

هي معادلة قطع ناقص مركزه نقطة الأصل.

$a^2=18^2 \Longrightarrow a=18$

$b^2=10^2 \Longrightarrow b=10$

في القطع الناقص: $a^2=b^2+c^2=c^2=a^2-b^2$

$c^2=18^2-10^2=224 \Longrightarrow c=\sqrt{224}=4\sqrt{14}$

الاختلاف المركزي: $e=\frac{c}{a}=\frac{4\sqrt{14}}{18}=\frac{2\sqrt{14}}{9}$

البؤرتان: $F_1(-4\sqrt{14},0)$; $F_2(4\sqrt{14},0)$

معادلتا الدليلين: $x=\pm\frac{a^2}{c}=\pm\frac{18^2}{4\sqrt{14}}=\pm\frac{81\sqrt{14}}{14}$

(9) $y^2 = -3x$

$y^2 = -3x$

هي معادلة قطع مكافئ مركزه نقطة الأصل.

$4p = -3 \Longrightarrow p = -\frac{3}{4}$

الاختلاف المركزي: $e = 1$

البؤرة: $F\left(-\frac{3}{4}, 0\right)$

معادلة الدليل: $x = \frac{3}{4}$

(10) $\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{9} = 1$

$\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{9} = 1$

هي معادلة قطع زائد مركزه نقطة الأصل.

$a^2 = 16 \Longrightarrow a = 4$

$b^2 = 9 \Longrightarrow b = 3$

في القطع الزائد: $c^2 = a^2 + b^2 = 16 + 9 = 25 \Longrightarrow c = 5$

الاختلاف المركزي: $e = \frac{c}{a} = \frac{5}{4}$

البؤرتان: $F_1(0, -5)\ ;\ F_2(0, 5)$

معادلتا الدليلين: $x = \pm \frac{a^2}{c} = \pm \frac{16}{5}$

معادلتا الخطين المقاربين: $y = \pm \frac{a}{b}x = \pm \frac{4}{3}x$

(11) إذا كان $a = b = r$ ، فسّر لماذا يكون القطع الناقص الذي معادلته $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ دائرة مركزها $(0, 0)$ ونصف قطرها r.

(11) $x^2 + y^2 = r^2$

$\therefore\ \frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2} = 1$

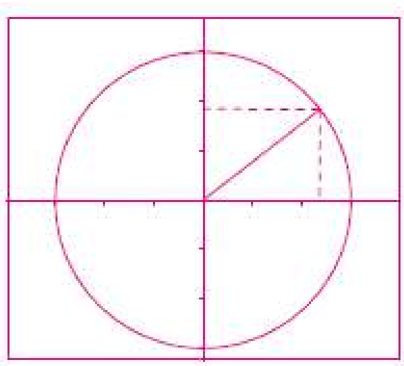
لتكن $M(x, y)$ نقطة على دائرة؛ لنذكّر أنّ $OM = r$.

$OM = \sqrt{x^2 + y^2}$

$\Longrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = r$

$\Longrightarrow (\sqrt{x^2 + y^2})^2 = r^2$

$\Longrightarrow x^2 + y^2 = r^2$



(12) أوجد معادلة تنمذج مسار سفينة فضائية حول أحد الكواكب إذا كان:

$a = 107124 \text{ km} \quad , \quad c = 213125.9 \text{ km}$

(12) $e = \frac{c}{a} = \frac{213125.9}{107124} \approx 1.99$

$e = 1.99 > 1$ إذًا هي معادلة قطع زائد مركزه نقطة الأصل.

$b^2 = c^2 - a^2 \Longrightarrow b^2 = 3.39 \times 10^{10}$

بفرض أن مركز القطع الزائد هو نقطة الأصل وأن المحور أفقي.

تكون المعادلة: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

$\Longrightarrow \frac{x^2}{1.15 \times 10^{10}} - \frac{y^2}{3.39 \times 10^{10}} = 1$

(13) لتكن M نقطة متغيرة على قطع زائد حيث بؤرتيه $F_1(155,0)$, $F_2(-155,0)$

أوجد معادلة القطع الزائد إذا كان $|MF_1 - MF_2| = 80$

(13) لتكن $M(x,y)$ نقطة على القطع الزائد و $F_2(155,0)$ ، $F_1(-155,0)$ البؤرتين.

$|MF_1 - MF_2| = 80$

$2a = 80 \Longrightarrow a = 40 \Longrightarrow a^2 = 1600$

$\therefore \; c = 155$

في القطع الزائد: $b^2 = c^2 - a^2$

$b^2 = 22\,425$

$\Longrightarrow \frac{x^2}{1600} - \frac{y^2}{22\,425} = 1$

(14) **(a)** حدّد نوع القطع المخروطي حيث اختلافه المركزي $e = \frac{\sqrt{2}}{2}$

(b) إذا كان مركزه نقطة الأصل $(0,0)$ أوجد a , b علمًا أنّ معادلة إحدى دليليه هي $x = 4$

(c) اكتب معادلة القطع المخروطي.

(14) **(a)** $e = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\frac{\sqrt{2}}{2} < 1$

إذًا هي معادلة قطع ناقص.

(b) $e = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{c}{a} \Longrightarrow 2c = \sqrt{2}\,a \Longrightarrow a = \sqrt{2}\,c$

$x = 4 = \frac{a^2}{c} \Longrightarrow 4 = \frac{(\sqrt{2}\,c)^2}{c} = 2c \Longrightarrow c = 2 \Longrightarrow a = 2\sqrt{2}$

في القطع الناقص: $a^2 = b^2 + c^2 \Longrightarrow (2\sqrt{2})^2 = b^2 + 4 \Longrightarrow b^2 = 4 \Longrightarrow b = 2$

(c) الصورة العامة للقطع الناقص حيث أن المحور القاطع ينطبق على محور السينات هي:

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Longrightarrow \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$

(15) اكتب معادلة قطع مخروطي مركزه نقطة الأصل $(0,0)$ حيث اختلافه المركزي $e = \frac{5}{4}$ وإحدى بؤرتيه $F(0\ ,\ -5)$

(15) $e = \frac{5}{4}\ ,\ \frac{5}{4} > 1$ إذًا هي معادلة قطع زائد.

$\frac{5}{4} = \frac{c}{a} \Longrightarrow 4c = 5a \Longrightarrow a = \frac{4}{5}c$

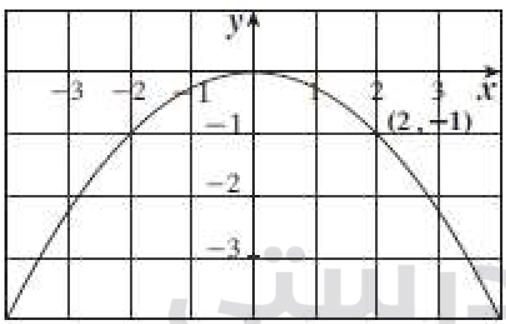
$c = 5 \Longrightarrow a = \frac{4}{5} \times 5 = 4$

في القطع الزائد: $b^2 = c^2 - a^2 = 25 - 16 = 9$

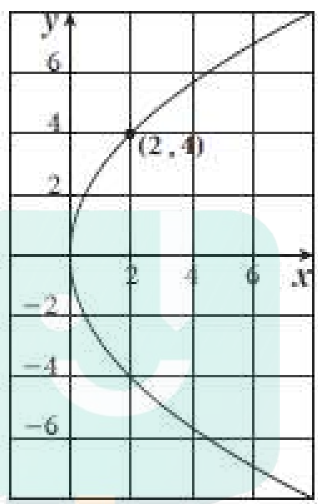
إذًا الصورة العامة للقطع الزائد هي: $\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{9} = 1$

في التمارين (16–19)، اكتب معادلة القطع المخروطي الموضّح في الرسم.

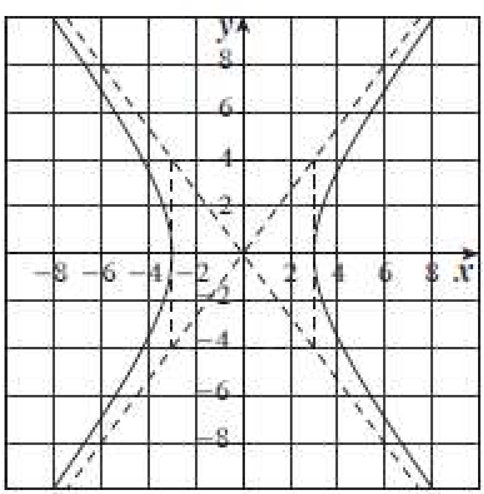
(16)



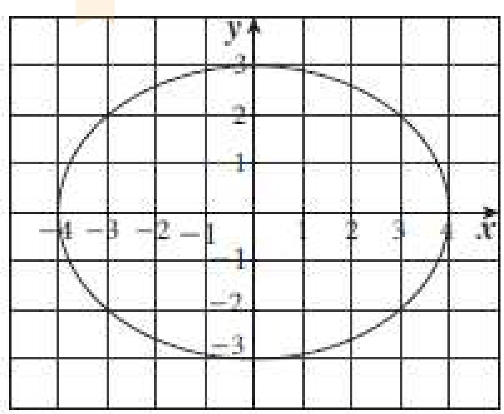
(17)



(18)



(19)



(16) $x^2 = -4y$

(17) $y^2 = 8x$

(18) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$

(19) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$

(20) أوجد معادلة قطع زائد إذا كان محوره الأكبر ينطبق على محور الصادات وطوله 12 والمسافة بين البؤرتين 20.

$$2c = 20 \Longrightarrow c = 10$$

$$c^2 = a^2 + b^2 \Longrightarrow b^2 = c^2 - a^2 = 100 - 36 = 64 \Longrightarrow b = 8$$

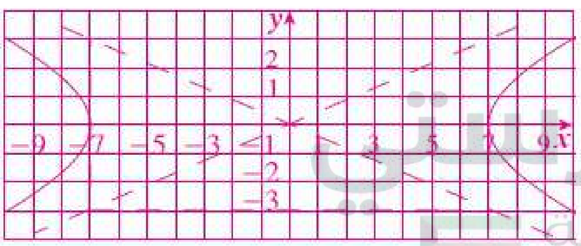
المعادلة: $\frac{y^2}{36} - \frac{x^2}{64} = 1$

تمارين إثرائية

(1) أوجد معادلات الخطوط المقاربة للقطع الزائد: $\frac{x^2}{49} - \frac{y^2}{9} = 1$، ومن ثم ارسم بيان هذا القطع الزائد.

(1) معادلات الخطوط المقاربة للقطع الزائد: $\frac{x^2}{49} - \frac{y^2}{9} = 1$

$y = \pm \frac{b}{a}x \quad \therefore \quad y = \pm \frac{3}{7}x$



(2) النقطتان الطرفيتان للمحور الأكبر في قطع ناقص إحداثياتهما $(-10,0)$، $(10,0)$ وإحدى النقاط الطرفية للمحور الأصغر هي $(0,7)$. أوجد إحداثيات بؤرته

(2) $a = 10 \quad b = 7$

$$c^2 = a^2 - b^2 = 100 - 49 = 51 \Longrightarrow c = \sqrt{51}$$

$$\therefore \; F_1(-\sqrt{51}, 0), \; F_2(\sqrt{51}, 0)$$

(3) لتكن المعادلة: $mx^2 + (2m+1)y^2 + (m-1)x = 0$

حدّد m لتكون هذه المعادلة معادلة قطع مكافئ، ثم عدّد خواصه.

(3) $m = 0 \Longrightarrow y^2 - x = 0$

$$y^2 = x$$

معادلة قطع مكافئ رأسه نقطة الأصل

$$4p = 1 \Longrightarrow p = \frac{1}{4}$$

البؤرة: $F\left(\frac{1}{4}, 0\right)$

معادلة الدليل $x = -\frac{1}{4}$

(4) لتكن المعادلة: $(m-1)x^2-(2m+1)y^2+2m+3=0$

إذا $m=2$، فحدّد ما تمثّله المعادلة، ثم أوجد خواصه.

(4) $x^2-5y^2+7=0 \Longrightarrow x^2-5y^2=-7 \Longrightarrow 5y^2-x^2=7$

$$\frac{y^2}{\frac{7}{5}}-\frac{x^2}{7}=1$$

إذًا هي معادلة قطع زائد مركزه نقطة الأصل.

$a^2=\frac{7}{5} \Longrightarrow a=\sqrt{\frac{7}{5}}$

$b^2=7 \Longrightarrow b=\sqrt{7}$

الرأسان: $A_1\left(0,-\sqrt{\frac{7}{5}}\right)$; $A_2\left(0,\sqrt{\frac{7}{5}}\right)$

معادلتا الخطين المقاربين: $y=\pm\frac{\sqrt{\frac{7}{5}}}{\sqrt{7}}x=\pm\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{5}\times\sqrt{7}}x=\pm\frac{\sqrt{5}}{5}x$

$c^2=a^2+b^2 \Longrightarrow c^2=\frac{7}{5}+7=\frac{42}{5} \Longrightarrow c=\sqrt{\frac{42}{5}}$

$F_1\left(0,-\sqrt{\frac{42}{5}}\right)$; $F_2\left(0,\sqrt{\frac{42}{5}}\right)$

معادلتا الدليلين: $y=\pm\frac{a^2}{c}=\pm\frac{7}{\frac{5\sqrt{42}}{\sqrt{5}}}=\pm\frac{\sqrt{210}}{30}$

(5) لتكن المعادلتان: $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{4}=1$ ، $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{25}=1$

(a) حدّد ما تمثله كل معادلة.

(b) أوجد نقاط التقاطع مستخدمًا المنحنيين اللذين يمثلاهما.

(c) علّل النتيجة التي حصلت عليها في السؤال (b) مستخدمًا عمليّات حسابيّة.

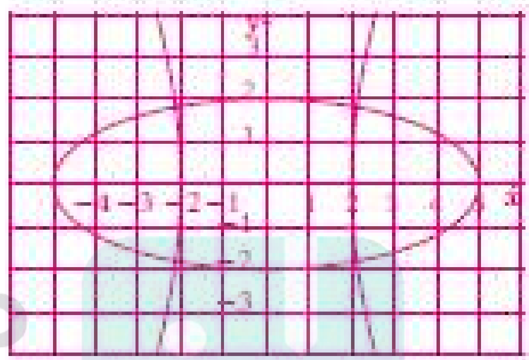
(5) (a) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{25}=1$

إذًا هي معادلة قطع زائد مركزه نقطة الأصل

$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{4}=1$

إذًا هي معادلة قطع ناقص مركزه نقطة الأصل

(b)



يبين الشكل وجود 4 نقاط تقاطع بين المنحنيين

(c) $\frac{x^2}{4}=1+\frac{y^2}{25}$

$x^2=4\left(1+\frac{y^2}{25}\right)$

$\frac{x^2}{25}=1-\frac{y^2}{4}$

$x^2=25\left(1-\frac{y^2}{4}\right)$

$\longrightarrow 4\left(1+\frac{y^2}{25}\right)=25\left(1-\frac{y^2}{4}\right)$

$\longrightarrow 4+\frac{4}{25}y^2=25-\frac{25}{4}y^2 \longrightarrow y^2\left(\frac{4}{25}+\frac{25}{4}\right)=25-4$

$\frac{641}{100}y^2=21$

$y^2=\frac{2100}{641}$

$y=\pm 10\sqrt{\frac{21}{641}}$

$x^2=\frac{2900}{641}$

$x=\pm 10\sqrt{\frac{29}{641}}$

يوجد 4 نقاط تقاطع بين المنحنيين

(6) أوجد معادلة قطع مخروطي مركزه نقطة الأصل $(0,0)$ حيث اختلافه المركزي $e=\frac{7}{5}$ ومعادلة إحدى دليليه $y=\frac{25}{7}$.

(6) $e=\frac{7}{5}\ ,\ \frac{7}{5}>1$

إذًا قطع زائد.

$$\frac{7}{5}=\frac{c}{a}\Longrightarrow 7a=5c\Longrightarrow a=\frac{5}{7}c$$

$$\frac{25}{7}=\frac{a^2}{c}=\frac{\frac{25}{49}c^2}{c}=\frac{25}{49}c\Longrightarrow c=7\Longrightarrow a=5$$

$$c^2=a^2+b^2\Longrightarrow b^2=c^2-a^2=7^2-5^2=24$$

$\frac{y^2}{25}-\frac{x^2}{24}=1$ معادلة القطع الزائد:

(7) أوجد معادلة قطع مخروطي مركزه نقطة الأصل $(0,0)$ حيث اختلافه المركزي $e=\frac{5}{7}$ وإحدى بؤرتيه $F(-5,0)$.

(7) $e=\frac{5}{7}\ ,\ \frac{5}{7}<1$

إذًا إنه قطع ناقص

$$c=5$$

$$\frac{c}{a}=\frac{5}{7}\ ;\ \frac{5}{a}=\frac{5}{7}\Longrightarrow a=7$$

$$a^2=b^2+c^2\Longrightarrow b^2=a^2-c^2\Longrightarrow b^2=49-25\Longrightarrow b^2=24$$

$\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{24}=1$ المعادلة:

(8) أوجد معادلة القطع الزائد حيث بؤرتيه $F_1(-\sqrt{34},0)\ ,\ F_2(\sqrt{34},0)$؛ وأحد خطّيه المقاربين يمر بالنقطة $A(3,5)$.

(8) الخط المقارب $y=\frac{b}{a}x$ يمر بالنقطة $A(3,5)$ فيكون:

$$5=\frac{b}{a}(3)\Longrightarrow\frac{b}{a}=\frac{5}{3}\Longrightarrow a=\frac{3}{5}b$$

$$c^2=a^2+b^2\Longrightarrow 34=\frac{9b^2}{25}+b^2\Longrightarrow 34=\frac{34b^2}{25}\Longrightarrow b^2=25\Longrightarrow b=5$$

$$a=\frac{3}{5}(5)=3$$

$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{25}=1$ فتكون معادلة القطع الزائد:

(9) أوجد معادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الأصل وميل أحد الخطين المقاربين 2 وإحدى بؤرتيه $F(0,-\sqrt{5})$.

(9) $\frac{a}{b}=2 \;,\; c=\sqrt{5} \;,\; a=2b$

$c^2=a^2+b^2 \Longrightarrow 5=b^2+4b^2 \Longrightarrow 5=5b^2 \Longrightarrow b^2=1 \Longrightarrow b=1$

ولكن: $a=2b \Longrightarrow a=2$

لذا معادلة القطع الزائد هي: $\frac{y^2}{4}-x^2=1$

في التمارين (10–14)، أوجد: الاختلاف المركزي، البؤرة (البؤرتين)، معادلة الدليل (معادلتي الدليلين)، معادلتي الخطين المقاربين (في القطع الزائد).

(10) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1$

(11) $8y^2-25x^2=200$

(10) $a^2=25 \Longrightarrow a=5$

$b^2=9 \Longrightarrow b=3$

$a^2=b^2+c^2 \Longrightarrow c^2=b^2-a^2=25-9=16 \Longrightarrow c=4$

الاختلاف المركزي: $e=\frac{c}{a}=\frac{4}{5}$

البؤرتان: $F_1(0,-4) \;,\; F_2(0,4)$

معادلتا الدليلين: $x=\pm\frac{a^2}{c}=\pm\frac{25}{4}$

(11) $8y^2-25x^2=200 \Longrightarrow \frac{y^2}{25}-\frac{x^2}{8}=1$

$a^2=25 \Longrightarrow a=5$

$b^2=8 \Longrightarrow b=2\sqrt{2}$

$c^2=a^2+b^2=25+8=33 \Longrightarrow c=\sqrt{33}$

الاختلاف المركزي: $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{33}}{5}$

البؤرتان: $F_1(0,-\sqrt{33}) \;;\; F_2(0,\sqrt{33})$

معادلتا الدليلين: $y=\pm\frac{a^2}{c}=\pm\frac{25}{\sqrt{33}}=\pm\frac{25\sqrt{33}}{33}$

معادلتا الخطين المقاربين: $y=\pm\frac{a}{b}x=\pm\frac{5\sqrt{2}}{4}x$

(12) $x^2 = -2y$

(12) $x^2 = -2y$

$4p = -2 \Longrightarrow p = -\frac{1}{2}$

$e = 1$ الاختلاف المركزي:

$F\left(0, -\frac{1}{2}\right)$ البؤرة:

$y = \frac{1}{2}$ معادلة الدليل:

(13) $y^2 = -x$

(13) $y^2 = -x$

$4p = -1 \Longrightarrow p = -\frac{1}{4}$

$e = 1$ الاختلاف المركزي:

$F\left(-\frac{1}{4}, 0\right)$ البؤرة:

$x = \frac{1}{4}$ معادلة الدليل:

(14) $5x^2 - 9y^2 = 45$

(14) $5x^2 - 9y^2 = 45 \Longrightarrow \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{5} = 1$

$a^2 = 9 \Longrightarrow a = 3$

$b^2 = 5 \Longrightarrow b = \sqrt{5}$

$c^2 = a^2 + b^2 = 9 + 5 = 14 \Longrightarrow c = \sqrt{14}$

$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{14}}{3}$ الاختلاف المركزي:

$F_1(-\sqrt{14}, 0)\ ;\ F_2(\sqrt{14}, 0)$ البؤرتان:

$x = \pm \frac{a^2}{c} = \pm \frac{9\sqrt{14}}{14}$ معادلتا الدليلين:

$y = \pm \frac{b}{a}x = \pm \frac{\sqrt{5}}{3}x$ معادلتا الخطين المقاربين:

تمرّنْ 8-1

المتغيرات العشوائية المتقطعة

Discrete Random Variables

المجموعة A تمارين مقالية

(1) في تجربة إلقاء قطعة نقود مرتين متتاليتين، إذا كان المتغيّر العشوائي X يعبر عن عدد الصور فأوجد:

(a) فضاء العينة (S) وعدد عناصره $n(S)$.

(b) مدى المتغير العشوائي X.

(c) احتمال وقوع كل عنصر من عناصر مدى المتغير العشوائي x : $f(x_i) = P(X = x_i)$

(d) دالة التوزيع الاحتمالى للمتغير العشوائى X.

(1) (a) فضاء العينة: $(S) = \{(H,T),(T,T),(T,H),(H,H)\}$

عدد عناصره: $n(S) = 4$

(b) $X \in \{0,1,2\}$

(c) $P(X=0) = \frac{1}{4}$

$P(X=1) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

$P(X=2) = \frac{1}{4}$

(d) دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X.

x	0	1	2
$f(x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

(2) في تجربة إلقاء قطعة نقود ثلاث مرات متتالية، أوجد مجموعة القيم للمتغيرات العشوائية التالية وحدد فيما إذا كانت متغيرات عشوائية متقطعة أم لا:

(a) المتغير العشوائي X الذي يمثل عدد الكتابات.

(b) المتغير العشوائي Y الذي يمثل ربع عدد الكتابات.

(c) المتغير العشوائي Z الذي يمثل عدد الكتابات مضافًا له 1.

(2) (a) $X = \{0,1,2,3\}$

X متغير عشوائي متقطّع

(b) $Y = \left\{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right\}$

Y متغير عشوائي متقطّع

(c) $Z = \{1,2,3,4\}$

Z متغير عشوائي متقطّع

(3) إذا كانت دالة التوزيع الاحتمالي f للمتغير العشوائي X هي:

x	-1	0	1	2	3
$f(x)$	0.1	0.3	K	0.2	0.3

$k = 1 - (0.1 + 0.3 + 0.2 + 0.3) = 0.1$

(4) إذا كان X متغيرًا عشوائيًّا متقطعًا مداه هو: $\{1, 2, 3, 4\}$ وكان $f(1) = 0.1$ ، $f(3) = 0.4$ ، $f(4) = 0.2$.
فأوجد $f(2)$، ثم اكتب دالة التوزيع الاحتمالي f للمتغير العشوائي X.

(4) $f(2) = 1 - (0.1 + 0.4 + 0.2) = 0.3$

دالة التوزيع الاحتمالي f للمتغير العشوائي X:

x	1	2	3	4
$f(x)$	0.1	0.3	0.4	0.2

(5) صندوق يحوي 10 كرات متماثلة منها 6 كرات حمراء و4 كرات بيضاء سحبت 5 كرات عشوائيًّا معًا من الصندوق. إذا كان المتغير العشوائي X يمثل عدد الكرات البيضاء.
فأوجد ما يلي:

(a) عدد عناصر فضاء العينة $n(S)$.

(b) مدى المتغير العشوائي X.

(c) احتمال كل عنصر من عناصر مدى المتغير العشوائي X.

(d) دالة التوزيع الاحتمالي f للمتغير العشوائي X.

(5) (a) عدد عناصر فضاء العينة: $n(S) = {}_{10}C_5 = 252$

(b) $X \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$

(c) $P(X = 0) = \dfrac{{}_6C_5 \times {}_4C_0}{252} = \dfrac{1}{42}$

$P(X = 1) = \dfrac{{}_6C_4 \times {}_4C_1}{252} = \dfrac{5}{21}$

$P(X = 2) = \dfrac{{}_6C_3 \times {}_4C_2}{252} = \dfrac{10}{21}$

$P(X = 3) = \dfrac{{}_6C_2 \times {}_4C_3}{252} = \dfrac{5}{21}$

$P(X = 4) = \dfrac{{}_6C_1 \times {}_4C_4}{252} = \dfrac{1}{42}$

(d) دالة التوزيع الاحتمالي f للمتغير العشوائي X:

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	$\frac{1}{42}$	$\frac{5}{21}$	$\frac{10}{21}$	$\frac{5}{21}$	$\frac{1}{42}$

(6) إذا كانت دالة التوزيع الاحتمالي f للمتغير العشوائي X هي:

x	0	1	2	3
$f(x)$	0.2	0.3	0.4	0.1

فأوجد التوقع μ للمتغير العشوائي X.

(6) $\mu = 0 \times 0.2 + 1 \times 0.3 + 2 \times 0.4 + 3 \times 0.1 = 1.4$

إذًا، التوقع: $(\mu) = 1.4$

(7) الجدول التالي يبيّن دالة التوزيع الاحتمالي لمتغير عشوائي متقطع X.

x	7	8	9	10
$f(x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

أوجد:

(a) التوقع (μ).

(b) التباين σ^2.

(c) الانحراف المعياري (σ).

(7) (a) $\mu = 7 \times \frac{1}{8} + 8 \times \frac{3}{8} + 9 \times \frac{3}{8} + 10 \times \frac{1}{8} = \frac{17}{2}$

إذًا، التوقع: $(\mu) = \frac{17}{2}$

(b) $\sigma^2 = 49 \times \frac{1}{8} + 64 \times \frac{3}{8} + 81 \times \frac{3}{8} + 100 \times \frac{1}{8} - \left(\frac{17}{2}\right)^2 = 0.75$

إذًا، التباين: $(\sigma^2) = 0.75$

(c) $\sigma = \sqrt{0.75} = 0.866$

إذًا، الانحراف المعياري: $(\sigma) = 0.866$

(8) الجدول التالي يبيّن دالة التوزيع الاحتمالي f للمتغير العشوائي المتقطع X.

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	0.2	0.15	0.1	0.25	0.3

إذا كانت F دالة التوزيع التراكمي للمتغير العشوائي X.

فأوجد: $F(0), F(1), F(2), F(3), F(3.5), F(4), F(5)$

(8) $F(0) = P(X \leqslant 0) = 0.2$

$F(1) = P(X \leqslant 1) = P(X < 1) + P(X = 1) = 0.2 + 0.15 = 0.35$

$F(2) = P(X \leqslant 2) = P(X < 2) + P(X = 2) = 0.2 + 0.15 + 0.1 = 0.45$

$F(3) = P(X \leqslant 3) = P(X < 3) + P(X = 3) = 0.2 + 0.15 + 0.1 + 0.25 = 0.7$

$F(3.5) = P(X \leqslant 3.5) = P(X < 3) + P(X = 3) = 0.2 + 0.15 + 0.1 + 0.25 = 0.7$

$F(4) = P(X \leqslant 4) = P(X < 4) + P(X = 4) = 0.2 + 0.15 + 0.1 + 0.25 + 0.3 = 1$

$F(5) = P(X \leqslant 5) = P(X < 5) + P(X = 5) = 1$

(9) الجدول التالي يبيّن بعض قيم دالة التوزيع التراكمي F للمتغير العشوائي المتقطع X.

x	-1	3	5	7
$F(x)$	0.1	0.45	0.7	1

أوجد:

(a) $P(-1 < X \leqslant 5)$

(b) $P(3 < X \leqslant 7)$

(c) $P(X > 3)$

(9) (a) $P(-1 < X < 5) = F(5) - F(-1) = 0.7 - 0.1 = 0.6$

(b) $P(3 \le X < 7) = F(7) - F(3) = 1 - 0.45 = 0.55$

(c) $P(X > 3) = 1 - P(X \le 3) = 1 - F(3) = 1 - 0.45 = 0.55$

(10) إذا كان X متغيّرًا عشوائيًّا ذو حدين ومعلمتيه هما: $n = 8$, $P = 0.3$

فأوجد:

(a) $P(X = 0)$

(b) $P(2 < X \leq 5)$

(10) (a) $P(X = 0) = {}_8C_0 \times 0.3^0 \times (1 - 0.3)^8 = 0.0576$

(b) $P(2 < X \leq 5) = P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5)$

$= {}_8C_3 \times 0.3^3 \times 0.7^5 + {}_8C_4 \times 0.3^4 \times 0.7^4 + {}_8C_5 \times 0.3^5 \times 0.7^3 = 0.437$

(11) إذا كان X متغيّرًا عشوائيًّا ذو حدين ومعلمتيه هما: $n = 10$, $P = 0.5$

فأوجد:

(a) $P(X = 0)$

(b) $P(2 < X \leq 4)$

(11) (a) $P(X = 0) = {}_{10}C_0 \times 0.5^0 \times 0.5^{10} = 9.766.10^{-4}$

(b) $P(2 < X \leq 4) = P(X = 3) + P(X = 4)$

$= {}_{10}C_3 \times 0.5^3 \times 0.5^7 + {}_{10}C_4 \times 0.5^4 \times 0.5^6 = 0.322$

(12) ينتج مصنع 100 وحدة يوميًّا، إذا كانت نسبة إنتاج الوحدات المعيبة 0.03، فأوجد التوقع والتباين و

(12) $n = 100$, $p = 0.03$

$\mu = n\,p = 100 \times 0.03 = 3$

إذًا، التوقع: $3 = (\mu)$

$\sigma^2 = n\,p(1 - p) = 100 \times 0.03 \times 0.97 = 2.91$

إذًا، التباين: $2.91 = (\sigma^2)$

$\sigma = \sqrt{2.91} = 1.7059$

إذًا، الانحراف المعياري: $1.7059 = (\sigma)$

(13) إذا رمينا قطعة نقود معدنية 12 مرّة، أوجد التوقّع والتباين إذا كان المتغير العشوائي X هو ظهور صورة.

(13) $n = 12 \ , \ p = 0.5$

$\mu = n\,p = 12 \times 0.5 = 6$

إذًا، التوقع: $(\mu) = 6$

$\sigma^2 = n\,p(1-p) = 12 \times 0.5 \times 0.5 = 3$

إذًا، التباين: $(\sigma^2) = 3$

$\sigma = \sqrt{3} = 1.732$

إذًا، الانحراف المعياري: $(\sigma) = 1.732$

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (1–9)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة، و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) التوقع هو القيمة التي تقيس تشتت قيم المتغير العشوائي المتقطع عن قيمته المتوسطة. (a) (b)

(2) التباين هو القيمة التي تتجمع حولها القيم الممكنة للمتغير العشوائي المتقطع. (a) (b)

(3) دالة التوزيع التراكمي F للمتغير العشوائي المتقطع عند القيمة a هي احتمال وقوع المتغير العشوائي X بحيث يكون X أصغر من أو يساوي a. (a) (b)

(4) التوزيع التالي يمثل دالة التوزيع الاحتمالي f للمتغير X.

x	0	1	2	3
$f(x)$	0.1	0.05	0.4	0.4

(a) (b)

(5) قيمة K التي تجعل التوقع μ للمتغير العشوائي X يساوي 1 لدالة التوزيع الاحتمالي f

x	2	1	0
$f(x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	K

هي صفر.

(a) (b)

(6) لدالة توزيع تراكمي F للمتغير العشوائي X يكون:

$$P(a < X \le b) = F(b) - F(a)$$

(a) (b)

(7) لدالة توزيع تراكمي F للمتغير العشوائي X يكون:

$$P(X < a) = 1 - F(a)$$

(a) (b)

(8) مدرسة فيها عدد الطلبة 300 طالب فإذا كانت نسبة النجاح 0.6 فإن التوقع لعدد الطلبة الناجحين هو 150 طالبًا.

(a) (b)

(9) عند إلقاء قطعة نقود ثلاث مرات متتالية فإن $n(S) = 6$.

(a) (b)

في التمارين (10—21)، ظلّل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.

(10) إذا كانت دالة التوزيع الاحتمالي f للمتغير العشوائي X هي:

x	-1	0	1	2
$f(x)$	0.2	0.2	K	0.2

فإن قيمة K هي:

(a) 0.2 (b) 0 (c) 0.4 (d) 0.3

(11) إذا كانت دالة التوزيع الاحتمالي f للمتغير العشوائي X هي:

x	1	2	3
$f(x)$	K	$2K$	$2K$

فإن قيمة K تساوي:

(a) 0.5 (b) 0.2 (c) 1 (d) 0.4

في التمارين (12—14)، استخدم الجدول التالي:

x	0	1	2	3
$f(x)$	0.2	0.4	0.1	0.3

حيث f هي دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المتقطع X.

(12) $F(-1)$

(a) 0 (b) 0.2 (c) 0.4 (d) 0.6

(13) $F(1.5)$

(a) 0.4 (b) 0.2 (c) 0 (d) 0.6

(14) $F(4)$

(a) 0.2 (b) 0.1 (c) 0.4 (d) 1

(15) إذا كان X متغيرًا عشوائيًا متقطعًا دالة توزيع الاحتمالي f هي:

x	0	1	2
$f(x)$	0.25	0.50	0.25

فإن التوقع له يساوي:

a 1 b 1.25 c 1.5 d 0.5

(16) إذا كان X متغيرًا عشوائيًا متقطعًا لدالة التوزيع الاحتمالي f وكان التوقع = 0.5 ، $\sum x^2 f(x) = 4.25$،
فإن الانحراف المعياري هو:

a 4 b 2 c 3.75 d 1

(17) إذا كانت بعض قيم دالة التوزيع التراكمي F للمتغير العشوائي X معطاة في الجدول التالي:

x	0	1	2	3
$F(x)$	0.1	0.3	0.7	1

فإن $f(2)$ تساوي:

a 0.7 b 0.3 c 0.4 d 1

(18) إذا كانت دالة التوزيع الاحتمالي f للمتغير العشوائي المتقطع X هي:

x	0	1	2
$f(x)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{1}{9}$

فإن التوقع μ للمتغير العشوائي X يساوي:

a 1 b $\frac{2}{3}$ c $\frac{7}{9}$ d 0

(19) عند إلقاء قطعة نقود منتظمة أربع مرات متتالية فإن التباين σ^2 للمتغير العشوائي X «ظهور صورة» يساوي:

a 2 b 1 c $\frac{1}{2}$ d 4

(20) إذا كان X متغيرًا عشوائيًا متقطعًا يأخذ القيم 1.5 , 1 , 1– وكان: $P(X=1)=0.3$, $P(X=-1)=0.6$
فإن $P(X>0)$ يساوي:

a 0.6 b 0.9 c 0.4 d 0.7

(21) ينتج مصنع سيارات 200 سيارة في الشهر. إذا كانت نسبة السيارات المعيبة 0.02 فإن التوقع لعدد السيارات المعيبة المنتجة في الشهر يساوي:

a 2 b 4 c 20 d 40

تمرّن
8-2

المتغيرات العشوائية المتصلة (المستمرة)
Continuous Random Variables

المجموعة A تمارين مقالية

(1) إذا كان X متغيّرًا عشوائيًا متصلًا ودالة كثافة الاحتمال له هي:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{5} & : \quad 0 \leq x \leq 5 \\ 0 & : \quad \text{في ما عدا ذلك} \end{cases}$$

فأوجد:

(a) $P(0 \leq X \leq 5)$

(b) $P(X = 3)$

(c) $P(X \leq 2)$

(d) $P(X > 2)$

(1) (a) $P(0 \leq X \leq 5) = 5 \times \frac{1}{5} = 1$

(b) $P(X = 3) = 0$

(c) $P(X \leq 2) = 2 \times \frac{1}{5} = \frac{2}{5}$

(d) $P(X > 2) = 3 \times \frac{1}{5} = \frac{3}{5}$

(2) إذا كان X متغيّرًا عشوائيًا متصلًا ودالة كثافة الاحتمال له هي:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & : \quad 2 \leq x \leq 4 \\ 0 & : \quad \text{في ما عدا ذلك} \end{cases}$$

فأوجد:

(a) $P(2 \leq X \leq 4)$

(b) $P(X \geq 2.5)$

(2) (a) $P(2 \leq X \leq 4) = 2 \times \frac{1}{2} = 1$

(b) $P(X \geq 2.5) = (4 - 2.5) \times \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$

(3) إذا كان X متغيّرًا عشوائيًا متصلًا ودالة كثافة الاحتمال له هي:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{9}x & : \quad 0 \le x \le 3 \\ 0 & : \text{في ما عدا ذلك} \end{cases}$$

فأوجد:

(a) $P(0 \le X \le 3)$ (b) $P(X < 1)$ (c) $P(X \ge 1)$

(3) (a) $x = 3 \quad \therefore \; y = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$

$P(0 \le X \le 3) = \frac{1}{2} \times 3 \times \frac{2}{3} = 1$

(b) $x = 1 \quad \therefore \; y = \frac{2}{9}$

$P(X < 1) = \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{2}{9} = \frac{1}{9}$

(c) $P(X \ge 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$

(4) لتكن الدالة f:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{6} & : \quad -1 \le x \le 5 \\ 0 & : \text{في ما عدا ذلك} \end{cases}$$

(a) أثبت أن الدالة f هي دالة كثافة احتمال.

(b) أثبت أن الدالة f تتبع التوزيع الاحتمالي المنتظم.

(c) أوجد $P(0 < X \le 3)$.

(d) أوجد التوقّع والتباين للدالة f.

(4) (a) المساحة تحت المنحنى (وهو منطقة مستطيلة)

$$\frac{1}{6} \times (5 - (-1)) = 6 \times \frac{1}{6} = 1$$

$\therefore$ الدّالة هي كثافة إحتمال.

(b) لإثبات أنّ الدّالة f تتبع التوزيع الاحتمالي المنتظم يجب أن تكون الدّالة f على الصورة:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & : \quad a \le x \le b \\ 0 & : \text{في ما عدا ذلك} \end{cases}$$

$$a = -1 \; , \; b = 5$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{5-(-1)} = \frac{1}{6} & : \quad -1 \le x \le 5 \\ 0 & : \text{في ما عدا ذلك} \end{cases}$$

إذًا f هي دالة توزيع احتمالي منتظم.

(c) $P(0 < X \le 3) = 3 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$

(d) $\mu = \frac{a+b}{2} = \frac{5-1}{2} = 2$

إذًا، التوقع: $(\mu) = 2$

$$\sigma^2 = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{(5-(-1))^2}{12} = \frac{36}{12} = 3$$

إذًا، التباين $3 = (\sigma^2)$

(5) الدالة f تتبع التوزيع الاحتمالي المنتظم وهي معرّفة كما يلي:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{7} : & 0 \le x \le 7 \\ 0 : & \text{في ما عدا ذلك} \end{cases}$$

(a) أثبت أن الدالة f هي دالة كثافة احتمال.

(b) أوجد $\left(0 \le X \le \frac{7}{8}\right)$.

(c) أوجد التوقّع والتباين للدالة f.

(5) (a) لإثبات أنّ الدّالة f تتبع التوزيع الاحتمالي المنتظم يجب أن تكون الدّالة f على الصورة:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} : & a \le x \le b \\ 0 : & \text{في ما عدا ذلك} \end{cases}$$

$$a = 0 \ , \ b = 7$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{7-0} = \frac{1}{7} : & 0 \le x \le 7 \\ 0 : & \text{في ما عدا ذلك} \end{cases}$$

إذًا f هي دالة توزيع إحتمالي منتظم.

(b) $P\left(0 \le X \le \frac{7}{8}\right) = \frac{7}{8} \times \frac{1}{7} = \frac{1}{8}$

(c) $\mu = \frac{a+b}{2} = \frac{0+7}{2} = \frac{7}{2}$

إذًا، التوقع: $(\mu) = \frac{7}{2}$

$$\sigma^2 = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{(7-0)^2}{12} = \frac{49}{12}$$

إذًا، التباين: $(\sigma^2) = \frac{49}{12}$

(6) إذا كان z يتبع التوزيع الطبيعي المعياري للمتغير العشوائي X فأوجد:

(a) $P(z \leq 2.16)$ **(b)** $P(z \geq 2.51)$ **(c)** $P(1.5 \leq z \leq 2.4)$

(6) (a) $P(z \leq 2.16) = 0.98461$

(b) $P(z \geq 2.51) = 1 - P(z < 2.51) = 1 - 0.99396 = 0.00604$

(c) $P(1.5 \leq z \leq 2.4) = P(z \leq 2.4) - P(z \leq 1.5) = 0.99180 - 0.93319 = 0.05861$

(7) إذا كان z يتبع التوزيع الطبيعي المعياري فأوجد:

(a) $P(z \leq -0.64)$ **(b)** $(-1.7 \leq z \leq 2.85)$ **(c)** $P(-1.23 \leq z \leq 0.68)$

(7) (a) $P(z \leq -0.64) = 0.26109$

(b) $P(-1.7 \leq z \leq 2.85) = P(z \leq 2.85) - P(z \leq -1.7)$

$= 0.99781 - 0.04457 = 0.95324$

(c) $P(-1.23 \leq z \leq 0.68) = P(z \leq 0.68) - P(z \leq -1.23)$

$= 0.75175 - 0.10935 = 0.6424$

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (1–7)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة، و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) نسبة الرطوبة خلال شهر هو متغير عشوائي متصل. (a) (b)

(2) عدد أحرف كلمات كتاب هو متغير عشوائي متصل. (a) (b)

(3) إذا كانت الدالة f معرفة كالتالي:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2} & : \quad 0\le x\le 1\\ 0 & : \quad \text{في ما عدا ذلك}\end{cases}$$

فإن الدالة f هي دالة كثافة احتمال. (a) (b)

(4) إذا كانت X متغيرًا عشوائيًا متصلًا ودالة كثافة الاحتمال له هي:

$$f(x)=\begin{cases}2 & : \quad 0\le x\le \frac{1}{2}\\ 0 & : \quad \text{في ما عدا ذلك}\end{cases}$$

فإن $P(X\ge 2)=1$ (a) (b)

(5) إذا كانت الدالة f هي دالة كثافة احتمال تتبع التوزيع الاحتمالي المنتظم معرّفة كما يلي:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{3} & : \quad 0\le x\le 3\\ 0 & : \quad \text{في ما عدا ذلك}\end{cases}$$

فإن التباين للدالة f هو $\sigma^2=\frac{3}{4}$. (a) (b)

(6) من خواص التوزيع الطبيعي أنه متماثل حول $x=\mu$. (a) (b)

(7) المساحة تحت منحنى التوزيع الطبيعي تساوي الواحد. (a) (b)

في التمارين (8–17)، ظلّل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.

(8) إذا كان X متغيرًا عشوائيًا متصلًا ودالة كثافة الاحتمال له هي:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x & : \quad 0\le x\le 2\\ 0 & : \quad \text{في ما عدا ذلك}\end{cases}$$

فإن $P(X=1)$ يساوي:

(a) $\frac{1}{2}$ (b) 0 (c) 1 (d) ليس أيًا مما سبق

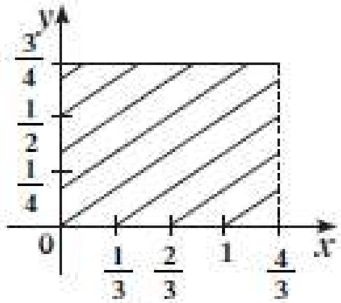
(9) إذا كان X متغيرًا عشوائيًا متصلًا ودالة كثافة الاحتمال له هي:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{5}x & : \quad -2\le x\le 3\\ 0 & : \quad \text{في ما عدا ذلك}\end{cases}$$

فإن $P(X\le -2.5)$ يساوي:

(a) 0 (b) 1 (c) $\frac{1}{5}$ (d) $\frac{1}{10}$

في التمارين (10—16)، أجب عن الأسئلة من خلال الرسم البياني في الشكل المقابل:



(10) الدالة التي تعبّر عن الرسم البياني التالي هي:

(a) $f(x)=\begin{cases}\frac{3}{4} & : \quad 0<x<\frac{3}{4}\\ 0 & : \text{في ما عدا ذلك}\end{cases}$

(b) $f(x)=\begin{cases}\frac{3}{4} & : \quad 0<x<\frac{4}{3}\\ 0 & : \text{في ما عدا ذلك}\end{cases}$

(c) $f(x)=\begin{cases}\frac{4}{3} & : \quad 0<x<\frac{4}{3}\\ 0 & : \text{في ما عدا ذلك}\end{cases}$

(d) $f(x)=\begin{cases}\frac{3}{4} & : \quad 0<x<4\\ 0 & : \text{في ما عدا ذلك}\end{cases}$

(11) الدالة f تتبع التوزيع الاحتمالي:

(a) الطبيعي (b) ذات الحدين

(c) الطبيعي المعياري (d) المنتظم

(12) التوقّع هو:

(a) $\frac{4}{5}$ (b) $\frac{2}{3}$ (c) $\frac{4}{3}$ (d) $\frac{3}{4}$

(13) التباين هو:

(a) $\frac{4}{27}$ (b) $\frac{16}{9}$ (c) $\frac{16}{108}$ (d) $\frac{108}{16}$

(14) $P\left(X<\frac{4}{6}\right)=$

(a) $\frac{1}{3}$ (b) $\frac{1}{4}$ (c) $\frac{1}{6}$ (d) $\frac{1}{2}$

(15) $P\left(X>\frac{4}{12}\right)=$

(a) $\frac{2}{6}$ (b) $\frac{6}{2}$ (c) $\frac{3}{4}$ (d) 1

(16) $P(0<X<1)=$

(a) $\frac{4}{5}$ (b) $\frac{1}{3}$ (c) 1 (d) $\frac{3}{4}$

(17) إذا كان z يتبع التوزيع الطبيعي فإن: $P(0\le z\le 2.35)$ يساوي:

(a) 0.9906 (b) 0.5 (c) 0.4906 (d) 0.218

اختبار الوحدة الثامنة

(1) إذا كان X متغيرًا عشوائيًّا متقطعًا مداه هو $\{2,3,4,5\}$ وكان $f(2) = 0.3$ ، $f(3) = 0.2$ ، $f(4) = 0.1$
فأوجد $f(5)$، ثم اكتب دالة التوزيع الاحتمالي f للمتغير العشوائي X.

(1) $f(5) = 1 - (0.3 + 0.2 + 0.1) = 0.4$

دالة التوزيع الاحتمالي f للمتغير العشوائي X:

x	2	3	4	5
$f(x)$	0.3	0.2	0.1	0.4

(2) يحتوي صندوق على 8 كرات متماثلة منها: 5 كرات حمراء و3 كرات صفراء سحبت 4 كرات عشوائيًّا معًا من الصندوق. إذا كان المتغير العشوائي X يمثل عدد الكرات الصفراء، فأوجد ما يلي:

(a) عدد عناصر فضاء العينة $n(S)$.

(b) مدى المتغير العشوائي X.

(c) احتمال كل عنصر من عناصر مدى المتغير العشوائي X.

(d) دالة التوزيع الاحتمالي f للمتغير العشوائي X.

(2) (a) $n(S) = {}_8C_4 = 70$

(b) $X \in \{0,1,2,3\}$

(c) $P(X = 0) = \dfrac{{}_5C_4}{70} = \dfrac{1}{14}$

$P(X = 1) = \dfrac{{}_5C_3 \times {}_3C_1}{70} = \dfrac{3}{7}$

$P(X = 2) = \dfrac{{}_5C_2 \times {}_3C_2}{70} = \dfrac{3}{7}$

$P(X = 3) = \dfrac{{}_5C_1 \times {}_3C_3}{70} = \dfrac{1}{14}$

(d) دالة التوزيع الاحتمالي f للمتغير العشوائي X :

x	0	1	2	3
$f(x)$	$\frac{1}{14}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{1}{14}$

(3) يبيّن الجدول التالي دالة التوزيع الاحتمالي لمتغير عشوائي متقطع X.

x	3	4	5	6
$f(x)$	$\frac{2}{11}$	$\frac{5}{11}$	$\frac{3}{11}$	$\frac{1}{11}$

أوجد:

(a) التوقع (μ).

(b) التباين (σ^2).

(c) الانحراف المعياري (σ).

(3) (a) $\mu = 3 \times \frac{2}{11} + 4 \times \frac{5}{11} + 5 \times \frac{3}{11} + 6 \times \frac{1}{11} = \frac{47}{11}$

إذًا، التوقع: $(\mu) = \frac{47}{11}$

(b) $\sigma^2 = 9 \times \frac{2}{11} + 16 \times \frac{5}{11} + 25 \times \frac{3}{11} + 36 \times \frac{1}{11} - \left(\frac{47}{11}\right)^2 = \frac{90}{121}$

إذًا، التباين: $(\sigma^2) = \frac{90}{121}$

(c) $\sigma = \sqrt{\frac{90}{121}} = \frac{3}{11}\sqrt{10}$

إذًا، الانحراف المعياري: $(\sigma) = \frac{3}{11}\sqrt{10}$

(4) يبيّن الجدول التالي دالة التوزيع الاحتمالي f للمتغير العشوائي المتقطع X.

x	2	3	4	5	6
$f(x)$	0.14	0.16	0.35	0.15	0.2

أوجد باستخدام دالة التوزيع التراكمي F: $F(1)$, $F(2)$, $F(3)$, $F(3.5)$, $F(4)$, $F(5)$, $F(6)$, $F(7)$

(4) $F(1) = p(X \leq 1) = 0$

$F(2) = p(X \leq 2) = p(X < 2) + p(X = 2) = 0.14$

$F(3) = p(X \leq 3) = p(X = 3) + p(X < 3) = p(X = 3) + p(X = 2) = 0.3$

$F(3.5) = p(X \leqslant 3.5) = p(X = 3) + p(X < 3) = p(X = 3) + p(X = 2) = 0.3$

$F(4) = p(X \leq 4) = p(X = 4) + p(X < 4) = p(X = 4) + p(X = 3) + p(X = 2) = 0.65$

$F(5) = p(X \leq 5) = p(X = 5) + p(X < 5) = p(X = 5) + p(X = 4) + p(X = 3) + p(X = 2) = 0.8$

$F(6) = p(X \leq 6) = p(X = 6) + p(X < 6) = p(X = 6) + p(X = 5) + p(X = 4) + p(X = 3) + p(X = 2) = 1$

$F(7) = p(X \leqslant 7) = p(X = 7) + p(X < 7) = p(X = 6) + p(X = 5) + p(X = 4) + p(X = 3) + p(X = 2) = 1$

(5) ينتج مصنع أجبان 1 250 علبة يوميًّا، إذا كانت نسبة إنتاج العلب الفاسدة 0.04، فأوجد ما يلي لمعرفة عدد العلب الفاسدة في أحد الأيام:

(5) $n = 1250$, $p = 0.04$

(a) $\mu = n\,p = 1250 \times 0.04 = 50$

إذًا، التوقع: $(\mu) = 50$

(b) $\sigma^2 = n\,p(1-p) = 1250 \times 0.04 \times 0.96 = 48$

إذًا، التباين: $(\sigma^2) = 48$

(c) $\sigma = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$

إذًا، الانحراف المعياري: $(\sigma) = 4\sqrt{3}$

(6) إذا كان X متغيرًا عشوائيًّا متصلًا ودالة كثافة الاحتمال له هي:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{5} & : \quad -2 \le x \le 3 \\ 0 & : \quad \text{في ما عدا ذلك} \end{cases}$$

فأوجد:

(a) $P(0 \le X \le 3)$ **(b)** $P(-2 \le X \le 0)$

(c) $P(X = 2)$ **(d)** $P(-1 \le X \le 2)$

(6) (a) $P(0 \le X \le 3) = 3 \times \frac{1}{5} = \frac{3}{5}$

(b) $P(-2 \le X \le 0) = 2 \times \frac{1}{5} = \frac{2}{5}$

(c) $P(X = 2) = 0$

(d) $P(-1 \le X \le 2) = (2-(-1)) \times \frac{1}{5} = \frac{3}{5}$

(7) إذا كان X متغيرًا عشوائيًّا متصلًا. دالة كثافة الاحتمال له هي:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{9}{2}x & : \quad 0 \le x \le \frac{2}{3} \\ 0 & : \quad \text{في ما عدا ذلك} \end{cases}$$

فأوجد:

(a) $P\left(0 \le X \le \frac{1}{3}\right)$ **(b)** $P\left(X \ge \frac{1}{3}\right)$

(7) (a) $x = \frac{1}{3} \quad \therefore \quad y = \frac{9}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{3}{2}$

$P\left(0 \le X \le \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{3}{2} = \frac{1}{4}$

(b) $P\left(X \ge \frac{1}{3}\right) = 1 - P\left(X < \frac{1}{3}\right) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

(8) الدالة f تتبع التوزيع الاحتمالي المنتظم وهي معرّفة كما يلي:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{8} & : \quad -3 \le x \le 5\\ 0 & : \quad \text{في ما عدا ذلك}\end{cases}$$

(a) أثبت أن f هي دالة كثافة احتمال.

(b) $P(-1 \le X \le 3)$

(c) أوجد التوقع والتباين للدالة f.

(8) (a) المساحة تحت منحنى الدّالة f هي: $1 = \frac{1}{8} \times 8 = \frac{1}{8} \times (5-(-3))$

$\therefore$ الدّالة f هي دالة كثافة احتمال.

(b) $P(-1 \le x \le 3) = (3-(-1)) \times \frac{1}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

(c) $\mu = \frac{a+b}{2} = \frac{-3+5}{2} = 1$

إذًا، التوقع: $(\mu) = 1$

$$\sigma^2 = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{(5-(-3))^2}{12} = \frac{64}{12} = \frac{16}{3}$$

إذًا، التباين: $(\sigma^2) = \frac{16}{3}$

(9) إذا كان z يتبع التوزيع الطبيعي المعياري للمتغير العشوائي X، فأوجد:

(a) $P(z \le 2.24)$ (b) $P(z \ge 1.52)$ (c) $P(1.4 \le z \le 2.6)$

(9) (a) $P(z \le 2.24) = 0.98745$

(b) $P(z \ge 1.52) = 1 - P(z < 1.52) = 1 - 0.93574 = 0.06426$

(c) $P(1.4 \le z \le 2.6) = P(x \le 2.6) - P(x \le 1.4) = 0.99534 - 0.91924 = 0.0761$

(10) يمثّل المتغير X درجات الطلاب في مادة الرياضيات. إذا كان توزيع هذه الدرجات يتبع التوزيع الطبيعي الذي وسطه $\mu = 40$ وانحرافه المعياري $\sigma = 8$ فأوجد:

(a) $P(30 < X < 65)$ (b) $P(X \ge 45)$

(10) (a) $x_1 = 30 \quad \therefore \quad z_1 = \frac{x_1 - \mu}{\sigma} = \frac{30-40}{8} = -\frac{5}{4} = -1.25$

$x_2 = 65 \quad \therefore \quad z_2 = \frac{x_2 - \mu}{\sigma} = \frac{65-40}{8} = \frac{25}{8} = 3.125$

$P(30 < X < 65) = P(-0.125 < z < 3.125) = P(z < 3.125) - P(z < -1.25)$

$= \frac{0.99910 + 0.99913}{2} - 0.10565 = 0.893465$

(b) $X = 45 \quad \therefore \quad z = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{45-40}{8} = \frac{5}{8} = 0.625$

$P(X \ge 45) = 1 - P(X < 45) = 1 - P(z < 0.625) = 1 - \frac{0.73237 + 0.73565}{2}$

$= 1 - 0.73401 = 0.26599$

(11) إذا كانت دالة التوزيع الاحتمالي f للمتغير العشوائي X هي:

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	0.16	0.24	K	0.15	0.2

فأوجد قيمة K

(b) $P(z > 0.27) = 1 - P(z \leq 0.27) = 1 - 0.60642 = 0.3935$

(12) إذا كان z يتبع التوزيع الطبيعي المعياري فأوجد:

(a) $P(z \leq 1.45)$ **(b)** $P(z > 0.27)$

(c) $P(-1.32 \leq z \leq 1.75)$ **(d)** $P(-2.87 \leq z \leq -1.42)$

(12) (a) $P(z \leq 1.45) = 0.92647$

(b) $P(z > 0.27) = 1 - P(z \leq 0.27) = 1 - 0.60642 = 0.39358$

(c) $P(-1.32 \leq z \leq 1.75) = P(z \leq 1.75) - P(z \leq -1.32) = 0.95994 - 0.09342 = 0.86652$

(d) $P(-2.87 \leq z \leq -1.42) = P(x \leq -1.42) - P(x \leq -2.87) = 0.07780 - 0.00205 = 0.07575$

تمارين إثرائية

(1) متغير عشوائي X يتبع توزيعًا طبيعيًا توقعه $\mu = 55$ وتباينه $\sigma^2 = 25$، أوجد:

(a) $P(X > 55)$

(b) $P(X < 50)$

(c) $P(30 < X < 40)$

(1) $\sigma^2 = 25 \quad \therefore \ \sigma = 5$

(a) $x = 55 \ \therefore \ z = \dfrac{x - \mu}{\sigma} = \dfrac{55 - 55}{5} = 0$

$P(X > 55) = 1 - P(X \leq 55) = 1 - P(z \leq 0) = 1 - 0.5 = 0.5$

(b) $x = 50 \ \therefore \ z = \dfrac{x - \mu}{\sigma} = \dfrac{50 - 55}{5} = -\dfrac{5}{5} = -1$

$P(X < 50) = P(z < -1) = 0.15866$

(c) $x_1 = 30 \ \therefore \ z_1 = \dfrac{x_1 - \mu}{\sigma} = \dfrac{30 - 55}{5} = -5$

$x_2 = 40 \ \therefore \ z_2 = \dfrac{x_2 - \mu}{\sigma} = \dfrac{40 - 55}{5} = -3$

$P(30 < X < 40) = P(-5 < z < -3) = P(z < -3) - P(z < -5)$

$= 0.00135 - 0 = 0.00135$

(2) إذا كانت دالة التوزيع الاحتمالي f للمتغير العشوائي X هي:

x	2	4	6	8	10	12
$f(x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	K	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$

(a) أوجد K.

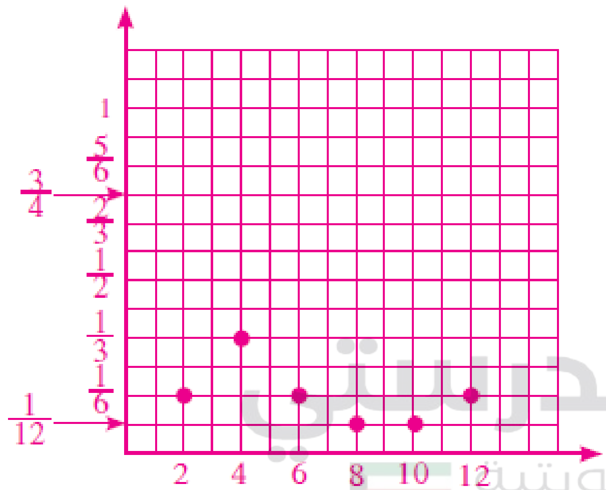
(b) ارسم دالة التوزيع الاحتمالي f.

(c) أوجد دالة التوزيع التراكمي F.

(d) ارسم دالة التوزيع التراكمي F.

(2) (a) $K = 1 - \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{3} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{6}\right) = \frac{1}{6}$

(b)



(c) $F(2) = P(X \leq 2) = P(X = 2) = \frac{1}{6}$

$F(4) = P(X \leq 4) = P(X = 2) + P(X = 4) = \frac{1}{2}$

$F(6) = P(X \leq 6) = P(X = 2) + P(X = 4) + P(X = 6) = \frac{2}{3}$

$F(8) = P(X \leq 8) = P(X = 2) + P(X = 4) + P(X = 6) + P(X = 8) = \frac{3}{4}$

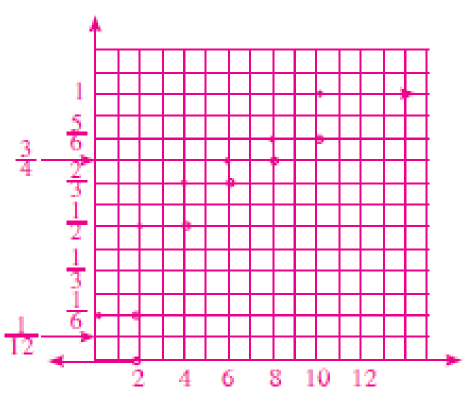
$F(10) = P(X \leq 10) = P(X = 2) + P(X = 4) + P(X = 6) + P(X = 8) + P(X = 10) = \frac{5}{6}$

$F(12) = P(X \leq 12) = P(X = 2) + P(X = 4) + P(X = 6) + P(X = 8) + P(X = 10) + P(X = 12) = 1$

جدول التوزيع التراكمي F للمتغير العشوائي المتقطع X:

x	2	4	6	8	10	12
$F(x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{5}{6}$	1

(d)



(3) مدفع يتبع مداه توزيعًا طبيعيًا توقعه 14 km وتباينه 1 km.

(a) ما احتمال أن تصل القذيفة إلى مسافة أبعد من 15 km؟

(b) ما احتمال أن تصل القذيفة فقط إلى مسافة أقل من 11 km؟

(c) ما احتمال أن تصل القذيفة إلى مسافة بين 13 km, 15 km؟

(3) $\mu = 14 \qquad \sigma = \sqrt{1} = 1$

(a) $x = 15 \;\therefore\; z = \dfrac{x-\mu}{\sigma} = 15 - 14 = 1$

$P(X > 15) = P(z > 1) = 1 - P(z \leq 1) = 1 - 0.84134 = 0.15866$

(b) $x = 11 \;\therefore\; z = \dfrac{x-\mu}{\sigma} = 11 - 14 = -3$

$P(X < 11) = P(z < -3) = 0.00135$

(c) $x_1 = 13 \;\therefore\; z_1 = \dfrac{x_1-\mu}{\sigma} = 13 - 14 = -1$

$x_2 = 15 \;\therefore\; z_2 = \dfrac{x_2-\mu}{\sigma} = 15 - 14 = 1$

$P(13 < X < 15) = P(-1 < z < 1) = P(z < 1) - P(z < -1)$

$= 0.84134 - 0.15866 = 0.68268$

(4) إذا كان X متغيرًا عشوائيًا متصلًا، دالة كثافة الاحتمال له هي:

$$f(x) = \begin{cases} 2x & : \quad 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & : \quad \text{في ما عدا ذلك} \end{cases}$$

فأوجد:

(a) $P\left(\frac{1}{2} \leq X \leq \frac{3}{2}\right)$

(b) $P\left(X \geq \frac{1}{2}\right)$

(4) (a) $P\left(\frac{1}{2} \leq X \leq \frac{3}{2}\right) = P\left(X \leq \frac{3}{2}\right) - P\left(X \leq \frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{3}{2}\right) - f\left(\frac{1}{2}\right)$

$f\left(\frac{3}{2}\right) = 2\left(\frac{3}{2}\right) = 3$

$f\left(\frac{1}{2}\right) = 2\left(\frac{1}{2}\right) = 1$

$P\left(\frac{1}{2} \leq X \leq \frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} \times 3 - \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times 1 = 2$

(b) $P\left(X \geq \frac{1}{2}\right) = 1 - P\left(X < \frac{1}{2}\right) = 1 - \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times 1\right) = \frac{3}{4}$

(5) عند إلقاء حجر نرد منتظم 7 مرات متتالية، أوجد:

(a) احتمال ظهور العدد 2 خمس مرات.

(b) احتمال ظهور العدد 2 مرة واحدة على الأقل.

(c) احتمال ظهور العدد 2 مرة واحدة على الأكثر.

(5) $n = 7\ ,\ p = \frac{1}{2}$

(a) $P(X = 5) = {}_7C_5 \times 0.5^5 \times 0.5^2 = 0.164$

(b) $P(X > 0) = 1 - P(X \leq 0) = 1 - P(X = 0) = 1 - {}_7C_0 \times 0.5^0 \times 0.5^7 = 0.992$

(c) $P(X = 0) + P(X = 1) = 7.8125 . 10^{-3} + {}_7C_1 \times 0.5^1 \times 0.5^6 = 0.0625$

(6) إذا كان z يتبع التوزيع الطبيعي المعياري فأوجد:

(a) $P(z \leq 2.65)$

(b) $P(-2.85 \leq z \leq -1.96)$

(c) $P(z \geq 1.56)$

(6) (a) $P(z \leq 2.65) = 0.99598$

(b) $P(-2.85 \leq z \leq -1.96) = P(z \leq -1.96) - P(z \leq -2.85) = 0.025 - 0.00219 = 0.02281$

(c) $P(z \geq 1.56) = 1 - P(z < 1.56) = 1 - 0.94062 = 0.05938$

(7) يبيّن الجدول التالي دالة التوزيع الاحتمالي f لمتغير عشوائي متقطع X .

x	1	2	3	4	5
$f(x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$

أوجد:

(a) التوقع (μ).

(b) التباين (σ^2).

(c) الانحراف المعياري (σ).

(7) (a) $\mu = 1 \times \frac{1}{6} + 2 \times \frac{1}{4} + 3 \times \frac{1}{3} + 4 \times \frac{1}{12} + 5 \times \frac{1}{6} = \frac{17}{6}$

إذًا، التوقع: $(\mu) = \frac{17}{6}$

(b) $\sigma^2 = 1 \times \frac{1}{6} + 4 \times \frac{1}{4} + 9 \times \frac{1}{3} + 16 \times \frac{1}{12} + 25 \times \frac{1}{6} - \left(\frac{17}{6}\right)^2 = \frac{59}{36}$

إذًا، التباين: $(\sigma^2) = \frac{59}{36}$

(c) $\sigma = \sqrt{\frac{59}{36}} = \frac{\sqrt{59}}{6}$

إذًا، الانحراف المعياري: $(\sigma) = \frac{\sqrt{59}}{6}$

(8) يبيّن الجدول التالي دالة التوزيع الاحتمالي f للمتغير العشوائي المتقطع X .

x	3	4	5	6
$f(x)$	0.17	0.24	0.23	0.36

أوجد باستخدام دالة التوزيع التراكمي F: $F(2)$, $F(3)$, $F(4)$, $F(4.5)$, $F(5)$, $F(6)$, $F(6.5)$

(8) $F(2) = P(X \leq 2) = 0$

$F(3) = P(X \leq 3) = P(X < 3) + P(X = 3) = P(X = 3) = 0.17$

$F(4) = P(X \leq 4) = P(X < 4) + P(X = 4) = P(X = 3) + P(X = 4) = 0.41$

$F(4.5) = P(X \leqslant 4.5) = P(X < 4) + P(X = 4) = P(X = 3) + P(X = 4) = 0.41$

$F(5) = P(x \leq 5) = P(X < 5) + P(X = 5) = P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) = 0.64$

$F(6) = P(X \leq 6) = P(X < 6) + P(X = 6) = P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) + P(X = 6) = 1$

$F(6.5) = P(X \leqslant 6.5) = P(X < 6) + P(X = 6) = P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) + P(X = 6) = 1$