تمرَّنْ
7-1

الأعداد المركبة

Complex Numbers

المجموعة A تمارين مقالية

في التمارين (1–4)، بسّط كل عدد مستخدمًا الوحدة التخيلية i

(1) $\sqrt{-16}$ $= 4i$

(2) $\sqrt{-15}$ $= \sqrt{15}\, i$

(3) $3\sqrt{-9}$ $= 9i$

(4) $-\frac{1}{2}\sqrt{-100}$ $= -5i$

في التمارين (5–8)، اكتب كل عدد في الصورة الجبرية.

(5) $2+\sqrt{-3}$ $= 2+\sqrt{3}\, i$

(6) $\sqrt{-1}+2$ $= 2+i$

(7) $\frac{-\sqrt{-50}-2}{6}$ $= \frac{-1}{3} - \frac{5\sqrt{2}}{6} i$

(8) $\frac{\sqrt{-8}+8}{2}$ $= 4+\sqrt{2}\, i$

في التمرينين (9–11)، حل المعادلات التالية:

(9) $2x+3yi = -14+9i$ $x=-7$ ، $y=3$

(10) $3x+19i = 16-8yi$ $x=\frac{16}{3}$ ، $y=\frac{-19}{8}$

(11) $14i^2-3i = 2x+(y+5)i$ $x=-7$ ، $y=-8$

(12) مثّل كلًّا مما يلي في المستوى المركب:

(a) $z_1=-2+3i$ **(b)** $z_2=-4$ **(c)** $z_3=-i$ **(d)** $z_4=2(2+i)$

(13) اكتب العدد المركب المناظر لكل من النقاط التالية:

(a) $L(4,5)$ $4+5i$

(b) $M(-4,-2)$ $-4-2i$

(c) $N(-2,6)$ $-2+6i$

(d) $P(0,-3)$ $= -3i$

في التمارين (14–23)، بسّط كل تعبير مما يلي:

(14) $(2+4i)+(4-i)$ $= 6+3i$

(15) $6-(8+3i)$ $= -2-3i$

(16) $(4+\sqrt{-9})+(6-\sqrt{-49})$ $= 10-4i$

(17) $(8-\sqrt{-1})-(-3+\sqrt{-16})$ $= 11-5i$

(18) $(-2i)(5i)$ $= 10$

(19) $(4i)(-9i)^2$ $= -324i$

(20) $-5(1+2i)+3i(3-4i)$ $= 7-i$

(21) $(-6-5i)(1+3i)$ $= 9-23i$

(22) $(-2+\sqrt{-9})(6+\sqrt{-25})$ $= -27+8i$

(23) $i(-6i)^3$ $= -216$

(24) إذا كان $z = \frac{1-i}{1+i}$ فأوجد: z^{12} , z^{27} $Z = -i$ ، $Z^{12} = 1$ $Z^{27} = i$

(25) إذا كان $z_1 = 2+i$, $z_2 = -3+4i$ فأوجد:

(a) $-\frac{1}{3}z_2 = 1 - \frac{4}{3}i$ (b) $z_1 \cdot z_2 = -10+5i$ (c) z_1^3 (d) $\overline{z_1 \cdot z_2} = -2+11i$

(e) $\bar{z}_1 - \bar{z}_2$ $5+3i$ (f) $z_1 \cdot \bar{z}_2$ $-2-11i$

(26) إذا كان $z = \frac{4i}{1-i\sqrt{3}}$ فأوجد: $\bar{z}$ $= -\sqrt{3} - i$

(27) أوجد المعكوس الضربي لكل مما يلي:

(a) $-3-2i$ (b) $5i$ (c) $3i-4$ $-\frac{4}{25} - \frac{3}{25}i$

$-\frac{3}{13} + \frac{2}{13}i$ $\frac{-1}{5}i$

(28) إذا كان $z_1 = \sqrt{3}+i$, $z_2 = -\sqrt{3}+2i$ فأوجد: $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}$, $\frac{z_1}{z_2}$, $\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$

$\frac{\bar{Z}_1}{\bar{Z}_2} = -\frac{5}{7} - \frac{\sqrt{3}}{7}i$ ، $\frac{Z_1}{Z_2} = -\frac{5}{7} + \frac{\sqrt{3}}{7}i$ ، $\overline{\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)} = -\frac{1}{7} - \frac{3\sqrt{3}}{7}i$

(29) **تفكير ناقد:** أوجد العلاقة بين y , x عندما يكون $(x+yi)^2$ عددًا تخيّليًا.

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (1–4)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) الصورة الجبرية للعدد: $3+\sqrt{-4}$ هي: $3+2i$ (a) (b)

(2) مرافق العدد المركب: $z = 3+4i$ هو: $\bar{z} = -3-4i$ (a) (b)

(3) المعكوس الجمعي للعدد المركب $z = 3-2i$ هو: $-z = 3+2i$ (a) (b)

(4) الصورة المبسّطة للتعبير: $(12+5i)-(2-i)$ هي: $10+6i$ (a) (b)

في التمارين (14–5)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(5) العدد: $32+\sqrt{-225}$ يكتب بالصورة الجبرية كما يلي:

ⓐ $-15+6i$ ⓑ $6+15i$ ⓒ $6-15i$ ⓓ $32+15i$

(6) حل المعادلة: $-10-6i=2x+3yi$ هو:

ⓐ $x=5\ ,\ y=-2$ ⓑ $x=-5\ ,\ y=-2$ ⓒ $x=-5\ ,\ y=2$ ⓓ $x=5\ ,\ y=2$

(7) إذا كان $z_1=5i+2$ ، $z_2=-3-i$ فإنّ $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}$ تساوي:

ⓐ $\frac{1}{10}+\frac{17}{10}i$ ⓑ $\frac{-1}{10}-\frac{17}{10}i$ ⓒ $\frac{-1}{10}+\frac{17}{10}i$ ⓓ $\frac{1}{10}-\frac{17}{10}i$

(8) إذا كان: $x\,i^2+3\,y\,i=5+3\,i^5$: فإن $(x\ ,\ y)$ تساوي

ⓐ $(5, 1)$ ⓑ $(-5, -1)$ ⓒ $(5, -1)$ ⓓ $(-5, 1)$

(9) أبسط صورة للتعبير: $(3+\sqrt{-4})(4+\sqrt{-9})$ هي:

ⓐ $18+17i$ ⓑ $18+3\sqrt{-9}+4\sqrt{-4}$

ⓒ $6+17i$ ⓓ 18

(10) الصورة الجبرية للعدد المركب: $z=(1+2i)^2$ هي:

ⓐ $z=-3+4i$ ⓑ $z=5+4i$ ⓒ $z=-3$ ⓓ $z=5$

(11) الصورة الجبرية للعدد المركب: $z=(2-i)^3$ هي:

ⓐ $z=14+13i$ ⓑ $z=14-13i$ ⓒ $z=2-11i$ ⓓ $z=2-13i$

(12) الصورة الجبرية للعدد المركب: $z=\frac{i}{i+2}$ هي:

ⓐ $z=\frac{1}{5}+\frac{2}{5}i$ ⓑ $z=-\frac{1}{5}-\frac{2}{5}i$

ⓒ $z=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}i$ ⓓ $z=-\frac{1}{3}+\frac{2}{3}i$

(13) إذا كان $z=i$ فإنّ z^{250} يساوي:

ⓐ $-i$ ⓑ i ⓒ 1 ⓓ -1

(14) ليكن $x\in\mathbb{Z}^+$ فإنّ مجموعة قيم x التي تجعل العدد $(5+i^x)$ عددًا حقيقيًّا هي:

ⓐ $\mathbb{Z}^+$ ⓑ $\{0,2,4,6,...\}$ ⓒ $\{1,3,5,...\}$ ⓓ $\{2,4,6,...\}$

تمرَّنْ
7−2

الإحداثيات القطبية والصورة المثلثية لعدد مركب

Polar Coordinates and Trigonometric Form of a Complex Number

المجموعة A تمارين مقالية

(1) أوجد:

(a) $|5+12i| = 13$ **(b)** $|2-2i| = \sqrt{8}$ **(c)** $|2i| = 2$

في التمارين (2–7)، حول الإحداثيات القطبية إلى إحداثيات ديكارتية:

(2) $\left(2, \frac{\pi}{3}\right) = 1+\sqrt{3}i$

(3) $\left(1, \frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$

(4) $\left(1.5, \frac{7\pi}{3}\right)\ \frac{3}{4} + \frac{3\sqrt{3}}{4}i$

(5) $(2, \pi) = -2$

(6) $(2, 270°)\ -2i$

(7) $\left(\sqrt{2}, -\frac{\pi}{6}\right)\ \frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$

في التمارين (8–13)، أوجد الإحداثيات القطبية لكل من النقاط التالية:

(8) $(1, 1)\ \left(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right)$

(9) $(-2, 5)\ (\sqrt{29}, 111.8)$

(10) $(-3, 0)\ (3, \pi)$

(11) $(0, 4)\ (4, 90)$

(12) $(-2, -2\sqrt{3})\ \left(4, \frac{4\pi}{3}\right)$

(13) $(3\sqrt{3}, -3)\ \left(6, \frac{11\pi}{6}\right)$

في التمارين (14–21)، ضع كلًّا مما يلي في الصورة المثلثية مستخدمًا السعة الأساسية:

(14) $3i = 3\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$

(15) $2+2i = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

(16) $-2+2i\sqrt{3} = 4\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$

(17) $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = 1\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$

(18) $-2i = 2\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$

(19) $\sqrt{3}+i = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

(20) $8 = 8(\cos 0 + i\sin 0)$

(21) $-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i = 1\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right)$

في التمارين (22–28)، اكتب الأعداد التالية في الصورة المثلثية $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ حيث $\theta \in [0, 2\pi)$:

(22) $5\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

(23) $8(\cos 30° - i\sin(-150°))$

(24) $-\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right)$

(25) $2(\cos 45° + i\sin 405°)$

Subject: كراسة التمارين / /

التمارين (22-28) P.12 اكتب في الصورة المثلثية

(22) $5\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right) = 5\left(\cos\frac{-\pi}{4} + i\sin\frac{-\pi}{4}\right)$

$= 5\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$

(23) $8(\cos 30 - i\sin(-150))$ $\qquad \sin(-150) = -\sin 30$

$= 8(\cos 30 - i(-\sin 30)) = 8(\cos 30 + i\sin 30)$

(24) $-\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right) = \sqrt{2}\left(-\cos\frac{7\pi}{6} - i\sin\frac{7\pi}{6}\right)$

$= \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

(25) $2(\cos 45 + i\sin 405) = 2(\cos 45 + i\sin 45)$

(26) $4\left(-\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) =$

$= 4\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right)$

$-\cos\frac{\pi}{6} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right)$

$= \cos\frac{7\pi}{6}$

$\sin\frac{\pi}{6} = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \sin\frac{7\pi}{6}$

(27) $5(\cos(-60) + i\sin(-60)) = 5(\cos 60 - i\sin 60)$

$= 5(\cos 300 + i\sin 300)$

(28) $3\left(\sin\frac{\pi}{3} + i\cos\frac{\pi}{3}\right) =$

$= 3\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

$\sin\frac{\pi}{3} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right)$

$= \cos\frac{\pi}{6}$

$\cos\frac{\pi}{3} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right)$

$= \sin\frac{\pi}{6}$

(26) $4\left(-\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

(27) $5\left(\cos(-60^\circ)+i\sin(-60^\circ)\right)$

(28) $3\left(\sin\frac{\pi}{3}+i\cos\frac{\pi}{3}\right)$

في التمارين (33–29)، ضع كلًّا مما يلي في الصورة الجبرية:

(29) $2\left(\cos\frac{7\pi}{6}+i\sin\frac{7\pi}{6}\right) = -\sqrt{3}-i$

(30) $\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4}\right) = 1-i$

(31) $\sqrt{2}\left(\cos\frac{-\pi}{3}+i\sin\frac{-\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{6}}{2}i$

(32) $7\left(\cos\frac{11\pi}{6}+i\sin\frac{11\pi}{6}\right) = \frac{7\sqrt{3}}{2}-\frac{7}{2}i$

(33) $\sqrt{3}(\cos 225^\circ+i\sin 225^\circ)$ $-\frac{\sqrt{6}}{2}+\frac{\sqrt{6}}{2}i$

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (6–1)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و(b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) الإحداثيات الديكارتية للنقطة: $A\left(4,\frac{7\pi}{6}\right)$ هي: $A(-2\sqrt{3},2)$ — (a) (b)

(2) الإحداثيات الديكارتية للنقطة: $B(\sqrt{2},135^\circ)$ هي: $B(-1,1)$ — (a) (b)

(3) الإحداثيات القطبية للنقطة: $M\left(\frac{-\sqrt{2}}{2},\frac{-\sqrt{2}}{2}\right)$ هي: $M\left(1,\frac{5\pi}{4}\right)$ — (a) (b)

(4) العدد المركب: $z=\sqrt{3}-i$ بصورة المثلثية هو: $z=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$ — (a) (b)

(5) الصورة الجبرية للعدد المركب: $z=\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$ هي: $z=1-i$ — (a) (b)

(6) السعة الأساسية للعدد $z=\cos 30^\circ+i\cos 240^\circ$ هي 330° — (a) (b)

في التمارين (13–7)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(7) الإحداثيات الديكارتية للنقطة: $A\left(4,\frac{5\pi}{3}\right)$ هي:

(a) $A(2,2\sqrt{3})$ (b) $A(-2,2\sqrt{3})$ (c) $A(-2,-2\sqrt{3})$ (d) $A(2,-2\sqrt{3})$

(8) الإحداثيات القطبية للنقطة: $B\left(\frac{-\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ هي:

(a) $B\left(1,\frac{-\pi}{4}\right)$ (b) $B\left(1,\frac{\pi}{4}\right)$ (c) $B\left(1,\frac{3\pi}{4}\right)$ (d) $B\left(1,\frac{-3\pi}{4}\right)$

(9) الصورة المثلثية للعدد المركب: $z = 2 - 2\sqrt{3}i$ حيث $\theta \in [0, 2\pi)$ هي:

ⓐ $z = 4\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$ ⓑ $z = 4\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

ⓒ $z = 4\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$ ⓓ $z = 4\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$

(10) الصورة المثلثية للعدد المركب: $z = \frac{-4}{1-i}$ حيث $0 \leqslant \theta < 2\pi$ هي:

ⓐ $z = 4\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$ ⓑ $z = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$

ⓒ $z = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$ ⓓ $z = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$

(11) الصورة الجبرية للعدد المركب: $z = 3\left(\cos\frac{2\pi}{3} - i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$ حيث $0 \leqslant \theta < 2\pi$ هي:

ⓐ $z = -\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i$ ⓑ $z = -\frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i$

ⓒ $z = -\frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i$ ⓓ $z = \frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i$

(12) $\forall n \in \mathbb{Z}^+$ فإنّ قيمة $(i^{2n+2} + i^{2n+8})$ تساوي: $i^{2n+2}(1+i^6)$

ⓐ 1 ⓑ 0 ⓒ -1 ⓓ i^{-2n}

(13) $(6 - 2i + 3i^5)^2$ تساوي:

ⓐ $35 - 12i$ ⓑ $35 + 12i$ ⓒ $81 - 12i$ ⓓ $81 + 12i$

Subject: / /

حل المعادلات

الجموعة A تمارين مقالية P.15

① $3Z - 1 + i = 5 - 2i$

$3Z = 5 + 1 - 2i - i$

$3Z = 6 - 3i$

$Z = 2 - i$

② $Z + 2\bar{Z} = 4 + i$ $\qquad Z = a + bi \Rightarrow \bar{Z} = a - bi$

$a + bi + 2(a - bi) = 4 + i$

$a + 2a + bi - 2bi = 4 + i$

$3a - bi = 4 + i$

$3a = 4 \qquad -b = 1$

$a = \frac{4}{3} \qquad b = -1 \Rightarrow Z = \frac{4}{3} - i$

③ $5z - 4 + 2i = 3Z + 1 - 4i$

$2Z = 5 - 6i$

$Z = \frac{5}{2} - 3i$

④ $Z + 3(1 + i)Z - 8(2 - i) = 0$ $\qquad Z = a + bi$

$[1 + (3 + 3i)](a + bi) - 16 + 8i = 0$

$(4 + 3i)(a + bi) = 16 - 8i$

$Z = \frac{16 - 8i}{4 + 3i} \times \frac{4 - 3i}{4 - 3i}$

$Z = \frac{8}{5} - \frac{16}{5}i$

Subject: / /

اوجد مجموعة حل كل من المعادلات التالية

⑤ $16x^2+64=0$

$16x^2=-64$

$x^2=\frac{-64}{16} \Rightarrow x^2=-4 \Rightarrow x=\mp 2i$

مجموعة الحل $=\{2i ، -2i\}$

⑥ $x^2-5x+7=0$

$a=1 \qquad b=-5 \qquad c=7$

$\Delta=b^2-4ac=(-5)^2-4(1)(7)=-3$

$x=\frac{-b\mp\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-(-5)\mp\sqrt{-3}}{2(1)}=\frac{5\mp\sqrt{3}i}{2}$

مجموعة الحل $=\left\{\frac{5}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i ، \frac{5}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right\}$

⑦ $x^2+6x+25=0$

مجموعة الحل $=\{-3-4i ، -3+4i\}$

⑧ $Z^2-2Z+4=0$

مجموعة الحل $=\{1-\sqrt{3}i ، 1+\sqrt{3}i\}$

⑨ $Z+\frac{4}{Z}=2$

$Z^2+4=2Z \Rightarrow Z^2-2Z+4=0$

مجموعة الحل $\{1-\sqrt{3}i ، 1+\sqrt{3}i\}$

(10) لتكن المعادلة $Z^2+Z+2=0$ بدون حل المعادلة
اثبت أن $\frac{-1+\sqrt{7}i}{2}$ هو جذر المعادلة ثم اوجد الجذر الثاني

$$\left(\frac{-1+\sqrt{7}i}{2}\right)^2+\left(\frac{-1+\sqrt{7}\,i}{2}\right)+2=$$

$$=\frac{-3-\sqrt{7}i}{2}+\frac{-1+\sqrt{7}i}{2}+2=$$

$$\frac{-3}{2}-\frac{\sqrt{7}}{2}i+\frac{-1}{2}+\frac{\sqrt{7}}{2}i+2=0$$

$\therefore$ $\frac{-1+\sqrt{7}i}{2}$ هو جذر المعادلة
ويكون الجذر الثاني $\frac{-1-\sqrt{7}i}{2}$

ونلاحظ :

$$Z_1+Z_2=\frac{-1+\sqrt{7}i}{2}+\frac{-1-\sqrt{7}i}{2}=\frac{-2}{2}=-1=\frac{b}{a}$$

$$Z_1\cdot Z_2=\left(\frac{-1+\sqrt{7}i}{2}\right)\left(\frac{-1-\sqrt{7}i}{2}\right)$$

$$=\frac{(-1+\sqrt{7}i)(-1-\sqrt{7}i)}{4}$$

$$=\frac{(-1)^2+(\sqrt{7})^2}{4}$$

$$=\frac{1+7}{4}=2=\frac{c}{a}$$

Subject: / /

⑪ اوجد الجذرين التربيعيين للعدد المركب $Z=-3+4i$

نفرض ان $m+ni$ هو الجذر التربيعي للعدد Z فيكون

$$w^2 = Z \Rightarrow (m+ni)^2 = -3+4i$$
$$m^2 - n^2 + 2mni = -3+4i$$

بالمطابقة

$$m^2 - n^2 = -3 \quad \ldots ①$$
$$2mn = 4 \quad \ldots ②$$
$$|w|^2 = |Z| \Rightarrow \left(\sqrt{m^2+n^2}\right)^2 = \sqrt{(3)^2+(4)^2}$$
$$m^2 + n^2 = \sqrt{(-3)^2+(4)^2}$$
$$m^2 + n^2 = 5 \quad \ldots ③$$

بجمع ③ , ①

$$2m^2 = 2 \Rightarrow m^2 = 1 \Rightarrow$$

$m = 1$ or $m = -1$

بالتعويض في ② نجد

$2mn = 4$	$2mn = 4$
$2(1)n = 4$	$2(-1)n = 4$
$n = 2$	$n = -2$

∴ الجذرين التربيعيين

$1+2i$ $\quad$ $-1-2i$

∴ نلاحظ انه احد هذين الجذرين نظير جمعي للآخر

A L A D I B Notebook

Subject: / /

(12) اوجد الجذرين التربيعيين للعدد المركب $Z = 5 + 12i$

نفرض أن $w = a + bi$ هو الجذر التربيعي للعدد Z فيكون

$$w^2 = Z \Rightarrow (a+bi)^2 = 5 + 12i$$

$$a^2 - b^2 + 2abi = 5 + 12i$$

بالمطابقة

$$a^2 - b^2 = 5 \quad --- (1)$$

$$2ab = 12 \quad --- (2)$$

$$|w|^2 = |Z| \Rightarrow (\sqrt{m^2+n^2})^2 = \sqrt{5^2+12^2}$$

$$a^2 + b^2 = \sqrt{5^2 + 12^2}$$

$$a^2 + b^2 = 13 \quad --- (3)$$

بجمع (3), (1)

$$2a^2 = 18 \Rightarrow a^2 = 9$$

$$a = 3 \quad \text{or} \quad a = -3$$

بالتعويض في (2)

$2ab = 12$	$2ab = 12$
$2(3)b = 12$	$2(-3)b = 12$
$b = 2$	$b = -2$

∴ الجذرين التربيعيين

$3 + 2i$ $\quad$ $-3 - 2i$

ونلاحظ أن هذين الجذرين احدهما النظير الجمعي للآخر

Subject: .... / /

(14) حل المعادلة $(2+i)Z^2 = 22-19i$

$$Z^2 = \frac{22-19i}{2+i} = 5-12i$$

بفرض ان $Z = a+bi$ فيكون

$(a+bi)^2 = 5-12i$

$a^2 - b^2 + 2abi = 5-12i$

بالمطابقة

$a^2 - b^2 = 5$ --- (1)

$2ab = -12$ --- (2)

$|w|^2 = |Z| \Rightarrow \left(\sqrt{m^2+n^2}\right)^2 = \sqrt{5^2+(-12)^2}$

$a^2 + b^2 = \sqrt{5^2+(-12)^2} = 13$

$a^2 + b^2 = 13$ --- (3)

بجمع (1) ، (3) نجد

$2a^2 = 18 \Rightarrow a^2 = 9$

$a = 3$ or $a = -3$

بالتعويض في (2)

$2ab = -12$	$2ab = -12$
$2(3)b = -12$	$2(-3)b = -12$
$b = -2$	$b = 2$

اذن $Z_1 = 3-2i$ $Z_2 = -3+2i$

∴ مجموعة حل المعادلة $\{3-2i , -3+2i\}$

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (1–6)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) حل المعادلة: $\overline{z}+2 = 5 - i$ هو: $z = 3 + i$ — (a) (b)

(2) حل المعادلة: $2z + \overline{z} - 3 - 5i = 0$ هو: $z = 1 - 5i$ — (a) (b)

(3) مجموعة حل المعادلة: $z^2 - 4z + 5 = 0$ هي: $\{-2 - i, 2 + i\}$ — (a) (b)

(4) الجذران التربيعيان للعدد -1 هما: $1, -1$ — (a) (b)

(5) الجذران التربيعيان للعدد المركب: $z = 16 + 30i$ هما: $z_1 = 5 + 3i,\ z_2 = -5 - 3i$ — (a) (b)

(6) إذا كان z_1, z_2 جذران تربيعيان للعدد z فإن $z_1 + z_2 = 0$ — (a) (b)

في التمارين (7–10)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(7) حل المعادلة: $2z - 5 + 6i = -3\overline{z}$ هو:

(a) $z = 1 + 6i$ (b) $z = -1 + 6i$ (c) $z = 1 - 6i$ (d) $z = -1 - 6i$

(8) مجموعة حل المعادلة: $z^2 - 4z + 20 = 0$ هي:

(a) $\{2 - 4i, -2 - 4i\}$

(b) $\{-2 + 4i, -2 - 4i\}$

(c) $\{2 - 4i, -2 + 4i\}$

(d) $\{2 - 4i, 2 + 4i\}$

(9) الجذران التربيعيان للعدد المركب: $z = 33 - 56i$ هما:

(a) $\begin{cases} z_1 = -7 - 4i \\ z_2 = 7 + 4i \end{cases}$

(b) $\begin{cases} z_1 = 7 - 4i \\ z_2 = -7 + 4i \end{cases}$

(c) $\begin{cases} z_1 = 7 + 4i \\ z_2 = 7 - 4i \end{cases}$

(d) $\begin{cases} z_1 = -7 - 4i \\ z_2 = -7 + 4i \end{cases}$

(10) حل المعادلة $(3 - 4i)z = 5 - 2i$ هو:

(a) $\frac{5}{3} + \frac{1}{2}i$ (b) $\frac{5}{3} - \frac{1}{2}i$ (c) $\frac{23}{25} + \frac{14}{25}i$ (d) $\frac{23}{25} - \frac{14}{25}i$

Subject: / /

اختبار الوحدة السابعة

بسط كلاً من التعابير التالية

① $4\sqrt{-9}-2 = -2+12i$

② $(4-i)+(5-9i) = 9-10i$

③ $(-3+2i)-(6+i) = -9+i$

④ $(2+3i)(8-5i) = (16+15)+(-10+24)i = 31+14i$

⑤ المعكوس الجمعي للعدد $3-7i$ هو $-3+7i$

المعكوس الضربي للعدد $3-7i$ هو

$$\frac{1}{3-7i} = \frac{3+7i}{3^2+7^2} = \frac{3}{58} + \frac{7}{58}i$$

⑥ اوجد القيمة المطلقة للعدد $7-2i$

$$|7-2i| = \sqrt{7^2+(-2)^2} = \sqrt{53}$$

⑦ اوجد

ⓐ $-3i^{77} = -3i$ ⓑ $i^{50} = -1$

ⓒ $(-2+3i)^2 = 4-12i-9 = -5-12i$

⑧ اوجد مجموعة حل المعادلة $2x^2+10=0$

$x^2 = -5$

$x = \sqrt{5}\,i$, $x = -\sqrt{5}\,i$

مجموعة الحل $= \{\sqrt{5}i, -\sqrt{5}i\}$

Subject: / /

(9) اكتب الكسر $\frac{1+3i}{3+2i}$ في الصوره الجبريه ثم حولها

الى الصوره المثلثيه :

$$\frac{1+3i}{3+2i} \times \frac{3-2i}{3-2i} = \frac{(3+6)+(-2+9)i}{9+4} = \frac{9}{13} + \frac{7}{13} i$$

$$r = \sqrt{\left(\frac{9}{13}\right)^2 + \left(\frac{7}{13}\right)^2} = \frac{\sqrt{130}}{13}$$

$$\tan\alpha = \left| \frac{\frac{7}{13}}{\frac{9}{13}} \right| = \frac{7}{9} \Rightarrow \alpha = 37^\circ\, 52'\, 30''$$

$$\theta = \alpha = 37^\circ\, 52'\, 30'' \Leftarrow$$ θ تقع في الربع الأول

$\therefore$ الصوره المثلثيه :

$$Z = \frac{\sqrt{130}}{13}\left(\cos 37^\circ\, 52'\, 30'' + i \sin 37^\circ\, 52'\, 30''\right)$$

(10) اوجد مجموعة حل المعادله $\frac{Z+1}{Z-1} = 2i$

$$2i(Z-1) = Z+1$$

$$2iZ - 2i = Z+1$$

$$2iZ - Z = 1+2i$$

$$Z(2i-1) = 1+2i \Rightarrow Z = \frac{1+2i}{-1+2i}$$

$$Z = \frac{1+2i}{-1+2i} \times \frac{-1-2i}{-1-2i} = \frac{(-1+4)+(-2-2)i}{1+4} = \frac{3}{5} - \frac{4}{5} i$$

(11) اوجد مرافق العدد $\frac{3-i}{1+i}$

$$\frac{3-i}{1+i} \times \frac{1-i}{1-i} = \frac{(3-1)+(-3+-1)i}{1+1} = \frac{2}{2} + \frac{-4}{2} i$$

$$= 1-2i$$

$$\overline{\left(\frac{3-i}{1+i}\right)} = 1+2i$$

(12) حل المعادلة

$$2Z^2 - 6Z + 5 = 0$$

$a = 2 \qquad b = -6 \qquad c = 5$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4(2)(5) = -4$$

$$Z_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-6)+\sqrt{-4}}{2\times 2} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} i$$

$$Z_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-6)-\sqrt{-4}}{2\times 2} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} i$$

مجموعة الحل $= \left\{ \frac{3}{2} - \frac{1}{2} i ، \frac{3}{2} + \frac{1}{2} i \right\}$

(13) اكتب الاعداد التالية بالصورة المثلثية

(a) $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}(\cos 0 + i \sin 0)$

(b) $-3i = 3\left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2}\right)$

(c) $2\sqrt{3} + 6i = 4\sqrt{3}\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right)$

Subject: / /

(14) اكتب العدد $Z = -3(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})$ في الصورة المثلثية مستخدماً السعة الأساسية

$Z = 3(-\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3})$

$= 3(\cos(\pi + \frac{\pi}{3}) + i\sin(\pi + \frac{\pi}{3}))$

$= 3(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3})$

(15) اكتب العدد $Z = \frac{\sqrt{3}}{3}(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})$ بالصورة الجبرية

$x = \frac{\sqrt{3}}{3}\cos\frac{\pi}{3}$ $\quad y = \frac{\sqrt{3}}{3}\sin\frac{\pi}{3}$

$= \frac{\sqrt{3}}{6}$ $\quad = \frac{1}{2}$

$Z = \frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{1}{2}i$

(16) اوجد الجذرين التربيعيين للعدد $-8 + 6i$

الجذرين التربيعيين :

$1 + 3i \quad , \quad -1 - 3i$

(17) (a) اثبت أن $-2 + \frac{3}{2}i$ هو احد جذري المعادلة $4Z^2 + 16Z + 25 = 0$

(b) اوجد الجذر الآخر

$4(-2 + \frac{3}{2}i)^2 + 16(-2 + \frac{3}{2}i) + 25 =$

$= 4(\frac{7}{4} - 6i) + 16(-2 + \frac{3}{2}i) + 25$

$= 7 - 24i + -32 + 24i + 25 = 0$

الجذر الآخر $-2 - \frac{3}{2}i$

ص ١٩

(1) حدّد دورة كل دالة مما يلي وسعتها. ص ٧٦

(a) $y = 3\cos x$ (b) $y = \sin 2x$

(c) $y = 3\sin\frac{x}{3}$ (d) $y = \frac{1}{3}\cos\frac{x}{2}$

الحل :

(a) $y = 3\cos x$

$\because \quad a = 3 \quad , \quad b = 1$

سعة الدالة : $|a| = 3$

دورة الدالة : $\frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{1} = 2\pi$

(b) $y = \sin 2x$

$\because \quad a = 1 \quad , \quad b = 2$

سعة الدالة : $|a| = 1$

دورة الدالة : $\frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{2} = \pi$

(c) $y = 3\sin\frac{x}{3}$

$\because \quad a = 3 \quad , \quad b = \frac{1}{3}$

السعة : $|a| = |3| = 3$

الدورة : $\frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{|\frac{1}{3}|} = 6\pi$

(d) $y = \frac{1}{3}\cos\frac{x}{2}$

$\because \quad a = \frac{1}{3} \quad , \quad b = \frac{1}{2}$

السعة : $|a| = |\frac{1}{3}| = \frac{1}{3}$

الدورة : $\frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$

② ص ١٩ اكتب معادلة الدالة على الصورة $y = a\sin(bx)$ في كل من الحالات التالية :

ⓐ الدورة $\frac{2\pi}{3}$ و $a = 1$

الحل :

الدورة : $\frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow |b| = 3 \Rightarrow b = \mp 3$

$\therefore \quad y = a\sin(bx) \Rightarrow$

$y = \sin 3x$ أو $y = \sin(-3x)$

ⓑ الدورة π و $a = \frac{1}{3}$

الحل

الدورة : $\frac{2\pi}{|b|} = \pi \Rightarrow |b| = 2 \Rightarrow b = \mp 2$

$\therefore \quad y = \frac{1}{3}\sin(2x)$ أو $y = \frac{1}{3}\sin(-2x)$

ⓒ الدورة ، $a = -4$

الحل :

الدورة : $\frac{2\pi}{|b|} = 4\pi \Rightarrow |b| = \frac{1}{2} \Rightarrow b = \mp\frac{1}{2}$

$\therefore \quad y = a\sin(bx)$

$y = -4\sin(\frac{1}{2}x)$ أو $y = -4\sin(-\frac{1}{2}x)$

③ ص ١٩

اكتب معادلة الدالة على الصورة $y = a\cos(bx)$ في كل من الحالات التالية:

ⓐ الدورة 3π و $a=5$

الحل

الدورة: $\frac{2\pi}{|b|} = 3\pi \Rightarrow |b| = \frac{2}{3} \Rightarrow b = \mp\frac{2}{3}$

$\therefore\ y = a\cos(bx)$

$y = 5\cos(\frac{2}{3}x)$ أو $y = 5\cos(-\frac{2}{3}x)$

ⓑ الدورة π ، $a = -\frac{1}{2}$

الحل:

الدورة: $\frac{2\pi}{|b|} = \pi \Rightarrow |b| = 2 \Rightarrow b = \mp 2$

$\therefore\ y = a\cos(bx)$

$y = -\frac{1}{2}\cos(2x)$ أو $y = -\frac{1}{2}\cos(-2x)$

ⓒ الدورة $\frac{\pi}{2}$ $a = \frac{3}{5}$

الحل

الدورة: $\frac{2\pi}{|b|} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow |b| = 4 \Rightarrow b = \mp 4$

$\therefore\ y = a\cos(bx)$

$y = \frac{3}{5}\cos(4x)$ أو $y = \frac{3}{5}\cos(-4x)$

(4) مثّل بيانيًا دورة واحدة لكل دالة من الدوال التالية:

(a) $y = 2\sin x$ (b) $y = -3\sin x$ (c) $y = 0.5\sin 2x$

(d) $y = 4\sin\frac{1}{2}x$ (e) $y = -\sin 5x$ (f) $y = 5\cos x$

(g) $y = 3\cos 5x$ (h) $y = -\cos 3x$ (i) $y = \cos 2x$

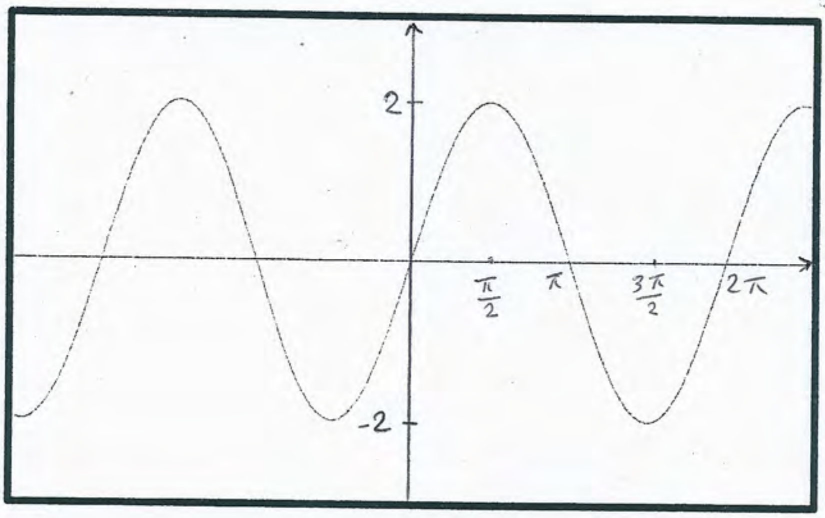
(a) $y = \sin X$

الحل الدالة دورية مجالها $\mathbb{R}$

السعة: $|a| = |2| = 2$

الدورة: $\frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{1} = 2\pi$

$\therefore$ ربع الدورة $\frac{\pi}{2}$



X	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
sinX	0	1	0	-1	0
2SinX	0	2	0	-2	0

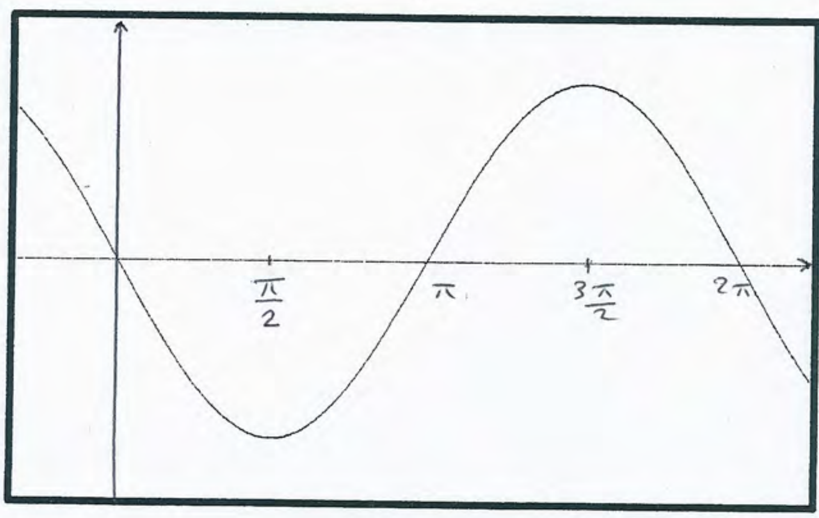
(b) $y = -3\sin X$

الحل الدالة دورية مجالها $\mathbb{R}$

السعة: $|a| = |-3| = 3$

الدورة: $\frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{1} = 2\pi$

$\therefore$ ربع الدورة $\frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$



X	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
SinX	0	1	0	-1	0
-3SinX	0	-3	0	3	0

(f) $y = 3\cos x$

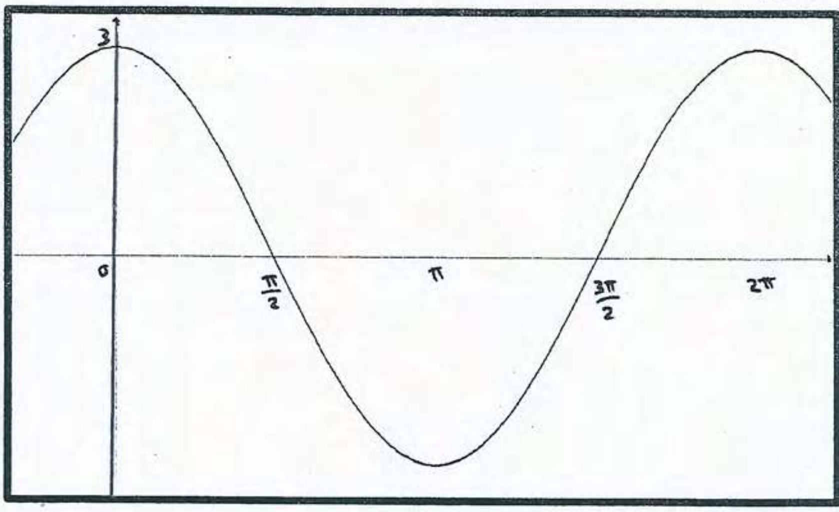
الحل

الدالة $y = 3\cos x$ دالة دورية

السعة: $|a| = |3| = 3$

الدورة: $\frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{1} = 2\pi$

ربع الدوره: $\frac{\pi}{2}$



x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\cos x$	1	0	-1	0	1
$3\cos x$	3	0	-3	0	3

(h) $y = -\cos 3x$

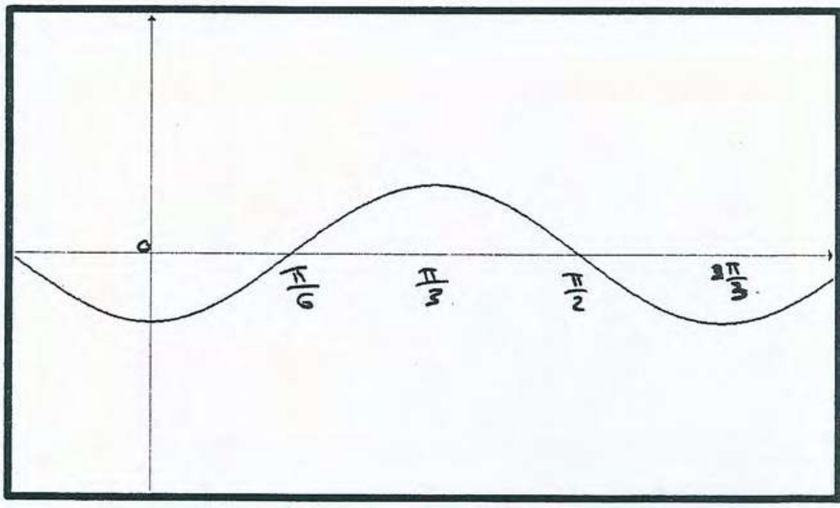
الحل

الدالة $y = -\cos 3x$ دالة دورية مجالها R

السعة: $|a| = |-1| = 1$

الدورة: $\frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{3}$

ربع الدورة: $\frac{\pi}{6}$



x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$
$3x$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\cos 3x$	1	0	-1	0	1
$-\cos 3x$	-1	0	1	0	1

⑤ ص ١٩ حدد دورة كل دالة مما يلي :

ⓐ $y = \tan 5x$

الحل

الدالة $y = \tan 5x$ هي دالة دورية

الدورة : $\frac{\pi}{|b|} = \frac{\pi}{5}$

ⓑ $y = \tan \frac{3x}{2}$

الحل :

الدالة $y = \tan \frac{3x}{2}$ هي دالة دورية

الدورة : $\frac{\pi}{|b|} = \frac{\pi}{|\frac{3}{2}|} = \frac{2\pi}{3}$

---

⑥ ص 20

اكتب معادلة الدالة على الصورة $y = \tan(bx)$ في كل من الحالات التالية :

ⓐ الدورة $\frac{\pi}{5}$

الحل الدورة : $\frac{\pi}{|b|} = \frac{\pi}{5} \Rightarrow |b| = 5 \Rightarrow b = \mp 5$

$\therefore \quad y = \tan(bx)$

$y = \tan(5x)$ أو $y = \tan(-5x)$

ⓑ الدورة $\frac{2\pi}{3}$

الحل $\frac{\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow |b| = \frac{3}{2} \Rightarrow b = \mp \frac{3}{2}$

$\therefore \quad y = \tan(\frac{3}{2}x)$ أو $y = \tan(-\frac{3}{2}x)$

(7) مثل بيانيًا دورة واحدة لكل دالة من الدوال التالية:

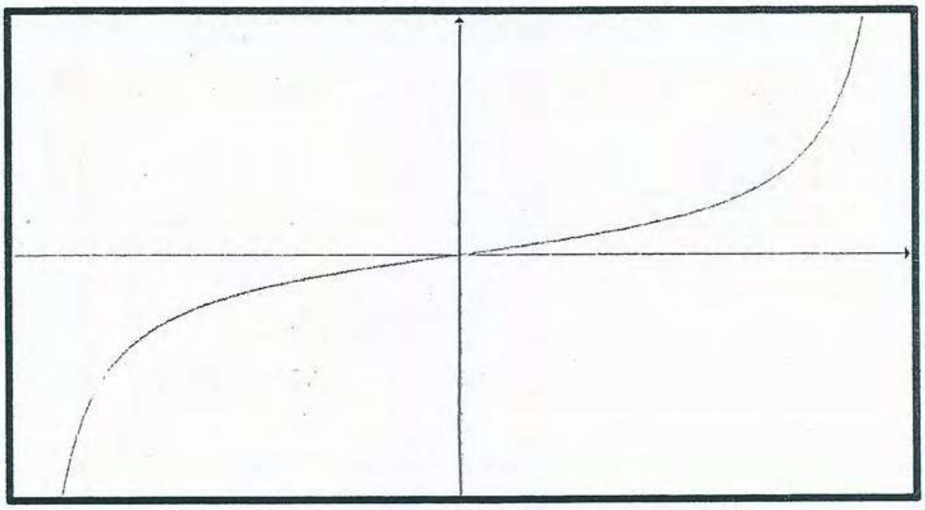
(a) $y = \tan 2x$ (b) $y = \tan \frac{x}{2}$ (c) $y = -3 \tan x$

الحل الدالة دوريه

الدورة : $\frac{\pi}{|b|} = \frac{\pi}{|2|} = \frac{\pi}{2}$

ربع الدورة : $\frac{\pi}{8}$

(a) $y = \tan 2x$



x	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{8}$	0	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{4}$
$2x$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
$\tan 2x$	غير معرف	-1	0	1	غير معرف

(c) $y = -3 \tan x$

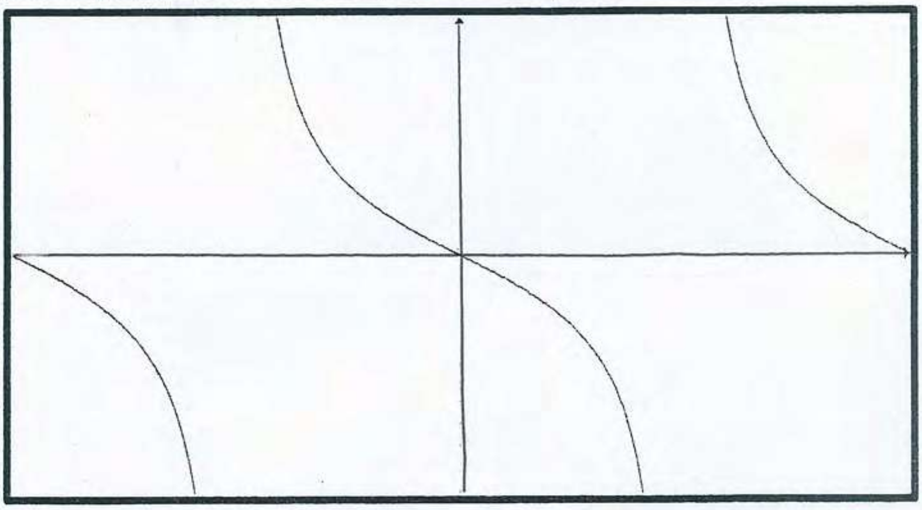
الحل

الدالة دوريه

الدورة $\frac{\pi}{|b|} = \frac{\pi}{1} = \pi$

ربع الدورة $\frac{\pi}{4}$

x	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
$\tan x$	غير معرف	-1	0	1	غير معرف
$-3 \tan x$	غير معرف	3	0	-3	غير معرف



حل ٢٢

(1) صف العلاقة بين التمثيل البياني لكل من الدالتين h ، f لكل مما يلي:

(a) $f(x) = \cos 2x\ ,\ h(x) = \frac{5}{3}\cos 2x$ (b) $f(x) = \sin\frac{x}{3}\ ,\ h(x) = \frac{-2}{3}\sin\frac{x}{3}$

يمكن الحصول على التمثيل البياني للدالة h من التمثيل البياني للدالة f بتمدد رأسي معامله $a = \frac{5}{3}$

يمكن الحصول على التمثيل البياني للدالة h من التمثيل البياني للدالة f بانكماش رأسي معامله $|a| = \frac{2}{3}$

$\because$ a سالبة $\therefore$ يوجد انعكاس في محور السينات

(c) $f(x) = \sin x\ ,\ h(x) = \sin 3x$ (d) $f(x) = \cos x\ ,\ h(x) = \cos\frac{x}{5}$

يمكن الحصول على التمثيل البياني للدالة h من التمثيل البياني للدالة f بانكماش أفقي معامله $\frac{1}{|b|} = \frac{1}{3}$

يمكن الحصول على التمثيل البياني للدالة h من التمثيل البياني للدالة f بتمدد أفقي معامله $\frac{1}{|b|} = \frac{1}{\frac{1}{5}} = 5$

(e) $f(x) = \sin x\ ,\ h(x) = -\frac{1}{3}\sin(-2x)$ (f) $f(x) = \cos x\ ,\ h(x) = 1.5\cos 4x$

$h(x) = -\frac{1}{3}\sin(-2x)$

$\Rightarrow h(x) = \frac{1}{3}\sin 2x$

يمكن الحصول على التمثيل البياني للدالة h من التمثيل البياني للدالة f بانكماش رأسي معامله $\frac{1}{3}$ وانكماش أفقي معامله $\frac{1}{2}$

يمكن الحصول على التمثيل البياني للدالة h من التمثيل البياني للدالة f بتمدد رأسي معامله 1.5 وانكماش أفقي معامله $\frac{1}{4}$

(g) $f(x) = \cos 2x\ ,\ h(x) = \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$ (h) $f(x) = \sin 3x\ ,\ h(x) = \sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)$

$h(x) = \cos(2x + \frac{\pi}{3}) \Rightarrow h(x) = \cos 2(x + \frac{\pi}{6})$

$\Rightarrow h(x) = \cos 2(x - (-\frac{\pi}{6}))$

يمكن الحصول على التمثيل البياني للدالة h من التمثيل البياني للدالة f بإزاحة أفقية لليسار بمقدار $\frac{\pi}{6}$

$h(x) = \sin(3(x - \frac{\pi}{12}))$

يمكن الحصول على التمثيل البياني للدالة h من التمثيل البياني للدالة f بإزاحة أفقية لليمين بمقدار $\frac{\pi}{12}$

(i) $f(x) = 0.3\cos 2x\ ,\ h(x) = 0.3\cos 2x + 4$ (j) $f(x) = 3\sin\frac{x}{2}\ ,\ h(x) = 3\sin\frac{x}{2} - 1$

يمكن الحصول على التمثيل البياني للدالة h من التمثيل البياني للدالة f بإزاحة رأسية لأعلى 4 وحدات

يمكن الحصول على التمثيل البياني للدالة h من التمثيل البياني للدالة f بإزاحة رأسية وحدة واحدة لأسفل

ص٤؟

(2) صف العلاقة بين التمثيلين البيانيين لكل من: $y_1 = \cos x$ ، $y_2 = \cos 3x$
ثم ارسم دورتين من الدالة y_2

يمكن الحصول على التمثيل البياني للدالة $y_2 = \cos 3x$ من التمثيل البياني للدالة $y_1 = \cos x$ بانكماش أفقي معامله $\frac{1}{|b|} = \frac{1}{|3|} = \frac{1}{3}$.

x_1	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
y_1	1	0	-1	0	1
x_2	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$
y_2	1	0	-1	0	1

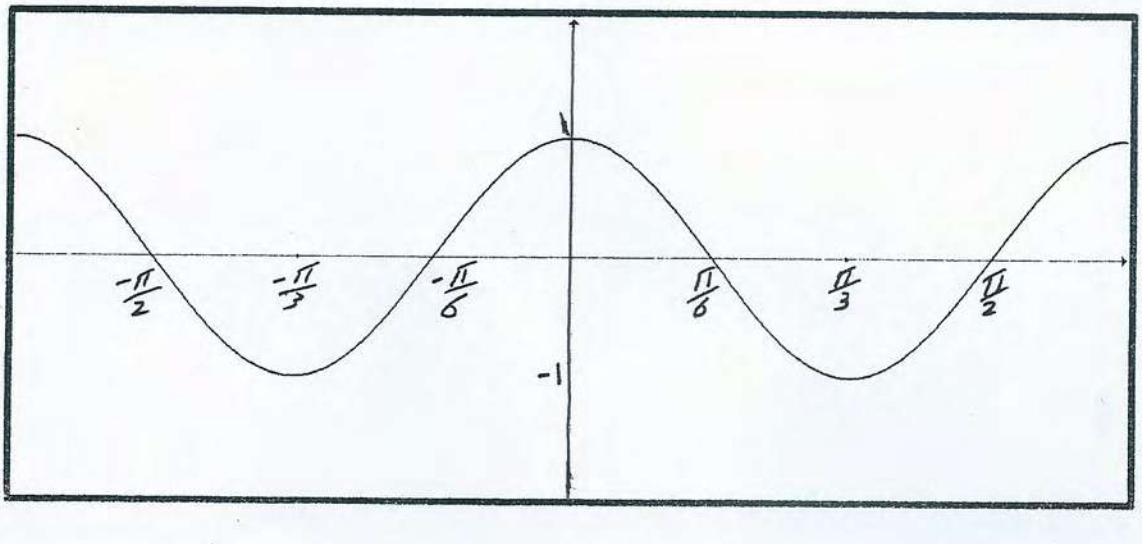
نضرب x_1 في معامل الانكماش $\frac{1}{3}$

حيث الدالة $y_2 = \cos 3x$

سعتها $|a| = |1| = 1$

دورتها $\frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{|3|} = \frac{2\pi}{3}$

ربع الدورة $\frac{1}{4} \times \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$



(3) وضح كيف يمكن الحصول على التمثيل البياني لكل من الدالتين التاليتين باستخدام تحويلات الدوال المثلثية $y = \sin x$ أو $y = \cos x$، ثم أوجد سعة كل دالة ودورتها.

(a) $y = -2\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 1$

(b) $y = +3.5\sin\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) - 1$

ص ٢٢

(a) $y = -2\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + 1 \Rightarrow y = -2\sin\left(x - \left(\frac{-\pi}{4}\right)\right) + 1$

بالمقارنة مع $y = a\sin\left(b\left(x - \frac{h}{b}\right)\right) + k$

نجد أن $a = -2$, $b = 1$, $\frac{h}{b} = -\frac{\pi}{4}$, $k = 1$

يمكن الحصول على التمثيل البياني للدالة y من التمثيل البياني للدالة $\sin x$ عن طريق التحويلات التالية بحسب الترتيب الآتي:

أولاً: ازاحة أفقية إلى اليسار بمقدار $\frac{\pi}{4}$ للحصول على $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

ثانياً: تمدد رأسي بمعامل $|a| = |-2| = 2$ للحصول على $2\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

ثالثاً: انعكاس في محور السينات للحصول على $-2\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

رابعاً: ازاحة رأسية وحدة للأعلى للحصول على $y = -2\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + 1$

وتكون السعة: $|a| = |-2| = 2$

دورتها: $\frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{|1|} = 2\pi$

(b) $y = 3.5\sin\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) - 1$

$\Rightarrow y = 3.5\sin\left(2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right) - 1$

بالمقارنة مع $y = a\sin\left(b\left(x - \frac{h}{b}\right)\right) + k$

نجد أن $a = 3.5$, $b = 2$, $\frac{h}{b} = \frac{\pi}{4}$, $k = -1$

يمكن الحصول على التمثيل البياني للدالة y من التمثيل البياني للدالة $\sin x$ عن طريق التحويلات التالية

أولاً: انكماش أفقي بمعدل $\frac{1}{|b|} = \frac{1}{2}$ للحصول على $\sin 2x$

ثانياً: ازاحة أفقية لليمين بمقدار $\frac{\pi}{4}$ للحصول على $\sin\left(2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right)$

ثالثاً: تمدد رأسي بمعدل $|a| = |3.5| = 3.5$ للحصول على $3.5\sin\left(2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right)$

رابعاً: إزاحة رأسية وحدة لأسفل للحصول على $y = 3.5\sin\left(2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right) - 1$

وتكون السعة $|a| = |3.5| = 3.5$

دورتها $\frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{|2|} = \pi$

قانون الجيب

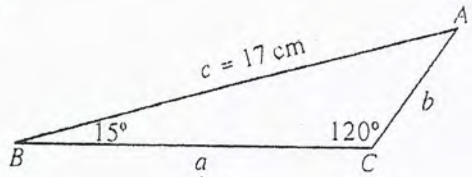
Law of Sine

تمرّنْ 8-3

المجموعة A تمارين مقالية

في التمرينين (2–1)، حلّ كلًّا من المثلثين التاليين:

(1)



الحل :

$* \quad \alpha = 180^\circ - (120^\circ + 15^\circ) = 45^\circ$

$* \quad \dfrac{\sin\alpha}{a} = \dfrac{\sin\gamma}{c}$

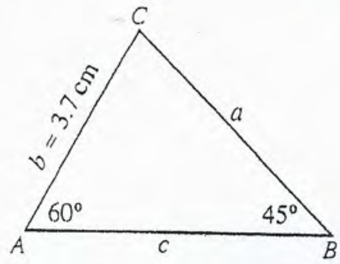
$\dfrac{\sin 45^\circ}{a} = \dfrac{\sin 120^\circ}{17}$

$a = \dfrac{17 \sin 45^\circ}{\sin 120^\circ} \approx 13.9 \text{ cm}$

$* \quad \dfrac{\sin 120^\circ}{17} = \dfrac{\sin 15^\circ}{b}$

$b = \dfrac{17 \sin 15^\circ}{\sin 120^\circ} \approx 5.1 \text{ cm}$

(2)



الحل :

$* \quad \gamma = 180^\circ - (60^\circ + 45^\circ) = 75^\circ$

$* \quad \dfrac{\sin 60^\circ}{a} = \dfrac{\sin 45^\circ}{3.7}$

$a = \dfrac{3.7 \sin 60^\circ}{\sin 45^\circ} \approx 4.5 \text{ cm}$

$* \quad \dfrac{\sin 75^\circ}{c} = \dfrac{\sin 45^\circ}{3.7}$

$c = \dfrac{3.7 \sin 75^\circ}{\sin 45^\circ} \approx 5.1 \text{ cm}$

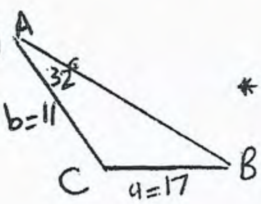
في التمرينين (4–3)، حلّ المثلث ABC:

(3) $m(\widehat{A}) = 32^\circ, a = 17 \text{ cm}, b = 11 \text{ cm}$

(4) $m(\widehat{A}) = 43^\circ, a = 32 \text{ cm}, b = 28 \text{ cm}$

الحل :

(3)



$* \quad \dfrac{\sin 32^\circ}{17} = \dfrac{\sin\beta}{11}$

$\sin\beta = \dfrac{11 \sin 32}{17} \approx 0.34$

$\therefore \beta_1 \approx 19.9^\circ \quad \text{or} \quad \beta_2 = 180 - 19.9 \approx 160.1^\circ$

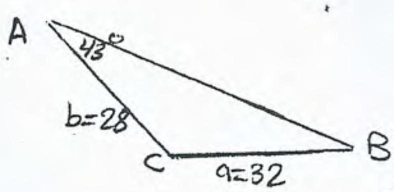
$\beta_1 + \alpha < 180^\circ$ مقبولة | $\beta_2 + \alpha > 180^\circ$ مرفوضة

$\therefore \gamma = 180^\circ - (32^\circ + 19.4^\circ) \approx 128^\circ$

$\therefore \dfrac{\sin 32}{17} = \dfrac{\sin 128}{c}$

$\therefore c = \dfrac{17 \sin 128}{\sin 32} \approx 25.3 \text{ cm}$

الحل :



$\dfrac{\sin 43^\circ}{32} = \dfrac{\sin\beta}{28}$

$\therefore \sin\beta = \dfrac{28 \sin 43^\circ}{32} \approx 0.$

$\therefore \beta_1 = 36.2^\circ \quad \text{or} \quad \beta_2 = 180^\circ - 36.2^\circ = 143.8$

$\because \beta_1 + \alpha < 180^\circ$ مقبوله | $\because \beta_2 + \alpha > 180^\circ$ مرفوضة

$\therefore \gamma = 180^\circ - (36.2^\circ + 43^\circ) = 100.8^\circ$

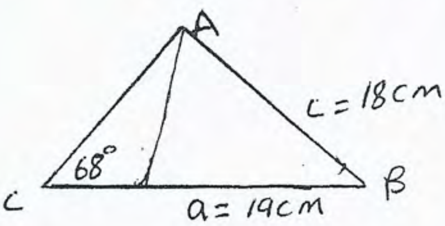
$\therefore \dfrac{\sin 100.8^\circ}{c} = \dfrac{\sin 43^\circ}{32}$

$\therefore c = \dfrac{32 \sin 100.8^\circ}{\sin 43^\circ} \approx 46 \text{ cm}$

في التمرينين (5–6)، يمكن تكوين مثلثين باستخدام القياسات المعطاة، حلّ كلًّا منهما:

(5) $m(\widehat{C}) = 68°, a = 19\text{ cm}, c = 18\text{ cm}$

الحل



$$* \frac{\sin 68}{18} = \frac{\sin \alpha}{19}$$

$$\sin \alpha = \frac{19 \sin 68}{18} \approx 0.98$$

$$\therefore \alpha_1 = 78.5° \quad or \quad \alpha_2 = 101.5°$$

$\alpha_1 + \gamma < 180°$

مقبولة

$\beta_1 = 180° - (68° + 78.5°)$

$= 33.5°$

$$\frac{\sin 68°}{18} = \frac{\sin 33.5°}{b_1}$$

$$\therefore b_1 = \frac{18 \sin 33.5°}{\sin 68}$$

$b_1 \approx 10.7\text{ cm}$

10.8

$\alpha_2 + \gamma < 180°$

مقبولة

$\beta_2 = 180° - (101.5° + 68°)$

$\beta_2 = 10.5°$

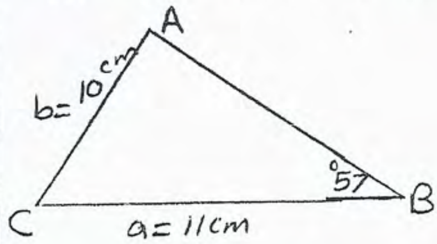
$$\frac{\sin 68°}{18} = \frac{\sin 10.5°}{b_2}$$

$$\therefore b_2 = \frac{18 \sin 10.5°}{\sin 68°}$$

$b_2 \approx 3.5\text{ cm}$

(6) $m(\widehat{B}) = 57°, a = 11\text{ cm}, b = 10\text{ cm}$

الحل :



$$\frac{\sin \alpha}{11} = \frac{\sin 57°}{10}$$

$$\sin \alpha = \frac{11 \sin 57}{10} \approx 0.92$$

$$\therefore \alpha_1 \approx 67 \quad or \quad \alpha_2 \approx 113°$$

$\alpha_1 + \beta < 180°$ مقبولة

$\therefore \gamma_1 = 180° - (67° + 57°)$

$\gamma_1 \approx 56°$

$$\frac{\sin 57°}{10} = \frac{\sin 56°}{c_1}$$

$$\therefore c_1 = \frac{10 \sin 56°}{\sin 57}$$

$c_1 \approx 9.9\text{ cm}$

$\alpha_2 + \beta < 180°$ مقبولة

$\gamma_2 = 180° - (113° + 57°)$

$\gamma_2 \approx 10°$

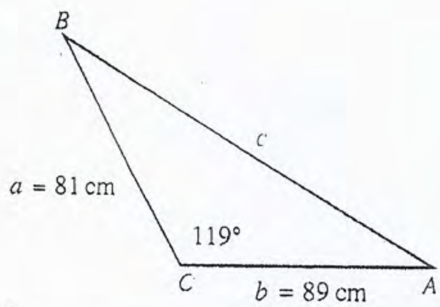
$$\frac{\sin 57°}{10} = \frac{\sin 10°}{c_2}$$

$$c_2 = \frac{10 \sin 10°}{\sin 57°}$$

$c_2 \approx 2.1\text{ cm}$

في التمرينين (7–8)، قرر ما إذا كان يمكن حلّ المثلث باستخدام قانون الجيب، ثم حلّه إذا كان ذلك ممكنًا. وإذا لم يكن ممكنًا فاشرح السبب.

(7)



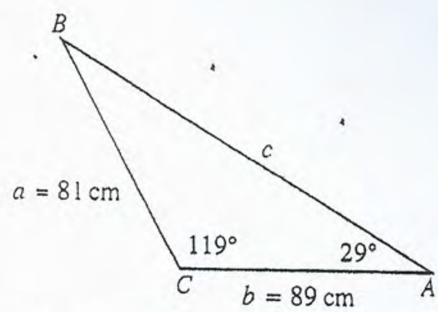
الحل :

لا يمكن حل المثلث باستخدام قانون الجيب

السبب :

ضلع مقابل لزاوية معلومة

(8)



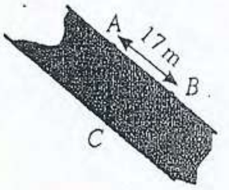
الحل :

$B = 180° - (119° + 29°) = 32°$

$$\frac{\sin 29°}{81} = \frac{\sin 119°}{c}$$

$$c = \frac{81 \sin 119°}{\sin 29°} \approx 146\text{ cm}$$

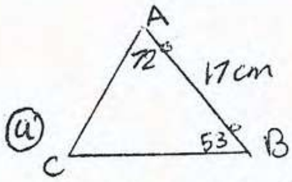
(9) **مسح جداول المياه:** تقع العلامتان A, B على الحافة نفسها لجدول مياه، تساوي المسافة بينهما 17 m وتقع علامة ثالثة C على الحافة المقابلة بحيث $m(\widehat{BAC}) = 72°$ ، $m(\widehat{ABC}) = 53°$



(a) أوجد المسافة بين A, C

(b) أوجد المسافة بين حافتي الجدول على افتراض أنهما متوازيتان.

الحل :



ⓐ

$\gamma = 180° - (72° + 53°) = 55°$

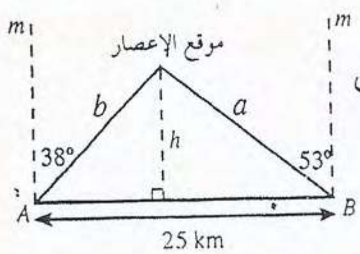
$\frac{\sin 53°}{AC} = \frac{\sin 55°}{17}$

$AC = \frac{17 \sin 53°}{\sin 55°} \approx 16.6 \text{ cm}$

ⓑ $\sin 72° = \frac{h}{16.6}$

$h = 16.6 \sin 72° \approx 15.8 \text{ Cm}$

(10) **التوقّع بحالة الطقس:** وقف اثنان من مصلحة الأرصاد الجوية أحدهما في غرب الطريق عند النقطة A والآخر في شرق الطريق عند النقطة B، تفصل بينهما مسافة 25 km



رأى الواقف عند النقطة A إعصارًا في اتجاه 38° شرق الشمال ورأى الواقف عند النقطة B الإعصار نفسه في اتجاه 53° غرب الشمال.

(a) أوجد المسافة بين كل من الشخصين وموقع الإعصار.

(b) أوجد المسافة بين الإعصار والطريق.

الحل :

ⓐ * $\alpha = 90° - 38° = 52°$

$\beta = 90° - 53° = 37°$

$\gamma = 180° - (\alpha + \beta) = 91°$

* $\frac{\sin 52°}{a} = \frac{\sin 91°}{25}$

$a = \frac{25 \sin 52°}{\sin 91°} \approx 19.7 \text{ Km}$

* $\frac{\sin 37°}{b} = \frac{\sin 91°}{25}$

$b = \frac{25 \sin 37°}{\sin 91°} \approx 15 \text{ Km}$

ⓑ $\sin 52° = \frac{h}{15}$

$\therefore h = 15 \sin 52° \approx 11.8 \text{ Km}$

8-4

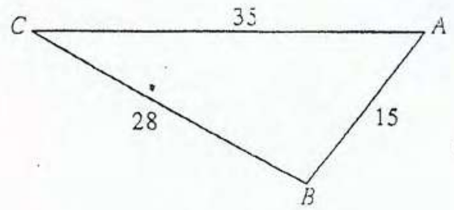
قانون جيب التمام

Law of Cosine

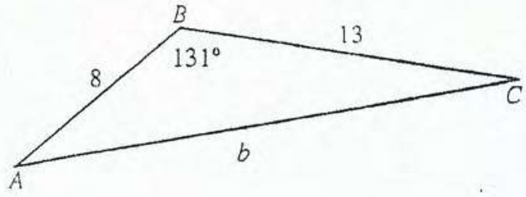
المجموعة A تمارين مقالية

في التمرينين (2–1)، حلّ كلًّا من المثلثين التاليين:

(1)



(2)



1

الحل :. نوجد قياسات الزوايا الثلاث
باستخدام قانون جيب التمام

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$= \frac{(35)^2 + (15)^2 - (28)^2}{2 \times 35 \times 15}$$

$$\cos\alpha = \frac{111}{175} \Longrightarrow \therefore \alpha \approx 50.6^\circ$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$$

$$\cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

$$= \frac{(28)^2 + (15)^2 - (35)^2}{2 \times 28 \times 15}$$

$$\cos\beta = -\frac{9}{35} \Longrightarrow \beta \approx 104.9^\circ$$

$$\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta \Rightarrow \gamma \approx 24.5^\circ$$

$\boxed{2}$ الحل :. نوجد b ، α ، γ

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$$

$$b^2 = (13)^2 + (8)^2 - 2\times 13\times 8\cos 131^\circ$$

$$= 169 + 64 - 208\cos 131^\circ$$

$$= 233 - 208\times -0.656$$

$$b^2 = \frac{46181}{125} = 369.4$$

$$b = 19.22\ \text{cm}$$

لإيجاد قياس γ ، α نستخدم قانون جيب التمام :.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$= \frac{369.4 + 64 - 169}{2\times 19.22\times 8}$$

$$\cos\alpha = 0.8597$$

$$\alpha \approx 30.7^\circ$$

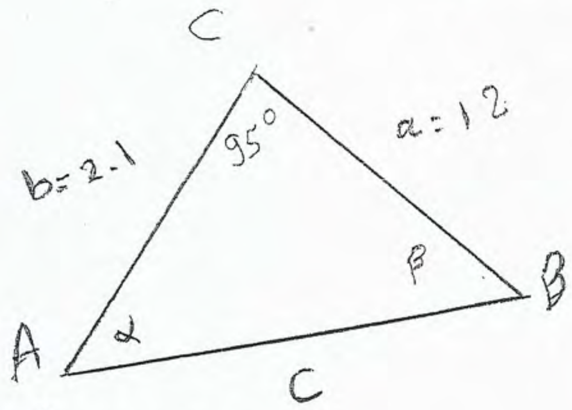
$$\cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

$$= \frac{169 + 369.4 - 64}{2\times 13\times 19.22}$$

$$\cos\gamma = 0.9493 \Rightarrow \gamma \approx 18.3^\circ$$

في التمارين (8–3)، حلّ كل مثلث مما يلي:

(3) $a = 12, b = 21, m(\widehat{C}) = 95^\circ$



$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

$$= (12)^2 + (21)^2 - (2 \times 12 \times 21)\cos 95^\circ$$

$$= 144 + 441 - 504\cos 95^\circ$$

$$= 585 - (-43.9264)$$

$$= 628.9264$$

$$c \approx 25.0 \text{ cm}$$

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{441 + 628.9264 - 144}{2 \times 21 \times 25}$$

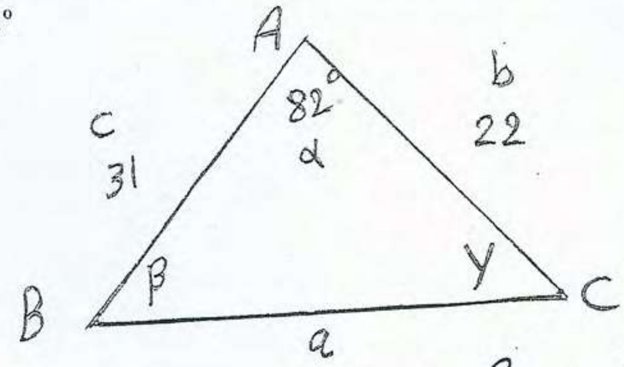
$$\cos\alpha = -0.3161 \Longrightarrow \alpha \approx 28.6^\circ$$

$$\cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{(12)^2 + 628.9264 - 441}{2 \times 12 \times 25}$$

$$\cos\beta = 0.55321$$

$$\beta \approx 56.4^\circ$$

(4) $b = 22, c = 31, m(\widehat{A}) = 82°$



الحل :- نوجد γ ، β ، a

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

$$= (22)^2 + (31)^2 - 2 \times 22 \times 31 \times \cos 82°$$

$$= 484 + 961 - 1364 \cos 82°$$

$$= 1445 - 189.832$$

$$a^2 = 1255.168$$

$$a = 35.4 \text{ cm}$$

لإيجاد قياس β ، γ نستخدم قانون جيب التمام :-

$$\cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

$$= \frac{1255.168 + 961 - 484}{2 \times 35.4 \times 31}$$

$$\cos\beta = 0.789$$

$$\beta \approx 38°$$

$$\cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

$$\cos\gamma = \frac{1255.168 + 484 - 961}{2 \times 5.4 \times 22} = 0.499594$$

$$\therefore \gamma \approx 60°$$

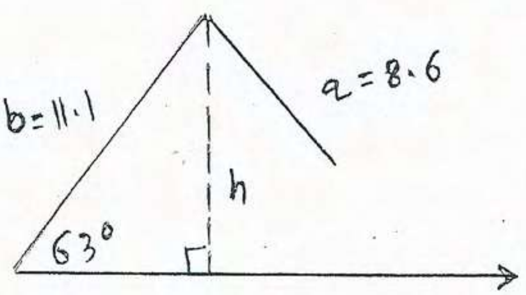
(5) $a = 1, b = 5, c = 4$

الحل :- لا يوجد مثلث لأن :-

$$a + c = 1 + 4$$
$$= 5$$
$$= b$$

(7) $m(\widehat{A}) = 63°, a = 8.6,\ b = 11.1$

الحل :-



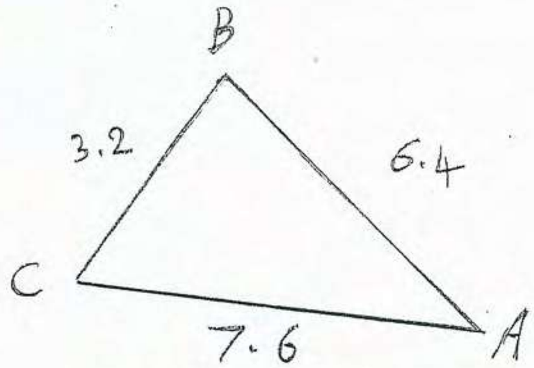
$$h = b \sin \alpha$$
$$= 11.1 \times \sin 63°$$
$$h = 9.89 \text{ cm}$$

$$\because a = 8.6 < 9.89$$

$$\therefore a < h$$

$\therefore$ لا يوجد مثلث

(6) $a = 3.2$, $b = 7.6$, $c = 6.4$



الحل :- نوجد قياسات الزوايا الثلاث ؛
باستخدام قانون جيب التمام :-

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$= \frac{(7.6)^2 + (6.4)^2 - (3.2)^2}{2 \times 7.6 \times 6.4}$$

$$\cos\alpha = \frac{553}{668} = 0.9095$$

$$\alpha \approx 24.6^\circ$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$$

$$\cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

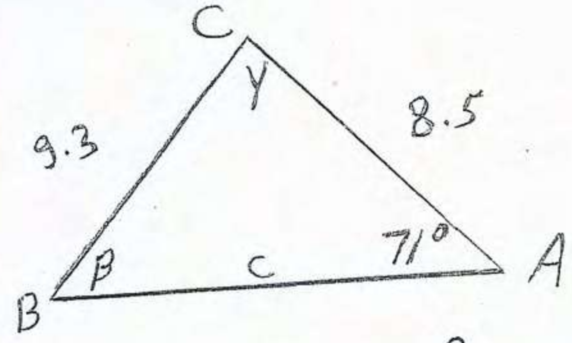
$$= \frac{(3.2)^2 + (6.4)^2 - (7.6)^2}{2 \times 3.2 \times 6.4}$$

$$\cos\beta = -\frac{41}{256} \Longrightarrow \beta \approx 99.2^\circ$$

$$\cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{(3.2)^2 + (7.6)^2 - (6.4)^2}{2 \times 3.2 \times 7.6}$$

$$\cos\gamma = \frac{169}{304} \Longrightarrow \gamma \approx 56.2^\circ$$

(8) $m(\widehat{A}) = 71°, a = 9.3, b = 8.5$



<u>الحل</u> :- نوجد γ ، β ، c :-

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

$$(9.3)^2 = (8.5)^2 + c^2 - 2 \times 8.5 \times c \times \cos 71°$$

$$86.49 = 72.25 + c^2 - 5.53c$$

$$0 = c^2 - 5.53c - 14.24$$

$$c = \frac{5.53 \pm \sqrt{(-5.53)^2 + 4 \times 1 \times 14.24}}{2}$$

$c \simeq 7.443$ أو $c \simeq -1.913$ (مرفوض)

∴ لدينا مثلث واحد :-

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$$

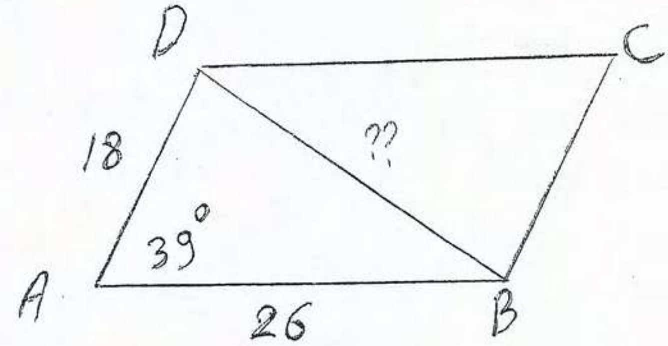
$$\cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} =$$

$$\cos\beta = \frac{(9.3)^2 + (7.443)^2 - (8.5)^2}{2 \times 9.3 \times 7.443}$$

$$\cos\beta = 0.503 \implies \beta \approx 60°$$

$$\gamma = 180° - (\alpha + \beta) \implies \gamma \approx 49°$$

(9) **في الهندسة:** متوازي أضلاع يساوي طول ضلعيه المتجاورين 18 cm، 26 cm وقياس الزاوية بينهما 39°.
أوجد طول قطره الأصغر.



الحل :-

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

$$(DB)^2 = (18)^2 + (26)^2 - 2 \times 18 \times 26 \times \cos 39^\circ$$

$$= 324 + 676 - 936 \cos 39^\circ$$

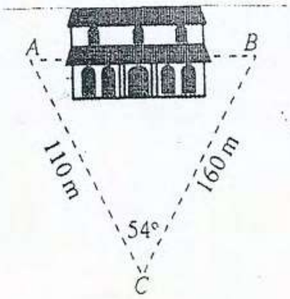
$$= 1000 - 727.4$$

$$(DB)^2 = \frac{1363}{5}$$

$$DB = 16.5 \text{ cm.}$$

(10) **قياس المسافة بطريقة غير مباشرة:** أراد عادل أن يقيس المسافة بين نقطتين A و B في جهتين مختلفتين من مبنى وذلك من الموقع C الذي يبعد عن A مسافة $110\,m$ وعن B مسافة $160\,m$ كما في الشكل المقابل.

إذا كان $m(\widehat{C}) = 54°$. فأوجد المسافة AB.



الحل :-

$$(AB)^2 = (AC)^2 + (CB)^2 - 2(AC)(CB)\cos C$$

$$= (110)^2 + (160)^2 - 2(110)(160)\cos 54°$$

$$= 12100 + 25600 - 35200\cos 54°$$

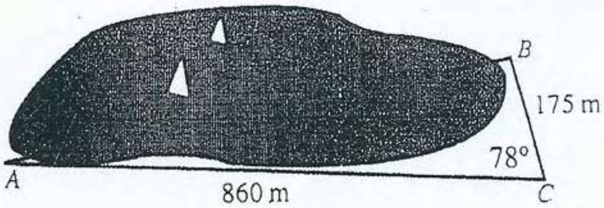
$$= 37700 - 20690$$

$$(AB)^2 = 17010$$

$$(AB) = 9\sqrt{210}$$

$$AB = 130.4\ m$$

(11) **حسابات مسّاحي الأراضي:** أراد خالد أن يقيس المسافة من A إلى B في جهتين مختلفتين من البحيرة. فوقف في الموقع C الذي يبعد عن A مسافة 860 m وعن B مسافة 175 m وقاس الزاوية C فوجد أن قياسها $78°$، أوجد طول المسافة AB.



<u>الحل :</u>

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

$$(AB)^2 = (BC)^2 + (AC)^2 - 2(BC)(AC)\cos C$$

$$= (175)^2 + (860)^2 - 2 \times 175 \times 860 \times \cos 78^\circ$$

$$= 30625 + 739600 - 301000\cos 78^\circ$$

$$= 30625 + 739600 - 62581.4189$$

$$= 707643.5811$$

$$AB = 841.2155 \text{ m}$$

مساحة المثلث

Area of Triangle

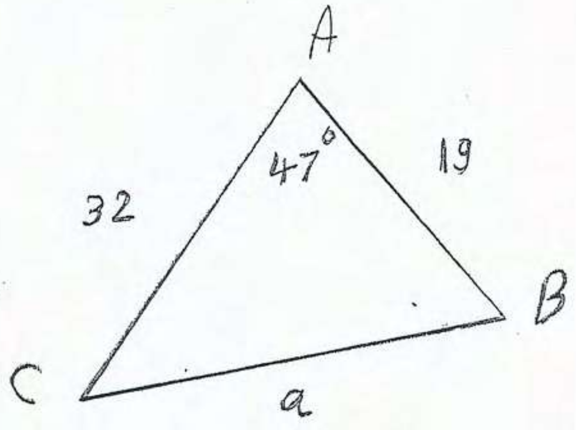
المجموعة A تمارين مقالية

في التمرينين (2–1)، أوجد مساحة المثلث ABC بطريقتين مختلفتين.

(1) $m(\hat{A}) = 47^\circ$, $b = 32$ cm , $c = 19$ cm (2) $a = 4$ cm , $b = 5$ cm , $c = 8$ cm

الحل :-

①



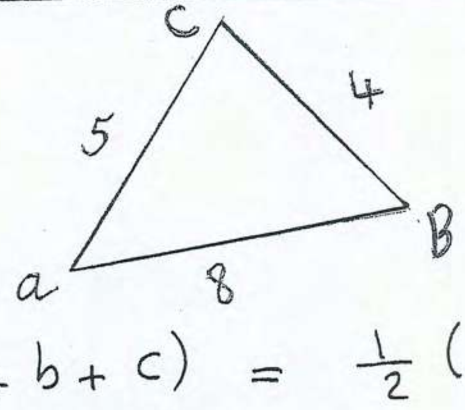
$$Area = \frac{1}{2}\, b\, c\, \sin\alpha$$

$$= \frac{1}{2} \times 32 \times 19 \times \sin 47^\circ$$

$$= 304 \sin 47^\circ$$

$$Area \approx 222.33 \text{ cm}^2$$

②



$$S = \frac{1}{2}(a + b + c) = \frac{1}{2}(4 + 5 + 8)$$

$$S = \frac{1}{2} \times 17 = 8.5 \text{ cm}$$

$$Area = \sqrt{S(S-a)(S-b)(S-c)} = \sqrt{8.5(8.5-4)(8.5-8)(8.5-8)}$$

$$= \frac{3\sqrt{119}}{4} \approx 8.181 \text{ cm}^2$$

في التمارين (6—3)، استخدم قاعدة هيرون لإيجاد مساحة المثلث الذي أطوال أضلاعه كالتالي. (الأطوال بالسنتيمتر).

(3) $a = 5$, $b = 9$, $c = 7$

(4) $a = 23$, $b = 19$, $c = 12$

الحل :-

(3)
$$S = \frac{1}{2}(a+b+c)$$
$$= \frac{1}{2}(5+9+7)$$
$$= \frac{1}{2} \times 21$$
$$S = 10.5 \text{ cm}$$
$$Area = \sqrt{S(S-a)(S-b)(S-c)}$$
$$= \sqrt{10.5(10.5-5)(10.5-9)(10.5-7)}$$
$$= \sqrt{10.5 \times 5.5 \times 1.5 \times 3.5}$$
$$Area = \frac{21\sqrt{11}}{4} \approx 17.4 \text{ cm}^2$$

(4)
$$S = \frac{1}{2}(a+b+c)$$
$$= \frac{1}{2}(23+19+12)$$
$$= \frac{1}{2}(54)$$
$$S = 27 \text{ cm}$$
$$Area = \sqrt{S(S-a)(S-b)(S-c)}$$
$$= \sqrt{27(27-23)(27-19)(27-12)}$$
$$= \sqrt{12960} = 36\sqrt{10} \approx 113.8419 \text{ cm}^2$$

(5) $a = 19.3$, $b = 22.5$, $c = 31$ (6) $a = 18.2$, $b = 17.1$, $c = 12.3$

الحل :-

(5) $S = \frac{1}{2}(a+b+c)$

$= \frac{1}{2}(19.3 + 22.5 + 31)$

$= \frac{1}{2} \times 72.8$

$S = \frac{182}{5} = 36.4 \text{ cm}$

$\text{Area} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$= \sqrt{36.4(36.4-19.3)(36.4-22.5)(36.4-31)}$

$= \sqrt{46720.3464}$

$\text{Area} \approx 216.1488 \text{ cm}^2$

(6) $S = \frac{1}{2}(a+b+c)$

$= \frac{1}{2}(18.2 + 17.1 + 12.3)$

$= \frac{1}{2} \times 47.6$

$S = \frac{119}{5} = 23.8 \text{ cm}$

$\text{Area} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$= \sqrt{23.8(23.8-18.2)(23.8-17.1)(23.8-12.3)}$

$\text{Area} \approx 101.337 \text{ cm}^2$

المتطابقات المثلثية

The Trigonometric Identities

المجموعة A تمارين مقالية

في التمارين (9–1)، استخدم المتطابقات الأساسية في تبسيط كل من المقادير التالية:

(1) $\csc x - \csc x \cos^2 x$

$= \csc x(1-\cos^2 x)$

$= \dfrac{1}{\sin x}\cdot \sin^2 x$

$= \sin x$

(2) $\dfrac{\tan^2 x}{\sec^2 x}$

$= \tan^2 x \cdot \dfrac{1}{\sec^2 x}$

$= \dfrac{\sin^2 x}{\cancel{\cos^2 x}} \cdot \cancel{\cos^2 x}$

$= \sin^2 x$

(3) $\dfrac{1+\tan^2 x}{\csc^2 x}$

$= \dfrac{\sec^2 x}{\csc^2 x}$

$= \dfrac{1}{\cos^2 x}\cdot \sin^2 x$

$= \dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \tan^2 x$

(4) $\cos x \csc x + \sin x \sec x$

«باستخدام متطابقتي المقلوب وناتج القسمة»

$= \cos x \cdot \dfrac{1}{\sin x} + \sin x \cdot \dfrac{1}{\cos x}$

$= \dfrac{\cos x}{\sin x} + \dfrac{\sin x}{\cos x}$

$= \dfrac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\sin x \cos x} = \dfrac{1}{\sin x \cos x} = \csc x \cdot \sec x$

(5) $\dfrac{\sin x}{\csc x} + \dfrac{\cos x}{\sec x}$

$= \sin x \cdot \sin x + \cos x \cdot \cos x$

$= \sin^2 x + \cos^2 x$ «متطابقة فيثاغورث»

$= 1$

(6) $\dfrac{1+\tan x}{1+\cot x}$

"باستخدام متطابقتي المقلوب وناتج القسمة".

$= \dfrac{1+\dfrac{\sin x}{\cos x}}{1+\dfrac{\cos x}{\sin x}}$

$= \dfrac{\dfrac{\cos x+\sin x}{\cos x}}{\dfrac{\sin x+\cos x}{\sin x}}$

$= \dfrac{\cancel{(\cos x+\sin x)}}{\cos x} \times \dfrac{\sin x}{\cancel{(\sin x+\cos x)}} = \dfrac{\sin x}{\cos x}$

$= \tan x$

(7) $\frac{1}{1-\sin x}+\frac{1}{1+\sin x}$

$$= \frac{1+\sin x + 1-\sin x}{(1-\sin x)(1+\sin x)}$$

$$= \frac{2}{1-\sin^2 x} = \frac{2}{\cos^2 x} = 2\sec^2 x$$ "متطابقة المقلوب"

(8) $\frac{\sin x}{1-\cos x}+\frac{1-\cos x}{\sin x}$

$$= \frac{\sin^2 x + (1-\cos x)^2}{(1-\cos x)\cdot \sin x}$$

$$= \frac{\sin^2 x + 1 - 2\cos x + \cos^2 x}{(1-\cos x)\cdot \sin x}$$ "متطابقة فيثاغورث"

$$= \frac{1+1-2\cos x}{(1-\cos x)\cdot \sin x}$$

$$= \frac{2-2\cos x}{(1-\cos x)\cdot \sin x}$$

$$= \frac{2\cancel{(1-\cos x)}}{\cancel{(1-\cos x)}\cdot \sin x} = \frac{2}{\sin x} = 2\csc x$$ "متطابقة المقلوب"

(9) $\frac{\tan x \csc x}{\cos^2 x}$

$$= \frac{\frac{\sin x}{\cos x}\cdot\frac{1}{\sin x}}{\cos^2 x} = \frac{\frac{1}{\cos x}}{\cos^2 x}$$ "متطابقة المقلوب"

$$= \frac{1}{\cos^3 x} = \sec^3 x$$

في التمارين (16–10)، بسّط المقادير إلى 1 أو 1–

(10) $\frac{1}{\cot^2 x}-\frac{1}{\cos^2 x}$

$$= \tan^2 x - \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\sin^2 x - 1}{\cos^2 x} = \frac{\cancel{1}-\cos^2 x-\cancel{1}}{\cos^2 x} = \frac{-\cos^2 x}{\cos^2 x} = -1$$

(11) $\frac{1}{\csc^2 x} + \frac{1}{\sec^2 x}$

$= \sin^2 x + \cos^2 x$ « متطابقة المقلوب »

$= 1$ متطابقة فيثاغورث

(12) $\frac{\tan x \times \cos x}{\sin x}$

$= \frac{\frac{\sin x}{\cos x} \cdot \cos x}{\sin x}$ باستخدام متطابقة القسمة

$= \frac{\sin x}{\sin x} = 1$

(13) $\cot(-x)\tan(-x)$

$= (-\cot(x)) \cdot (-\tan x)$

$= \cot x \cdot \tan x$

$= \frac{\cos x}{\sin x} \cdot \frac{\sin x}{\cos x} = 1$

(14) $\sec^2(-x) - \tan^2 x$

$= (\sec x)^2 - (\tan^2 x)$ « متطابقتي المقلوب والقسمة »

$= \sec^2 x - \tan^2 x$

$= \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1 - (1 - \cos^2 x)}{\cos^2 x} = \frac{1 - 1 + \cos^2 x}{\cos^2 x}$

« متطابقة فيثاغورث »

$= \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} = 1$

(15) $\sin^2(-x) + \cos^2(-x)$

$= (-\sin x)^2 + (\cos x)^2$

$= \sin^2 x + \cos^2 x$

« متطابقة فيثاغورث »

$= 1$

(16) $\frac{\sec^2 x - \tan^2 x}{\cos^2 x + \sin^2 x}$

« باستخدام متطابقات فيثاغورث »

$= \frac{1 + \cancel{\tan^2 x} - \cancel{\tan^2 x}}{1}$

$= 1$

في التمارين (17–19)، استخدم التحليل إلى عوامل في كل مما يلي:

(17) $\sin^2 c + \sin^2 c \tan^2 c$

$= \sin^2 c\,(1 + \tan^2 c)$

$= \sin^2 c \cdot \sec^2 c$

$= \frac{\sin^2 c}{\cos^2 c} = \tan^2 c$

---

(18) $1 - 2\sin x + (1 - \cos^2 x)$

« من متطابقة فيثاغورث »

$= 1 - 2\sin x + \sin^2 x$

$= \sin^2 x - 2\sin x + 1$

$= (\sin x - 1)^2$

---

(19) $\cos x - 2\sin^2 x + 1$

$= \cos x - 2(1 - \cos^2 x) + 1$

« من متطابقة فيثاغورث »

$= \cos x - 2 + 2\cos^2 x + 1$

$= 2\cos^2 x + \cos x - 1$

« بالتحليل »

$= (2\cos x - 1)(\cos x + 1)$

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (5—1)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) الصورة المبسّطة للمقدار: $E(x)=\dfrac{\sin^2 x+\tan^2 x+\cos^2 x}{\sec x}$ هي: $E(x)=\sec x$ — (a) (b)

(2) الصورة المبسّطة للمقدار: $E(x)=(\sec^2 x+\csc^2 x)-(\tan^2 x+\cot^2 x)$ هي: $E(x)=2$ — (a) (b)

(3) المقدار: $E(x)=\dfrac{1-\sin^2 x}{1+\sin x}$ هو: $E(x)=1+\sin x$ — (a) (b)

(4) المقدار: $E(x)=\dfrac{(\cos x+\sin x)^2-2\sin x\cos x}{\cos^2 x}$ هو: $E(x)=\sec^2 x$ — (a) (b)

(5) المقدار: $E(x)=\csc x-\cos x\cot x$ هو: $E(x)=\cos x$ — (a) (b)

في التمارين (10—6)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(6) المقدار: $E(x)=\dfrac{\tan^2 x}{1-\sec^2 x}$ بالصورة المبسّطة هو: $E(x)=$

(a) 1 (b) -1

(c) $\tan^4 x$ (d) $-\tan^4 x$

(7) المقدار: $E(x)=\dfrac{1}{\sec x+1}-\dfrac{1}{\sec x-1}$ بالصورة المبسّطة هو: $E(x)=$

(a) $2\tan^2 x$ (b) $-2\tan^2 x$

(c) $2\cot^2 x$ (d) $-2\cot^2 x$

(8) تحليل المقدار: $E(x)=\cos^2 x+\dfrac{3}{\sec x}+2$ إلى عوامل هو: $E(x)=$

(a) $(1-\cos x)(2+\cos x)$ (b) $(1+\cos x)(2+\cos x)$

(c) $(1+\cos x)(2-\cos x)$ (d) $(1-\cos x)(2-\cos x)$

(9) الدالة $f(x)=\sqrt{\sec^2 x-1}$ بالصورة المبسّطة هي: $f(x)=$

(a) $\tan x$ (b) $-\tan x$

(c) $\cot x$ (d) $|\tan x|$

(10) الدالة $f(x)=\sqrt{\csc^2 x-1}$ بالصورة المبسّطة هي: $f(x)=$

(a) $|\cot x|$ (b) $\tan x$

(c) $-\cot x$ (d) $\cot x$

تمرّنْ
9−2

إثبات صحة متطابقات مثلثية

Confirming Trigonometric Identities

المجموعة A تمارين مقالية

في التمارين (14−1)، أثبت صحة كل من المتطابقات التالية:

(1) $(\cos x)(\tan x+\sin x\cot x)=\sin x+\cos^2 x$

$$\cos x(\tan x+\sin x\cot x)=\cos x\left(\frac{\sin x}{\cos x}+\cancel{\sin x}\times\frac{\cos x}{\cancel{\sin x}}\right)$$

$$=\cos x\left(\frac{\sin x}{\cos x}+\cos x\right)$$

$$=\cancel{\cos x}\times\frac{\sin x}{\cancel{\cos x}}+\cos x\times\cos x=\sin x+\cos^2 x$$

∴ الطرف الأيمن = الطرف الأيسر

(2) $(\sin x)(\cot x+\cos x\tan x)=\cos x+\sin^2 x$

$$(\sin x)(\cot x+\cos x\tan x)=\sin x\times\left(\frac{\cos x}{\sin x}+\cancel{\cos x}\times\frac{\sin x}{\cancel{\cos x}}\right)$$

$$=(\sin x)\times\left(\frac{\cos x}{\sin x}+\sin x\right)$$

$$=\cancel{\sin x}\times\frac{\cos x}{\cancel{\sin x}}+\sin x\times\sin x=\cos x+\sin^2 x$$

∴ الطرف الأيمن = الطرف الأيسر

(3) $(1-\tan x)^2=\sec^2 x-2\tan x$

$$(1-\tan x)^2=1-2\tan x+\tan^2 x$$

$$=(1+\tan^2 x)-2\tan x$$

$$=\sec^2 x-2\tan x$$

∴ الطرف الأيمن = الطرف الأيسر

(4) $\tan x+\cot x=\sec x\csc x$

$$\tan x+\cot x=\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\cos x}{\sin x}$$

$$=\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin x\cos x}=\frac{1}{\sin x\cos x}$$

$$=\frac{1}{\sin x}\times\frac{1}{\cos x}=\csc x\times\sec x$$

$$=\sec x\csc x$$

∴ الطرف الأيمن = الطرف الأيسر

(5) $\tan x + \cot x + 2 = \dfrac{(\sin x + \cos x)^2}{\sin x \cos x}$

$$\tan x + \cot x + 2 = \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} + 2$$

$$= \frac{\sin^2 x + \cos^2 x + 2 \sin x \cos x}{\sin x \cos x}$$

$$= \frac{\sin^2 x + 2 \sin x \cos x + \cos^2 x}{\sin x \cos x} = \frac{(\sin x + \cos x)^2}{\sin x \cos x}$$

∴ الطرف الايمن = الطرف الايسر

(6) $\dfrac{1}{1-\cos x} + \dfrac{1}{1+\cos x} = 2\csc^2 x$

$$\frac{1}{1-\cos x} + \frac{1}{1+\cos x} = \frac{(1 + \cancel{\cos x}) + (1 - \cancel{\cos x})}{(1-\cos x)(1+\cos x)}$$

$$= \frac{2}{1-\cos^2 x} = \frac{2}{\sin^2 x} = 2\csc^2 x$$

∴ الطرف الايمن = الطرف الايسر

(7) $\dfrac{\tan^2 x}{\sec x + 1} = \dfrac{1-\cos x}{\cos x}$

$$\frac{\tan^2 x}{\sec x + 1} = \tan^2 x \div (\sec x + 1) = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \div \left(\frac{1}{\cos x} + 1\right)$$

$$= \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \div \left(\frac{1+\cos x}{\cos x}\right) = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \times \frac{\cos x}{1+\cos x}$$

$$= \frac{(1-\cos^2 x)}{\cos^2 x} \times \frac{\cos x}{1+\cos x} = \frac{(1-\cos x)(\cancel{1+\cos x})}{\cos x \cdot \cancel{\cos x}} \times \frac{\cancel{\cos x}}{\cancel{(1+\cos x)}}$$

$$= \frac{1-\cos x}{\cos x}$$

∴ الطرف الايمن = الطرف الايسر

(8) $\cot^2 x - \cos^2 x = \cos^2 x \cot^2 x$

$$\cot^2 x - \cos^2 x = \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} - \cos^2 x = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x \cos^2 x}{\sin^2 x}$$

$$= \frac{\cos^2 x\,(1 - \sin^2 x)}{\sin^2 x} = \frac{\cos^2 x \cdot \cos^2 x}{\sin^2 x}$$

$$= \cos^2 x \times \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} = \cos^2 x \cot^2 x$$

∴ الطرف الأيمن = الطرف الأيسر

(9) $\cos^4 x - \sin^4 x = \cos^2 x - \sin^2 x$

$$\cos^4 x - \sin^4 x = (\cos^2 x + \sin^2 x)(\cos^2 x - \sin^2 x)$$

$$= 1 \times (\cos^2 x - \sin^2 x)$$

$$= \cos^2 x - \sin^2 x$$

∴ الطرف الأيمن = الطرف الأيسر

(10) $\frac{\tan x}{\sec x - 1} = \frac{\sec x + 1}{\tan x}$

$$\frac{\tan x}{\sec x - 1} = \frac{\tan x}{\sec x - 1} \times \frac{\sec x + 1}{\sec x + 1}$$

$$= \frac{\tan x \times (\sec x + 1)}{\sec^2 x - 1} = \frac{\tan x\,(\sec x + 1)}{\tan^2 x}$$

$$= \frac{\sec x + 1}{\tan x}$$

∴ الطرف الأيمن = الطرف الأيسر

(11) $\frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x} = \frac{2\sin^2 x - 1}{1 + 2\sin x \cos x}$

$$\frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x} = \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x} \times \frac{\sin x + \cos x}{\sin x + \cos x}$$

$$= \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{(\sin x + \cos x)^2} = \frac{\sin^2 x - (1 - \sin^2 x)}{\sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x \cos x}$$

$$= \frac{\sin^2 x - 1 + \sin^2 x}{1 + 2\sin x \cos x} = \frac{2\sin^2 x - 1}{1 + 2\sin x \cos x}$$

(12) $\frac{\sin x}{1-\cos x}+\frac{1+\cos x}{\sin x}=\frac{2(1+\cos x)}{\sin x}$

$$\frac{\sin x}{1-\cos x}+\frac{1+\cos x}{\sin x}=\frac{\sin^2 x+(1+\cos x)(1-\cos x)}{(1-\cos x)\sin x}$$

$$=\frac{\sin^2 x+1-\cos^2 x}{(1-\cos x)\sin x}=\frac{1-\cos^2 x+1-\cos^2 x}{(1-\cos x)\sin x}$$

$$=\frac{2-2\cos^2 x}{(1-\cos x)\sin x}=\frac{2(1-\cos^2 x)}{(1-\cos x)\sin x}$$

$$=\frac{2\cancel{(1-\cos x)}(1+\cos x)}{\cancel{(1-\cos x)}\sin x}=\frac{2(1+\cos x)}{\sin x}$$

∴ الطرف الايمن = الطرف الايسر

(13) $\sin^2 x\cos^3 x=(\sin^2 x-\sin^4 x)(\cos x)$

$$\sin^2 x\cos^3 x=\sin^2 x\cos^2 x\cdot\cos x$$

$$=\sin^2 x\cdot(1-\sin^2 x)\cdot\cos x$$

$$=(\sin^2 x-\sin^4 x)(\cos x)$$

∴ الطرف الايمن = الطرف الايسر

(14) $\sin^3 x\cos^3 x=(\sin^3 x-\sin^5 x)(\cos x)$

$$\sin^3 x\cos^3 x=\sin^3 x\cdot\cos^2 x\cdot\cos x$$

$$=\sin^3 x(1-\sin^2 x)\cdot\cos x$$

$$=(\sin^3 x-\sin^5 x)(\cos x)$$

∴ الطرف الايمن = الطرف الايسر

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (4–1)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) المتطابقة: $3\sin x = \sin(3x)$ صحيحة.

(a) (b)

(2) المتطابقة: $\cos 2x = \sin^2 x - \cos^2 x$ صحيحة.

(a) (b)

(3) المتطابقة: $\sec x - \cos x = \tan x \ \sin x$ صحيحة.

(a) (b)

(4) الصورة المبسّطة للمقدار: $\sqrt{\dfrac{\csc x}{\sin^3 x} - \dfrac{\cot x}{\sin^3 x}}$ هي: $\dfrac{\sqrt{1-\cos x}}{\sin x}$

(a) (b)

في التمارين (10–5)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(5) المقدار: $\dfrac{\sec^2 x - 1}{\sin x}$ متطابق مع المقدار:

(a) $\sin x \tan x$
(b) $\sin x \sec^2 x$
(c) $\cos x \sec^2 x$
(d) $\sin x \csc x$

(6) المقدار: $(\cos x + \sin x)^2 - (\cos x - \sin x)^2$ متطابق مع المقدار:

(a) $-4\sin x \cos x$
(b) 2
(c) -2
(d) $4\sin x \cos x$

(7) المقدار: $\dfrac{1}{\tan x} + \tan x$ متطابق مع المقدار:

(a) $\sec x \csc x$
(b) $\sec x \sin x$
(c) $\sec x \cos x$
(d) $\sin x \cos x$

(8) المقدار: $\tan^2 x - \sin^2 x$ متطابق مع المقدار:

(a) $\tan^2 x$
(b) $\cot^2 x$
(c) $\tan^2 x \sin^2 x$
(d) $\cot^2 x \cos^2 x$

(9) المقدار: $\dfrac{\sin x}{\csc x} + \dfrac{\cos x}{\sec x} + 1$ متطابق مع المقدار:

(a) 1
(b) -1
(c) 2
(d) -2

(10) المقدار: $\dfrac{\cos^2 x - 1}{\cos x}$ متطابق مع المقدار:

(a) $-\tan x \sin x$
(b) $-\tan x$
(c) $\tan x \sin x$
(d) $\tan x$

تمرّن
9−3

حل معادلات مثلثية

Solving Trigonometric Equations

المجموعة A تمارين مقالية

في التمارين (1–8)، حل كلًّا من المعادلات التالية:

(1) $\sin x = \frac{-1}{2}$

الحل

نفرض أن α هي زاوية الاسناد للزاوية x

$$\sin\alpha = |\sin x| = \left|-\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$$

$$\alpha = \sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$$

$\because \sin x < 0$ $\therefore$ x تقع في الربع الثالث أو في الربع الرابع

عندما x تقع في الربع الرابع

$$x = \left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right) + 2K\pi \text{ و } K \in Z$$

$$\therefore x = \frac{11\pi}{6} + 2K\pi$$

عندما x تقع في الربع الثالث

$$x = \left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) + 2K\pi \text{ و } K \in Z$$

$$x = \frac{7\pi}{6} + 2K\pi$$

$\therefore$ حل المعادلة: $x = \frac{11\pi}{6} + 2K\pi$ أو $x = \frac{7\pi}{6} + 2K\pi$ و $K \in Z$

---

(2) $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

الحل

$$\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

نفرض أن α هي زاوية الاسناد للزاوية x

$$\cos\alpha = |\cos x| = \left|\frac{\sqrt{3}}{2}\right| = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore \alpha = \frac{\pi}{6}$$

$\because \cos x > 0$

$\therefore$ x تقع في الربع الأول أو في الربع الرابع

عندما x تقع في الربع الرابع

$$x = \left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right) + 2K\pi \text{ و } K \in Z$$

$$x = \frac{11\pi}{6} + 2K\pi$$

عندما x تقع في الربع الأول

$$x = \frac{\pi}{6} + 2K\pi \text{ و } K \in Z$$

$\therefore$ حل المعادلة: $x = \frac{11\pi}{6} + 2K\pi$ أو $x = \frac{\pi}{6} + 2K\pi$

حيث $K \in Z$

(3) $2\cos x = -1$

الحل

$2\cos x = -1 \Rightarrow \cos x = -\frac{1}{2}$

نفرض أن α هي زاوية الاسناد للزاوية x

$\therefore \cos\alpha = |\cos x| = \left|-\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$

$\boxed{\therefore \alpha = \frac{\pi}{3}}$ $\qquad \because \cos x < 0$

$\therefore$ x تقع في الربع الثاني أو في الربع الثالث .

عندما x تقع في الربع الثالث .

$x = (\pi + \frac{\pi}{3}) + 2K\pi , K \in Z$

$x = \frac{4\pi}{3} + 2K\pi$

عندما x تقع في الربع الثاني

$x = (\pi - \frac{\pi}{3}) + 2K\pi , K \in Z$

$x = \frac{2\pi}{3} + 2K\pi$

$\therefore$ حل المعادلة : $x = \frac{4\pi}{3} + 2K\pi$ أو $x = \frac{2\pi}{3} + 2K\pi$

حيث $K \in Z$

(4) $\sqrt{3}\tan x = 1$

الحل

$\sqrt{3}\tan x = 1$

$\tan x = \frac{1}{\sqrt{3}}$

نفرض أن α هي زاوية الاسناد للزاوية x

$\tan\alpha = |\tan x| = \left|\frac{1}{\sqrt{3}}\right| = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\therefore \alpha = \frac{\pi}{6}$ $\qquad \because \tan x > 0$

$\therefore$ x تقع في الربع الأول أو في الربع الثالث .

وبما أن الدالة $\tan x$ دالة دورية ودورتها π

$\therefore \tan(\pi + x) = \tan x$

$\therefore$ حل المعادلة : $x = \frac{\pi}{6} + K\pi$

حيث $K \in Z$

(5) $2\cos x\sin x - \cos x = 0$

الحل

$2\cos x \sin x - \cos x = 0$

$\cos x(2\sin x - 1) = 0$

$\cos x = 0$ أو $2\sin x - 1 = 0$

$2\sin x = 1$

$\sin x = \frac{1}{2}$

$\cos x = 0$

$\therefore x$ زاوية ربعية

$x = \frac{\pi}{2}$

أو $x = \frac{3\pi}{2}$

$x = \frac{\pi}{2} + 2K\pi,\ K \in Z$

$x = \frac{3\pi}{2} + 2K\pi,\ K \in Z$

$\sin x = \frac{1}{2}$

نفرض أن α هي زاوية الاسناد للزاوية x

$\sin\alpha = |\sin x| = |\frac{1}{2}| = \frac{1}{2}$

$\therefore \alpha = \frac{\pi}{6}$

$\because \sin x > 0$ $\therefore x$ تقع في الربع الأول أو في الربع الثاني

عندما x تقع في الربع الاول

$x = \frac{\pi}{6} + 2K\pi,\ K \in Z$

عندما x تقع في الربع الثاني

$x = (\pi - \frac{\pi}{6}) + 2K\pi,\ K \in Z$

$x = \frac{5\pi}{6} + 2K\pi$

$\therefore$ حل المعادلة :

$x = \frac{\pi}{2} + 2K\pi$ أو $x = \frac{3\pi}{2} + 2K\pi$ أو

$x = \frac{\pi}{6} + 2K\pi$ أو $x = \frac{5\pi}{6} + 2K\pi$

حيث $K \in Z$

---

(6) $\tan x \sin^2 x = \tan x$

الحل

$\tan x \sin^2 x = \tan x \Rightarrow \tan x \sin^2 x - \tan x = 0$

$\tan x(\sin^2 x - 1) = 0$

$\tan x(\sin x - 1)(\sin x + 1) = 0$

$\tan x = 0$ أو $\sin x = 1$ أو $\sin x = -1$

نفرض أن α هي زاوية الاسناد للزاوية x

$\tan\alpha = |\tan x| = 0$

$\therefore \alpha = 0$

$\tan(\pi + x) = \tan x$

لان الدالة $\tan x$ دالة دورية ودورتها π

$\therefore x = K\pi,\ K \in Z$

$\sin x = 1$

$\therefore x$ زاوية ربعية

$x = \frac{\pi}{2}$

$\therefore x = \frac{\pi}{2} + 2K\pi,\ K \in Z$

$\sin x = -1$

$\therefore x$ زاوية ربعية

$x = \frac{3\pi}{2}$

$x = \frac{3\pi}{2} + 2K\pi,\ K \in Z$

$\therefore$ حل المعادلة

$x = K\pi$ أو $x = \frac{\pi}{2} + 2K\pi$ أو $x = \frac{3\pi}{2} + 2K\pi$

حيث $K \in Z$

(7) $\tan^2 x = 3$ الحل

$\tan^2 x = 3$

$\tan^2 x - 3 = 0$

$(\tan x - \sqrt{3})(\tan x + \sqrt{3}) = 0$

$\tan x = \sqrt{3}$ أو $\tan x = -\sqrt{3}$

$\tan x = \sqrt{3}$

نفرض أن α_1 هي زاوية الاسناد للزاوية x

$\tan \alpha_1 = |\tan x| = |\sqrt{3}| = \sqrt{3}$

$\alpha_1 = \frac{\pi}{3}$

$\because \tan x > 0$

$\therefore$ x تقع في الربع الأول أو في الربع الثالث

$\because$ الدالة $\tan x$ دالة دورية ودورتها π

$\tan(\pi + x) = \tan x$

$x = \frac{\pi}{3} + K\pi \text{ , } K \in Z$

أو

$\tan x = -\sqrt{3}$

نفرض أن α_2 هي زاوية الاسناد للزاوية x

$\tan \alpha_2 = |\tan x| = |-\sqrt{3}| = \sqrt{3}$

$\alpha_2 = \frac{\pi}{3}$

$\because \tan x < 0$

$\therefore$ x تقع في الربع الثاني أو في الربع الرابع

$\because$ الدالة $\tan x$ دالة دورية ودورتها π

$\therefore \tan(\pi - x) = \tan(2\pi - x)$

$\therefore x = (\pi - \frac{\pi}{3}) + K\pi \text{ , } K \in Z$

$x = \frac{2\pi}{3} + K\pi$

$\therefore$ حل المعادلة: $x = \frac{2\pi}{3} + K\pi$ أو $x = \frac{\pi}{3} + K\pi$ حيث $K \in Z$

(8) $4\cos^2 x - 4\cos x + 1 = 0$

الحل

$4\cos^2 x - 4\cos x + 1 = 0$

$(2\cos x - 1)^2 = 0$

$2\cos x - 1 = 0 \Longrightarrow \cos x = \frac{1}{2}$

نفرض أن α هي زاوية الاسناد للزاوية x

$\cos\alpha = |\cos x| = \left|\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$ $\quad \boxed{\therefore \alpha = \frac{\pi}{3}}$

$\because \cos x > 0$ $\therefore$ x تقع في الربع الأول أو في الربع الرابع

عندما x تقع في الربع الأول

$x = \frac{\pi}{3} + 2K\pi$ ، $K \in Z$

عندما x تقع في الربع الرابع

$x = (2\pi - \frac{\pi}{3}) + 2K\pi$ ، $K \in Z$

$x = \frac{5\pi}{3} + 2K\pi$

$\therefore$ حل المعادلة : $x = \frac{\pi}{3} + 2K\pi$ أو $x = \frac{5\pi}{3} + 2K\pi$

حيث $K \in Z$

في التمارين (9–11)، أوجد جميع حلول المعادلة على الفترة $[0, 2\pi)$

(9) $\sin 2x = 1$

الحل

$\sin 2x = 1$ $\qquad 0 \leq x < 2\pi$

$0 \leq 2x < 4\pi$

$\therefore$ $2x$ تقع في دورتين

$\because \sin 2x = 1$

$\therefore$ $2x$ زاوية ربعية

$2x = \frac{\pi}{2} + 2K\pi$

$x = \frac{\pi}{4} + K\pi$

$K = 0$

$\therefore x = \frac{\pi}{4}$ ، $\frac{\pi}{4} \in [0, 2\pi)$

$K = 1$

$\therefore x = \frac{\pi}{4} + \pi \Longrightarrow x = \frac{5\pi}{4}$ ، $\frac{5\pi}{4} \in [0, 2\pi)$

$K = 2$

$\therefore x = \frac{\pi}{4} + 2\pi \Longrightarrow x = \frac{9\pi}{4}$ ، $\frac{9\pi}{4} \notin [0, 2\pi)$

$\therefore$ حل المعادلة :

$x = \frac{\pi}{4}$ ، $x = \frac{5\pi}{4}$

(10) $2\cos 3x = 1$

الحل

$$0 \leqslant x < 2\pi$$

$$0 \leqslant 3x < 6\pi$$

$\therefore$ $3x$ تقع في 3 دورات

$2\cos 3x = 1$

$\therefore \cos 3x = \frac{1}{2}$ نفرض أن α هي زاوية الاسناد للزاوية $3x$

$\cos\alpha = |\cos 3x| = |\frac{1}{2}| = \frac{1}{2}$

$\boxed{\therefore \alpha = \frac{\pi}{3}}$ $\because \cos 3x > 0$ $\therefore$ $3x$ تقع في الربع الأول أو في الربع الرابع

عندما $3x$ تقع في الربع الأول :

$3x = \frac{\pi}{3} + 2K\pi \Rightarrow \boxed{x = \frac{\pi}{9} + \frac{2}{3}K\pi}$

$K=0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{9}$ و $\frac{\pi}{9} \in [0, 2\pi)$

$K=1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{9} + \frac{2}{3}\pi = \frac{7\pi}{9}$ و $\frac{7\pi}{9} \in [0, 2\pi)$

$K=2 \Rightarrow x = \frac{\pi}{9} + \frac{2}{3}(2\pi) = \frac{13\pi}{9}$ و $\frac{13\pi}{9} \in [0, 2\pi)$

$K=3 \Rightarrow x = \frac{\pi}{9} + \frac{2}{3}(3\pi) = \frac{19\pi}{9}$ و $\frac{19\pi}{9} \notin [0, 2\pi)$

عندما $3x$ تقع في الربع الرابع :

$3x = (2\pi - \frac{\pi}{3}) + 2K\pi \Rightarrow 3x = \frac{5\pi}{3} + 2K\pi$

$\boxed{x = \frac{5\pi}{9} + \frac{2}{3}K\pi}$

$K=0 \Rightarrow x = \frac{5\pi}{9}$ و $\frac{5\pi}{9} \in [0, 2\pi)$

$K=1 \Rightarrow x = \frac{5\pi}{9} + \frac{2\pi}{3} = \frac{11\pi}{9}$ و $\frac{11\pi}{9} \in [0, 2\pi)$

$K=2 \Rightarrow x = \frac{5\pi}{9} + \frac{2}{3}(2\pi) = \frac{17\pi}{9}$ و $\frac{17\pi}{9} \in [0, 2\pi)$

$K=3 \Rightarrow x = \frac{5\pi}{9} + \frac{2}{3}(3\pi) = \frac{23}{9}\pi$ و $\frac{23\pi}{9} \notin [0, 2\pi)$

$\therefore$ حل المعادلة :

$x = \frac{\pi}{9}$ و $x = \frac{7\pi}{9}$ و $x = \frac{13\pi}{9}$

أو $x = \frac{5\pi}{9}$ و $\frac{11\pi}{9}$ و $\frac{17\pi}{9}$

(11) $\tan 2x = 1$

الحل

$0 \leq x < 2\pi$

$0 \leq 2\pi < 4\pi$

$\therefore$ $2x$ تقع في دورتين

$\tan 2x = 1$

نفرض أن α هي زاوية الاسناد للزاوية $2x$

$\tan\alpha = |\tan 2x| = |1| = 1 \implies \alpha = \frac{\pi}{4}$

$\because \tan 2x > 0$ $\therefore$ $2x$ تقع في الربع الأول أو في الربع الثالث

$\therefore$ الدالة $\tan 2x$ دالة دورية ودورها π $\boxed{\tan 2x = \tan(2x+\pi)}$

$2x = \frac{\pi}{4} + K\pi \implies \boxed{x = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{2}K\pi}$

$K=0 \implies x = \frac{\pi}{8}$, $\frac{\pi}{8} \in [0, 2\pi)$

$K=1 \implies x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{8}$, $\frac{5\pi}{8} \in [0, 2\pi)$

$K=2 \implies x = \frac{\pi}{8} + \pi = \frac{9\pi}{8}$, $\frac{9\pi}{8} \in [0, 2\pi)$

$K=3 \implies x = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{2}(3\pi) = \frac{13\pi}{8}$, $\frac{13\pi}{8} \in [0, 2\pi)$

$K=4 \implies x = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{2}(4\pi) = \frac{17\pi}{8}$, $\frac{17\pi}{8} \notin [0, 2\pi)$

$\therefore$ حل المعادلة :

$x = \frac{\pi}{8}$, $x = \frac{5\pi}{8}$, $x = \frac{9\pi}{8}$, $x = \frac{13\pi}{8}$

في التمارين (12–14)، حلّ المعادلات التالية:

(12) $\sin^2 x - 2\sin x = 0$

الحل

$\sin^2 x - 2\sin x = 0$

$\sin x(\sin x - 2) = 0$

$\sin x = 0$ أو $\sin x = 2$

$\sin x = 0$

$\therefore$ x زاوية ربعية .

$x = 0$ أو $x = \pi$

$x = 2K\pi$, $K \in Z$

أو $x = \pi + 2K\pi, K \in Z$

أو $\sin x = 2$

$y = \sin x$ مداها $[-1, 1]$

$2 \notin [-1, 1]$

$\therefore$ $\sin x = 2$ ليس لها حل

$\therefore$ حل المعادلة

$x = 2K\pi$, $K \in Z$

أو $x = \pi + 2\pi\pi$

(13) $2\sin^2 x + 3\sin x = 2$

الحل

$2\sin^2 x + 3\sin x = 2$

$2\sin^2 x + 3\sin x - 2 = 0$

$(2\sin x - 1)(\sin x + 2) = 0$

$2\sin x - 1 = 0$ أو $\sin x + 2 = 0$

$2\sin x = 1$

$\sin x = \frac{1}{2}$ أو $\sin x = -2$

$\sin x = \frac{1}{2}$ أو $\sin x = -2$

$y = \sin x$ مداها $[-1, 1]$

$-2 \notin [-1, 1]$

$\sin x = -2$ ليس لها حل

نفرض أن α هي زاوية الاسناد للزاوية x

$\sin\alpha = |\sin x| = \left|\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$

$\alpha = \frac{\pi}{6} \Rightarrow \because \sin x > 0$

$\therefore$ x تقع في الربع الأول أو في الربع الثاني

عندما x تقع في الربع الأول

$x = \frac{\pi}{6} + 2K\pi , K \in Z$

عندما x تقع في الربع الثاني

$x = \left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) + 2K\pi , K \in Z$

$x = \frac{5\pi}{6} + 2K\pi$

$\therefore$ حل المعادلة: $x = \frac{\pi}{6} + 2K\pi$

أو $x = \frac{5\pi}{6} + 2K\pi$ حيث $K \in Z$

---

(14) $\tan^2 x \cos x + 5\cos x = 0$

الحل

$\tan^2 x \cos x + 5\cos x = 0$

$\cos x(\tan^2 x + 5) = 0$

$\cos x = 0$ أو $\tan^2 x + 5 = 0$

$\tan^2 x = -5$

$\cos x = 0$ أو $\tan^2 x = -5$

ليس لها حل

$\therefore$ x زاوية ربعية

$x = \frac{\pi}{2}$ أو $x = \frac{3\pi}{2}$

$x = \frac{\pi}{2} + 2K\pi , K \in Z$

أو $x = \frac{3\pi}{2} + 2K\pi , K \in Z$

$\therefore$ حل المعادلة: $x = \frac{\pi}{2} + 2K\pi$

أو $x = \frac{3\pi}{2} + 2K\pi$ حيث $K \in Z$

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (5–1)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) حل المعادلة $\sin x = \frac{1}{2}$ هو: $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$، حيث k عدد صحيح. (a) (b)

(2) حل المعادلة $\cos x = \sqrt{2}$ هو: $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ أو $x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$، حيث k عدد صحيح. (a) (b)

(3) حل المعادلة $\tan x = -\sqrt{3}$ هو: $x = +\frac{5\pi}{6} + k\pi$، حيث k عدد صحيح. (a) (b)

(4) حلول المعادلة $\sin x \tan^2 x = \sin x$ على الفترة $(0, \pi)$ هي: $\frac{\pi}{4}$ و $\frac{3\pi}{4}$ (a) (b)

(5) حلول المعادلة $2\sin^2 x = 1$ على الفترة $[0, 2\pi)$ هي: $\frac{\pi}{4}$ و $\frac{5\pi}{4}$ (a) (b)

في التمارين (11–6)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(6) إذا كان $\sin x + \cos x = 0$ فإن x تقع في الربع:

(a) الأول

(b) الأول أو الثالث

(c) الثالث

(d) الثاني أو الرابع

(7) حلول المعادلة: $2\sin^2 x + 3\sin x + 1 = 0$ على الفترة $[0, 2\pi)$ هي:

(a) $-\frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}$

(b) $\frac{4\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{3}$

(c) $\frac{3\pi}{2}, \frac{11\pi}{6}$

(d) $\frac{7\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}, \frac{11\pi}{6}$

(8) حلول المعادلة: $2\sqrt{2}\sin x \cos x - \sqrt{2}\cos x - 2\sin x = -1$ على الفترة $[0, 2\pi)$ هي:

(a) $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}$

(b) $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{4}$

(c) $\frac{\pi}{6}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}, \frac{5\pi}{4}$

(d) $\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{7\pi}{4}$

(9) عدد حلول المعادلة: $2\cos 4x = 1$ حيث $x \in \left[0, \frac{\pi}{8}\right)$ هو:

(a) 0

(b) 1

(c) 2

(d) 3

(10) حلول المعادلة: $3\tan 2y = \sqrt{3}$ هي:

(a) $\frac{\pi}{6} + k\pi$، حيث k عدد صحيح.

(b) $\frac{\pi}{12} + 2k\pi$، حيث k عدد صحيح.

(c) $\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}, \frac{7\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}$، حيث k عدد صحيح.

(d) $\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{7\pi}{6} + 2k\pi$، حيث k عدد صحيح.

(11) مجموعة حل المعادلة $3\tan(3x) = \sqrt{3}$ على الفترة $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ هي:

(a) $\left\{\frac{\pi}{18}, \frac{7\pi}{18}, \frac{13\pi}{18}\right\}$

(b) $\left\{\frac{\pi}{18}, \frac{7\pi}{18}\right\}$

(c) $\left\{\frac{-5\pi}{18}, \frac{\pi}{18}\right\}$

(d) $\left\{\frac{-5\pi}{18}, \frac{\pi}{18}, \frac{7\pi}{18}\right\}$

تمرّنْ
9-4

متطابقات المجموع والفرق

Sum and Difference Identities

المجموعة A تمارين مقالية

في التمارين (3-1)، استخدم متطابقات المجموع والفرق في إيجاد القيمة الدقيقة.

(1) $\sin 15°$ (2) $\tan 135°$ (3) $\cos 75°$

[1] $\sin 15°$

$$15° = 45° - 30$$

$$\therefore \sin(45° - 30°) = \sin 45° \cos 30° - \cos 45° \sin 30°$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$= \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

[2] $\tan 135°$

$$135° = 180° - 45°$$

$$\therefore \tan 135° = \frac{\tan 180° - \tan 45°}{1 + \tan 180° \tan 45°}$$

$$= \frac{0 - 1}{1 + 0}$$

$$= -1$$

[3] $\cos 75^\circ$

$$75 = 30^\circ + 45^\circ$$

$$\therefore \cos 75^\circ = \cos(30^\circ + 45^\circ)$$

$$= \cos 30^\circ \cos 45^\circ - \sin 30^\circ \sin 45^\circ$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

---

(4) إذا كان $\sin\gamma = \frac{4}{5}$ ، $0 < \gamma < \frac{\pi}{2}$

$\cos\beta = \frac{-8}{17}$ ، $\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$

(a) أوجد: $\sin(\beta + \gamma)$

(b) أوجد: $\cos(\beta - \gamma)$

(c) أوجد: $\tan(\gamma + \beta)$

الحل

$$\sin^2\gamma + \cos^2\gamma = 1$$

$$\left(\frac{4}{5}\right)^2 + \cos^2\gamma = 1$$

$$\therefore \cos^2\gamma = \frac{9}{25}$$

$$\cos\gamma = \pm\frac{3}{5}$$

$$\because 0 < \gamma < \frac{\pi}{2}$$

$$\therefore \cos\gamma = \frac{3}{5}$$

$$\sin^2\beta + \cos^2\beta = 1$$

$$\sin^2\beta + \left(\frac{-8}{17}\right)^2 = 1$$

$$\sin^2\beta = \frac{225}{789}$$

$$\sin\beta = \pm\frac{15}{17}$$

$$\because \frac{\pi}{2} < \beta < \pi$$

$$\therefore \sin\beta = \frac{15}{17}$$

[a] $\sin(\beta + \gamma) = \sin\beta\cos\gamma + \cos\beta\sin\gamma$

$$= \frac{15}{17} \times \frac{3}{5} + \frac{-8}{17} \times \frac{4}{5} = \frac{13}{85}$$

[b] $\cos(\beta - \gamma) = \cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma$

$= \frac{-8}{17} \times \frac{3}{5} + \frac{15}{17} \times \frac{4}{5}$

$= \frac{36}{85}$

[c] $\tan(\gamma + \beta) = \frac{\tan\gamma + \tan\beta}{1 - \tan\gamma\tan\beta}$

$= \frac{\frac{4}{3} + \frac{-15}{8}}{1 - \frac{4}{3} \times \frac{-15}{8}}$

$= \frac{-13}{84}$

$\tan\gamma = \frac{\sin\gamma}{\cos\gamma}$

$= \frac{4}{3}$

$\tan\beta = \frac{-15}{8}$

في التمارين (10–5)، اكتب المقدار على صورة جيب أو جيب التمام أوظل الزاوية.

(5) $\sin 42^\circ \cos 17^\circ - \cos 42^\circ \sin 17^\circ$

(6) $\sin\frac{\pi}{5}\cos\frac{\pi}{2} + \sin\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{5}$

(7) $\frac{\tan 19^\circ + \tan 47^\circ}{1 - \tan 19^\circ \tan 47^\circ}$

(8) $\cos\frac{\pi}{7}\cos x + \sin\frac{\pi}{7}\sin x$

(9) $\sin 3x \cos x - \cos 3x \sin x$

(10) $\frac{\tan 2y + \tan 3x}{1 - \tan 2y \tan 3x}$

[5] $\sin 42^\circ \cos 17^\circ - \cos 42^\circ \sin 17^\circ$

$= \sin(42^\circ - 17^\circ) = \sin 25^\circ$

[6] $\sin\frac{\pi}{5}\cos\frac{\pi}{2} + \sin\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{5}$

$= \sin\left(\frac{\pi}{5} + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\frac{7\pi}{10}$

[7] $\frac{\tan 19^\circ + \tan 47^\circ}{1 - \tan 19^\circ \tan 47^\circ} = \tan(19^\circ + 47^\circ) = \tan 66^\circ$

(8) $\cos\frac{\pi}{7}\cos x + \sin\frac{\pi}{7}\sin x$

$= \cos\left(\frac{\pi}{7} - x\right)$

(9) $\sin 3x \cos x - \cos 3x \sin x$

$= \sin(3x - x) = \sin 2x$

(10) $\frac{\tan 2y + \tan 3x}{1 - \tan 2y \tan 3x} = \tan(2y + 3x)$

(11) اختصر: $\frac{\sin 3x}{\sin x} - \frac{\cos 3x}{\cos x}$

$\frac{\sin 3x}{\sin x} - \frac{\cos 3x}{\cos x}$

$= \frac{\sin 3x \cos x - \cos 3x \sin x}{\sin x \cos x}$

$= \frac{\sin(3x - x)}{\sin x \cos x}$

$= \frac{\sin 2x}{\sin x \cos x} =$

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (1–4)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) باستخدام متطابقات المجموع والفرق نجد أن: $\sin 75° = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ — (a) (b)

(2) باستخدام متطابقات المجموع والفرق نجد أن: $\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ — (a) (b)

(3) $\cos(h + \frac{\pi}{2}) = -\cos h$ — (a) (b)

(4) $\tan^2\frac{\pi}{12} + \tan^2\frac{5\pi}{12} = 14$ — (a) (b)

في التمارين (11–5)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(5) باستخدام متطابقات المجموع والفرق نجد أن: $\tan\frac{7\pi}{12}$ تساوي:

(a) $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{\sqrt{2}+\sqrt{6}}$ (b) $\sqrt{2}+\sqrt{6}$

(c) $2+\sqrt{3}$ (d) $-2-\sqrt{3}$

(6) $\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$ تساوي:

(a) $\frac{1}{2}\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x$ (b) $\frac{1}{2}(\sin x+\cos x)$

(c) $\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\frac{1}{2}\cos x$ (d) $\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x-\frac{1}{2}\cos x$

(7) $\tan\left(h+\frac{\pi}{4}\right)$ تساوي:

(a) $1+\tan h$ (b) $\frac{1-\tan h}{1+\tan h}$

(c) $\frac{1+\tan h}{1-\tan h}$ (d) $1-\tan h$

(8) $\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$ تساوي:

(a) $\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x-\sin x)$ (b) $\sqrt{2}(\cos x+\sin x)$

(c) $\frac{\sqrt{3}}{2}(\cos x+\sin x)$ (d) $\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x+\sin x)$

(9) $\cos 94°\cos 18°+\sin 94°\sin 18°$ تساوي:

(a) $\cos 112°$ (b) $\cos 76°$

(c) $\sin 112°$ (d) $\sin 76°$

(10) $\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{7}-\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{\pi}{3}$ تساوي:

(a) $\cos\frac{4\pi}{21}$ (b) $\sin\frac{4\pi}{21}$

(c) $\cos\frac{10\pi}{21}$ (d) $\sin\frac{10\pi}{21}$

(11) $\frac{\tan\frac{\pi}{5}-\tan\frac{\pi}{3}}{1+\tan\frac{\pi}{5}\tan\frac{\pi}{3}}$ تساوي:

(a) $\tan\frac{2\pi}{15}$ (b) $\tan\frac{8\pi}{15}$

(c) $\tan\left(\frac{-8\pi}{15}\right)$ (d) $\tan\left(\frac{-2\pi}{15}\right)$

تمرَّنْ
9-5

متطابقات ضعف الزاوية ونصفها

Double-Angle and Half-Angle Identities

المجموعة A تمارين مقالية

في التمارين (4-1)، اكتب المقدار بدلالة $\sin x$ أو $\cos x$.

(1) $\sin 2x + \cos x$

(2) $\sin 2x + \cos 2x$

(3) $\cos 3x$

(4) $\cos 4x$

(1) $\sin 2x + \cos x = 2\sin x \cos x + \cos x$
$= \cos x \,(2\sin x + 1)$

---

(2) $\sin 2x + \cos 2x$
$= 2\sin x \cos x + 2\cos^2 x - 1$
$= 2\cos x\,(\sin x + \cos x) - 1$

---

(3) $\cos 3x$
$= \cos(x + 2x) = \cos x \cos 2x - \sin x \sin 2x$
$= \cos x\,(2\cos^2 x - 1) - \sin x\,(2\sin x \cos x)$
$= 2\cos^3 x - \cos x - 2\sin^2 x \cos x$
$= 2\cos^3 x - \cos x - 2(1 - \cos^2 x)\cos x$
$= 2\cos^3 x - \cos x - 2\cos x + 2\cos^3 x$
$= 4\cos^3 x - 3\cos x$

(4) $\cos 4x = \cos(2(2x))$

$= 1 - 2\sin^2 2x$

$= 1 - 2(2\sin x\cos x)^2$

$= 1 - 8\sin^2 x\cos^2 x$

$= 1 - 8\sin^2 x(1-\sin^2 x)$

$= 1 - 8\sin^2 x + 8\sin^4 x$

في التمارين (7–5)، أثبت صحة كل من المتطابقات التالية:

(5) $2\csc 2x = \csc^2 x\tan x$

(6) $\sin 3x = (\sin x)(4\cos^2 x - 1)$

(7) $\cos 4x = 1 - 8\sin^2 x\cos^2 x$

الحل :-

(5) $2\csc 2x = \dfrac{2}{\sin 2x}$

$= \dfrac{2}{2\sin x\cos x}$

$= \dfrac{1}{\sin x\cos x}$

$\csc^2 x\tan x$

$= \dfrac{\tan x}{\sin^2 x}$

$= \dfrac{\sin x}{\sin^2 x\cos x} = \dfrac{1}{\sin x\cos x}$

∴ الطرفان متساويان

حل آخر :-

$2\csc 2x = \dfrac{2}{\sin 2x}$

$= \dfrac{2}{2\sin x\cos x}$

$= \dfrac{1}{\sin x\cos x} \times \dfrac{\sin x}{\sin x}$: $\sin x \neq 0$

$= \dfrac{1}{\sin^2 x} \times \dfrac{\sin x}{\cos x}$

$= \csc^2 x \cdot \tan x$

∴ الطرفان متساويان

(6) $\sin 3x = \sin(x + 2x)$

$= \sin x\cos 2x + \cos x\sin 2x$

$= \sin x(2\cos^2 x - 1) + \cos x(2\sin x\cos x)$

$= 2\sin x\cos^2 x - \sin x + 2\sin x\cos^2 x$

$= 4\sin x \cos^2 x - \sin x$

$= \sin x \,(4\cos^2 x - 1)$

(7) $\cos 4x = \cos 2(2x)$

$= 1 - 2\sin^2 2x$

$= 1 - 2(2\sin x \cos x)^2$

$= 1 - 8\sin^2 x \cos^2 x$

في التمارين (10–8)، استخدم متطابقات نصف الزاوية لإيجاد كل من:

(8) $\sin 15°$

(9) $\tan 195°$

(10) $\cos 75°$

الحل :-

(8) $\sin 15°$

$= \sin\left(\frac{30}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos 30}{2}} = \pm\sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt3}{2}}{2}} = \pm\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt3}$

∵ $15°$ تقع في الربع الأول

∴ $\sin 15 > 0$

$\simeq 0.2588$

(9) $\tan 195°$

$= \tan\left(\frac{390}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos 390}{1+\cos 390}} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos 30}{1+\cos 30}}$

$= \pm\sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt3}{2}}{1+\frac{\sqrt3}{2}}} = \pm\sqrt{\frac{2-\sqrt3}{2+\sqrt3}} \simeq \pm 0.2679$

∵ $195°$ تقع في الربع الثالث

∴ $\tan 195° > 0$

$= 0.2679$

(10) $\cos 75°$

$= \cos\frac{150}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos 150}{2}} = \pm\sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt3}{2}}{2}} = \pm\frac{\sqrt{2-\sqrt3}}{2}$

$\simeq \pm 0.2588$

∵ $75°$ تقع في الربع الأول

$\simeq 0.2588$

(11) اختصر كلًّا من التعابير التالية:

(a) $\frac{\sin 2x}{1+\cos 2x}$ (b) $\frac{1-\cos x}{\sin x}$ (c) $\frac{1-\cos x}{1+\cos x}$

الحل :-

a) $\frac{\sin 2x}{1+\cos 2x} = \frac{2\sin x\cos x}{1+2\cos^2 x-1} = \frac{2\sin x\cos x}{2\cos^2 x} = \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x$

(b) $\frac{1-\cos x}{\sin x}$

$\because \sin\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$

$2\sin^2\frac{x}{2} = 1-\cos x$

$\because \sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$

$\therefore \frac{1-\cos x}{\sin x} = \frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}} = \tan\frac{x}{2}$

(c) $\frac{1-\cos x}{1+\cos x}$

$\because \cos\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$

$\therefore 2\cos^2\frac{x}{2} = 1+\cos x$

$\because \sin\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$

$\therefore 2\sin^2\frac{x}{2} = 1-\cos x$

بالتعويض

$\therefore \frac{1-\cos x}{1+\cos x} = \frac{\cancel{2}\sin^2\frac{x}{2}}{\cancel{2}\cos^2\frac{x}{2}} = \tan^2\frac{x}{2}$

حل آخر :-

$\because \tan\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$

$\therefore \tan^2\frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{1+\cos x}$

(12) إذا كانت $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$ ، $\sin x = -\frac{12}{13}$ فأوجد $\sin\frac{x}{2}$

الحل :- متطابقة فيثاغورث

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$\cos^2 x = 1 - \left(\frac{-12}{13}\right)^2$

$= 1 - \frac{144}{169}$

$= \frac{25}{169}$

$\therefore \cos x = \pm\frac{5}{13}$ $\quad \because \frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$

$\therefore \cos x = \frac{5}{13}$

$\sin\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$

$= \pm\sqrt{\frac{1-\frac{5}{13}}{2}}$

$= \pm 0.5547$

$\therefore \sin\frac{x}{2} = 0.5547$

$270 < x < 360$

$135 < \frac{x}{2} < 180$

$\therefore \frac{x}{2}$ تقع في الربع الثاني

$\therefore \sin\frac{x}{2} > 0$

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (1–5)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) $\sin 4x = 2\sin 2x \cos 2x$ — a b

(2) $\sin 4x = -4\cos x \sin^3 x + 4\cos^3 x \sin x$ — a b

(3) $\sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{2}$ — a b

(4) $\cos 6x = 2\cos^2 3x - 1$ — a b

(5) $\cos x = 2\cos^2 \frac{x}{2} - 1$ — a b

في التمارين (6–10)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(6) $\sin 3x + \cos 2x$ تساوي:

a) $3\cos^2 x \sin x - \sin^3 x$

b) $3\cos^2 x \sin x - \sin^2 x + \cos^2 x$

c) $3\cos^2 x \sin x - \sin^3 x - \sin^2 x + \cos^2 x$

d) $3\sin^2 x \cos x - \sin^3 x + \cos^2 x$

(7) $2\cos^2 \frac{x}{2}$ تساوي:

a) $\frac{1+\cos x}{2}$

b) $1+\cos x$

c) $1+\cos 2x$

d) $\frac{1-\cos 2x}{2}$

(8) $\sin 3x$ تساوي:

a) $\sin^3 x + 3\cos^2 x \sin x$

b) $3\sin x - \sin^3 x$

c) $(3-2\sin^2 x)(\sin x)$

d) $3\sin x - 4\sin^3 x$

(9) باستخدام متطابقات نصف الزاوية نجد أن $\cos\frac{\pi}{8}$ تساوي:

a) $\frac{2+\sqrt{2}}{2}$

b) $\sqrt{2}-1$

c) $\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

d) $\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2}}$

(10) إذا كان: $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$, $\cos\theta = \frac{-7}{25}$ فإن $\cos\frac{\theta}{2}$ يساوي:

a) $\frac{2}{5}$

b) $\frac{-2}{5}$

c) $\frac{-3}{5}$

d) $\frac{3}{5}$

اختبار الوحدة التاسعة

في التمارين (3−1)، حوّل المقادير إلى sin وcos. اكتب إجابتك على صورة كسر واحد.

(1) $\tan x + \cot x$

(2) $\sin x \cot x - \cos x \tan x$

(3) $\dfrac{\sec y}{\cos y} - \dfrac{\sin y}{\csc y \cos^2 y}$

$\boxed{1}$ $\tan x + \cot x$

$$= \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$= \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos x \sin x} = \frac{1}{\sin x \cos x}$$

$\boxed{2}$ $\sin x \cot x - \cos x \tan x$

$$= \cancel{\sin x}\, \frac{\cos x}{\cancel{\sin x}} - \cancel{\cos x}\, \frac{\sin x}{\cancel{\cos x}}$$

$$= \cos x - \sin x$$

$\boxed{3}$ $\dfrac{\sec y}{\cos y} - \dfrac{\sin y}{\csc y \cos^2 y}$

$$= \frac{1}{\cos^2 y} - \frac{\sin^2 y}{\cos^2 y}$$

$$= \frac{1 - \sin^2 y}{\cos^2 y}$$

$$= \frac{\cos^2 y}{\cos^2 y} = 1$$

في التمارين (8—4)، أثبت صحة كل من المتطابقات التالية:

(4) $\frac{\cos x}{1+\sin x}+\frac{\cos x}{1-\sin x}=2\sec x$

(5) $\frac{1-3\cos x-4\cos^2 x}{\sin^2 x}=\frac{1-4\cos x}{1-\cos x}$

(6) $\sqrt{1-\cos x}\times\sqrt{1+\cos x}=\sin x \quad \left(0<x<\frac{\pi}{2}\right)$

(7) $\frac{2\sin x\times\cos x}{1+\cos^2 x-\sin^2 x}=\tan x$

(8) $\frac{1+2\sin x\times\cos x}{\sin x+\cos x}=\sin x+\cos x$

$\boxed{4}$ $\frac{\cos x}{1+\sin x}+\frac{\cos x}{1-\sin x}=2\sec x$

الحل

$$\frac{\cos x}{1+\sin x}+\frac{\cos x}{1-\sin x}=\frac{\cos(1-\sin x)+\cos(1+\sin x)}{(1+\sin x)(1-\sin x)}$$

$$=\frac{\cos x-\cancel{\cos x\sin x}+\cos x+\cancel{\cos x\sin x}}{1-\sin^2 x}$$

$$=\frac{2\cos x}{\cos^2 x}$$

$$=\frac{2}{\cos x}=2\sec x$$

$\boxed{5}$ $\frac{1-3\cos x-4\cos^2 x}{\sin^2 x}=\frac{1-4\cos x}{1-\cos x}$

الحل

$$\frac{1-3\cos x-4\cos^2 x}{\sin^2 x}=\frac{1-3\cos x-3\cos^2 x-\cos^2 x}{\sin^2 x}$$

$$=\frac{\sin^2 x-3\cos x(1+\cos x)}{\sin^2 x}$$

$$= \frac{\sin^2 x}{\sin^2 x} - \frac{3\cos x(1+\cos x)}{\sin^2 x}$$

$$= 1 - \frac{3\cos x(\cancel{1+\cos x})}{(1-\cos x)(\cancel{1+\cos x})}$$

$$= 1 - \frac{3\cos x}{1-\cos x}$$

$$= \frac{1-\cos x - 3\cos x}{1-\cos x}$$

$$= \frac{1-4\cos x}{1-\cos x}$$

حل آخر

$$\text{الطرف الأول} = \frac{(1-4\cos x)(\cancel{1+\cos x})}{(1-\cos x)(\cancel{1+\cos x})}$$

$$= \frac{1-4\cos x}{1-\cos x}$$

$= \text{الطرف الثاني}$

$\boxed{6}$ $\sqrt{1-\cos x} \times \sqrt{1+\cos x} = \sin x \qquad \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right)$

الحل

$$\sqrt{1-\cos x} \times \sqrt{1+\cos x} = \sqrt{1-\cos^2 x}$$

$$= \sqrt{\sin^2 x}$$

$$= \sin x$$

$\boxed{7}$ $\dfrac{2\sin x \times \cos x}{1+\cos^2 x - \sin^2 x} = \tan x$

الحل

$$\frac{2\sin x \times \cos x}{1+\cos^2 x - \sin^2 x} = \frac{2\sin x \times \cos x}{\cancel{\sin^2 x} + \cos^2 x + \cos^2 x - \cancel{\sin^2 x}}$$

$$= \frac{\cancel{2}\sin x \cancel{\cos x}}{\cancel{2}\cos^{\cancel{2}} x} = \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x$$

$\boxed{8}$ $\dfrac{1+2\sin x\cos x}{\sin x+\cos x}=\sin x+\cos x$

الحل

$$\frac{1+2\sin x\cos x}{\sin x+\cos x}=\frac{\sin^2 x+\cos^2 x+2\sin x\cos x}{\sin x+\cos x}$$

$$=\frac{(\sin x+\cos x)^2}{\sin x+\cos x}$$

$$=\sin x+\cos x$$

في التمارين (13–9)، استخدم متطابقات المجموع والفرق في إيجاد القيمة الدقيقة.

(9) $\tan\frac{5\pi}{12}$

(10) $\sin\frac{-\pi}{12}$

(11) $\cos(x-y)-\cos(x+y)$

(12) $\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$

(13) $\sin\left(\frac{\pi}{3}+x\right)-\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)$

$\boxed{9}$ $\tan\frac{5\pi}{12}$

$$=\tan 75^\circ$$

$$=\tan(30^\circ+45^\circ)$$

$$=\frac{\tan 30^\circ+\tan 45^\circ}{1-\tan 30^\circ\tan 45^\circ}$$

$$=\frac{\frac{\sqrt{3}}{3}+1}{1-\frac{\sqrt{3}}{3}\times 1}=2+\sqrt{3}$$

حل أخر

$$\tan\frac{5\pi}{12}=\tan\left(\frac{2\pi}{12}+\frac{3\pi}{12}\right)$$

$$=\tan\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$=\frac{\tan\frac{\pi}{6}+\tan\frac{\pi}{4}}{1-\tan\frac{\pi}{6}\tan\frac{\pi}{4}}$$

$$=2+\sqrt{3}$$

$\boxed{10}$ $\sin -\frac{\pi}{12}$

$= -\sin\frac{\pi}{12}$

$= -\sin(45^\circ - 30^\circ)$

$= -\left[\sin 45 \cos 30 - \cos 45 \sin 30\right]$

$= -\left[\frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2}\right]$

$= -\left[\frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4}\right]$

$= \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$

$\boxed{11}$ $\cos(x - y) - \cos(x + y)$

$= \cos x \cos y + \sin x \sin y - (\cos x \cos y - \sin x \sin y)$

$= 2 \sin x \sin y$ -

$\boxed{12}$ $\sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

$= \sqrt{2}\left(\sin x \cos\frac{\pi}{4} - \cos x \sin\frac{\pi}{4}\right)$

$= \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x - \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x\right)$

$= \sin x - \cos x$

$\boxed{13}$ $\sin\left(\frac{\pi}{3} + x\right) - \sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$

$= \left(\sin\frac{\pi}{3}\cos x + \cos\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{3}\right) - \left(\sin\frac{\pi}{3}\cos x - \cos\frac{\pi}{3}\sin x\right)$

$= 2\cos\frac{\pi}{3}\sin x$

$= 2 \times \frac{1}{2}\sin x$

$= \sin x$

(14) (a) أوجد ناتج: $\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{3}$

(b) أوجد القيمة الصحيحة لكلّ مما يلي دون استخدام الآلة الحاسبة:

(1) $\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right)$ (2) $\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right)$

(15) أوجد قيمة $\sin 2x$، إذا كان $\sin x - \cos x = \frac{1}{5}$

(16) أوجد: $\cos 2x$، إذا كان $\cos x = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$

$\boxed{14}$ (a) $\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{3} = \frac{11\pi}{12}$

(b) $\boxed{1}$ $\cos\frac{11\pi}{12} = \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{3}\right)$

$= \cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{2\pi}{3} - \sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{2\pi}{3}$

$= -\frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}$

$= \frac{-\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$

$\boxed{2}$ $\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right)$

$$= \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{3}\right)$$

$$= \sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{2\pi}{3} + \cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{2\pi}{3}$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4}$$

$$= \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

$\boxed{15}$ $\because \sin x - \cos x = \frac{1}{5}$

$$\therefore (\sin x - \cos x)^2 = \frac{1}{25}$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x - 2\sin x \cos x = \frac{1}{25}$$

$$1 - 2\sin x \cos x = \frac{1}{25}$$

$$1 - \frac{1}{25} = 2\sin x \cos x$$

$$\therefore \sin 2x = \frac{24}{25}$$

$\boxed{16}$ $\cos x = \dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$$

$$= 2\left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}\right)^2 - 1$$

$$= 2\left(\frac{2+6+4\sqrt{3}}{16}\right) - 1$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}$$

تم بحمد الله

تمرّنْ
10−1

المستقيمات والمستويات في الفضاء

Lines and Planes in Space

المجموعة A تمارين مقالية

في التمارين (5−1)، هل الشكل يجب أن يكون موجودًا في مستوٍ واحد فقط؟

(1)

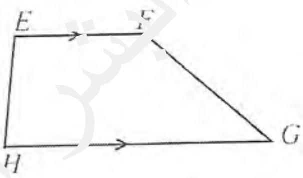
(2) • E

(1) مستقيم واحد لا يعين مستوٍ وحيد لذا فالمستقيم يمكن أن يكون في عدد لانهائي من المستويات.

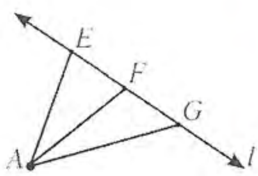
(2) النقطة الواحدة لا تعين مستوٍ وحيد لذا فالنقطة تكون موجودة في عدد لانهائي من المستويات

(3)

(4)



(5)

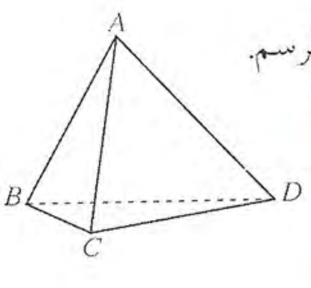


(3) مستقيمان متقاطعان يعينان مستويًا واحدًا فقط لذا فالمستقيمان المتقاطعان يجب أن يكونا في مستوٍ واحد فقط

(4) شكل رباعي فيه ضلعان متوازيان والمستقيمان المتوازيان يعينان مستوٍ وحيد

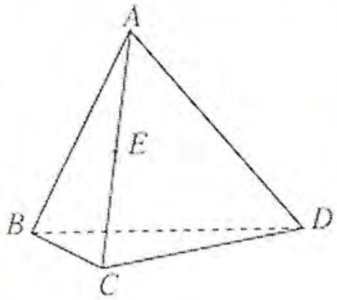
(5) مستقيم ونقطة خارجة عنه يعينان مستويًا واحدًا فقط فالشكل يجب أن يكون موجودًا في مستوٍ واحد فقط

(6) $ABCD$ هرم ثلاثي القاعدة. سمّ المستويات الأربعة التي تجدها في الرسم.



أربع نقاط مختلفة وليست مستوية يمر بها عدد من المستويات يساوي $4C_3=4$ حيث أن المستوى يتعين بثلاث نقاط مختلفة وليست على استقامة والمستويات هي

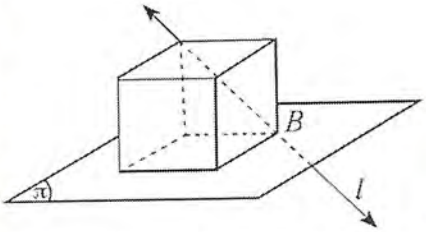
(ABC) , (ACD) , (ABD) و (BCD)



(7) أثبت أن النقطة E تقع في المستوي ADC وفي المستوي ABC

$E \in \overleftrightarrow{AC}$, $\overleftrightarrow{AC} \subseteq (ABC)$, $\overleftrightarrow{AC} \subseteq (ADC)$

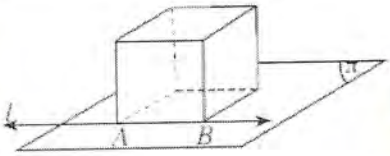
∴ E تقع في المستويين ABC , ADC



(8) (a) أوجد نقطة تقاطع المستوي π والمستقيم l.

المستقيم L هو قطر وجه من أوجه المكعب الذي أحد أوجهه محتوى في المستوى π ، B أحد رؤوس المكعب

∵ $B \in \overleftrightarrow{L}$, $B \in \pi$ ∴ $\overleftrightarrow{L} \cap \pi = \{B\}$

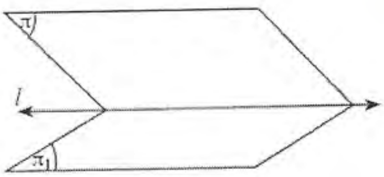


(b) أوجد تقاطع المستوي π والمستقيم l.

النقطتان A , B تنتميان إلى المستوى π وإلى المستقيم L

∴ L يقع بأكمله في المستوى π

∴ $\overleftrightarrow{L} \cap \pi = \overleftrightarrow{L}$



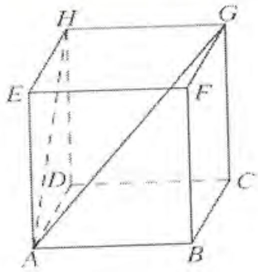
(c) أوجد تقاطع المستوي π والمستوي π_1.

$\overleftrightarrow{L} \subseteq \pi$, $\overleftrightarrow{L} \subseteq \pi_1$

π ، π_1 مستويان مختلفان

∴ $\pi \cap \pi_1 = \overleftrightarrow{L}$

(9) في شبه المكعب المقابل، أكمل:



$(AGH) = (ABGH)$

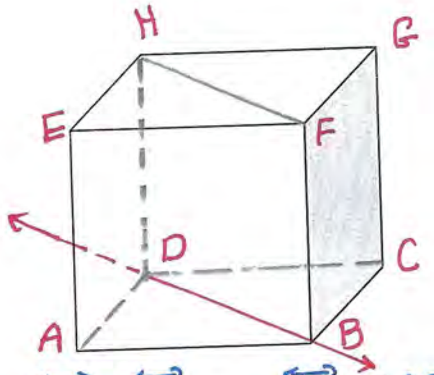
$(ABC) = (ABCD)$

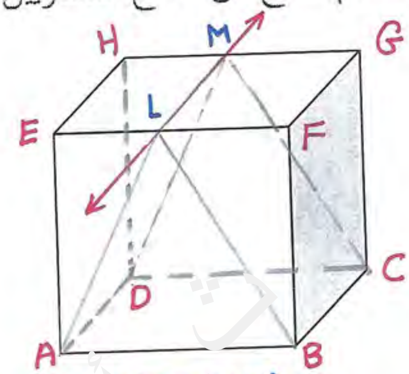
(a) $(AGH) \cap (ABC) = \overleftrightarrow{AB}$

(b) ارسم المستقيم الناتج عن تقاطع المستويين $BFH, ABCD$

(c) إذا كانت L نقطة تنتمي إلى $\overline{EF}$،

ارسم المستقيم الناتج عن تقاطع المستويين ADL, BCL





b) $\overleftrightarrow{BF} \parallel \overleftrightarrow{DH}$ $\therefore \overleftrightarrow{HD} \subseteq (BFH)$ $\therefore (BFH) = (BFHD)$

$\overleftrightarrow{BD} \subseteq (ABCD)$, $\overleftrightarrow{BD} \subseteq (BFHD)$ $\therefore (ABCD) \cap (BFH) = \overleftrightarrow{BD}$

c) $\overline{LM} \parallel \overline{GF} \parallel \overline{EH}$ ← نأخذ $M \in \overline{HG}$ بحيث $EL = HM$

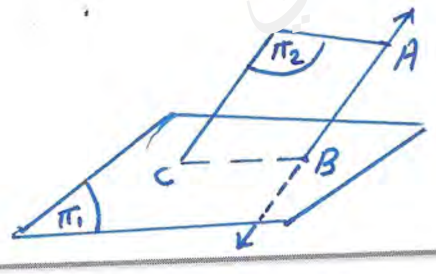
$\overleftrightarrow{LM}$ و $\overleftrightarrow{BC}$ متوازيان يحويهما المستوى $BCML$

$\overleftrightarrow{LM}$ و $\overleftrightarrow{AD}$ متوازيان يحويهما المستوى $ADML$

$\therefore (BCML) \cap (ADML) = \overleftrightarrow{LM}$

$\therefore (ADL) \cap (BCL) = \overleftrightarrow{LM}$

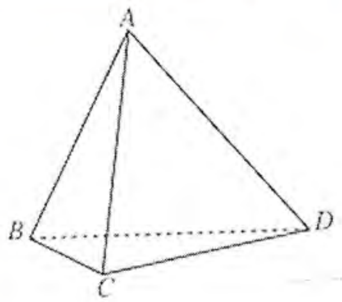
(10) ارسم $\overleftrightarrow{AB}$ يقطع مستويًا π_1 في النقطة B، ثم ارسم المستوي π_2 يقطع المستوي π_1 في مستقيم يمر بالنقطة B.



$\overleftrightarrow{AB} \cap \pi_1 = \{B\}$

$\pi_1 \cap \pi_2 = \overleftrightarrow{CB}$

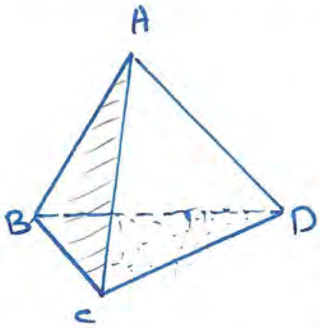
(11) $ABCD$ هرم ثلاثي القاعدة أوجد.



(a) تقاطع $\overleftrightarrow{AB}$ مع المستوي BCD؟

$B \in \overleftrightarrow{AB}$ ، $B \in (BCD)$

$\overleftrightarrow{AB} \cap (BCD) = \{B\}$



(b) تقاطع $\overleftrightarrow{AB}$ مع المستوي ACD؟

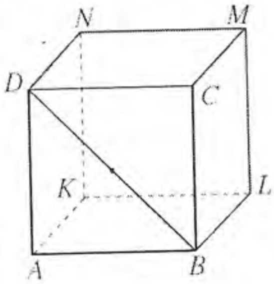
$A \in \overleftrightarrow{AB}$ ، $A \in (ACD)$ ، $B \notin (ACD)$

$\therefore \overleftrightarrow{AB} \cap (ACD) = \{A\}$

(c) تقاطع (ABC) مع المستوي BCD؟

$\overleftrightarrow{BC} \subseteq (ABC)$ ، $\overleftrightarrow{BC} \subseteq (BCD)$

$\therefore (BCD) \cap (ABC) = \overleftrightarrow{BC}$



(12) في الرسم المقابل $ABCDKLMN$ مكعب أوجد إن أمكن العلاقة بين:

(a) $\overleftrightarrow{ND}$ ، $\overleftrightarrow{BD}$؟

مستقيمان متقاطعان في نقطة D

(b) $\overleftrightarrow{AD}$ ، $\overleftrightarrow{BC}$؟

من خواص المكعب كل وجه من أوجهه مربع

$\therefore$ $\overleftrightarrow{BC}$ ، $\overleftrightarrow{AD}$ مستقيمان متوازيان حيث

$\overline{BC}$ ، $\overline{AD}$ متقابلتان في الوجه $ABCD$

(c) $\overleftrightarrow{BD}$ ، $\overleftrightarrow{ML}$؟

$\overleftrightarrow{ML}$ ، $\overleftrightarrow{BD}$ غير متقاطعان ولا يحويهما مستوى واحد

فهما مستقيمان متخالفان

(d) $\overleftrightarrow{ML}$ والمستوي $ABLK$؟

يشتركان في نقطة واحدة وهي النقطة L

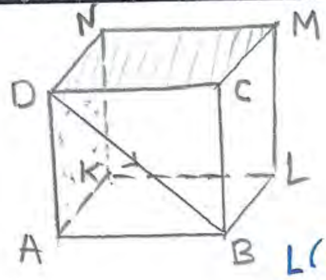
فهما متقاطعان ويكون $\overleftrightarrow{ML} \cap (ABLK) = \{L\}$

(e) سمّ المستقيم الذي هو تقاطع المستويين NBD، $ABCD$

$\because \overleftrightarrow{NL} \parallel \overleftrightarrow{BD}$ يحويهما مستوٍ واحد فقط $(NBD) = (NLBD)$

$\therefore (NLBD) \cap (ABCD) = \overleftrightarrow{BD}$

$\therefore$ المستقيم $\overleftrightarrow{BD}$ هو تقاطع المستويين NBD ، $ABCD$



(f) أثبت أن النقاط L, B, D, N تنتمي إلى مستوٍ واحد.

$\because \overleftrightarrow{AK} \parallel \overleftrightarrow{LB}$ و $\overleftrightarrow{AK} \parallel \overleftrightarrow{ND}$

$\therefore \overleftrightarrow{LB} \parallel \overleftrightarrow{ND}$

$\therefore$ $\overleftrightarrow{ND}$ ، $\overleftrightarrow{LB}$ يعينان مستوٍ وحيد يحوي النقاط L، B، D، N

(g) هل $\overleftrightarrow{ML}$, $\overleftrightarrow{ND}$ يعينان مستويًا واحدًا؟

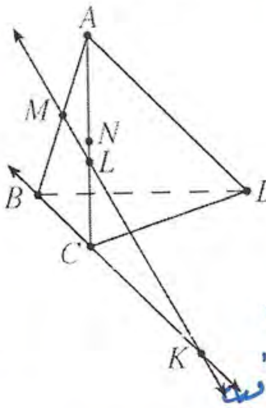
$\overleftrightarrow{ML}$ ، $\overleftrightarrow{ND}$ مستقيمان متخالفان لا يعينان مستويًا واحدًا .

(h) أثبت أن المستويين CMN , ADK يتقاطعان.

$N \in (ADK)$, $D \in (CMN)$ $\quad \therefore (ADK) = (ADNK)$, $(CMN) = (CMND)$

$\therefore (ADNK) \cap (CMND) = (\overleftrightarrow{ND})$.

$\therefore$ المستويين ADK ، CMN يتقاطعان في المستقيم $\overleftrightarrow{ND}$



(13) $ABCD$ هرم ثلاثي القاعدة.

M منتصف $\overline{AB}$، N منتصف $\overline{AC}$، $L \in \overline{AC}$، $L \neq N$

(a) أثبت أن: $\overleftrightarrow{ML}$ يقع في المستوي ABC

$M \in \overleftrightarrow{AB}$ $\therefore M \in (ABC)$ ، $L \in \overleftrightarrow{AC}$ $\therefore L \in (ABC)$

$\therefore$ المستقيم $\overleftrightarrow{ML}$ يشترك مع المستوى ABC في نقطتين؛ فيقع بأكمله فيه

(b) أثبت أن: $\overleftrightarrow{ML}$, $\overleftrightarrow{CB}$ يتقاطعان في النقطة K

$\because \overline{MN} \parallel \overline{BC}$ و $L \neq N$

$\overleftrightarrow{ML}$ ، $\overleftrightarrow{CB}$ يحويها المستوى (ABC) وغير متوازيان فهما متقاطعان

$\because K \in \overleftrightarrow{ML}$ و $K \in \overleftrightarrow{CB}$ $\quad \therefore \overleftrightarrow{ML} \cap \overleftrightarrow{CB} = \{K\}$

(c) ما نقطة تقاطع المستقيم $\overleftrightarrow{ML}$ مع المستوي BCD؟

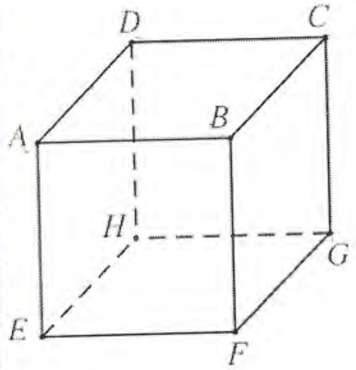
$\because K \in \overleftrightarrow{BC}$, $\overleftrightarrow{BC} \subseteq (CBD)$ $\quad \therefore K \in (CBD)$, $M \notin (CBD)$

$\because K \in \overleftrightarrow{ML}$ $\quad \therefore \overleftrightarrow{ML} \cap (BCD) = \{K\}$

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (5–1)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

ABCDEFGH مكعّب.



(1) المستقيمان *AB*, *HG* يعينان مستويًا. (a) (b)

$\overleftrightarrow{HG} \parallel \overleftrightarrow{DC}$ ، $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{DC}$ $\longrightarrow$ $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{HG}$

مستقيمان متوازيان مختلفان يعينان مستويًا

(2) النقاط *B*, *D*, *H*, *F* تعيّن مستويًا. (a) (b)

$\overleftrightarrow{BD} \parallel \overleftrightarrow{HF}$

مستقيمان متوازيان يعينان مستويًا يحوي النقاط B و D و H و F

(3) النقاط *A*, *B*, *G*, *C* تعيّن مستويًا. (a) (b)

$\overleftrightarrow{AB}$ ، $\overleftrightarrow{GC}$ مستقيمان متخالفان فهما لا يعينان مستويًا

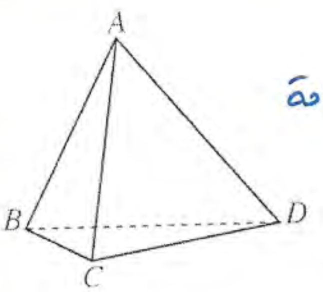
(4) المستقيمان *GC*, *EF* يعينان مستويًا. (a) (b)

$\overleftrightarrow{EF}$ ، $\overleftrightarrow{GC}$ متخالفان لا يعينان مستويًا

(5) المستقيمان *BC*, *AB* يعينان مستويًا. (a) (b)

$\overleftrightarrow{AB}$ ، $\overleftrightarrow{BC}$ متقاطعان في B فهما يعينان مستويًا.

في التمرينين (7–6)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.



(6) النقاط *B*, *C*, *D* تعيّن: ثلاث نقاط مختلفة ليست على استقامة

(a) مستويًا واحدًا
(b) مستويين مختلفين
(c) عدد لا منته من المستويات المختلفة
(d) لا يمكن أن تعيّن مستويًا

(7) أوجه منشور قائم خماسي القاعدة يعيّن:

(a) خمسة مستويات مختلفة
(b) ستة مستويات مختلفة
(c) سبعة مستويات مختلفة
(d) ثمانية مستويات مختلفة

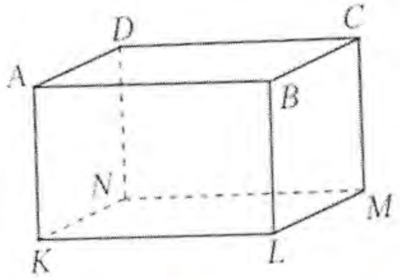
القاعدتين وخمسة أوجه

تمرّن
10-2

المستقيمات والمستويات المتوازية في الفضاء

Parallel Lines and Planes in Space

المجموعة A تمارين مقالية



(1) $ABCDKLMN$ شبه مكعب.

(a) أثبت أن: $\overleftrightarrow{AK} \parallel \overleftrightarrow{CM}$

(b) أثبت أن النقاط A, K, M, C تنتمي إلى مستو واحد.

(c) أثبت أن: $\overleftrightarrow{AD}$ يوازي المستوي MKN

من خواص شبه المكعب

a) $\overleftrightarrow{CM} \parallel \overleftrightarrow{BL}$, $\overleftrightarrow{BL} \parallel \overleftrightarrow{AK}$ $\therefore$ $\overleftrightarrow{CM} \parallel \overleftrightarrow{AK}$

b) CM ، AK يحويهما مستوٍ واحد لأنهما متوازيان

$\therefore$ النقاط C و M ، K ، A تنتمي إلى مستوٍ واحد

c) $\because$ $\overleftrightarrow{AD} \parallel \overleftrightarrow{KN}$, $\overleftrightarrow{KN} \subseteq (MKN)$

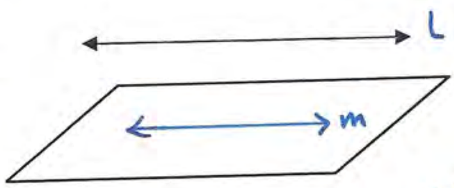
$\therefore$ $\overleftrightarrow{AD} \parallel (MKN)$

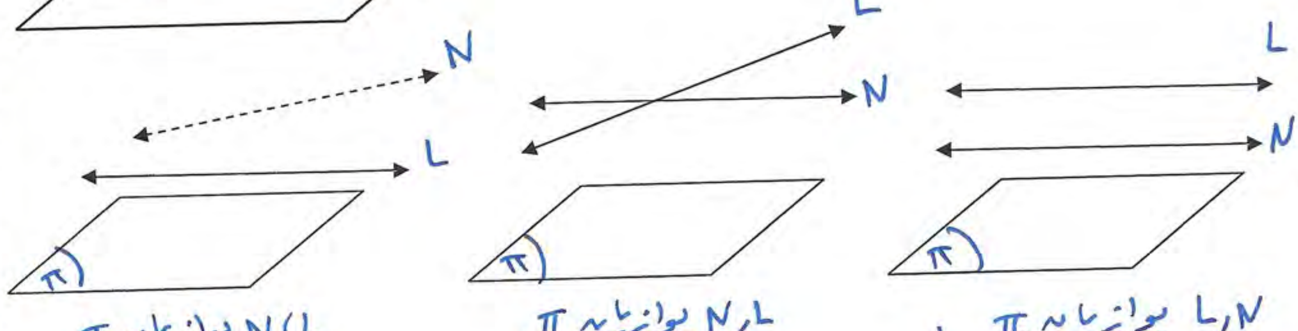
---

(2) (a) متى يكون المستقيم l موازيًا للمستوي π؟ وضح ذلك بالرسم.

(b) ارسم مستقيمًا آخرًا يوازي المستوي π

a) اذا وازى L مستقيماً في المستوى π فإنه يوازي π





L ، N يوازيان π ومتخالفان

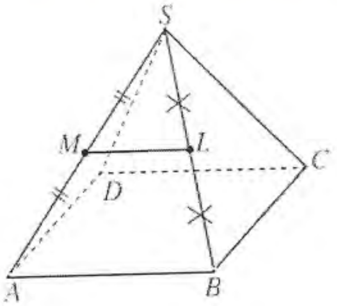
N ، L يوازيان π ومتقاطعان

N ، L يوازيان π ومتوازيان

(3) $SABCD$ هرم قاعدته $ABCD$ مربعة الشكل.

M منتصف $\overline{SA}$ ، L منتصف $\overline{SB}$

أثبت أن: $\overline{ML} \parallel (ABCD)$



$\because$ M منتصف $\overline{SA}$ ، L منتصف $\overline{SB}$

$\therefore \overline{ML} \parallel \overline{AB} \Rightarrow \overleftrightarrow{ML} \parallel \overleftrightarrow{AB}$

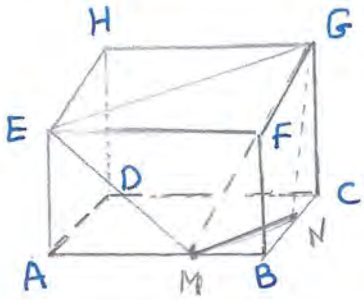
$\because \overleftrightarrow{AB} \subseteq (ABCD)$

$\therefore \overleftrightarrow{ML} \parallel (ABCD)$

(4) $ABCDEFGH$ مكعب

$M \in \overline{AB}$ ، المستوي GEM يقطع $\overline{BC}$ في النقطة N

أثبت أن: $\overline{GE} \parallel \overline{MN}$



$\because$ GEM يقطع $\overline{BC}$ فى N

$\therefore N \in (GEM)$

المستويان ABCD و EFGH متوازيان يقطعهما المستوى GEMC فى المستقيمين $\overleftrightarrow{EG}, \overleftrightarrow{MN}$.

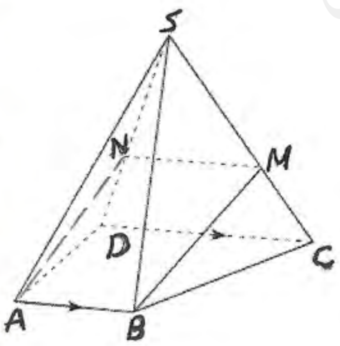
$\therefore \overleftrightarrow{EG} \parallel \overleftrightarrow{MN}$

(5) $SABCD$ هرم قاعدته شبه المنحرف $ABCD$ حيث إن $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$

$M \in \overline{SC}$ ، المستوي ABM يقطع $\overline{SD}$ في N

(a) أثبت أن: $\overline{AB}$ يوازي المستوي SDC

(b) أثبت أن: $\overline{MN} \parallel \overline{CD}$



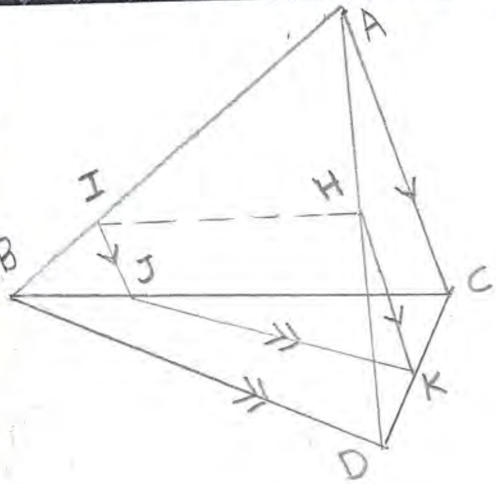
$N \in (ABM)$

$\because \overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{DC}$, $\overleftrightarrow{DC} \subseteq (SDC)$

$\therefore \overleftrightarrow{AB} \parallel (SDC)$

المستقيمان $\overleftrightarrow{DC}$ و $\overleftrightarrow{AB}$ متوازيان ويمر بهما المستويان ABMN , SDC وتقاطعهما فى $\overleftrightarrow{MN}$

$\therefore \overleftrightarrow{MN} \parallel \overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{DC}$



(6) $ABCD$ هرم ثلاثي القاعدة، $I \in \overline{AB}$

المستقيم الموازي لِـ $\overleftrightarrow{AC}$ والمار بالنقطة I يقطع $\overline{BC}$ في J

المستقيم الموازي لِـ $\overleftrightarrow{BD}$ والمار بالنقطة J يقطع $\overline{CD}$ في K

المستقيم الموازي لِـ $\overleftrightarrow{AC}$ والمار بالنقطة K يقطع $\overline{AD}$ في H

(a) ضع رسمًا مناسبًا.

(b) أثبت أن: $\overleftrightarrow{IH} \parallel \overleftrightarrow{BD}$

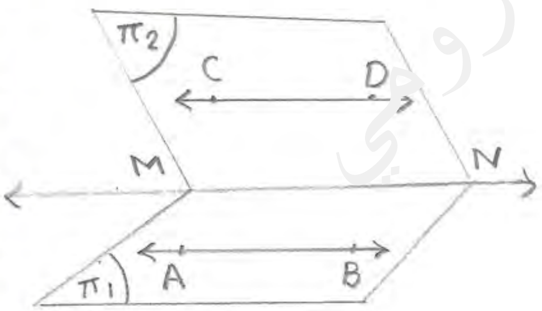
$\because \overleftrightarrow{IJ} \parallel \overleftrightarrow{AC}$, $\overleftrightarrow{HK} \parallel \overleftrightarrow{AC}$

$\therefore \overleftrightarrow{HK} \parallel \overleftrightarrow{IJ}$ يحويهما المستوى $(IJKH)$

$\overleftrightarrow{BD}$ و $\overleftrightarrow{JK}$ مستقيمان متوازيان ومر بكل منهما المستويان

$BDHI$, $JKHI$ على الترتيب وتقاطعا المستويان في $\overleftrightarrow{IH}$

$\therefore \overleftrightarrow{IH} \parallel \overleftrightarrow{BD} \parallel \overleftrightarrow{JK}$



(7) ليكن π_1, π_2 مستويان متقاطعان في $\overleftrightarrow{MN}$ حيث:

$\overleftrightarrow{AB} \subset \pi_1$, $\overleftrightarrow{AB} \parallel \pi_2$

و $\overleftrightarrow{CD} \subset \pi_2$, $\overleftrightarrow{CD} \parallel \pi_1$

أثبت أن: $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$

$\because \overleftrightarrow{AB} \parallel \pi_2$, $\overleftrightarrow{AB} \subset \pi_1$, $\pi_1 \cap \pi_2 = \overleftrightarrow{MN}$

$\therefore \overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{MN}$ .... (1)

$\because \overleftrightarrow{CD} \parallel \pi_1$, $\overleftrightarrow{CD} \subset \pi_2$, $\pi_1 \cap \pi_2 = \overleftrightarrow{MN}$

$\therefore \overleftrightarrow{CD} \parallel \overleftrightarrow{MN}$ .... (2)

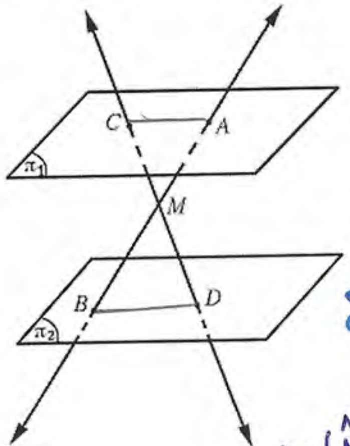
من (1) ، (2) نستنتج أن

$\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$ المستقيمان الموازيان لثالث في الفضاء متوازيان.

(9) في الشكل المقابل π_2, π_1 مستويان متوازيان، M نقطة واقعة بينهما،

حيث $\overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{CD} = \{M\}$

أثبت أن: $\frac{AM}{MB} = \frac{AC}{BD}$



$\overleftrightarrow{AB}$ و $\overleftrightarrow{CD}$ متقاطعان فهما يعينان مستوى واحد

ولتكن π_3 تقطع π_1 ، π_2 على الترتيب في $\overleftrightarrow{BD}$ و $\overleftrightarrow{CA}$

$\therefore \overleftrightarrow{CA} \parallel \overleftrightarrow{BD}$

في المثلثين ACM ، BDM $m(\hat{A}) = m(\hat{B})$ و $m(\hat{C}) = m(\hat{D})$

$\therefore$ المثلثان ACM ، BDM متشابهان

$\therefore \frac{AM}{MB} = \frac{AC}{BD}$

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (1–5)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) يكون المستويان متوازيين إذا اشتركا في نقطة واحدة على الأقل.

(a) (b)

يشترك المستويان في مستقيم (يتقاطعا)

أي أنه إذا اشترك المستويان في نقطة على الأقل يكونا متوازيين أو متقاطعين

(2) إذا وازى مستقيم مستويًا فإنهما لا يشتركان في أي نقطة من نقاطهما.

(a) (b)

إذا وقع المستقيم بأكمله في المستوى فإنه يوازيه

وفي هذه الحالة يكون بينهما نقاط مشتركة

(3) إذا وازى مستقيم l مستوي π فإن $\overleftrightarrow{l}$ يوازي مستقيمًا وحيدًا في π

(a) (b)

إذا وازى مستقيم مستويًا فإنه يوازي عدد لا نهائي من المستقيمات داخل هذا المستوى

(4) إذا كان: $\overleftrightarrow{m} \parallel \pi$ ، $\overleftrightarrow{l} \parallel \pi$ فإن $\overleftrightarrow{l} \parallel \overleftrightarrow{m}$

(a) (b)

قد يكون $\overleftrightarrow{L}$ ، $\overleftrightarrow{m}$ متوازيان أو متقاطعان أو م

(5) إذا توازى مستقيمان ومر بهما مستويان متقاطعان فإن تقاطعهما هو مستقيم يوازي كل من هذين المستقيمين

(a) (b)

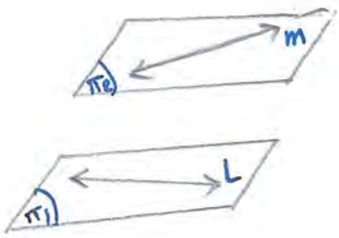
في التمارين (8–6)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(6) إذا توازى مستويان مختلفان وقطعهما مستوٍ ثالث فإن خطّي التقاطع:

ⓐ متقاطعان ⓑ متخالفان

ⓒ متوازيان ⓓ متعامدان

(7) إذا كان $\pi_1 /\!/ \pi_2$، $\overleftrightarrow{l} \subset \pi_1$، $\overleftrightarrow{m} \subset \pi_2$ فإن:

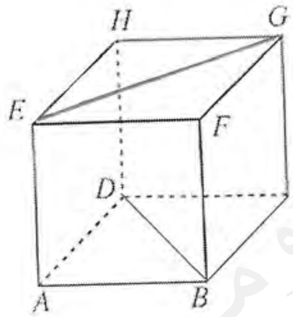


ⓐ $\overleftrightarrow{l} /\!/ \overleftrightarrow{m}$ ⓑ $\overleftrightarrow{l} \perp \overleftrightarrow{m}$

ⓒ $\overleftrightarrow{l}, \overleftrightarrow{m}$ متخالفان ⓓ $\overleftrightarrow{l} \cap \overleftrightarrow{m} = \phi$

يمكن أن يكونا متوازيان أو متخالفان

(8) في المكعّب $ABCDEFGH$، $\overleftrightarrow{EG}$, $\overleftrightarrow{BD}$ هما:



ⓐ متوازيان ⓑ متقاطعان

ⓒ متخالفان ⓓ يحويهما مستوٍ واحد

تمرّن
10-3

تعامد مستقيم مع مستوٍ

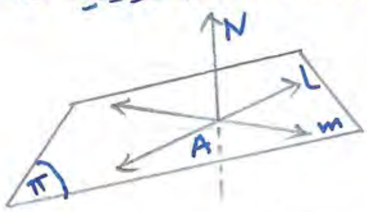
Perpendicular Line with a Plane

المجموعة A تمارين مقالية

(1) (a) متى يكون المستقيم عموديًا على المستوي؟

(b) ارسم مستقيمًا عموديًا على مستوٍ.

(a) يكون المستقيم عموديًا على المستوى اذا كان عموديًا على مستقيمين متقاطعين فيه.

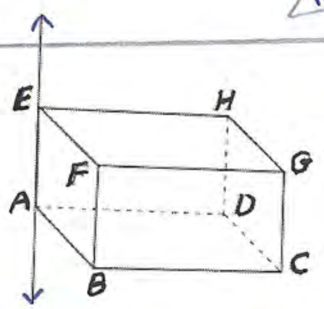


(b) $\overleftrightarrow{L} \subset \pi$, $\overleftrightarrow{M} \subset \pi$

$\overleftrightarrow{L} \cap \overleftrightarrow{M} = \{A\}$, $\overleftrightarrow{N} \perp \overleftrightarrow{L}$, $\overleftrightarrow{N} \perp \overleftrightarrow{M}$

---

(2) $ABCDEFGH$ شبه مكعب.



(a) سمّ المستقيمات المتعامدة مع $\overline{AE}$

(b) سمّ المستويات المتعامدة مع $\overline{AE}$

(c) أثبت أن $\overleftrightarrow{AD}$ عمودي على المستوي CGH

(a) $\overleftrightarrow{AE} \perp \overleftrightarrow{EH}$, $\overleftrightarrow{AE} \perp \overleftrightarrow{FG}$, $\overleftrightarrow{AE} \perp \overleftrightarrow{BC}$, $\overleftrightarrow{AE} \perp \overleftrightarrow{AD}$

وكذلك $\overleftrightarrow{AE}$ عموديًا على كل من $\overleftrightarrow{EF}$, $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{CD}$, $\overleftrightarrow{HG}$

(b) المستويات المتعامدة مع $\overline{AE}$ هي

$(EHFG)$, $(ABCD)$

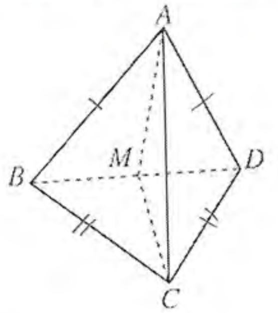
(c) $\overleftrightarrow{CG} \parallel \overleftrightarrow{DH}$ يعينان مستوٍ واحد

$\therefore D \in (CGH)$ $\therefore (CGH) = (CGHD)$

$\overleftrightarrow{AD} \perp \overleftrightarrow{DH}$, $\overleftrightarrow{AD} \perp \overleftrightarrow{DC}$

$\overleftrightarrow{HD} \cap \overleftrightarrow{DC} = \{D\}$

$\therefore \overleftrightarrow{AD} \perp (DCGH)$



(3) $ABCD$ هرم ثلاثي القاعدة.

$AD = AB$ ،$CD = CB$

النقطة M منتصف $\overline{DB}$

(a) أثبت أن: $\overleftrightarrow{BD} \perp (AMC)$

(b) استنتج أن: $\overleftrightarrow{BD} \perp \overleftrightarrow{AC}$

في المثلث ABD ← M منتصف $\overline{DB}$ و $AB = AD$ ∵

$\therefore \overleftrightarrow{AM} \perp \overleftrightarrow{BD} \longrightarrow (1)$

في المثلث CBD ← M منتصف $\overline{BD}$ و $CB = CD$

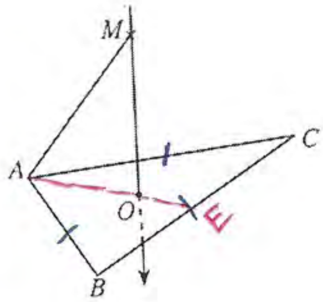
$\therefore \overleftrightarrow{CM} \perp \overleftrightarrow{BD} \longrightarrow (2)$

∵ $\overleftrightarrow{AM}$ ، $\overleftrightarrow{CM}$ متقاطعان يعينان المستوى (ACM)

$\therefore \overleftrightarrow{BD} \perp (AMC)$

∵ $\overleftrightarrow{AC} \subseteq (AMC)$

$\therefore \overleftrightarrow{BD} \perp \overleftrightarrow{AC}$



(4) ABC مثلث متطابق الأضلاع مركزه O، $\overrightarrow{MO}$ متعامد مع (ABC)

أثبت أن: $\overleftrightarrow{CB} \perp \overleftrightarrow{AM}$

العمل: نصل $\overrightarrow{AO}$ يقطع $\overline{BC}$ في E

∵ المثلث ABC متطابق الأضلاع مركزه O

$\therefore \overleftrightarrow{OA} \perp \overleftrightarrow{BC}$ ----- (1)

∵ $\overleftrightarrow{OM} \perp (ABC)$, $\overleftrightarrow{BC} \subseteq (ABC)$

$\therefore \overleftrightarrow{OM} \perp \overleftrightarrow{BC}$ ..... (2)

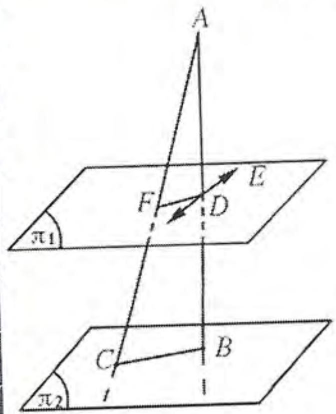
$\overleftrightarrow{OM}$ ، $\overleftrightarrow{OA}$ متقاطعان يعينان المستوى AOM

$\therefore \overleftrightarrow{CB} \perp (AOM)$

(5) في الشكل المقابل، $\overleftrightarrow{AB}$ عمودي على المستوي π_2, π_1, $\overleftrightarrow{DE} \subset \pi_1$, $\overleftrightarrow{AD} \perp \overleftrightarrow{DE}$

فإذا كانت D منتصف $\overline{AB}$، F منتصف $\overline{AC}$

أثبت أن: $\pi_1 \,//\, \pi_2$



$\because$ D منتصف $\overline{AB}$ ، F منتصف $\overline{AC}$

$\therefore \overleftrightarrow{FD} \,//\, \overleftrightarrow{CB}$

$\because \overleftrightarrow{AB} \perp \pi_2$, $\overleftrightarrow{CB} \subseteq \pi_2$ $\therefore \overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{CB}$

$\therefore \overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{FD}$ $\because \overleftrightarrow{FD} \,//\, \overleftrightarrow{CB}$

$\because \overleftrightarrow{AD} \perp \overleftrightarrow{DE}$, $\overleftrightarrow{AD} \perp \overleftrightarrow{FD}$

$\overleftrightarrow{ED}$, $\overleftrightarrow{FD}$ متقاطعان وكونهما محتوى في π_1

$\therefore \overleftrightarrow{AD} \perp \pi_1 \Rightarrow \overleftrightarrow{AB} \perp \pi_1$

المستقيم العمودي على مستويين مختلفين يكونان متوازيين

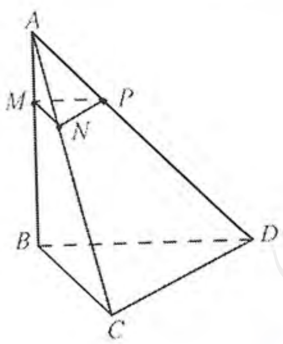
$\therefore \overleftrightarrow{AB} \perp \pi_1$, $\overleftrightarrow{AB} \perp \pi_2$

$\therefore \pi_1 \,//\, \pi_2$

(6) في الشكل المقابل، $ABCD$ هرم ثلاثي القاعدة حيث $\overleftrightarrow{AB} \perp (BCD)$ فإذا كان:

$AD = 3\,AP$ ،$AC = 3\,AN$ ،$AB = 3\,AM$،

أثبت أن $\overleftrightarrow{AB}$ عمودي على (MNP)



$\because AD = 3AP \Rightarrow \dfrac{AD}{AP} = 3$

$AC = 3AN \Rightarrow \dfrac{AC}{AN} = 3$

$AB = 3AM \Rightarrow \dfrac{AB}{AM} = 3$

$\therefore \dfrac{AD}{AP} = \dfrac{AC}{AN} = \dfrac{AB}{AM} = 3$ $\therefore$

$\therefore \overleftrightarrow{NP} \,//\, \overleftrightarrow{CD}$, $\overleftrightarrow{MN} \,//\, \overleftrightarrow{BC}$, $\overleftrightarrow{MP} \,//\, \overleftrightarrow{BD}$

$\therefore (BCD) \,//\, (MNP)$

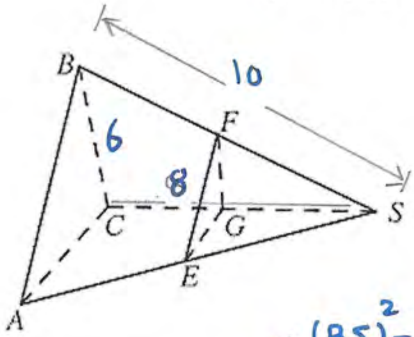
$\because \overleftrightarrow{AB} \perp (BCD)$

$\therefore \overleftrightarrow{AB} \perp (MNP)$

(7) في الشكل المقابل، $(ABC) \parallel (EFG)$، S نقطة خارج $(ABC),(EFG)$ بحيث $\overleftrightarrow{SC} \perp \overleftrightarrow{AC}$

فإذا كان: $SB = 10\,\text{cm}\,,\ SC = 8\,\text{cm}\,,\ BC = 6\,\text{cm}$

أثبت أن: $\overleftrightarrow{SC} \perp \overleftrightarrow{FE}$



في المثلث BCS

$\because (BS)^2 = 100 \quad , \quad (BC)^2 + (CS)^2 = 36 + 64 = 100$

$\therefore$ المثلث قائم الزاوية في C

$$\left.\begin{array}{l} \therefore \overleftrightarrow{SC} \perp \overleftrightarrow{BC} \\ \because \overleftrightarrow{SC} \perp \overleftrightarrow{AC} \end{array}\right\} \therefore \overleftrightarrow{SC} \perp (ABC)$$

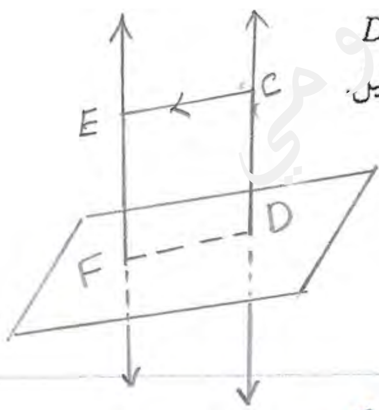
$\because (ABC) \parallel (EFG)$

$\therefore \overleftrightarrow{SC} \perp (EFG)$

$\because \overleftrightarrow{FE} \subseteq (EFG)$

$\therefore \overleftrightarrow{SC} \perp \overleftrightarrow{EF}$

(8) ليكن $\overleftrightarrow{CD}$,$\overleftrightarrow{EF}$ عموديان على المستوي π ويقطعانه في D, F على الترتيب. فإذا كان $\overleftrightarrow{CE}$ يوازي π. أثبت أن $CDFE$ مستطيل.



$\because \overleftrightarrow{CD} \perp \pi \ ,\ \overleftrightarrow{EF} \perp \pi$

$\therefore \overleftrightarrow{CD} \parallel \overleftrightarrow{EF} \Rightarrow$ CDFE يعينان المستوى

$\because \overleftrightarrow{CE} \parallel \pi \ ,\ \overleftrightarrow{FD} \subseteq \pi$

$\therefore \overleftrightarrow{CE} \parallel \overleftrightarrow{FD}$

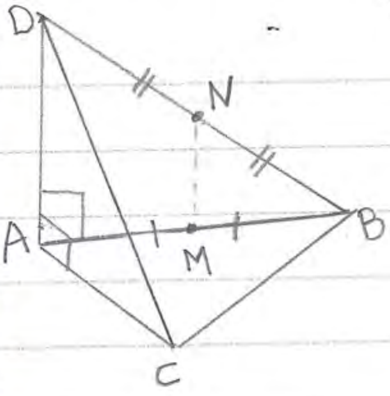
من (1) ، (2) $ECDF$ متوازي أضلاع

$\overleftrightarrow{EF} \perp \pi \ ,\ \overleftrightarrow{FD} \subset \pi \Rightarrow \overleftrightarrow{EF} \perp \overleftrightarrow{FD} \quad m(E\hat{F}D) = 90^\circ$

$\therefore$ $ECDF$ مستطيل

(9) ABC مثلث، أخذت النقطة D خارج مستوي المثلث بحيث كان: $\overleftrightarrow{DA}$ عموديًا على كل من $\overleftrightarrow{AB}$، $\overleftrightarrow{AC}$

فإذا كانت M منتصف $\overline{AB}$، N منتصف $\overline{DB}$، أثبت أن: $\overleftrightarrow{MN} \perp (ABC)$



$\because \overleftrightarrow{DA} \perp \overleftrightarrow{AB} \, , \, \overleftrightarrow{DA} \perp \overleftrightarrow{AC}$

$\therefore \overleftrightarrow{DA} \perp (ABC)$ ....- (1)

$\because$ M منتصف $\overline{AB}$ ، N منتصف $\overline{BD}$

$\therefore \overleftrightarrow{MN} \parallel \overleftrightarrow{DA}$ .....(2)

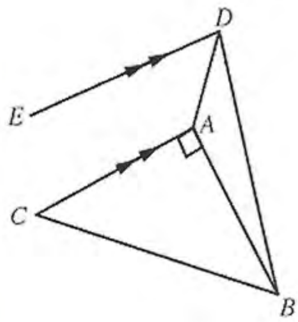
من (1) ، (2) نستنتج أن

$\overleftrightarrow{MN} \perp (ABC)$

(10) في الشكل المقابل، ABC مثلث قائم الزاوية في A

رسم $\overleftrightarrow{AD}$ عمودي على مستوي المثلث ABC، ورسم $\overleftrightarrow{ED} \parallel \overleftrightarrow{CA}$

أثبت أن: $\overleftrightarrow{ED} \perp \overleftrightarrow{DB}$



$\because \overleftrightarrow{AD} \perp (ABC) \, , \, \overleftrightarrow{AC} \subseteq (ABC)$

$\therefore \overleftrightarrow{AD} \perp \overleftrightarrow{AC}$

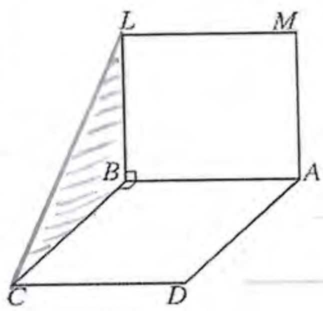
$\because \overleftrightarrow{AC} \perp \overleftrightarrow{AB}$ $\Big\}$ $\therefore \overleftrightarrow{AC} \perp (ABD)$

$\therefore \overleftrightarrow{AC} \perp \overleftrightarrow{BD}$ $\because \overleftrightarrow{BD} \subseteq (ABD)$

$\because \overleftrightarrow{ED} \parallel \overleftrightarrow{CA}$ $\therefore \overleftrightarrow{ED} \perp \overleftrightarrow{BD}$

(11) $ABCD$، $ABLM$ مربعان ليسا في مستو واحد، لهما ضلع مشترك $\overline{AB}$،

أثبت أن: $\overleftrightarrow{LM} \perp (LBC)$



من خواص المربع

$\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{BL} \, , \, \overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{BC}$

$\therefore \overleftrightarrow{AB} \perp (LBC)$ $\because \overleftrightarrow{LB} \cap \overleftrightarrow{CB} = \{B\}$

$\because \overleftrightarrow{LM} \parallel \overleftrightarrow{AB}$

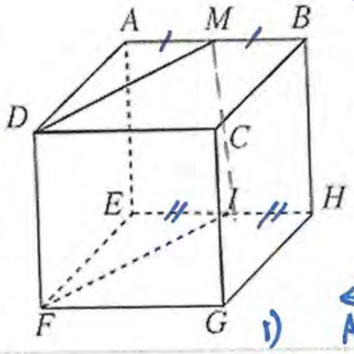
$\therefore \overleftrightarrow{LM} \perp (LBC)$

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (7–1)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

أسئلة التمرينين (2–1)، على الشكل المقابل حيث $ABCDEHGF$ مكعّب

النقطة M منتصف $\overline{AB}$، I منتصف $\overline{EH}$.



(1) $\overleftrightarrow{MI} \perp (EFGH)$ (a) (b)

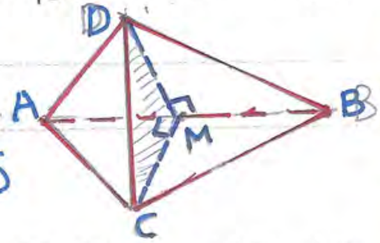
(2) $\overleftrightarrow{MD} \perp (BCGH)$ (a) (b)

1) $\overleftrightarrow{AE} \perp \overleftrightarrow{EH}$, $\overleftrightarrow{AE} \perp \overleftrightarrow{EF}$ $\therefore$ $\overleftrightarrow{AE} \perp (EFGH)$ $\therefore \overleftrightarrow{ML} \parallel \overleftrightarrow{AE}$

2) $\overleftrightarrow{DC}$ ، $\overleftrightarrow{MD}$ متقاطعان ، $\overleftrightarrow{DC}$ متعامد مع $(BCGH)$

$\therefore$ $\overleftrightarrow{MD}$ ليس عموديًا على $(BCGH)$

(3) إذا كان $ABCD$ هرم ثلاثي القاعدة جميع أحرفه متطابقة فإن: $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{CD}$ (a) (b)

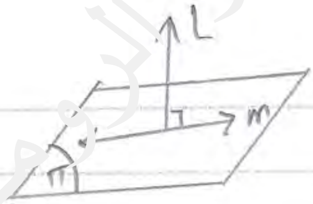


نأخذ M منتصف $\overline{AB}$

$\overline{CM} \perp \overline{AB}$, $\overline{DM} \perp \overline{AB}$

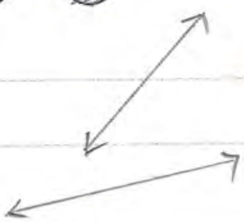
$\therefore \overline{AB} \perp (CMD)$ $\therefore \overline{AB} \perp \overline{CD}$

(4) إذا كان $\overleftrightarrow{m} \subset \pi$, $\overleftrightarrow{l} \perp \overleftrightarrow{m}$ فإن $\overleftrightarrow{l} \subset \pi$ (a) (b)



(5) إذا كان المستقيمان l , m متخالفان وكان $\overleftrightarrow{n} \perp \overleftrightarrow{m}$ فإن $\overleftrightarrow{l} \perp \overleftrightarrow{n}$ (a) (b)

$\overleftrightarrow{n}$ ، $\overleftrightarrow{L}$ قد يكونا متوازيان أو متخالفان أو متعامدان



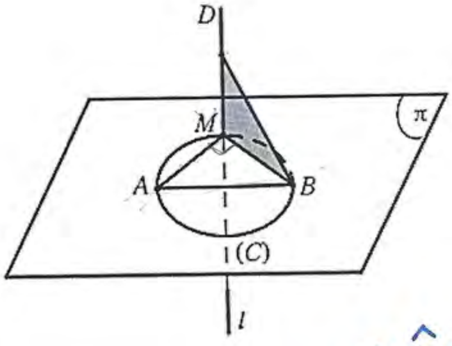
(6) إذا كان المستقيمان l , m متخالفان وكان $\overleftrightarrow{n} \perp \overleftrightarrow{m}$ فإن $\overleftrightarrow{l}$, $\overleftrightarrow{n}$ متخالفان.   (a) (b)

متخالفان أو متوازيان أو متقاطعان

في التمارين (11–8)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(7) في الشكل المقابل :

إذا كان $\overleftrightarrow{l} \perp (AMB)$ ، $\overline{AB}$ قطر في الدائرة (C) فإن:



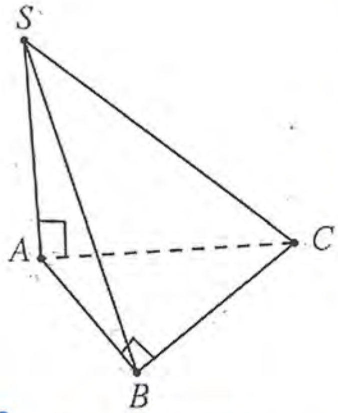
ⓐ $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{BD}$ ⓑ $\overleftrightarrow{l} \perp (BMD)$

ⓒ $\overleftrightarrow{AM} \perp (BMD)$ ⓓ $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{BM}$

$m(\hat{AMB}) = 90^\circ \quad \therefore \overleftrightarrow{AM} \perp \overleftrightarrow{MB} \quad ----(1)$

$\because \overleftrightarrow{L} \perp (AMB) \therefore \overleftrightarrow{L} \perp \overleftrightarrow{AM} \Rightarrow \overleftrightarrow{CD} \perp \overleftrightarrow{AM}$

(8) في الشكل المقابل إذا كان $m(\widehat{B}) = 90^\circ$ ، $\overleftrightarrow{SA} \perp (ABC)$ فإن:



ⓐ المثلث SAB قائم في $\widehat{B}$

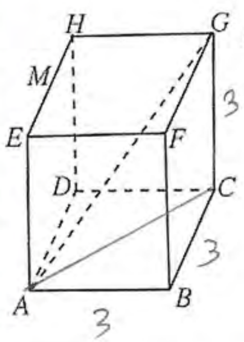
ⓑ $\overleftrightarrow{CB} \perp (SAB)$

ⓒ المثلث SAB متطابق الضلعين.

ⓓ المثلث SCB قائم في $\widehat{C}$

$\overleftrightarrow{SA} \perp \overline{BC} \quad , \quad \overline{AB} \perp \overline{BC} \quad \therefore \overleftrightarrow{BC} \perp (ASB)$

(9) يمثل الشكل المقابل مكعبًا، إذا كان طول حرفه 3 cm فإن طول قطره $\overline{AG}$ يساوي



ⓐ $\sqrt{3}$ cm ⓑ $3\sqrt{3}$ cm

ⓒ 9 cm ⓓ 18 cm

طول قطر وجه المكعب $AC =$ طول الحرف $\times \sqrt{2}$

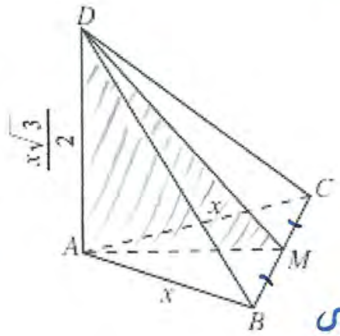
طول قطر المكعب $AG =$ طول الحرف $\times \sqrt{3}$

تمرّن
10−4

الزاوية الزوجية

The Dihedral Angle

المجموعة A تمارين مقالية



(1) ABC مثلث متطابق الأضلاع وطول ضلعه x

$\overleftrightarrow{AD}$ متعامد مع المستوي ABC، $AD = \frac{x\sqrt{3}}{2}$،

M منتصف $\overline{BC}$

(a) أثبت أن $\overleftrightarrow{CB}$ متعامد مع المستوي AMD

نثبت أن $\overline{BC}$ عمودي على مستقيمين متقاطعين في المستوى

$\because \overleftrightarrow{AD} \perp (ABC)$, $\overleftrightarrow{BC} \subseteq (ABC)$ $\therefore \overleftrightarrow{AD} \perp \overleftrightarrow{BC}$ ①

المثلث ABC متطابق الأضلاع ، M منتصف $\overline{BC}$

$\therefore \overleftrightarrow{AM} \perp \overleftrightarrow{BC}$ ②

من ① ، ② $\overleftrightarrow{BC}$ عمودياً على المستقيمين $\overleftrightarrow{AD}$ ، $\overleftrightarrow{AM}$ المتقاطعين

$\therefore \overleftrightarrow{BC} \perp (AMD)$

(b) عيّن الزاوية المستوية للزاوية الزوجية $(DCB , \overline{BC} , ACB)$

$\overleftrightarrow{BC}$ هو خط تقاطع المستويين (ACB) ، (DCB)

$\overleftrightarrow{BC} \perp \overleftrightarrow{AM}$ في المستوى ACB

$\overleftrightarrow{BC} \perp \overleftrightarrow{DM}$ في المستوى DCB

$\therefore$ الزاوية المستوية للزاوية الزوجية هي $A\hat{M}D$

(c) أوجد قياس الزاوية الزوجية $(DCB , \overline{BC} , ACB)$

المثلث AMC ثلاثيني ستيني طول وتره x ، $\overline{AM}$ مقابل للزاوية $60°$

$\therefore AM = \frac{\sqrt{3}}{2} x$

المثلث DAM قائم الزاوية متطابق الضلعين فيه $DA = AM$

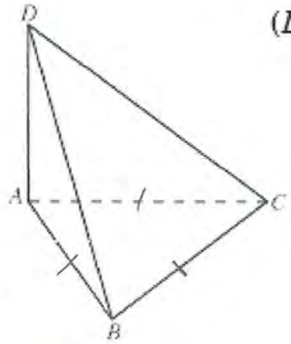
$\therefore m(A\hat{M}D) = \frac{\pi}{4}$

$\therefore$ قياس الزاوية الزوجية $= \frac{\pi}{4}$

(2) ABC مثلث متطابق الأضلاع.

$\overleftrightarrow{AD}$ متعامد مع المستوي ABC

أوجد قياس الزاوية الزوجية $(DAB, \overleftrightarrow{DA}, DAC)$



$\overleftrightarrow{DA}$ هو خط تقاطع المستويين DAB , DAC

$\overleftrightarrow{AD} \perp \overleftrightarrow{AC}$ في المستوى ADC

$\overleftrightarrow{AD} \perp \overleftrightarrow{AB}$ في المستوى ADB

$\therefore$ الزاوية $(B\hat{A}C)$ هي الزاوية المستوية للزاوية الزوجية $(DAB, \overleftrightarrow{DA}, DAC)$

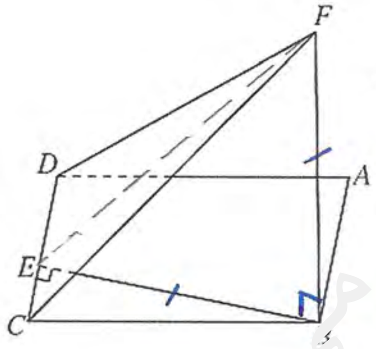
$\because$ المثلث ABC متطابق الأضلاع زواياه متطابقة .

$\therefore m(B\hat{A}C) = \frac{\pi}{3}$

(3) في الشكل المقابل $ABCD$ شكل رباعي، $\overleftrightarrow{FB}$ عمودي على المستوي $ABCD$.

فإذا كان $\overleftrightarrow{BE} \perp \overleftrightarrow{CD}$ ، $FB = BE$،

أوجد قياس الزواية الزوجية بين $(ABCD)$، (FCD)



$\overleftrightarrow{CD}$ خط التقاطع بين $FCD, ABCD$

① $\overleftrightarrow{CD} \perp \overleftrightarrow{EB}$ في المستوى $(ABCD)$

② $\because \overleftrightarrow{BF} \perp (ABCD)$ فهو عمودي على $\overleftrightarrow{DC}$ فيه

من ①، ② $\overleftrightarrow{DC} \perp (FBE)$

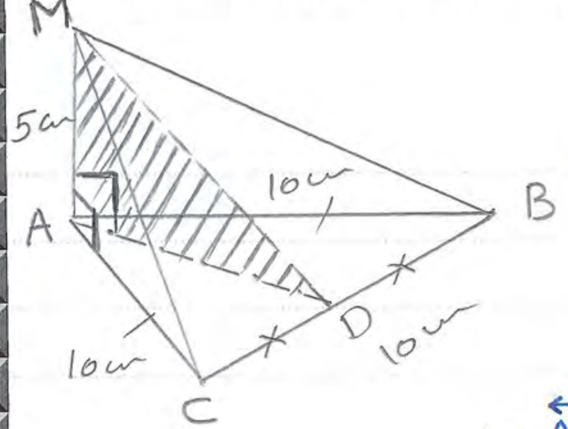
③ $\therefore \overleftrightarrow{DC} \perp \overleftrightarrow{EF}$ في المستوى FCD

من ①، ③ $(F\hat{E}B)$ هي الزاوية المستوية للزاوية الزوجية .

المثلث EFB قائم الزاوية فيه $BE = FB$

$\therefore m(F\hat{E}B) = \frac{\pi}{4}$

(4) $MABC$ هرم ثلاثي رأسه M وقاعدته مثلث متطابق الأضلاع ABC،
طول ضلعه 10 cm، إذا كان $m(M\hat{A}B) = m(M\hat{A}C) = 90°$، $MA = 5\text{ cm}$، D منتصف $\overline{BC}$



(a) أثبت أن: $\overline{BC} \perp (MAD)$

نثبت أن $\overleftrightarrow{BC}$ عمودي على مستقيمين في المستوى

$\because$ المثلث ABC متطابق الأضلاع

، M منتصف CB

$\therefore \overleftrightarrow{AD} \perp \overleftrightarrow{BC} \longrightarrow (1)$

$\because \overleftrightarrow{AM} \perp \overleftrightarrow{AB}$ و $\overleftrightarrow{AM} \perp \overleftrightarrow{AC}$ $\therefore \overleftrightarrow{AM} \perp (ACB)$

$\therefore \overleftrightarrow{AM} \perp \overleftrightarrow{BC} \dashrightarrow (2)$

من (1) ، (2)

$\overleftrightarrow{BC} \perp (MAD)$

(b) أوجد قياس الزاوية الزوجية بين $(MBC), (ABC)$

$\overleftrightarrow{BC}$ خط التقاطع بين المستويين MBC و ABC

المستوى AMD يقطع الزاوية الزوجية في $\overleftrightarrow{MD}$ ، $\overleftrightarrow{AD}$

وعمودي على الحافة $\overleftrightarrow{BC}$

$\therefore$ $(M\hat{D}A)$ هي الزاوية المستوية للزاوية الزوجية

المثلث ABC متطابق الأضلاع ، D منتصف $\overline{BC}$

$\therefore AD = \frac{\sqrt{3}}{2} AB \longrightarrow AD = \frac{\sqrt{3}}{2}(10) = 5\sqrt{3}$

$\therefore \tan(A\hat{D}M) = \frac{5}{5\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

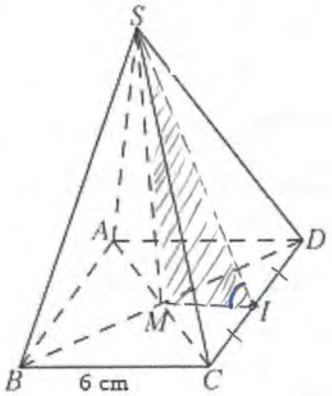
$\therefore m(A\hat{D}M) = \frac{\pi}{6}$

(5) $SABCD$ هرم مربع القاعدة طول ضلعها 6 cm ومركزها M

بحيث إن $\overleftrightarrow{SM} \perp (ABCD)$، I منتصف $\overline{CD}$

(a) أثبت أن: $(M\hat{I}S)$ هي الزاوية المستوية للزاوية الزوجية $(ABCD, \overleftrightarrow{CD}, SCD)$

(b) أوجد: $m(M\hat{I}S)$ إذا كان $SM = \sqrt{3}\ cm$



(a) $\overleftrightarrow{CD}$ خط تقاطع المستويين SCD , $ABCD$

$\because$ I منتصف $\overleftrightarrow{CD}$ $\therefore$ $\overleftrightarrow{DC} \perp \overleftrightarrow{MI}$

$\overleftrightarrow{SM} \perp (ABCD)$: $\overleftrightarrow{DC} \perp \overleftrightarrow{SM}$

$\therefore \overleftrightarrow{CD} \perp (SMI)$

في المستوى SCD $\therefore \overleftrightarrow{CD} \perp \overleftrightarrow{SI}$

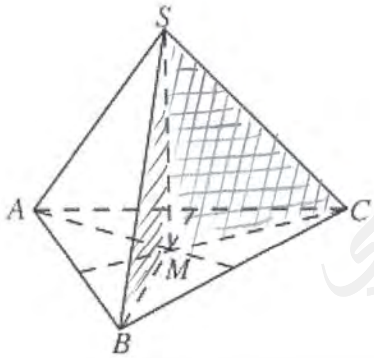
في المستوى $ABCD$ $\overleftrightarrow{CD} \perp MI$

$\therefore$ (SIM) هي الزاوية المستوية للزاوية الزوجية .

(b) في المثلث MIS قائم الزاوية في M فيه $SM = \sqrt{3}$

$\because$ M مركز المربع $\leftarrow$ $MI = \frac{1}{2} BC = 3$

$\therefore \tan(M\hat{I}S) = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow m(M\hat{I}S) = \frac{\pi}{6}$



(6) $SABC$ هرم قاعدته مثلث متطابق الأضلاع مركزه M

بحيث إن $\overleftrightarrow{SM} \perp (ABC)$

أوجد قياس الزاوية الزوجية $(SMB, \overleftrightarrow{SM}, SMC)$

$\overleftrightarrow{SM}$ هو خط التقاطع بين المستويين

$\overleftrightarrow{SM} \perp \overleftrightarrow{MC}$ في المستوى SMC

$\overleftrightarrow{SM} \perp \overleftrightarrow{MB}$ في المستوى SMB

$\therefore$ $(B\hat{M}C)$ هي الزاوية المستوية للزاوية الزوجية $(SMB, \overleftrightarrow{SM}, SMC)$

$\because$ المثلث ABC متطابق الأضلاع ، M مركز المثلث

$\therefore m(B\hat{M}C) = 120^\circ$

$\therefore$ قياس الزاوية الزوجية يساوي $180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$

حيث أن قياس الزاوية بين مستويين هو الزاوية الحادة

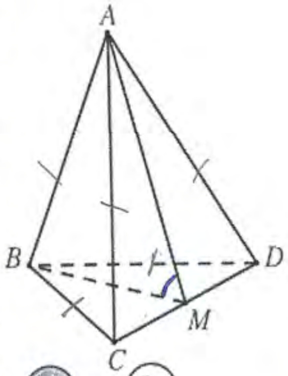
المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (1–4)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

أسئلة التمرينين (1–2)، على الشكل المقابل.

إذا كان $ABCD$ هرم جميع حروفه متساوية الطول، M منتصف $\overline{CD}$

فإن:



(1) $\overline{CD}$ عمودي على $\overline{AB}$ a   b

(2) الزاوية المستوية للزاوية الزوجية $(BDC, \overleftrightarrow{DC}, ADC)$ هي $\widehat{AMD}$ $\hat{AMB}$ a   b

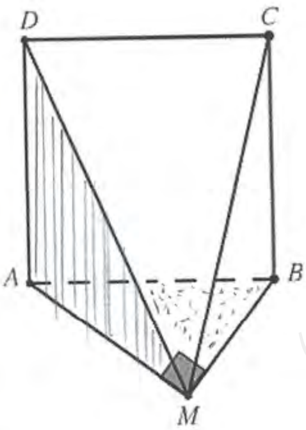
(1) (a) $\overleftrightarrow{BM} \perp \overleftrightarrow{CD}$, $\overleftrightarrow{AM} \perp \overleftrightarrow{CD}$

$\therefore \overleftrightarrow{CD} \perp (AMB)$, $\overline{AB} \subseteq (ABM)$

(2) (a) $\overleftrightarrow{DC}$ خط التقاطع بين المستويين ،

$\overleftrightarrow{AM} \perp \overleftrightarrow{CD}$ في المستوى ADC

$\overleftrightarrow{BM} \perp \overleftrightarrow{CD}$ في المستوى BDC



أسئلة التمرينين (3–4)، على الشكل المقابل.

المثلث AMB قائم الزاوية في M، $\overleftrightarrow{AD}$ متعامد مع المستوي AMB

إذا أخذنا النقطة C بحيث يكون $ABCD$ مربعًا فإن:

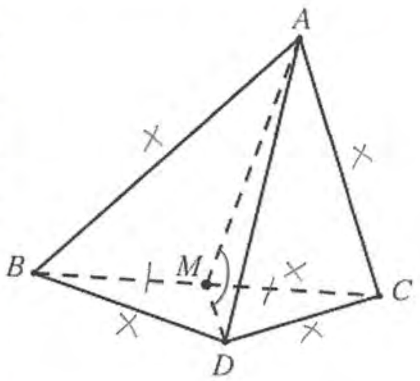
(3) $\overleftrightarrow{BM}$ متعامد مع (MAD) a   b

(4) $\overleftrightarrow{CB}$ متعامد مع (AMB) a   b

(3) $\overleftrightarrow{BM} \perp \overleftrightarrow{AM}$, $\overleftrightarrow{BM} \perp \overleftrightarrow{DA} \longrightarrow \overleftrightarrow{BM} \perp (MAD)$

(4) $\overleftrightarrow{AD} \perp (AMB)$, $\overleftrightarrow{CB} \parallel \overleftrightarrow{AD}$ $\therefore \overleftrightarrow{CB} \perp (AMB)$

في التمارين (5–10)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.



أسئلة التمارين (5–7)، على الشكل المقابل. حيث إن:

M منتصف $\overline{BC}$

ABC، DBC مثلثان لهما ضلع مشترك $\overline{BC}$ حيث $BC = x$

وهما متطابقا الأضلاع ولا يحويهما مستو واحد.

(5) الزاوية الزوجية $(BAC\ ,\ \overleftrightarrow{BC}\ ,\ BCD)$ هي:

(a) $A\widehat{M}D$ (b) $B\widehat{M}C$ (c) $A\widehat{M}B$ (d) $B\widehat{A}M$

في المثلث ABC متطابق الأضلاع و M منتصف $\overline{BC}$ ← $\overleftrightarrow{AM} \perp \overleftrightarrow{BC}$

في المثلث BDC متطابق الأضلاع و M منتصف $\overline{BC}$ ← $\overleftrightarrow{DM} \perp \overleftrightarrow{BC}$

∴ زاوية $(A\hat{M}D)$ هي الزاوية المستوية للزاوية الزوجية $\overleftrightarrow{BC}$

---

(6) إذا كان: $m(A\widehat{M}D) = 60°$ فقيمة AD بدلالة x هي:

(a) $\frac{x}{2}$ (b) $\frac{x\sqrt{2}}{2}$ (c) $x\sqrt{3}$ (d) $\frac{x\sqrt{3}}{2}$

∵ المثلثان ABC و DBC مثلثان متطابقا الأضلاع وطول ضلع كل منهما x

∴ $AM = DM = \frac{\sqrt{3}}{2}x$

في المثلث AMD $DM = AM$, $m(A\hat{M}D) = 60°$

∴ $m(\hat{A}) = m(\hat{D}) = 60°$ فيكون AMD مثلث متطابق الأضلاع $AD = \frac{\sqrt{3}}{2}x$

---

(7) إذا كان $AD = \frac{x\sqrt{3}}{2}$، فإنّ: $m(A\widehat{M}D)$ يساوي:

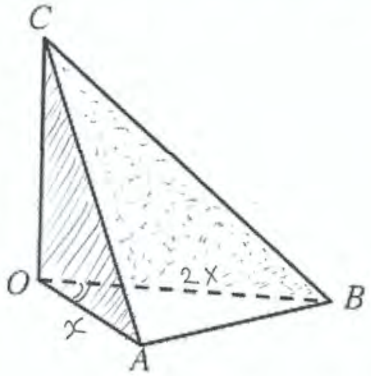
(a) $90°$ (b) $45°$ (c) $60°$ (d) $30°$

∵ $AM = DM = \frac{\sqrt{3}}{2}x$

∴ $DA = AM = DM = \frac{\sqrt{3}}{2}x$, $m(A\hat{M}D) = 60°$

حيث يكون المثلث AMD متطابق الأضلاع .

أسئلة التمرينين (9–8) على الشكل المقابل.



إذا كان OAB مثلث فيه:

$OA = x$ ، $OB = 2x$ ، $m(A\hat{O}B) = 60^\circ$

$\overleftrightarrow{OC}$ متعامد مع المستوي OAB

(8) طول $\overline{AB}$ يساوي:

(a) x (b) $x\sqrt{2}$ (c) $x\sqrt{3}$ (d) $\frac{x}{2}$

في المثلث OAB بقاعدة جيب التمام

$(AB)^2 = (2x)^2 + x^2 - 2(2x)(x)\cos 60^\circ = 3x^2$

$\therefore AB = \sqrt{3x^2} = \sqrt{3}\,x$

---

(9) قياس الزاوية الزوجية $(AOC, \overleftrightarrow{OC}, BOC)$ هو:

(a) 30° (b) 45° (c) 60° (d) 90°

$\overleftrightarrow{OC}$ خط التقاطع أو حافة الزاوية الزوجية

$\overleftrightarrow{OC} \perp \overleftrightarrow{OB}$ في المستوى OBC

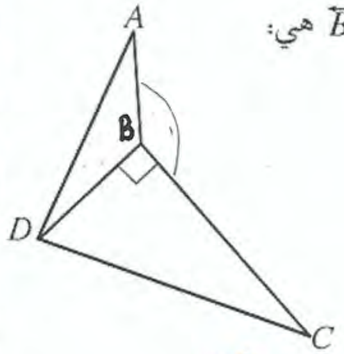
$\overleftrightarrow{OC} \perp \overleftrightarrow{OA}$ في المستوى AOC

$\therefore$ زاوية $(A\hat{O}B)$ هي الزاوية المستوية للزاوية الزوجية وقياسها معطى 60°

---

(10) في الشكل المقابل، المثلث DBC قائم الزاوية في B،

فإذا كان $\overleftrightarrow{AB}$ عمودي على (DBC) فإن الزاوية المستوية للزاوية الزوجية $\overleftrightarrow{BD}$ هي:



(a) $D\hat{B}C$ (b) $A\hat{B}C$ (c) $A\hat{B}D$ (d) $A\hat{D}C$

$\overleftrightarrow{BD}$ حافة الزاوية الزوجية

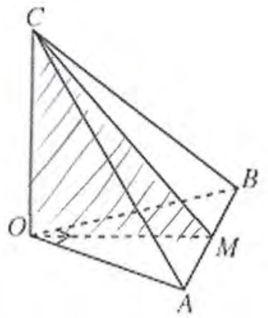
$\overleftrightarrow{AB} \perp (DBC) \quad \therefore \overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{BD}$ ، $\overleftrightarrow{DB} \perp \overleftrightarrow{BC}$

$\therefore$ الزاوية $(A\hat{B}C)$ بين المتعامدين $\overleftrightarrow{AB}$ ، $\overleftrightarrow{BC}$ هي الزاوية المستوية .

المستويات المتعامدة

Perpendicular Planes

المجموعة A تمارين مقالية



(1) OAB مثلث قائم في $\widehat{O}$، $OA = OB = 1$

$\overleftrightarrow{OC}$ متعامد مع المستوي OAB، $OC = 1$،

M منتصف $\overline{AB}$

(a) أثبت أن المستوي COM متعامد مع المستوي OAB

$\overleftrightarrow{OC} \perp (OAB)$, $\overleftrightarrow{CO} \subseteq (COM)$

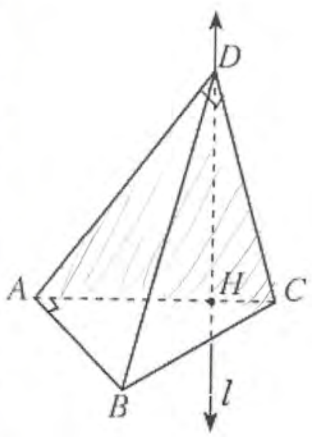
$\therefore (COM) \perp (OAB)$

(b) أثبت أن المستوي COM متعامد مع المستوي CAB

$\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{OC}$, $\because OA = OB$, $MA = MB$ $\therefore \overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{OM}$

$\therefore \overleftrightarrow{AM} \perp (C\ M)$ $\because \overleftrightarrow{AB} \subseteq (CAB)$

$\therefore (COM) \perp (CAB)$



(2) ABC مثلث قائم في $\widehat{A}$، $H \in \overline{AC}$

نأخذ المستقيم l المتعامد مع المستوي ABC والمار بالنقطة H

$D \in \overleftrightarrow{l}$ حيث يكون المثلث ADC قائم الزاوية في D

(a) أثبت أن $\overleftrightarrow{AB}$ متعامد مع (ACD)

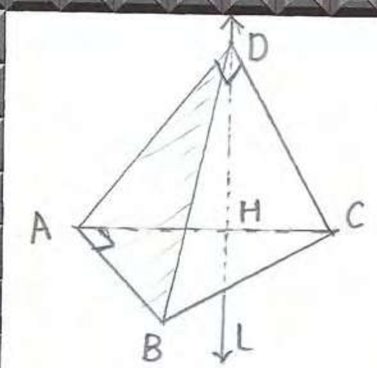
معطى $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{AC}$ ..... (1)

$\because \overleftrightarrow{DH} \perp (ABC)$ $\therefore \overleftrightarrow{DH} \perp \overleftrightarrow{AB}$ .... (2)

من (1)، (2)

$\overleftrightarrow{AB} \perp (ADC)$

حيث $\overleftrightarrow{AC}$, $\overleftrightarrow{DH}$ متقاطعان يعينان مستوى وحيد هو ADC



(b) استنتج أن $\overleftrightarrow{AB}$، $\overleftrightarrow{CD}$ متعامدان وأن المثلث ABD قائم في $\widehat{A}$

$\overleftrightarrow{AB} \perp (ADC)$, $\overleftrightarrow{DC} \subset (ADC)$

$\therefore$ $\overleftrightarrow{AD}$, $\overleftrightarrow{CD}$ متعامدان

$\because \overleftrightarrow{AD} \subset (ADC) \quad \therefore \overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{AD}$

$\therefore$ المثلث ABD قائم في $\hat{A}$

(c) أثبت أن $\overleftrightarrow{CD}$ متعامد مع (ADB)

$\overleftrightarrow{AD} \perp \overleftrightarrow{CD}$ معطى .... (1)

$\because \overleftrightarrow{AB} \perp (ADC) \quad , CD \subseteq (ADC) \quad \therefore \overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{CD}$ ....(2)

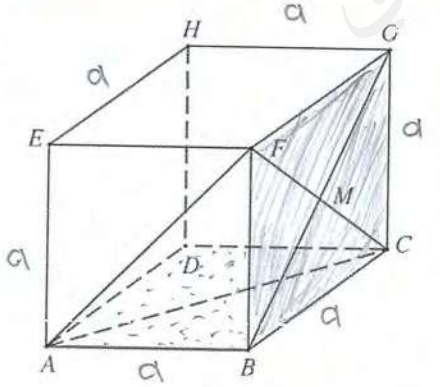
من (1)، (2)

$\therefore \overleftrightarrow{CD} \perp (ADB)$

(d) استنتج أن (BDA), (CDB) متعامدان.

$\because \overleftrightarrow{CD} \perp (ADB) \quad , \quad \overleftrightarrow{CD} \subseteq (CDB)$

$\therefore (ADB) \perp (CDB)$



(3) $ABCDEFGH$ مكعب طول ضلعه a:

(a) أثبت أن: $(ABCD) \perp (FBCG)$

من خواص المكعب

$\overleftrightarrow{FB} \perp \overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{FB} \perp \overleftrightarrow{BC} \rightarrow \overleftrightarrow{FB} \perp (ABCD)$

$\because \overleftrightarrow{FB} \subseteq (FBCG)$

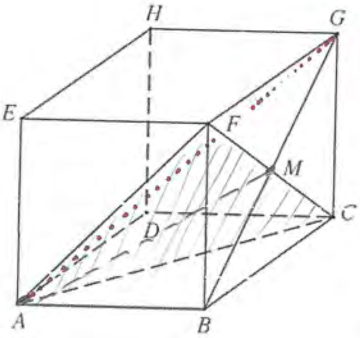
$\therefore (ABCD) \perp (FBCG)$

(b) أثبت أن المثلث ACF متطابق الأضلاع.

$\overline{AC}$, $\overline{CF}$, $\overline{AF}$ هي أوتار لمثلثات قائمة أطوال أضلاع القائمة فيها جميعاً متطابقة وكل منها يساوي ضلع القائمة a

$\therefore AC = CF = AF = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2}a$

أو أقطار لأوجه مكعب



(c) M نقطة تقاطع $\overline{FC}$، $\overline{BG}$،

أثبت أن: $\overleftrightarrow{AM} \perp \overleftrightarrow{FC}$

∵ المثلث AFC متطابق الأضلاع

M منتصف $\overline{FC}$

$\therefore \overline{AM} \perp \overline{FC}$

$\therefore \overleftrightarrow{AM} \perp \overleftrightarrow{FC}$

(d) أثبت أن: $(BCGF) \perp (ABG)$

$\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{BC}$, $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{BF} \longrightarrow \overleftrightarrow{AB} \perp (BCGF)$

$\overleftrightarrow{AB} \subseteq (ABG)$

$\therefore (BCGF) \perp (ABG)$

(e) أثبت أن: $(ABG) \perp \overleftrightarrow{FC}$

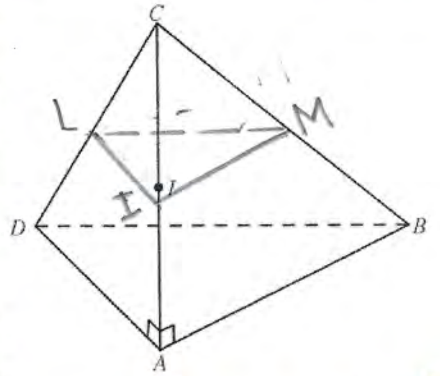
$\overleftrightarrow{AB} \perp (BCGF)$, $\overleftrightarrow{FC} \subseteq (BCGF)$

$\therefore \overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{FC}$ ...... (1)

قطرا المربع متعامدان $\overleftrightarrow{BG} \perp \overleftrightarrow{FC}$ ..... (2)

من (1)، (2)

$\overleftrightarrow{FC} \perp (ABG)$



(4) $CABD$ هرم ثلاثي القاعدة فيه:

$\overleftrightarrow{CA} \perp (ABD)$ ، I منتصف $\overline{AC}$

أثبت أن المستوي العمودي من I على $\overleftrightarrow{AC}$ يقطع (ADC) بمستقيم يمر في منتصف $\overline{DC}$ ويقطع (ABC) بمستقيم يمر في منتصف $\overline{BC}$

نفرض ILM مستوى عمودي على $\overleftrightarrow{AC}$ ويقطع $\overleftrightarrow{DC}$ فى L ويقطع $\overleftrightarrow{BC}$ في M

$\because \overleftrightarrow{AC} \perp (ABD) \quad , \overleftrightarrow{AC} \perp (ILM)$

$\therefore (ABD) \parallel (ILM)$

المستويين ILM , ABD متوازيان ? ABC قاطع لهما فى $\overleftrightarrow{IM}$, $\overleftrightarrow{AB}$ على الترتيب.

$\therefore \overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{IM} \qquad \therefore \frac{CM}{MB} = \frac{CI}{IA} = 1$

$\therefore CM = MB$

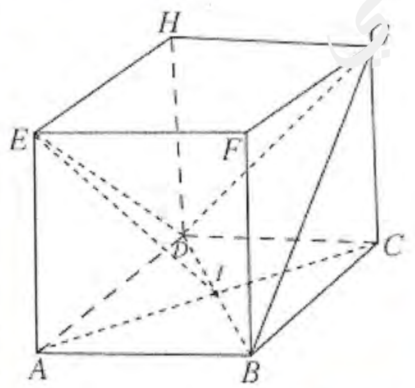
$\therefore$ M منتصف BC

بالمثل المستوى ADC قاطع للمستويين المتوازيين فى $\overleftrightarrow{AD}$ و $\overleftrightarrow{IL}$ على الترتيب

$\therefore \overleftrightarrow{AD} \parallel \overleftrightarrow{IL} \Rightarrow \frac{CI}{IA} = \frac{CL}{LD}$

$\therefore CL = LD$

$\therefore$ L منتصف DC



(5) $ABCDEFGH$ مكعب طول ضلعه 5 cm

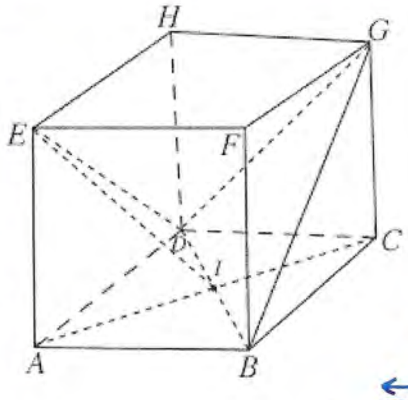
(a) أثبت أن المثلث EDB متطابق الأضلاع.

$\overline{ED}$, $\overline{BD}$ و $\overline{EB}$ أوتارًا فى مثلثات قائمة أضلاع القائمة فيها جميعاً تساوى طول ضلع المكعب 5

$\therefore ED = BD = EB = \sqrt{5^2+5^2} = 5\sqrt{2}$

$\therefore$ المثلث EDB متطابق الأضلاع.

أو هي أقطار لأوجه مكعب فهي متساوية في الطول.



(b) I نقطة تقاطع القطرين في المربع $ABCD$،

أثبت أن: $(DBG) \perp (AEI)$

المستويان AEI ، AEGC متطابقان

$\therefore AEI = AEGC$

قطر مربع $\overleftrightarrow{DB} \perp \overleftrightarrow{AC}$ ..... (1)

$\because \overleftrightarrow{EA} \perp (ABCD) , \overleftrightarrow{BD} \subseteq (ABCD)$

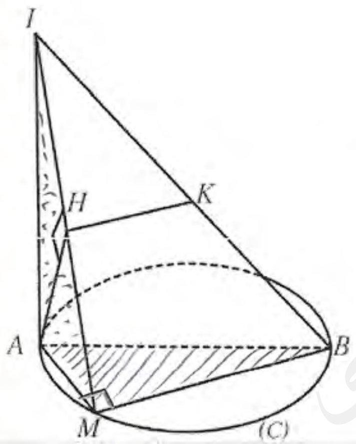
$\therefore \overleftrightarrow{BD} \perp \overleftrightarrow{EA}$ ..... (2)

من (1) ، (2) نستنتج أن $\overleftrightarrow{DB} \perp (ACGE)$

$\because \overleftrightarrow{DB} \subseteq (DBG)$

$\therefore (DBG) \perp (ABCD)$

$\therefore (DBG) \perp (AEI)$



(6) في الشكل المقابل:

(C) دائرة قطرها $\overline{AB}$، M نقطة على الدائرة مختلفة عن A و B

$\overline{IA}$ عمودي على مستوى الدائرة.

(a) أثبت أن: $(IMB) \perp (IAM)$

$\overline{AB}$ قطر في الدائرة ← $m(\hat{AMB}) = 90^\circ$

$\therefore \overleftrightarrow{AM} \perp \overleftrightarrow{MB}$ .... (1)

$\overleftrightarrow{IA}$ عمودي على مستوى الدائرة ، $\overleftrightarrow{MB}$ محتوى في مستوى الدائرة

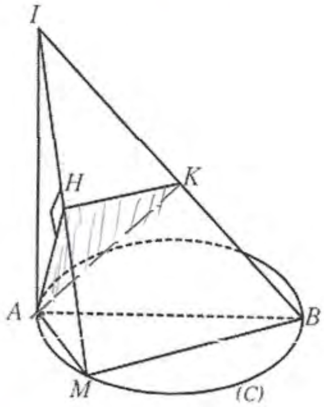
$\therefore \overleftrightarrow{IA} \perp \overleftrightarrow{MB}$ .... (2)

من (1) ، (2)

$\overleftrightarrow{MB} \perp (IAM)$ .... *

$\therefore \overleftrightarrow{MB} \subseteq (IMB)$ .... **

من * ، ** $(IAM) \perp (IMB)$



(b) إذا كان $\overline{AH} \perp \overline{IM}$, K نقطة على $\overline{IB}$

أثبت أن: $(IMB) \perp (AHK)$

$\overleftrightarrow{MB} \perp (\overleftrightarrow{AM}$, $\overleftrightarrow{MB} \perp \overleftrightarrow{IA}$

$\therefore \overleftrightarrow{MB} \perp (IAM)$

$\overleftrightarrow{AH} \subseteq (IAM) \quad \therefore \overleftrightarrow{MB} \perp \overleftrightarrow{AH} \; \ldots\ldots (1)$

$\because \overleftrightarrow{AH} \perp \overleftrightarrow{IM} \; \ldots\ldots (2)$

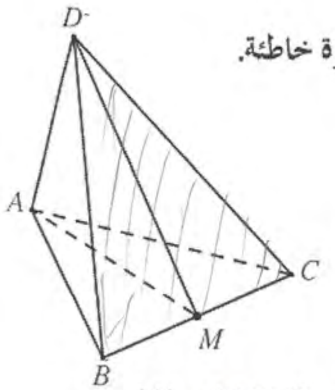
من (1) ، (2) نستنتج أن

$\overleftrightarrow{AH} \perp (IMB)$

$\overleftrightarrow{AH} \subseteq (AHK)$

$\therefore (AHK) \perp (IMB)$

المجموعة B تمارين موضوعية



في التمارين (1–6)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

أسئلة التمارين (1–5)، على الشكل المقابل.

إذا كان $\overleftrightarrow{AD}$ متعامد مع (ABC)، $AB = AC$، M منتصف $\overline{BC}$ فإن:

(1) $(ABC) \perp (DAC)$ — (a) (b)

$\overleftrightarrow{AD} \perp (ABC)$, $\overleftrightarrow{AD} \subseteq (DAC)$

(2) $(DBC) \perp (DAC)$ — (a) (b)

(3) $(AMD) \perp (ABC)$ — (a) (b)

$\overleftrightarrow{BC} \perp (AMD)$, $\overleftrightarrow{BC} \subseteq (ABC)$

(4) $(AMD) \perp (DBC)$ ⓐ ⓑ

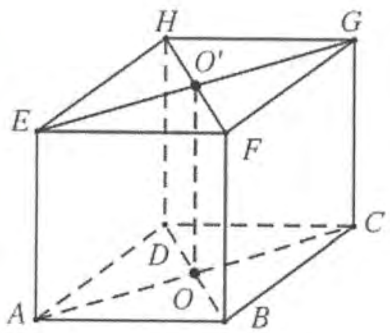
$\overleftrightarrow{BC} \perp (AMD) \ , \ \overleftrightarrow{BC} \subseteq (DBC)$

(5) $DC = DB$ ⓐ ⓑ

$\overleftrightarrow{DM} \perp \overleftrightarrow{BC} \ , \ M$ منتصف $\overline{BC}$

(6) المستويان العمودان على ثالث متوازيان. ⓑ ⓐ

ممكن يكونا متوازيان أو متقاطعان



في التمارين (7–12)، ظلّل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.

أسئلة التمرينين (7–8)، على الشكل المقابل حيث إن:

$ABCDEFGH$ شبه مكعب فيه:

O مركز المستطيل $ABCD$، O' مركز المستطيل $EFGH$

(7) $(EFGH)$، $(FGCB)$ هما:

ⓐ متعامدان ⓑ متوازيان ⓒ منطبقان ⓓ ليس أيًا مما سبق

$\overleftrightarrow{EF} \ (FGCB) \ , \ \overleftrightarrow{EF} \subseteq (EFGH)$

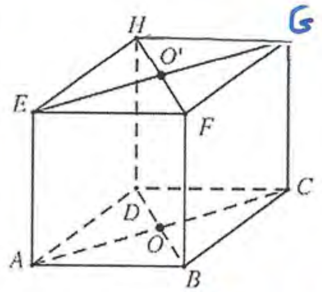
(8) $(DBFH)$، $(ABCD)$ هما:

ⓐ متوازيان ⓑ منطبقان ⓒ متعامدان ⓓ ليس أيًا مما سبق

$\overleftrightarrow{FB} \perp (ABCD) \ , \ \overleftrightarrow{FB} \subseteq (FGCB)$

أسئلة التمرينين (10–9)، على الشكل المقابل حيث إن: $ABCDEFGH$ مكعب طول ضلعه a.

O مركز المربع $ABCD$، O' مركز المربع $EFGH$



(9) $(EACG)$، $(DHFB)$ هما:

(a) منطبقان (b) متعامدان

(c) متوازيان (d) ليس أيًا مما سبق

$\overleftrightarrow{AC} \perp (DHFB)$, $\overleftrightarrow{AC} \subseteq (EACG)$

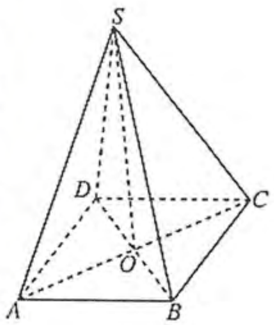
$\because \overleftrightarrow{AC} \perp \overleftrightarrow{OO'}$, $\overleftrightarrow{AC} \perp \overleftrightarrow{DB} \longrightarrow \overleftrightarrow{AC} \perp (DHFB)$

(10) (HGE)، (OAB) هما:

(a) متعامدان (b) متوازيان (c) منطبقان (d) ليس أيًا مما سبق

$\left.\begin{array}{l} HGE = HGFE \\ OAB = ABCD \end{array}\right\} \therefore HGFE \parallel ABCD$

$\therefore HGE \parallel OAB$



(11) إذا كان $ABCD$ مربع مركزه O، $\overleftrightarrow{SO} \perp (ABCD)$ فإن:

(a) $(SAB) \perp (SBC)$ (b) $(SAC) \perp (SBD)$

(c) $(SAB) \parallel (SCD)$ (d) $(SAD) \perp (ABCD)$

$\overleftrightarrow{AC} \perp \overleftrightarrow{DB}$, $\overleftrightarrow{AC} \perp \overleftrightarrow{SO}$ $\therefore \overleftrightarrow{AS} \perp (SBD)$

$\overleftrightarrow{AS} \subseteq (SAC)$

$\therefore (SAC) \perp (SBD)$

(12) إذا كان: $\overleftrightarrow{\ell} \perp \pi_1$, $\overleftrightarrow{\ell} \subset \pi_2$ فإن:

(a) $\pi_1 \parallel \pi_2$ (b) $\pi_1 \perp \pi_2$ (c) $\pi_1 \cap \pi_2 = \overleftrightarrow{\ell}$ (d) $\pi_1 = \pi_2$

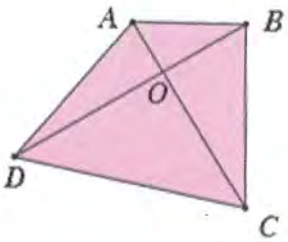
اذا تعامد مستقيم على مستو فكل مستوى آخر يمر بهذا المستقيم يكون عمودياً على المستوى الأول .

حاول ان تحل هندسة الفضاء

المستقيمات والمستويات في الفضاء
Lines and Planes in Space

مسلمات الفضاء-حالات تعيين مستوى في الفضاء –أوضاع المستقيمات في الفضاء – أوضاع مستويين في الفضاء

حاول أن تحل



1 في الشكل المقابل $\overline{BD}$, $\overline{AC}$ يتقاطعان في O

أثبت أن أضلاع الرباعي $ABCD$ تقع جميعها في مستوٍ واحد.

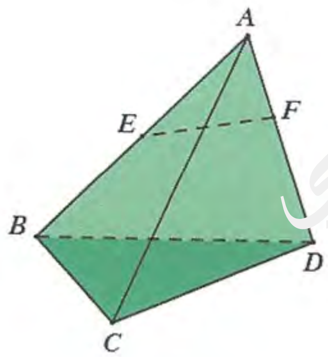
$\overline{BD}$ و $\overline{AC}$ متقاطعان فهما يعينان مستوى وحيد وليكن π

النقطتان B و A تقعان في هذا المستوى فيكون $\overline{AB} \subset \pi$

بالمثل B و C تقعان في π فيكون $\overline{BC} \subset \pi$

بالمثل $\overline{CD} \subset \pi$ ، $\overline{AD} \subset \pi$

حاول أن تحل



2 إذا كان $ABCD$ هرم ثلاثي القاعدة.

النقطة E تنتمي إلى $\overline{AB}$ ، النقطة F تنتمي إلى $\overline{AD}$.

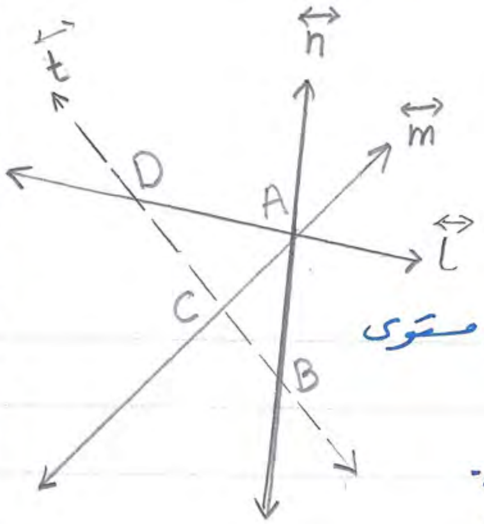
$\overleftrightarrow{EF}$ لا يوازي $\overleftrightarrow{BD}$. أثبت أن $\overleftrightarrow{EF}$ يقطع (BCD).

$\overleftrightarrow{EF}$ و $\overleftrightarrow{BD}$ غير متوازيان ويحويهما مستوى واحد هو (ABD) فهما متقاطعان في نقطة ولتكن K

$\therefore \overleftrightarrow{EF} \cap \overleftrightarrow{BD} = \{K\}$

$\because \overleftrightarrow{BD} \subset (BCD) \quad \therefore K \in (BCD)$

$\therefore \overleftrightarrow{EF} \cap (BCD) = \{K\}$



حاول أن تحل

3 $\overleftrightarrow{l}, \overleftrightarrow{m}, \overleftrightarrow{n}$ ثلاثة مستقيمات مختلفة تتقاطع في A.

المستقيم t يقطع المستقيمات الثلاثة في B, C, D على الترتيب.

أثبت أن المستقيمات l, m, n, t تقع في مستوٍ واحد.

$\overleftrightarrow{l}$ و $\overleftrightarrow{m}$ متقاطعان في A فهما يعينان مستوى وحيد وليكن π

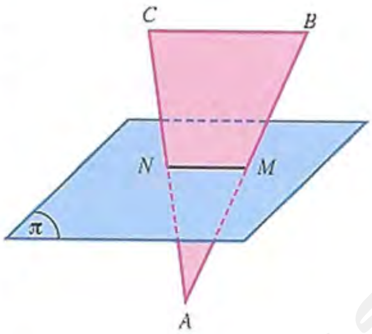
$\because \overleftrightarrow{t} \cap \overleftrightarrow{m} = \{C\}$, $\overleftrightarrow{t} \cap \overleftrightarrow{l} = \{D\}$

$\therefore \{C, D\} \subset \overleftrightarrow{t} \cap \pi \quad \therefore \overleftrightarrow{t} \subset \pi$

$\because \overleftrightarrow{t} \cap \overleftrightarrow{n} = \{B\}$, $\overleftrightarrow{m} \cap \overleftrightarrow{n} = \{A\}$

$\therefore \{A, B\} \subset \overleftrightarrow{n} \cap \pi \quad \therefore \overleftrightarrow{n} \subset \pi$

المستقيمات والمستويات المتوازية في الفضاء
Parallel Lines and Planes in Space



حاول أن تحل

1 في الشكل المقابل: المثلث ABC فيه M منتصف $\overline{AB}$، N منتصف $\overline{AC}$،

M، N تنتميان إلى المستوي π.

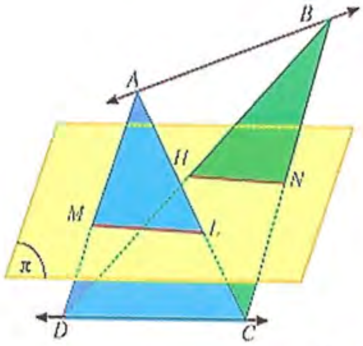
أثبت أن $\overleftrightarrow{BC} \parallel \pi$.

$\because M$ منتصف $\overline{AB}$ ، N منتصف $\overline{AC}$

$\therefore \overleftrightarrow{MN} \parallel \overleftrightarrow{CB}$, $\overleftrightarrow{MN} \subset \pi$

$\therefore \overleftrightarrow{CB} \parallel \pi$

حاول أن تحل



2 في الشكل المقابل: إذا كان $\overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{CD}$ متخالفان، $\overleftrightarrow{CD} \parallel \pi$.

$\overleftrightarrow{AD}$ تقطع π في M، $\overleftrightarrow{AC}$ تقطع π في L.

$\overleftrightarrow{BD}$ تقطع π في H، $\overleftrightarrow{BC}$ تقطع π في N.

إذا كان $\overleftrightarrow{AB} \parallel \pi$ فأثبت أن $LMHN$ متوازي أضلاع.

$\overleftrightarrow{CD} \parallel \pi$, $\overleftrightarrow{DC} \subset (ADC)$, $(ADC) \cap \pi = \overleftrightarrow{ML}$

$\therefore \overleftrightarrow{DC} \parallel \overleftrightarrow{ML}$ ... (1)

بالمثل $\overleftrightarrow{CD} \parallel \pi$, $\overleftrightarrow{DC} \subset (DCB)$, $(DCB) \cap \pi = \overleftrightarrow{HN}$

$\therefore \overleftrightarrow{DC} \parallel \overleftrightarrow{HN}$ ... (2) $\quad \therefore \overleftrightarrow{ML} \parallel \overleftrightarrow{HN}$

بالمثل:

$\overleftrightarrow{AB} \parallel \pi$, $\overleftrightarrow{AB} \subset (ABC)$, $(ABC) \cap \pi = \overleftrightarrow{NL}$

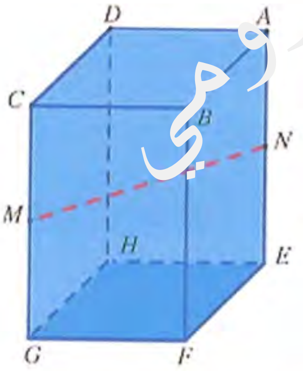
$\therefore \overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{NL}$

بالمثل نستطيع اثبات أن $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{MH}$

$\therefore \overleftrightarrow{NL} \parallel \overleftrightarrow{MH}$

$\therefore$ الشكل $LMHN$ متوازي أضلاع

حاول أن تحل



3 $ABCDEFGH$ شبه مكعب.

M منتصف $\overline{CG}$، N منتصف $\overline{AE}$.

أثبت أن $(EFGH)$ يوازي $\overleftrightarrow{MN}$.

من خواص شبه المكعب $AEGC$ مستطيل

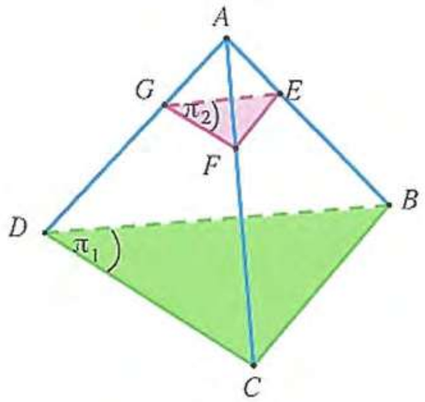
$\because M$ منتصف $\overline{CG}$ و N منتصف $\overline{AE}$

$\therefore$ الشكل $MNEG$ مستطيل

$\therefore \overleftrightarrow{MN} \parallel \overleftrightarrow{GE}$, $\overleftrightarrow{GE} \subset (EFGH)$

$\therefore \overleftrightarrow{MN} \parallel (EFGH)$

حاول أن تحل



4 في الشكل المقابل، $ABCD$ هرم ثلاثي.

المستويان π_2 , π_1 متوازيان.

إذا كان $\frac{AE}{EB} = \frac{1}{3}$ ، $FG = 6\text{ cm}$

فأوجد DC

π_2 و π_1 متوازيان والمستوى ADC يقطعهما في $\overleftrightarrow{GF}$, $\overleftrightarrow{DC}$

$\therefore \overleftrightarrow{GF} \parallel \overleftrightarrow{DC} \longrightarrow \frac{FG}{DC} = \frac{AF}{AC} \quad \text{--- (1)}$

بالمثل π_1 , π_2 يقطعهما المستوى ABC في $\overleftrightarrow{FE}$, $\overleftrightarrow{CB}$

$\therefore \overleftrightarrow{FE} \parallel \overleftrightarrow{CB} \longrightarrow \frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC} \quad \text{--- (2)}$

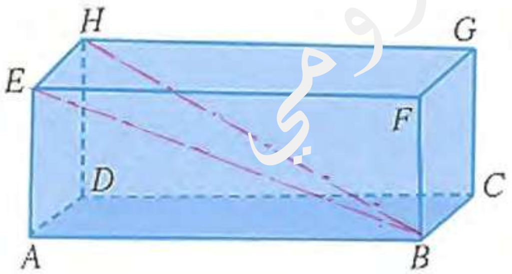
من (1) و (2) نستنتج أن

$\frac{AF}{AC} = \frac{FG}{DC} = \frac{AE}{AB} = \frac{1}{3} \qquad \therefore DC = 18$ سم

تعامد مستقيم مع مستوٍ

Perpendicular Line With a Plane

حاول أن تحل



1 في شبه المكعب المقابل،

أثبت أن المثلث BEH قائم في $\widehat{E}$.

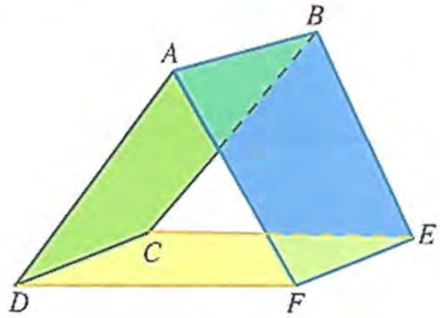
$\overleftrightarrow{EH} \perp \overleftrightarrow{EA}$, $\overleftrightarrow{EH} \perp \overleftrightarrow{EF}$ $\quad \therefore \overleftrightarrow{EH} \perp (ABFE)$

$\because \overleftrightarrow{EB} \subset (ABFE)$

$\therefore \overleftrightarrow{EH} \perp \overleftrightarrow{EB} \qquad \therefore m(B\hat{E}H) = 90^\circ$

$\therefore$ المثلث BEH قائم في $\hat{E}$

حاول أن تحل



2 في الشكل المقابل:

$ABEF, ABCD$ مستطيلان

أثبت أن: $(AFD) \,/\!/\, (BEC)$

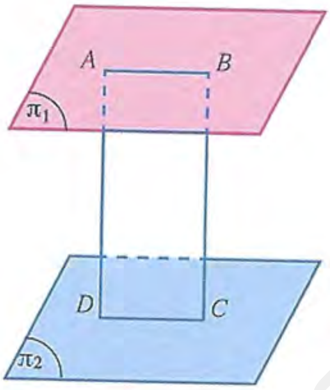
$\because \overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{BC}$, $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{BE}$ $\quad \therefore \overleftrightarrow{AB} \perp (BEC)$ ... 1

بالمثل $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{AD}$, $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{AF}$ $\quad \therefore \overleftrightarrow{AB} \perp (AFD)$ ... 2

إذا كان مستقيم عمودياً على مستويين مختلفين فإنهما يكونان متوازيين

$\therefore (BEC) \,/\!/\, (AFD)$

حاول أن تحل



3 في الشكل المقابل: $\pi_1 \,/\!/\, \pi_2$

A, B نقطتان في π_1،

C, D نقطتان في π_2 حيث: A, B, C, D في مستوى واحد

$\overline{AD} \perp \pi_2$, $\overline{BC} \perp \pi_2$ أثبت أن $ABCD$ مستطيل.

π_1 ، π_2 مستويان متوازيان يقطعهما المستوى $ABCD$ في $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{DC}$

$\therefore \overleftrightarrow{AB} \,/\!/\, \overleftrightarrow{DC}$ -----(1)

$\because \overleftrightarrow{BC} \perp \pi_2 \quad \therefore m(B\hat{C}D) = 90^\circ$

$\because \overleftrightarrow{AD} \perp \pi_2 \quad \therefore m(A\hat{D}C) = 90^\circ$

$(A\hat{D}C)$, $(B\hat{C}D)$ زاويتان داخلتان للمستقيمين $\overleftrightarrow{AD}$ و $\overleftrightarrow{BC}$

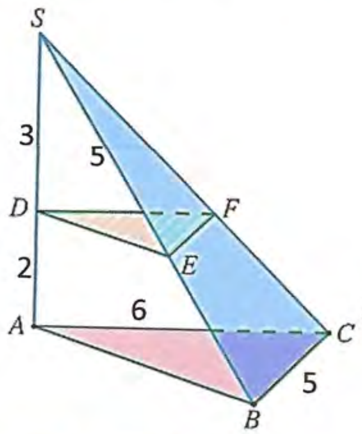
ومجموع قياسهما يساوي 180°

$\therefore \overleftrightarrow{AD} \,/\!/\, \overleftrightarrow{BC}$ -----(2)

من (1) ، (2) الشكل $ABCD$ متوازي أضلاع إحدى زواياه قائمة فهو مستطيل

حاول أن تحل

4 في الشكل المقابل:



المستويان $(ABC), (DEF)$ متوازيان

$\overleftrightarrow{SA} \perp (ABC)$

إذا كان: $SE = 5\text{ cm}$, $SD = 3\text{ cm}$, $DA = 2\text{ cm}, BC = 5\text{ cm}, AC = 6\text{ cm}$

فأوجد محيط المثلث DEF

(DEF) و (ABC) مستويان متوازيان يقطعهما المستوى (SAC) في $\overleftrightarrow{DF}$ و $\overleftrightarrow{AC}$

$\therefore \overleftrightarrow{DF} \parallel \overleftrightarrow{AC} \longrightarrow \frac{SD}{SA} = \frac{DF}{AC} = \frac{SE}{SB} = \frac{3}{5}$

$\therefore DF = \frac{3\times 6}{5}$ $\quad \therefore DF = \frac{18}{5}$ $\quad DF = 3.6$

بالمثل (DEF) و (ABC) متوازيان ويقطعهما المستوى (SBC) في $\overleftrightarrow{BC}$ و $\overleftrightarrow{EF}$

$\therefore \overleftrightarrow{EF} \parallel \overleftrightarrow{BC} \longrightarrow \frac{SE}{SB} = \frac{EF}{BC} = \frac{3}{5}$

$\therefore EF = 3$

$\because \overleftrightarrow{SA} \perp (ABC)$, $(ABC) \parallel (DEF)$

$\therefore \overleftrightarrow{SA} \perp (DEF)$ $\quad \because \overleftrightarrow{DE} \subset (DEF)$

$\therefore \overleftrightarrow{SA} \perp \overleftrightarrow{DE}$

في المثلث القائم SDE ومن فيثاغورث

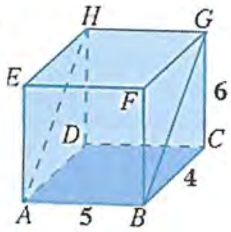
$DE = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$ $\quad \therefore DE = 4$

$\therefore$ محيط المثلث DEF يساوي

$DF + EF + DE = 3.6 + 3 + 4 = 10.6$ سم

الزاوية الزوجية

The Dihedral Angle



حاول أن تحل

1 في شبه المكعب المقابل، أثبت أن الزاوية GBC هي الزاوية المستوية للزاوية الزوجية للمستويين $(ABGH)$, $(ABCD)$، ثم أوجد قياسها.

$\overleftrightarrow{AB}$ حافة الزاوية الزوجية بين المستويين $ABCD$ و $ABGH$

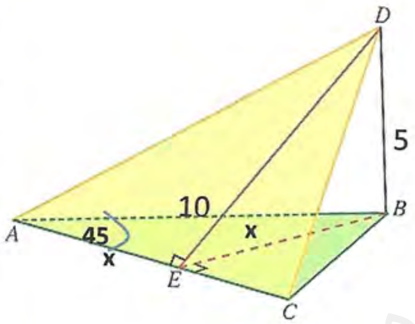
$\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{BC}$ في المستوى $ABCD$

$\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{BG}$ في المستوى $ABGH$ حيث $\overleftrightarrow{BG} \subset (BCGF)$

$\therefore$ $(C\hat{B}G)$ هي الزاوية المستوية للزاوية الزوجية

$\because \tan(G\hat{B}C) = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \qquad \therefore m(G\hat{B}C) = 56.3^\circ$

$\therefore$ قياس الزاوية الزوجية $= 56.3^\circ$



حاول أن تحل

2 في الشكل المقابل D نقطة خارج مستوى المثلث ABC،

$m(B\hat{A}C) = 45^\circ$، $AB = 10$ cm ، $DB = 5$ cm

$\overline{DB} \perp (ABC)$

$\overline{DE} \perp \overline{AC}$ ، $\overline{BE} \perp \overline{AC}$

أوجد قياس الزاوية الزوجية بين المستويين BAC، DAC

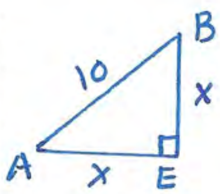
$\overleftrightarrow{AC}$ الحافة للزاوية الزوجية بين BAC و DAC

$\overleftrightarrow{BE} \perp \overleftrightarrow{AC}$ في المستوى (ABC) ، $\overleftrightarrow{DE} \perp \overleftrightarrow{AC}$ في المستوى ADC

$\therefore$ $(D\hat{E}B)$ هي الزاوية المستوية للزاوية الزوجية

$\because m(BAC) = 45^\circ$

$\therefore$ المثلث AEB قائم الزاوية متطابق الضلعين



$x^2 + x^2 = 100 \Rightarrow x^2 = 50 \Rightarrow \qquad \therefore AE = EB = 5\sqrt{2}$

في المثلث DBE

$\overline{DB} \perp (ABC)$, $\overline{EB} \subset ABC \qquad \therefore \overline{DB} \perp EB$

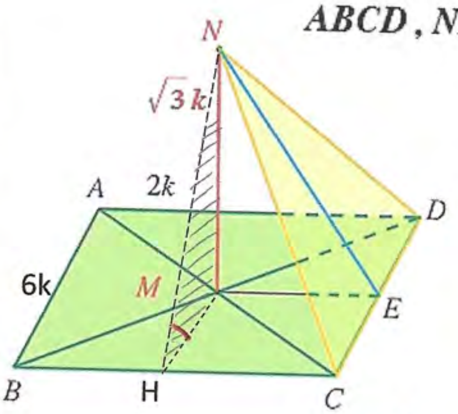
$\therefore \tan(D\hat{E}B) = \frac{5}{5\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \therefore m(D\hat{E}B) = 35.3^\circ$

حاول أن تحل

3 $ABCD$ مستطيل تقاطع قطراه في M، وفيه $AD = 2k$

أقيم $\overline{NM}$ عمودًا على $(ABCD)$ حيث N خارج مستواه بحيث $MN = \sqrt{3}\,k$

إذا كان $AB = 6\,k$، فأوجد قياس الزاوية الزوجية بين المستويين $ABCD$, NBC



نرسم عمود من نقطة M يقطع $\overline{BC}$ في H .
ثم نصل $\overline{NH}$

$MH = \frac{1}{2} AB = 3K$

$\overleftrightarrow{BC}$ حافة الزاوية الزوجية

$\overleftrightarrow{BC} \perp \overleftrightarrow{MH}$ في المستوى ABCD .... (1)

$\left.\begin{array}{l} \overleftrightarrow{NM} \perp \overleftrightarrow{BC} \\ \overleftrightarrow{MH} \perp \overleftrightarrow{BC} \end{array}\right\} \therefore \overleftrightarrow{BC} \perp (MHN)$

$\therefore \overleftrightarrow{BC} \perp \overleftrightarrow{NH}$ في المستوى (NBC) ...... (2)

من (1) ، (2)

زاوية $(N\hat{H}M)$ هي الزاوية المستوية للزاوية الزوجية

$\tan(N\hat{H}M) = \frac{NM}{HM} = \frac{\sqrt{3}k}{3K} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

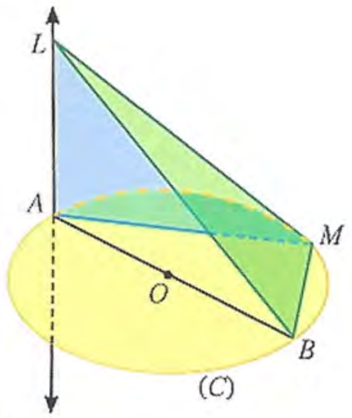
$\therefore m(N\hat{H}M) = 30^\circ$

$\therefore$ قياس الزاوية الزوجية بين المستويين NBC , ABCD
تساوي 30°

(S)

المستويات المتعامدة

Perpendicular Planes



حاول أن تحل

1 في الشكل المقابل، C دائرة مركزها O، $\overline{AB}$ قطر.

M نقطة تنتمي إلى الدائرة.

$\overleftrightarrow{LA}$ متعامد مع مستوي الدائرة.

أثبت أن: a $\overleftrightarrow{BM} \perp (LAM)$

b $(LBM) \perp (LAM)$

(a)

$\overline{AB}$ قطر في الدائرة

$\therefore m(A\hat{M}B) = 90^\circ$ $\therefore \overleftrightarrow{AM} \perp \overleftrightarrow{BM}$ ... (1)

$\overleftrightarrow{LA}$ متعامد مع مستوى الدائرة ، $\overleftrightarrow{BM}$ محتوى في مستوى الدائرة

$\therefore \overleftrightarrow{LA} \perp \overleftrightarrow{MB}$ ... (2)

من (1) ، (2)

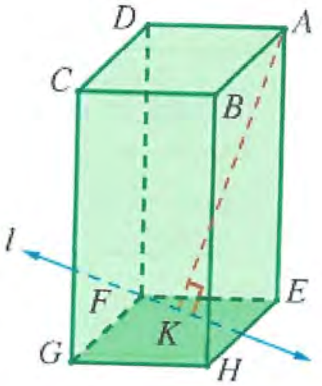
$\overleftrightarrow{MB} \perp (LAM)$

(b)

$\because \overleftrightarrow{MB} \perp (LAM)$, $\overleftrightarrow{MB} \subset (LMB)$

$\therefore (LBM) \perp (LAM)$

حاول أن تحل



2 في شبه المكعب $ABCDEFGH$ المقابل:

$\overleftrightarrow{l}$ مستقيم في $(EFGH)$ يمر في F.

$\overline{AK} \perp \overleftrightarrow{l}$

أثبت أن: (a) $\overline{EK} \perp \overleftrightarrow{l}$

(b) $(FDK) \perp (AEK)$

(a) من خواص شبه المكعب

$\overleftrightarrow{AE} \perp \overleftrightarrow{EH}$, $\overleftrightarrow{AE} \perp \overleftrightarrow{FE}$

$\therefore \overleftrightarrow{AE} \perp (EFGH)$

$\because \overleftrightarrow{l} \subset (EFGH)$ $\therefore \overleftrightarrow{l} \perp \overleftrightarrow{AE}$ ... (1)

$\because l \perp \overleftrightarrow{AK}$ .... (2)

من (1) و (2)

$\overleftrightarrow{l} \perp (AEK)$

$\because \overleftrightarrow{EK} \subset (AEK)$

$\therefore \overleftrightarrow{EK} \perp \overleftrightarrow{l}$

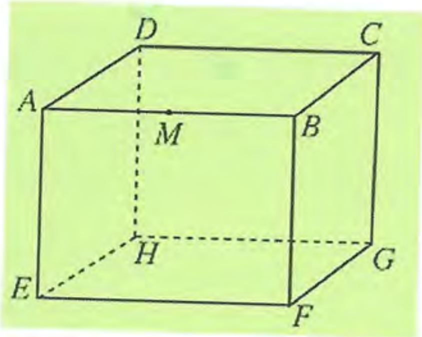
(b)

$\because \overleftrightarrow{l} \perp (AEK)$, $\overleftrightarrow{l} \subset (FDK)$

حيث $\overleftrightarrow{l}$ يمر في نقطة F ، $K \in \overleftrightarrow{l}$

$\therefore (AEK) \perp (FDK)$

اختبار الوحدة العاشرة



(1) $ABCDEFGH$ مكعب، M منتصف $\overline{AB}$

(a) هل $\overleftrightarrow{AB}$ والنقطة M تعينان مستويًا واحدًا؟

M منتصف $\overline{AB}$

$\therefore M \in \overleftrightarrow{AB}$

$\therefore$ $\overleftrightarrow{AB}$ والنقطة M لا تعينان مستويًا واحدًا. (نقطة خارج المستقيم والمستقيم تعينان مستويًا واحدًا)

(b) هل $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{GH}$ يعينان مستويًا واحدًا؟

من خواص المكعب $\overleftrightarrow{EF} \parallel \overleftrightarrow{HG}$, $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{EF}$

$\therefore \overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{HG}$

والمستقيمان المختلفان المتوازيان يعينان مستويًا واحدًا

(c) سمِّ ثلاثة مستويات تحتوي كل منها على النقطة M

$M \in \overline{AB}$ $\quad \therefore M \in \overleftrightarrow{AB}$

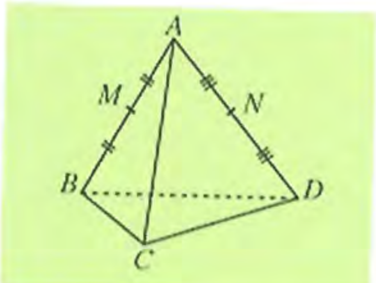
$\overleftrightarrow{AB} \subset ABCD$, $\overleftrightarrow{AB} \subset ABFE$, $\overleftrightarrow{AB} \subset ABHG$

$\therefore$ المستويات $(ABHG)$ و $(ABFE)$ و $(ABCD)$ تحتوي كل منها النقطة M

---

(2) $ABCD$ هرم ثلاثي القاعدة. النقطة M منتصف $\overline{AB}$ والنقطة N منتصف $\overline{AD}$

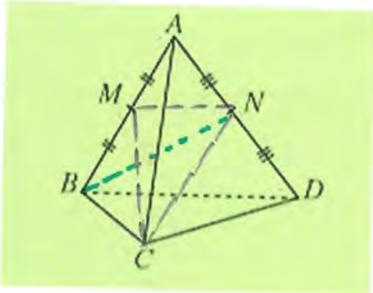
(a) $\overline{NM}$ ..//.. $\overline{BD}$



في المثلث ABD

M منتصف $\overline{AB}$, N منتصف $\overline{AD}$

$\therefore \overline{MN} \parallel \overline{BD} \Rightarrow \overleftrightarrow{MN} \parallel \overleftrightarrow{BD}$



$(ABD) \cap (CNM) = \overleftrightarrow{MN}$ (b)

$M \in \overline{AB} \quad \therefore M \in (ABD)$

$N \in \overline{AD} \quad \therefore N \in (ABD)$

$\therefore \overleftrightarrow{MN} \subset (ABD)$

$\because \overleftrightarrow{MN} \subset (CNM)$

$\left.\right\} (ABD) \cap (CNM) = \overleftrightarrow{MN}$

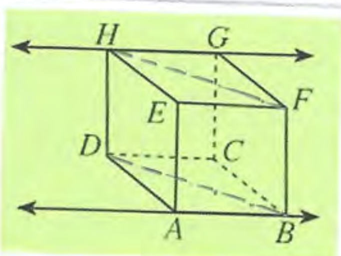
$(CNB) \cap (ABD) = \ldots\ldots$ (c)

$\because N \in \overline{AD} \quad \therefore N \in (ADB) \quad , \because B \in (ABD)$

$\therefore \overleftrightarrow{BN} \subset (ABD)$

$\because \overleftrightarrow{BN} \subset (BNC)$

$\therefore (CNB) \cap (ABD) = \overleftrightarrow{BN}$



(3) $ABCDEFGH$ شبه مكعب.

(a) أثبت أن: $\overleftrightarrow{GH} \parallel \overleftrightarrow{AB}$

من خواص شبه المكعب

$\because \overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{EF} \; , \; \overleftrightarrow{EF} \parallel \overleftrightarrow{HG} \qquad \therefore \overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{HG}$

المستقيمان الموازيان لثالث في الفضاء متوازيان

(b) أثبت أن: $BDHF$ هو مستطيل.

$\overleftrightarrow{FB} \perp (ABCD) \quad , \quad \overleftrightarrow{HD} \perp (ABCD)$

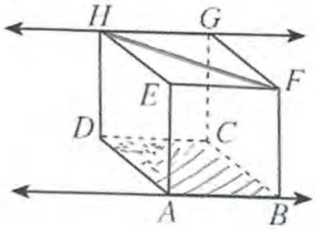
$\therefore \overleftrightarrow{FB} \parallel \overleftrightarrow{HD} \quad , \because FB = HD$ حرفان في المكعب

$\therefore$ $BDHF$ متوازي أضلاع

$\because \overleftrightarrow{DB} \subset (ABCD) \qquad \therefore \overleftrightarrow{FB} \perp \overleftrightarrow{BD}$

$\therefore m(F\hat{B}D) = 90^\circ$

$\therefore$ $BDHF$ متوازي أضلاع فيه زاوية قائمة فهو مستطيل



(c) أثبت أن: $\overleftrightarrow{HF}$ موازٍ للمستوي $ABCD$

$\overleftrightarrow{FB} \perp (ABCD)$, $\overleftrightarrow{HD} \perp (ABCD)$ $\therefore \overline{FB} \parallel \overline{HD}$

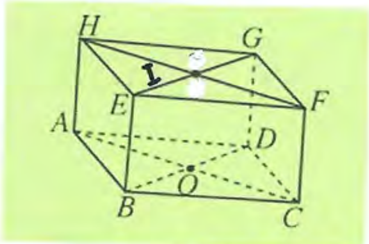
$\because FB = HD$

∴ الشكل $DBFH$ متوازي أضلاع

$\therefore \overleftrightarrow{HF} \parallel \overleftrightarrow{DB}$, $\overleftrightarrow{DB} \subset (ABCD)$ $\therefore \overleftrightarrow{HF} \parallel (ABCD)$

---

(4) $ABCDHEFG$ شبه مكعب.



النقطة O مركز المربع $ABCD$،

النقطة I مركز المربع $EFGH$

(a) أثبت أن النقاط: D، G، E تقع في المستوي $EGDB$

$\overleftrightarrow{EB} \parallel \overleftrightarrow{DG}$

∴ هما يعينان مستوى وحيد هو $(EBDG)$

∴ النقاط D ، G ، E تقع في المستوي $(EGDB)$

(b) أكمل: $(BEGD) \cap (AHFC) = \overleftrightarrow{OI}$

$I \in \overleftrightarrow{HF}$, $O \in \overleftrightarrow{AC}$ $\therefore \overleftrightarrow{OI} \subset (AHFC)$

بالمثل . $I \in \overleftrightarrow{EG}$, $O \in \overleftrightarrow{BD}$ $\therefore \overleftrightarrow{OI} \subset (BEGD)$

$\therefore (BEGD) \cap (AHFC) = \overleftrightarrow{OI}$

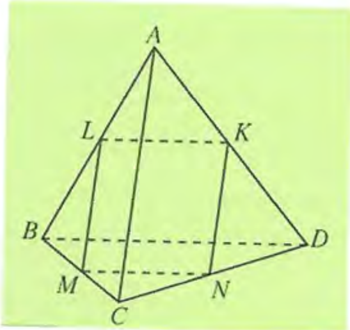
(c) أثبت أن: $\overleftrightarrow{AH} \parallel \overleftrightarrow{CF} \parallel \overleftrightarrow{OI}$

$\overleftrightarrow{FC} \parallel \overleftrightarrow{EB}$, $\overleftrightarrow{EB} \parallel \overleftrightarrow{HA}$ $\therefore \overleftrightarrow{FC} \parallel \overleftrightarrow{HA}$

∵ I منتصف $\overline{HF}$ ، O منتصف $\overline{AC}$

$\therefore \overleftrightarrow{OI} \parallel \overleftrightarrow{HA} \parallel \overleftrightarrow{CF}$

(5) $ABCD$ هرم ثلاثي القاعدة: L منتصف $\overline{AB}$، M منتصف $\overline{CB}$،
N منتصف $\overline{CD}$، K منتصف $\overline{AD}$



(a) أثبت أن: $\overleftrightarrow{NK} \parallel \overleftrightarrow{AC} \parallel \overleftrightarrow{LM}$

في المثلث ACD: K منتصف $\overline{AD}$ و N منتصف $\overline{CD}$

$\therefore \overleftrightarrow{NK} \parallel \overleftrightarrow{AC}$ ... (1)

بالمثل في المثلث ACB: L منتصف $\overline{AB}$ ، M منتصف $\overline{BC}$

$\therefore \overleftrightarrow{ML} \parallel \overleftrightarrow{AC}$ ... (2)

من (1) ، (2): $\overleftrightarrow{NK} \parallel \overleftrightarrow{AC} \parallel \overleftrightarrow{LM}$

(b) أثبت أن: $KLMN$ هو متوازي أضلاع.

في المثلث ABD: $\overline{LK}$ واصلة بين منتصفي ضلعين فيه $\overline{AD}$ و $\overline{AB}$

$\therefore \overleftrightarrow{LK} \parallel \overleftrightarrow{BD}$ ... (1)

بالمثل في المثلث BCD: $\overline{MN}$ واصلة بين منتصفي $\overline{CN}$ و $\overline{BC}$

$\therefore \overleftrightarrow{MN} \parallel \overleftrightarrow{BD}$ ... (2)

من (1) ، (2): $\overleftrightarrow{LK} \parallel \overleftrightarrow{MN}$

$\therefore$ الشكل KLMN فيه كل ضلعان متقابلان متوازيان فهو متوازي أضلاع

(c) أثبت أن: $\overline{NL}$ يتقاطع مع $\overline{KM}$

$\because$ الشكل KLMN متوازي أضلاع

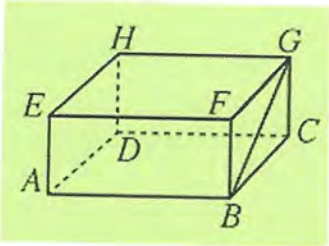
$\therefore$ النقاط K ، L ، M ، N تعيين مستوى وحيد

$\therefore \overleftrightarrow{KM}$ ، $\overleftrightarrow{LN}$ يقعان في مستوى واحد وهما غير متوازيان

$\therefore \overleftrightarrow{KM}$ ، $\overleftrightarrow{LN}$ متقاطعان

(6) $ABCDEFGH$ شبه مكعب.

أثبت أن: $\overleftrightarrow{GH}$ متعامد مع $\overleftrightarrow{GB}$



$\overleftrightarrow{HG} \perp \overleftrightarrow{CG}$ ، $\overleftrightarrow{HG} \perp \overleftrightarrow{GF}$ $\therefore \overleftrightarrow{HG} \perp (BCGF)$

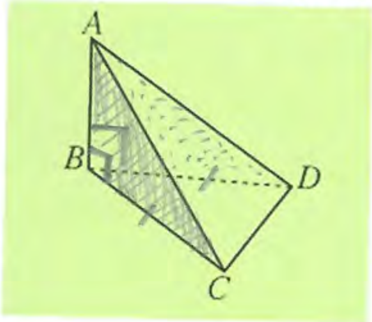
$\because \overleftrightarrow{BG} \subset (BGFC)$

$\therefore \overleftrightarrow{GH} \perp \overleftrightarrow{GB}$

---

(7) $ABCD$ هرم ثلاثي القاعدة $BC = BD$، $\overleftrightarrow{AB}$ متعامد مع المستوي BCD

أثبت أن: $m(A\widehat{C}B) = m(A\widehat{D}B)$



$\overleftrightarrow{AB} \perp (BCD)$ ، $\overleftrightarrow{BC} \subset (BCD)$ ، $\overleftrightarrow{BD} \subset (BCD)$

$\therefore \overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{BD}$ و $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{BC}$

$\therefore$ المثلثان ABD ، ABC قائما الزاوية

فيهما $\overline{AB}$ مشترك ، $BC = BD$

$\therefore$ المثلثان متطابقان

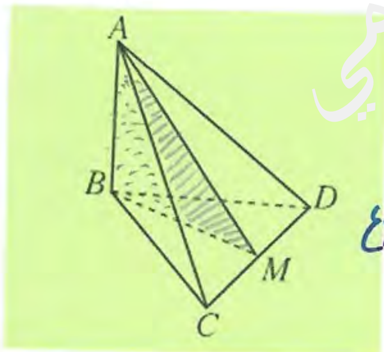
$\therefore m(A\widehat{C}B) = m(A\widehat{D}B)$

---

(8) $ABCD$ هرم ثلاثي القاعدة، قاعدته BCD مثلث متطابق الأضلاع، $\overleftrightarrow{AB} \perp (BCD)$؛

M منتصف $\overline{CD}$

(a) أثبت أن: $\overleftrightarrow{DC} \perp (ABM)$



$\because \overleftrightarrow{AB} \perp (BCD)$ ، $\overleftrightarrow{CD} \subset (BCD)$

$\therefore \overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{CD} \longrightarrow (1)$

$\because M$ منتصف $\overline{CD}$ في المثلث BCD المتطابق الأضلاع

$\therefore \overleftrightarrow{BM} \perp \overleftrightarrow{CD} \longrightarrow (2)$

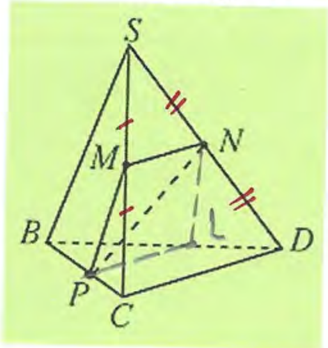
$\overleftrightarrow{CD} \perp (ABM) \longleftarrow$ من (1) ، (2)

(b) استنتج أن: $\overleftrightarrow{DC} \perp \overleftrightarrow{AM}$

$\overleftrightarrow{CD} \perp (ABM)$ ، $\overleftrightarrow{AM} \subset (ABM)$

$\therefore \overleftrightarrow{CD} \perp \overleftrightarrow{AM}$

(9) $SBCD$ هرم ثلاثي قاعدته BCD، M منتصف $\overline{SC}$، N منتصف $\overline{SD}$ ، P نقطة على $\overline{BC}$



(a) أثبت أن $\overline{MN}$ موازٍ للمستوي BCD

في المثلث SCD

N منتصف $\overline{DS}$ ، M منتصف $\overline{SC}$

$\therefore \overline{MN} \parallel \overline{CD} \quad \therefore \overleftrightarrow{MN} \parallel \overleftrightarrow{CD}$

$\because \overleftrightarrow{CD} \subset (BCD)$

$\therefore \overleftrightarrow{MN} \parallel (BCD)$

(b) إذا كان (PMN) يقطع $\overline{BD}$ في النقطة L

أثبت أن: $\overleftrightarrow{PL} \parallel \overleftrightarrow{CD}$

$\because$ المستوى (PMN) يقطع $\overleftrightarrow{BD}$ في L

$\therefore L \in (PMN)$

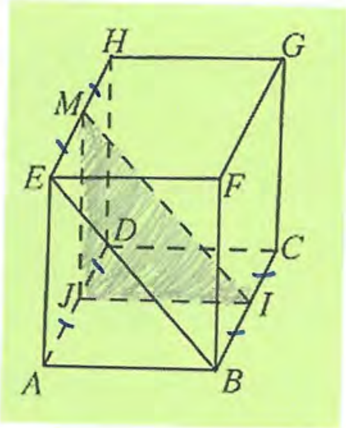
$\because \overleftrightarrow{MN}$ يوازي (BCD) والمستوى في $(MNPL)$ والمستويان

متقاطعان في $\overleftrightarrow{PL}$

$\therefore \overleftrightarrow{MN} \parallel \overleftrightarrow{PL}$

$\because \overleftrightarrow{MN} \parallel \overleftrightarrow{CD}$

$\therefore \overleftrightarrow{PL} \parallel \overleftrightarrow{CD}$



(10) $ABCDEFGH$ مكعب. I منتصف $\overline{BC}$،
J منتصف $\overline{AD}$، M منتصف $\overline{EH}$

(a) أثبت أن $\overline{AD} \perp (IJM)$

I منتصف $\overline{BC}$ و J منتصف $\overline{AD}$

$\therefore \overleftrightarrow{JI} \parallel \overleftrightarrow{DC} \parallel \overleftrightarrow{AB}$

$\therefore \overleftrightarrow{AD} \perp \overleftrightarrow{JI} \longrightarrow (1)$

بالمثل $\longleftarrow$ $\overleftrightarrow{MJ} \parallel \overleftrightarrow{HD} \parallel \overleftrightarrow{AE}$

$\therefore \overleftrightarrow{AD} \perp \overleftrightarrow{MJ} \longrightarrow (2)$

من (1) ، (2) $\overleftrightarrow{AD} \perp (IJM)$

(b) أثبت أن $\overline{AD} \perp (AEB)$

$\because \overleftrightarrow{AD} \perp \overleftrightarrow{AB}$ و $\overleftrightarrow{AD} \perp \overleftrightarrow{AE}$

$\therefore \overleftrightarrow{AD} \perp (AEB)$

(c) أثبت أن (IJM)، (ABE) متوازيان

لإثبات توازي مستويين نثبت أن هناك مستقيم عمودي على كلاهما

$\because \overleftrightarrow{AD} \perp (IJM)$ و $\overleftrightarrow{AD} \perp (AEB)$

$\therefore (IJM) \perp (ABE)$

(d) أثبت أن: $\overline{IJ} \perp (ADHE)$

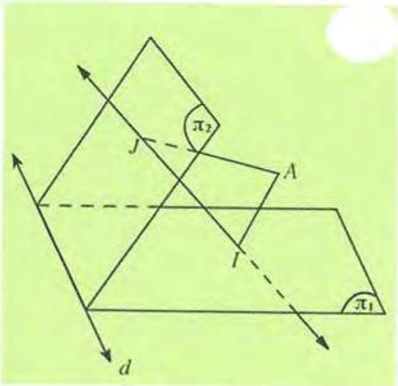
$\because \overleftrightarrow{AB} \perp (ADEH)$: $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{AD}$ و $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{AE}$

$\because \overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{JI}$

$\therefore \overleftrightarrow{IJ} \perp (ADHE)$

(11) (π_1) ، (π_2) يتقاطعان في $\vec{d}$، A نقطة خارج (π_1) وخارج (π_2)

$\vec{AI} \perp (\pi_1)$ ، $\vec{AJ} \perp (\pi_2)$



(a) أثبت أن $(AIJ) \perp (\pi_1)$

وأن $(AIJ) \perp (\pi_2)$

$\because \overleftrightarrow{AI} \perp \pi_1 \ , \ \overleftrightarrow{AI} \subset (AIJ)$

$\therefore (AIJ) \perp \pi_1$

$\because \overleftrightarrow{AJ} \perp \pi_2 \ , \ \overleftrightarrow{AJ} \subset (AJI)$

$\therefore (AJI) \perp \pi_2$

(b) أثبت أن $\vec{d} \perp (AIJ)$

$\because \overleftrightarrow{AI} \perp \pi_1 \ , \ \overleftrightarrow{d} \subset \pi_1$

$\therefore \overleftrightarrow{AI} \perp \overleftrightarrow{d} \longrightarrow (1)$

بالمثل ←

$\because \overleftrightarrow{AJ} \perp \pi_2 \ , \ \overleftrightarrow{d} \subset \pi_2$

$\therefore \overleftrightarrow{AJ} \perp \overleftrightarrow{d} \longrightarrow (2)$

$\overleftrightarrow{d} \perp (AIJ)$ من (1) ، (2)

(c) أثبت أن: $\vec{d} \perp \vec{IJ}$

$\because \overleftrightarrow{d} \perp (AIJ)$

و $\overleftrightarrow{IJ} \subset (AIJ)$

$\therefore \overleftrightarrow{d} \perp \overleftrightarrow{IJ}$

انتهى نسألكم الدعاء

ص 75

تمرين 11-2

نظرية ذات الحدين

The Binomial Theorem

المجموعة A تمارين مقالية

(1) استخدم مثلث باسكال لفك كل مما يلي:

(a) $(a+b)^3$ (b) $(a+b)^4$ (c) $(x+y)^6$

(a)

نستخدم الأعداد من الصف الرابع للمثلث كمعاملات 1 3 3 1

$\therefore (a+b)^3 = 1a^3b^0 + 3a^2b^1 + 3a^1b^2 + 1a^0b^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

(b) نستخدم الأعداد من الصف الخامس كمعاملات 1 4 6 4 1

$(a+b)^4 = 1a^4b^0 + 4a^3b^1 + 6a^2b^2 + 4a^1b^3 + 1a^0b^4$

$= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

(c) نستخدم الأعداد من الصف السابع كمعاملات 1 6 15 20 15 6 1

$(x+y)^6 = 1x^6y^0 + 6x^5y^1 + 15x^4y^2 + 20x^3y^3 + 15x^2y^4 + 6x^1y^5 + 1x^0y^6$

$= x^6 + 6x^5y + 15x^4y^2 + 20x^3y^3 + 15x^2y^4 + 6xy^5 + y^6$

(2) استخدم نظرية ذات الحدين لفك كل مما يلي:

(a) $(x+y)^4$ (b) $(x-y)^4$ (c) $(x-2)^5$

(a) $(x+y)^4 = 4C_0x^4y^0 + 4C_1x^3y^1 + 4C_2x^2y^2 + 4C_3x^1y^3 + 4C_4x^0y^4$

$= x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$

(b) $(x-y)^4 = 4C_0x^4(-y)^0 + 4C_1x^3(-y)^1 + 4C_2x^2(-y)^2 + 4C_3x^1(-y)^3 + 4C_4x^0(-y)^4$

$= x^4 - 4x^3y + 6x^2y^2 - 4xy^3 + y^4$

(c) $(x-2)^5 = 5C_0x^5(-2)^0 + 5C_1x^4(-2)^1 + 5C_2x^3(-2)^2 + 5C_3x^2(-2)^3 + 5C_4x^1(-2)^4 + 5C_5x^0(-2)^5$

$= x^5 - 10x^4 + 40x^3 - 80x^2 + 80x - 32$

(3) فك كلًّا مما يلي:

(a) $(3x-y)^5$ (b) $(x^2+y)^4$ (c) $(3x+5y)^3$

(a) $(3x-y)^5 = {}_5C_0(3x)^5(-y)^0 + {}_5C_1(3x)^4(-y)^1 + {}_5C_2(3x)^3(-y)^2 + {}_5C_3(3x)^2(-y)^3 + {}_5C_4(3x)^1(-y)^4 + {}_5C_5(3x)^0(-y)^5$

$= 243x^5 - 405x^4y + 270x^3y^2 - 90x^2y^3 + 15xy^4 - y^5$

(b) $(x^2+y)^4 = {}_4C_0(x^2)^4y^0 + {}_4C_1(x^2)^3 \cdot y^1 + {}_4C_2(x^2)^2y^2 + {}_4C_3(x^2)^1 \cdot y^3 + {}_4C_4(x^2)^0y^4$

$= x^8 + 4x^6y + 6x^4y^2 + 4x^2y^3 + y^4$

(c) $(3x+5y)^3 = {}_3C_0(3x)^3 \cdot (5y)^0 + {}_3C_1(3x)^2(5y)^1 + {}_3C_2(3x)^1(5y)^2 + {}_3C_3(3x)^0(5y)^3$

$= 27x^3 + 135x^2y + 225xy^2 + 125y^3$

في التمارين (4–8)، أوجد الحد المعين من مفكوك ثنائية الحد في كل مما يلي:

(4) الحد الثالث من $(x+3)^{12}$

(5) الحد الثاني من $(x+3)^9$

(6) الحد الثاني عشر من $(2+x)^{11}$

(7) الحد الثامن من $(x-2y)^{15}$

(8) الحد السابع من $(x^2-2y)^{11}$

(4) $T_{2+1} = {}_{12}C_2(x)^{10}(3)^2 = 594x^{10}$

(5) $T_{1+1} = {}_9C_1(x)^8(3)^1 = 27x^8$

(6) $T_{11+1} = {}_{11}C_{11}(2)^0(x)^{11} = x^{11}$

(7) $T_{7+1} = {}_{15}C_7(x)^8(-2y)^7 = -823680x^8y^7$

(8) $T_{6+1} = {}_{11}C_6(x^2)^5(-2y)^6 = 29568x^{10}y^6$

(9) **تحليل الخطأ:** زعم أحد الطلاب بأن، $_7C_5\,x^2y^4$ هو أحد حدود ذات الحدين، اشرح خطأ الطالب.

$7-2=5$ *) يجب أن يكون أس $y = 5$ لأن

*) لابد أن يكون مجموع أسس x ، y يساوي $n=7$

---

(10) أوجد الحد الذي يحتوي على x^2y^3 في مفكوك $(3x-7y)^5$

$$T_4 = T_{3+1} = {}_5C_3\,(3x)^2\cdot(-7y)^3 = -30870\,x^2y^3$$

---

(11) في مفكوك $(5-3ab)^7$ أوجد الحد الذي يحتوي على a^3b^3

$$T_4 = T_{3+1} = {}_7C_3\,(5)^4\cdot(-3ab)^3 = -590625\,a^3b^3$$

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (1—5)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) مفكوك $(c+1)^5$ هو: $c^5+5c^4+10c^3+10c^2+5c+1$ — (a) (b)

(2) إذا كان الحد $126c^4d^5$ أحد حدود مفكوك $(c+d)^n$، فإنّ قيمة n هي 5 — (a) (b)

(3) إذا كان معامل الحد الثاني في مفكوك $(r+x)^n$ هو 7 فإنّ قيمة n هي 7 — (a) (b)

(4) الحدّ الثاني من $(x+3)^9$ هو $54x^8$ — (a) (b)

(5) معامل الحد السابع في مفكوك $(x-y)^7$ هو عدد سالب. — (a) (b)

في التمارين (6—11)، ظلّل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة:

(6) مفكوك $(a-b)^3$ هو:

(a) $a^3+a^2b+ab^2+b^3$ (b) $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

(c) $a^3-a^2b+ab^2-b^3$ (d) $a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

(7) الحد الثالث من مفكوك $(a-b)^7$ هو:

(a) $-21a^5b^2$ (b) $-7a^6b$

(c) $7a^6b$ (d) $21a^5b^2$

(8) في مفكوك $(2a-3b)^6$ الحد الذي معامله 2 160 هو:

(a) الحدّ الثاني (b) الحد الثالث

(c) الحد الرابع (d) الحد الخامس

(9) معامل الحد الثالث في مفكوك $(3c-4b)^6$ هو:

(a) 5 170 (b) 3 312

(c) 4 320 (d) 2 316

(10) في مفكوك $(x+y)^9$ تكون رتبة الحد $126x^5y^4$ هي:

(a) الرابعة (b) الخامسة (c) السادسة (d) التاسعة

(11) في مفكوك $(3x+2y)^8$ الحد الذي يحوي x^3y^5 هو:

(a) T_3 (b) T_4 (c) T_5 (d) T_8

تعدل إلى T_6

تمرين
11-3

ص 72

الاحتمال

Probability

المجموعة A تمارين مقالية

في التمرينين (2—1)، رميت حجري نرد. بيّن ما إذا كان الحدثان متنافيين أم لا.

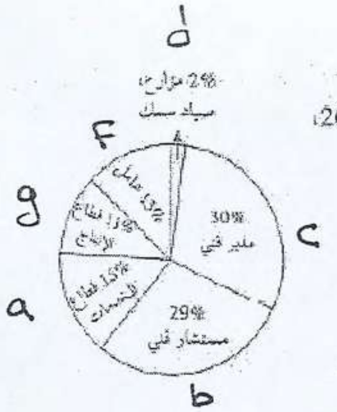
(1) مجموع العددين الظاهرين هو عدد أولي، المجموع أصغر من 4

(2) ناتج ضرب العددين الظاهرين 24، أحد العددين هو عدد أولي.

الحل :

1- الحدثان غير متنافيان لأن 2+1 = 3 عدد أولي أصغر من 4

2- متنافيان 6x4 =24 عدد أولي ، 4 ، 6 عددين غير أوليين



(3) يبيّن التمثيل البياني أدناه، أنواع عقود العمل في إحدى الدول في العام 2011،
أوجد احتمال كل حدث مما يلي،

(a) اختيار شخص من قطاع الخدمات.

(b) اختيار شخص من قطاع الخدمات أو مستشار فني.

(c) اختيار شخص ليس مديرًا فنيًا.

(d) اختيار شخص ليس عاملًا وليس من قطاع الإنتاج.

a)- 15%

b)- 44% (15% + 29% = 44%

c)- 70% (1- 30%= 70%)

d)- 76% 1- (30% + 11%) = 76%

طريقة ثانية

a) $P(a) = \frac{15}{100} = \frac{3}{20}$

b) $P(a \cup b) = \frac{15}{100} + \frac{29}{100} = \frac{44}{100} = \frac{11}{25}$

c) $P(\overline{c}) = 1 - \frac{30}{100} = \frac{70}{100} = \frac{7}{10}$

d) $P(\overline{F} \cap \overline{g}) = P(\overline{f \cup g}) = 1 - P(f \cup g)$

$= 1 - (\frac{13}{100} + \frac{11}{100})$

$= \frac{76}{100} = \frac{19}{25}$

(4) يبيّن الجدول المقابل كيف يمضي موظفو إحدى المؤسسات عطلتهم الصيفية. اختير عشوائيًا موظف من هذه المؤسسة. ما احتمال أن يسكن خلال عطلته الصيفية في فندق على شاطئ البحر؟

المسكن	الجبل	شاطئ البحر	المجموع
استئجار شقة في مبنى	14	6	20
فندق	16	12	28
منزل مستقل	8	18	26
المجموع	38	36	74

الحل

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{12}{74} = \frac{6}{37}$$

(5) يحتوي كيس على 4 كرات زرقاء اللون وكرتين حمراء اللون. أخذت كرتان معًا من دون النظر داخل الكيس. أوجد احتمال كل حدث مما يلي:

(a) الكرتان زرقاوان.

(b) كرة زرقاء وكرة حمراء.

(c) الكرتان من اللون نفسه.

الحل :

طريقة الحل

$n(S) = {}_6C_2 = 15$

A حدث دال على الكرتان زرقاوان

$n(A) = {}_4C_2 \times {}_2C_0 = 6$

$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$

B حدث دال على كرة زرقاء وكرة حمراء

$n(B) = {}_4C_1 \times {}_2C_1 = 8$

$P(B) = \frac{8}{15}$

C الحدث الدال على الكرتان من اللون نفسه

$n(C) = {}_4C_2 \times {}_2C_0 + {}_2C_2 \times {}_4C_0 = 7$

$P(C) = \frac{7}{15}$

a)* $\frac{2}{5}$

b)* $\frac{8}{15}$

c)* $\frac{7}{15}$

(6) إذا كان الحدثان r, t غير متنافيين، أكمل الجدول أدناه لإيجاد كل احتمال.

	$P(t)$	$P(r)$	$P(t \cap r)$	$P(t \cup r)$
(a)	$\frac{7}{11}$	$\frac{3}{11}$	$\frac{1}{11}$	$\frac{9}{11}$
(b)	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{3}$
(c)	$\frac{7}{15}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{3}$
(d)	$\frac{2}{x}$	$\frac{3}{2x}$	$\frac{1}{x}$	$\frac{5}{2x}$

(7) إذا كان الحدثان t , r متنافيان. أوجد $P(t \cup r)$.

(a) $P(t) = \frac{5}{8}$, $P(r) = \frac{1}{8}$ (b) $P(t) = 12\%$, $P(r) = 27\%$

الحل

a) $p(t \cup r) = \frac{5}{8} + \frac{1}{8} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$

b) $p(t \cup r) = \frac{12}{100} + \frac{27}{100} = \frac{39}{100} = 39\%$

(8) إذا كان الحدثان m, n مستقلان. أوجد $P(m \cap n)$.

(a) $P(m) = \frac{1}{4}$; $P(n) = \frac{2}{3}$

(b) $P(m) = 0.6$; $P(n) = 0.9$

a)* $p(m \cap n) = p(m) \times p(n)$

$p(m \cap n) = \frac{1}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{6}$

b)* $p(m \cap n) = 0.6 \times 0.9 = 0.54$

(9) في أحد البلدان، 30% من السكان هم تحت سن العشرين، 17% فوق الستين. اختير شخص من السكان عشوائيًا. فما احتمال أن يكون تحت سن العشرين أو فوق الستين؟

الحل

$$P(A) = \frac{30}{100}$$

$$P(B) = \frac{17}{100}$$

$$P(A \cup B) = \frac{30}{100} + \frac{17}{100} = \frac{47}{100} = 47\%$$

(10) رميت حجر نرد. أوجد احتمال كل من الأحداث التالية.

(a) 3 أو عدد فردي.

(b) عدد زوجي أو عدد أصغر من 4

(c) عدد فردي أو عدد أولي

(d) 4 أو عدد أصغر من 6

الحل

توضيح الحل

S={1,2,3,4,5,6}

n(S)=6

a)* $\frac{1}{2}$

b)* $\frac{5}{6}$

c)* $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

d)* $\frac{1}{6} + \frac{5}{6} - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$

a) $a = \{1, 3, 5\}$ $n(a) = 3$

$P(a) = \frac{n(a)}{n(S)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

b) $b = \{1, 2, 3, 4, 6\}$ $n(b) = 5$

$P(b) = \frac{n(b)}{n(S)} = \frac{5}{6}$

c) $c = \{1, 2, 3, 5\}$ $n(c) = 4$

$P(c) = \frac{n(c)}{n(S)} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

d) $d = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ $n(d) = 5$

$P(d) = \frac{n(d)}{n(S)} = \frac{5}{6}$

40 %

(11) في إحدى المدن، وافق [redacted] من السكان على مرور القطار السريع في الغابة قرب مدينتهم، اختير 10 أشخاص عشوائيًا من سكان المدينة، فما احتمال أن يكون 4 منهم قد وافقوا على مرور القطار السريع؟

$$p(A) = {}_{10}C_4 \times (0.40)^4 \times (0.60)^6 \cong 0.25$$

(12) يستخدم حوالي 11% من الطلاب اليد اليسرى للكتابة. يوجد في أحد الصفوف 30 طالبًا. فما احتمال أن يكون 4 طلاب من هذا الصف يستخدمون اليد اليسرى للكتابة؟

$$p(A) = {}_{30}C_4 \times (0.11)^4 \times (0.89)^{26} \cong 0.1939$$

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (1—4)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) إن اختيار لون السيارة عشوائيًا، اختيار الدواليب عشوائيًا هما حدثان مستقلان. (a) (b)

(2) الحدثان m، n مستقلان، $P(m)=\frac{12}{17}$ ، $P(n)=\frac{3}{8}$ إذًا $P(m\cap n)=\frac{9}{17}$ (a) (b)

(3) عند رمي حجر نرد، فإن احتمال ظهور العدد 4 أو ظهور عدد زوجي يساوي $\frac{1}{2}$ (a) (b)

(4) في اختبار صح – خطأ، أجبت عن 5 أسئلة عشوائيًا. احتمال أن تكون 3 من إجاباتك صحيحة هو $\frac{5}{16}$ (a) (b)

في التمارين (5—11)، ظلّل رمز الدائرة الدالّ على الإجابة الصحيحة.

(5) الحدثان m، n مستقلان، $P(m)=\frac{1}{3}$ ، $P(n)=\frac{9}{10}$ إذًا $P(m\cap n)$ تساوي:

(a) $\frac{1}{3}$ (b) $\frac{25}{30}$

(c) $\frac{3}{10}$ (d) $\frac{11}{30}$

(6) الحدثان t، r متنافيان $P(t)=\frac{3}{5}$ ، $P(r)=\frac{1}{3}$ إذًا $P(t\cup r)$ تساوي:

(a) $\frac{1}{5}$ (b) $\frac{14}{15}$

(c) $\frac{4}{15}$ (d) 0

(7) الحدثان t، r متنافيان $P(t)=\frac{1}{7}$ ، $P(r)=60\%$ إذًا $P(t\cup r)$ تساوي:

(a) 28% (b) 42%

(c) $\frac{16}{35}$ (d) $\frac{26}{35}$

(8) عند رمي حجر نرد فإن احتمال ظهور عدد زوجي أو عدد أولي يساوي:

(a) $\frac{2}{3}$ (b) $\frac{5}{6}$

(c) $\frac{1}{2}$ (d) 1

(9) يحتوي كيس على 5 كرات من اللون الأزرق، 3 كرات من اللون الأحمر. أخذت عشوائيًا كرتان معًا من الكيس. احتمال الحدث، "أن تكون كرة حمراء والأخرى كرة زرقاء" هو:

(a) $\frac{1}{14}$ (b) $\frac{28}{15}$

(c) $\frac{2}{7}$ (d) $\frac{15}{28}$

طريقة حل رقم (4)

$$5C_3\,(0,5)^3 \times (0,5)^2$$

$$= \frac{5}{16}$$

(10) يتوزّع طلاب مدرستين B، A على الصفوف الثلاثة الأخيرة وفق النسب التالية:

الصف / المدرسة	العاشر	الحادي عشر	الثاني عشر
A	37%	35%	28%
B	38%	34%	28%

اختير عشوائيًا طالب من كل مدرسة. احتمال أن يكون طالب من الصف العاشر أو الصف الحادي عشر من المدرسة A وطالب من الصف الثاني عشر من المدرسة B هو:

(a) 20.16% (b) 100%

(c) 0% (d) 79.84%

(11) 90% من القمصان التي تنتجها إحدى الشركات لا عيب فيها. اختار مراقب الجودة 8 قمصان عشوائيًا. احتمال أن يكون 3 قمصان من هذه المجموعة فيها عيب هو:

(a) 0.033 (b) 5.9×10^{-4}

(c) 4×10^{-4} (d) 2.955