التكامل غير المحدد

المجموعة A تمارين مقالية

(1) أثبت أن: $F(x) = (3x+2)^5 + 7$ هي مشتقة عكسية للدالة $f(x) = 15(3x+2)^4$.

$$F'(x) = 3 \times 5(3x+2)^4$$

$$F'(x) = 15(3x+2)^4 = f(x)$$

∴ الدالة F مشتقة عكسية للدالة f

في التمرينين (3—2)، تحقّق من أن F هي مشتقّة عكسيّة للدالّة f حيث:

(2) $F(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + x - 10$

$$f(x) = x^2 - 2x + 1$$

$$F'(x) = x^2 - 2x + 1 = f(x)$$

∴ الدالة F مشتقة عكسية للدالة f

(3) $F(x) = \sqrt{1+x^4}$

$$f(x) = \frac{2x^3}{\sqrt{1+x^4}}$$

$$F'(x) = \frac{1}{2}(1+x^4)^{-\frac{1}{2}}.(4x^3)$$

$$F'(x) = 2x^3(1+x^4)^{-\frac{1}{2}}$$

$$F'(x) = \frac{2x^3}{\sqrt{1+x^4}}$$

$F'(x) = f(x)$ ∴ الدالة F مشتقة عكسية للدالة f

في التمارين (4–14)، احسب التكامل.

④ $\int (x^5 - 6x + 3)\, dx$

$= \frac{x^6}{6} - \frac{6x^2}{2} + c$

$= \frac{x^6}{6} - 3x^2 + c$

⑤ $\int (3 - 6x^2)\, dx$

$= 3x - 2x^3 + c$

⑥ $\int \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}}\, dx$

$= x^{\frac{1}{3}} + c$

⑦ $\int \left(x^3 - \frac{1}{x^3}\right) dx$

$= \int (x^3 - x^{-3})\, dx$

$= \frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{x^2} + c$

⑧ $\int \frac{x^4 - 27x}{x^2 - 3x}\, dx$

$\int \frac{x(x^3 - 27)}{x(x-3)}\, dx$

$\int \frac{\cancel{(x-3)}(x^2 + 3x + 9)}{\cancel{(x-3)}}\, dx$

$\int (x^2 + 3x + 9)\, dx$

$\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + 9x + c$

⑨ $\int (x-2)(2x+3)\, dx$

$= \int (2x^2 - x - 6)\, dx$

$= \frac{2x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 6x + c$

⑩ $\int \frac{x-1}{\sqrt{x}+1}\, dx$

$= \int \frac{(x-1)}{\sqrt{x}+1} \times \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-1}\, dx$

$= \int \frac{(x-1)(\sqrt{x}-1)}{(x-1)}\, dx$

$= \int (\sqrt{x} - 1)\, dx$

$= \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - x + c$

⑪ $\int \frac{x - \sqrt{x}}{x}\, dx$

$= \int 1 - \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx = \int \left(1 - x^{\frac{-1}{2}}\right) dx$

$= x - 2x^{\frac{1}{2}} + c$

⑫ $\int \frac{5 + 2x}{\sqrt{x}}\, dx$

$= \int 5x^{\frac{-1}{2}} + 2x^{\frac{1}{2}}\, dx$

$= 10x^{\frac{1}{2}} + \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} + c$

13 $\int \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 dx$

$= \int (x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}) dx$

$= \frac{x^3}{3} + 2x - x^{-1} + c$

$= \frac{1}{3}x^3 + 2x - \frac{1}{x} + c$

14 $\left(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[4]{x^3}\right) dx$

$= \int (x^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{3}{4}}) dx$

$= \frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}} + \frac{4}{7}x^{\frac{7}{4}} + c$

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (5—1)، ظلّل الدائرة (a) إذا كانت العبارة صحيحة و(b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) $F(x) = x^{-3}$ هي مشتقة عكسية للدالة: $f(x) = -3x^{-4}$ — (a) (b)

(2) $\int (-x^{-3} + x - 1) dx = \frac{1}{2}x^{-2} + \frac{1}{2}x^2 - x + C$ — (a) (b)

(3) $\int \frac{1}{x^2} dx = \frac{1}{x} + C$ — (a) (b)

(4) إذا كانت: $f'(x) = \frac{1}{x^2} + x$ ، $f(2) = 1$ ، فإن: $f(x) = -\frac{1}{x} + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}$ — (a) (b)

(5) إذا كانت: $F(0) = 400$ ، $F(x) = \int (3x^2 - 12x + 15) dx$ ، فإن: $F(x) = x^3 + 6x^2 + 15x + 400$

(a) (b)

في التمارين (12—6)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(6) $\int \frac{4}{3}\sqrt[3]{t^2}\, dt =$

(a) $\frac{3t^{\frac{5}{3}}}{5} + C$

(b) $\frac{4t^{\frac{5}{3}}}{5} + C$

(c) $\frac{4}{3}\sqrt[3]{t^5} + C$

(d) $4\sqrt[3]{t^5} + C$

(7) $\int \left(\sqrt[3]{x^2} + \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right) dx =$

(a) $\frac{3}{5}\sqrt[3]{x}(x^{\frac{4}{3}} + 5) + C$

(b) $\frac{3}{5}x^{\frac{2}{3}}(x^{-\frac{2}{3}} + 5) + C$

(c) $\frac{5}{3}\sqrt[3]{x}(x^{\frac{4}{3}} + 5) + C$

(d) $\frac{5}{3}x^{\frac{4}{3}}(x^{\frac{2}{3}} + 5) + C$

(8) إذا كان: $x = -1$ ، $y = -5$ ، $\frac{dy}{dx} = x^{-\frac{2}{3}}$ فإنّ y تساوي:

a) $-\frac{x^2}{3} - \frac{14}{3}$

b) $3x^{\frac{1}{3}} + 2$

c) $3x^{\frac{1}{3}} - 2$

d) $3x^{\frac{1}{3}}$

(9) $\int \frac{2x+3}{\sqrt{x}} dx =$

a) $\frac{3}{4}x^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} + C$

b) $\frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}} + 6x^{\frac{1}{2}} + C$

c) $\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} + 6x^{\frac{1}{2}} + C$

d) $\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{6}x^{\frac{1}{2}} + C$

(10) $\int \sqrt{x}(2+x^2) dx =$

a) $\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}} + C$

b) $\frac{3}{4}x^{\frac{3}{2}} + \frac{7}{2}x^{\frac{7}{2}} + C$

c) $\frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{7}{2}x^{\frac{7}{2}} + C$

d) $\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{7}{2}x^{\frac{7}{2}} + C$

(11) $\int \frac{2 + \sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{x}} dx =$

a) $x^{\frac{1}{2}} + \frac{6}{7}x^{\frac{7}{6}} + C$

b) $4x^{\frac{1}{2}} + \frac{6}{7}x^{\frac{7}{6}} + C$

c) $x^{\frac{1}{2}} + \frac{7}{6}x^{\frac{7}{6}} + C$

d) $4x^{\frac{1}{2}} + \frac{7}{6}x^{\frac{7}{6}} + C$

(12) $\int \left(\frac{x^2 - 4x + 4}{x-2} + 2\right)^2 dx =$

a) $x^2 + C$

b) $2x + C$

c) $\frac{x^2}{2} + 2x + C$

d) $\frac{1}{3}x^3 + C$

تمرّنْ
5–2

التكامل بالتعويض

المجموعة A تمارين مقالية

في التمارين (12–1)، استخدم التعويض المناسب لإيجاد التكامل.

① $\int (2x-3)\sqrt{x^2-3x+5}\, dx$

$u = x^2 - 3x + 5 \qquad du = (2x-3)dx$

$\int \sqrt{u}\, du \quad = \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} + c$

$= \frac{2}{3}(x^2 - 3x + 5)^{\frac{3}{2}} + c$

② $\int (4x-5)^8\, dx$

$u = 4x - 5 \qquad du = (4)dx$

$dx = \frac{1}{4}du$

$\int (4x-5)^8\, dx = \frac{1}{4}\int (u)^8\, du$

$= \frac{1}{36}u^9 + c$

$= \frac{1}{36}(4x-5)^9 + c$

③ $\int (x+2)\sqrt[3]{x^2+4x-1}\, dx$

$u = x^2 + 4x - 1 \qquad du = (2x+4)dx$

$du = 2(x+2)dx$

$\frac{1}{2}du = (x+2)dx$

$\int (x+2)\sqrt[3]{x^2+4x-1}\, dx \ = \frac{1}{2}\int \sqrt[3]{u}\, du$

$= \frac{1}{2}.\frac{3}{4}u^{\frac{4}{3}} + c$

$= \frac{3}{8}u^{\frac{4}{3}} + c$

$= \frac{3}{8}(x^2 + 4x - 1)^{\frac{4}{3}} + c$

④ $\int (x^2-1)\sqrt{x^3-3x+5}\, dx$

$u = x^3 - 3x + 5 \qquad du = (3x^2-3)dx$

$du = 3(x^2-1)dx$

$\frac{1}{3}du = (x^2-1)dx$

$\int (x^2-1)\sqrt{x^3-3x+5}\, dx$

$= \frac{1}{3}\int \sqrt{u}\, du$

$= \frac{1}{3}.\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} + c$

$= \frac{2}{9}u^{\frac{3}{2}} + c$

$= \frac{2}{9}(x^3 - 3x + 5)^{\frac{3}{2}} + c$

5 $\int (x^2-2x)(x^3-3x^2+4)^5\ dx$

$u = x^3-3x^2+4 \quad du = (3x^2-6x)dx$

$du = 3(x^2-2x)dx$

$\frac{1}{3}du = (x^2-2x)dx$

$\int (x^2-2x)(x^3-3x^2+4)^5\ dx$

$= \frac{1}{3}\int u^5\ du \quad = \frac{1}{3}.\frac{1}{6}u^6 + c$

$= \frac{1}{18}(x^3-3x^2+4)^6 + c$

6 $\int \frac{x^2}{\sqrt[3]{4+x^3}}\ dx$

$u = 4+x^3 \qquad du = (3x^2)dx$

$\frac{1}{3}du = (x^2)dx$

$\int \frac{x^2}{\sqrt[3]{4+x^3}}\ dx \quad = \frac{1}{3}\int \frac{1}{\sqrt[3]{u}}\ du$

$= \frac{1}{3}\int u^{-\frac{1}{3}}\ du$

$= \frac{1}{3}.\frac{3}{2}u^{\frac{2}{3}} + c$

$= \frac{1}{2}(4+x^3)^{\frac{2}{3}} + c$

7 $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{2-3x}}$

$u = 2-3x \qquad du = (-3)dx$

$\frac{-1}{3}du = dx$

$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{2-3x}} \quad = \frac{-1}{3}\int \frac{du}{\sqrt[3]{u}}$

$= \frac{-1}{3}\int u^{-\frac{1}{3}}\ du$

$= \frac{-1}{3}.\frac{3}{2}u^{\frac{2}{3}} + c$

$= \frac{-1}{2}(2-3x)^{\frac{2}{3}} + c$

8 $\int x(3x+2)^6\ dx$

$u = 3x+2 \qquad 3x = (u-2)$

$x = \frac{1}{3}(u-2)$

$3dx = du$

$dx = \frac{1}{3}du$

$\int x(3x+2)^6\ dx = \frac{1}{3}.\frac{1}{3}\int (u-2)\ u^6\ du$

$= \frac{1}{9}\int (u^7 - 2u^6)\ du$

$= \frac{1}{9}\left(\frac{1}{8}u^8 - 2.\frac{1}{7}u^7\right) + c$

$= \frac{1}{72}u^8 - \frac{2}{63}u^7 + c$

$= \frac{1}{72}(3x+2)^8 - \frac{2}{63}(3x+2)^7 + c$

(9) $\int \frac{x}{\sqrt{1+3x}}dx$

$u = 1 + 3x \qquad 3x = (u-1)$

$x = \frac{1}{3}(u-1)$

$3dx = du$

$dx = \frac{1}{3}du$

$$\int \frac{x}{\sqrt{1+3x}}dx = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\int \frac{(u-1)}{\sqrt{u}}du$$

$$= \frac{1}{9}\int u^{-\frac{1}{2}}(u-1)\,du$$

$$= \frac{1}{9}\int \left(u^{\frac{1}{2}} - u^{-\frac{1}{2}}\right)du$$

$$= \frac{1}{9}\left(\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} - 2u^{\frac{1}{2}}\right) + c$$

$$= \frac{2}{27}u^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{9}u^{\frac{1}{2}} + c$$

$$= \frac{2}{27}(1+3x)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{9}(1+3x)^{\frac{1}{2}} + c$$

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (5—1)، ظلّل الدائرة (a) إذا كانت العبارة صحيحة و(b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) $\int x(x^2-1)^{10}dx = \frac{1}{18}(x^2-1)^9 + C$ (a) (b)

(2) $\int (x+1)\sqrt[3]{x^2+2x+3}\,dx = \frac{3}{8}\sqrt[3]{(x^2+2x+3)^4} + C$ (a) (b)

(3) $\int \frac{dx}{\sqrt{3x-2}} = 2\sqrt{3x-2} + C$ (a) (b)

(4) $\int (2x^2-1)(2x^3-3x+4)^5dx = \frac{1}{18}(2x^3-3x+4)^6 + C$ (a) (b)

(5) $\int x\sqrt[3]{x+2}\,dx = \frac{3}{7}(x+2)^{\frac{7}{3}} - \frac{3}{2}(x+2)^{\frac{4}{3}} + C$ (a) (b)

تمرّنْ 5-3

تكامل الدوال المثلثية

المجموعة A تمارين مقالية

في التمارين (14–1)، أوجد قيمة التكامل.

① $\int (\sec x \tan x + \sin x)\, dx$

$= \int (\sec x \tan x)\, dx + \int \sin x\, dx$

$= \sec x - \cos x + c$

② $\int (\csc x \cot x + \sec^2 x)\, dx$

$= \int (\csc x \cot x)\, dx + \int \sec^2 x\, dx$

$= -\csc x + \tan x + c$

③ $\int \left(\frac{-1}{x^2} + 5\sin 3x\right) dx$

$= \int \left(\frac{-1}{x^2}\right) dx + 5\int \sin 3x\, dx$

$= \int (-x^{-2})\, dx + 5\int \sin 3x\, dx$

$= \frac{1}{x} - \frac{5}{3}\cos 3x + c$

④ $\int (\sin^4 x \cos x)\, dx$

$u = \sin x \qquad du = \cos x\, dx$

$\int (\sin^4 x \cos x)\, dx = \int (u^4)\, du$

$= \frac{1}{5}\sin^5 x + c$

⑤ $\int (\cos^5 x \sin x)\, dx$

$u = \cos x \qquad du = -\sin x\, dx$

$\int (\cos^5 x \sin x)\, dx = -\int (u^5)\, du$

$= -\frac{1}{6}u^6 + c$

$= -\frac{1}{6}\cos^6 x + c$

⑦ $\int \frac{\sin x}{\cos^3 x} dx$

$= \int \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} dx = \int \tan x . \sec^2 x\, dx$

$= \int \tan x . \sec x\ . \sec x\, dx$

$= \frac{1}{2}\sec^2 x + c$

(8) $\int sec^3x\, tan\, x\; dx$

$u = sec\, x \qquad du = sec\, x\, tan\, x\, dx$

$$\int sec^3x\, tan\, x\; dx$$
$$= \int sec^2x \,.\, sec\, x \,.\, tan\, x\; dx$$
$$= \int u^2 .\; du$$
$$= \frac{1}{3}u^3 + c \quad = \frac{1}{3}sec^3x + c$$

(9) $\int csc^3x\, cot\, x\; dx$

$u = csc\, x \qquad du = -csc\, x\,.\, cot\, x\, dx$

$$\int csc^3x\, cot\, x\; dx$$
$$= \int csc^2x \,.\, csc\, x \,.\, cot\, x\; dx$$
$$= -\int u^2 .\; du$$
$$= -\frac{1}{3}u^3 + c = -\frac{1}{3}csc^3x + c$$

(10) $\int \sqrt{cot\, x}\, csc^2x\; dx$

$u = cot\, x \qquad du = -csc^2x\, dx$

$$\int \sqrt{cot\, x}\, csc^2x\; dx$$
$$= -\int \sqrt{u}\; du \quad = -\int u^{\frac{1}{2}}\, du$$
$$= -\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} + c \quad = -\frac{2}{3}cot^{\frac{3}{2}}x + c$$

(11) $\int \sqrt{tan\, x}\, sec^2x\; dx$

$u = tan\, x \qquad du = sec^2x\, dx$

$$\int \sqrt{tan\, x}\, sec^2x\; dx \quad = \int \sqrt{u}\; du$$
$$= \int u^{\frac{1}{2}}\, du \quad = \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} + c$$
$$= \frac{2}{3}tan^{\frac{3}{2}}x + c$$

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (5–1)، ظلّل الدائرة (a) إذا كانت العبارة صحيحة و(b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) $\int \sec^2 x\, dx = \tan x + C$ — (a) (b)

(2) $\int \csc^2 x\, dx = \cot x + C$ — (a) (b)

(3) $\left(F'(x) = \sec^2 x\ ,\ F\left(\frac{\pi}{4}\right) = -1\right) \Longrightarrow F(x) = \tan x + 2$ — (a) (b)

(4) $\left(F'(x) = \cos x + \sin x\ ,\ F(\pi) = 1\right) \Longrightarrow F(x) = \sin x - \cos x$ — (a) (b)

(5) $\left(F'(x) = \sec x\ \tan x\ ,\ F(0) = 4\right) \Longrightarrow F(x) = \sec x + 3$ — (a) (b)

في التمارين (12–6)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(6) الصورة العامة للمشتقة العكسية للدالة f حيث $f(x) = 8 + \csc x \cot x$ هي:

(a) $F(x) = 8x + \csc x + C$

(b) $F(x) = 8x - \cot x + C$

(c) $F(x) = 8x - \csc x + C$

(d) $F(x) = 8x + \cot x + C$

(7) $\int \csc(5x)\cot(5x)\,dx =$

(a) $\frac{1}{5}\csc(5x) + C$

(b) $\csc(5x) + C$

(c) $\frac{1}{5}\cot(5x) + C$

(d) $-\frac{1}{5}\csc(5x) + C$

(8) $\int \sqrt[3]{\cot x}\,\csc^2 x\,dx =$

(a) $\frac{3}{4}\sqrt[3]{(\cot x)^4} + C$

(b) $-\frac{3}{4}\sqrt[3]{(\cot x)^4} + C$

(c) $-\frac{3}{4}\sqrt[4]{(\cot x)^3} + C$

(d) $3\sqrt[3]{(\cot x)^4} + C$

(9) إذا كانت $y_{\theta=0} = -3$, $\frac{dy}{d\theta} = \sin\theta$ فإنّ y تساوي:

(a) $-\cos\theta$

(b) $2 - \cos\theta$

(c) $-2 - \cos\theta$

(d) $4 - \cos\theta$

(10) $\int \sec^5 x \tan x\,dx =$

(a) $\frac{5}{3}\sec^5 x + C$

(b) $\frac{1}{5}\sec^6 x + C$

(c) $\frac{1}{5}\sec^5 x + C$

(d) $-\frac{5}{3}\sec^5 x + C$

(11) $\int \frac{\csc^2 x}{\sqrt[3]{2 + \cot x}}\,dx =$

(a) $\frac{3}{2}(2 + \cot x)^{\frac{2}{3}} + C$

(b) $-\frac{3}{2}(2 + \cot x)^{\frac{2}{3}} + C$

(c) $-2\sqrt{2 + \cot x} + C$

(d) $\frac{4}{3}(2 + \cot x)^{\frac{4}{3}} + C$

(12) $\int \frac{\sin(4x)}{\cos^5(4x)}\,dx =$

(a) $-\frac{1}{16}\cos^{-4}(4x) + C$

(b) $\frac{1}{16}\cos^{-4}(4x) + C$

(c) $-\cos^{-4}(4x) + C$

(d) $\cos^{-4}(4x) + C$

تمرّنْ 5-4

الدوالّ الأسّية واللوغاريتمية

المجموعة A تمارين مقالية

في التمارين (1–15)، أوجد $\frac{dy}{dx}$.

① $y = 7^x$

$$\frac{dy}{dx} = 7^x \cdot \ln 7 \cdot \frac{d}{dx}(x)$$

$$= 7^x \cdot \ln 7$$

② $y = 5^{\sqrt{x+1}}$

$$\frac{dy}{dx} = 5^{\sqrt{x+1}} \cdot \ln 5 \cdot \frac{d}{dx}\left(\sqrt{x+1}\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = 5^{\sqrt{x+1}} \cdot \ln 5 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$$

$$= \frac{5^{\sqrt{x+1}}}{2\sqrt{x+1}} \ln 5$$

③ $y = 8^{\tan x}$

$$\frac{dy}{dx} = 8^{\tan x} \cdot \ln 8 \cdot \frac{d}{dx}\tan x$$

$$\frac{dy}{dx} = 8^{\tan x} \cdot \ln 8 \cdot \left(\sec^2 x\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = 8^{\tan x} \cdot \left(\sec^2 x\right) \cdot \ln 8$$

④ $y = 2e^x$

$$\frac{dy}{dx} = 2e^x \cdot (x)'$$

$$= 2e^x$$

⑤ $y = e^{-x}$

$$\frac{dy}{dx} = e^{-x} \cdot (-x)'$$

$$= -e^{-x}$$

⑥ $y = 3e^{\frac{x}{5}}$

$$\frac{dy}{dx} = 3 \cdot e^{\frac{x}{5}} \cdot \left(\frac{x}{5}\right)'$$

$$= \frac{3}{5} \cdot e^{\frac{x}{5}}$$

⑦ $y = e^{x^2-x+1}$

$$\frac{dy}{dx} = e^{x^2-x+1} \cdot (x^2 - x + 1)'$$

$$= (2x-1)e^{x^2-x+1}$$

⑧ $y = e^{2\sqrt{x}+3}$

$$\frac{dy}{dx} = e^{2\sqrt{x}+3} . (2\sqrt{x}+3)'$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) e^{2\sqrt{x}+3}$$

⑨ $y = e^{cscx}$

$$\frac{dy}{dx} = e^{cscx} \cdot (cscx)'$$

$$= -cscx\, cotx \cdot e^{cscx}$$

⑩ $y = e^{x^4-5}$

$$\frac{dy}{dx} = e^{x^4-5} . (x^4-5)'$$

$$= (4x^3)e^{x^4-5}$$

⑪ $y = ln\, x^3$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x^3} \cdot (x^3)'$$

$$= \frac{3x^2}{x^3}$$

$$= \frac{3}{x}$$

⑫ $y = ln\left(\frac{1}{x^2}\right)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{1}{x^2}} \cdot \left(\frac{1}{x^2}\right)'$$

$$= x^2 \cdot \frac{-2x}{x^4}$$

$$= \frac{-2}{x}$$

⑬ $y = ln(x+2)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x+2} \cdot (x+2)'$$

$$= \frac{1}{x+2}$$

⑭ $y = ln(2 - cos\, x)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2 - cos\, x} \cdot (2 - cos\, x)'$$

$$= \frac{sin\, x}{2 - cos\, x}$$

15 $y = \ln(\ln x)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\ln x} \cdot (\ln x)'$$

$$= \frac{1}{\ln x} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)$$

$$= \frac{1}{x \ln x}$$

16 $\int e^{0 \cdot 1x}\, dx$

$$u = 0 \cdot 1x$$

$$du = 0 \cdot 1\, dx$$

$$\frac{1}{0 \cdot 1} \int 0.1\ e^{0 \cdot 1x}\, dx \qquad = \frac{1}{0 \cdot 1} \int e^{u}\, du$$

$$= \frac{1}{0 \cdot 1} e^{u} + c$$

$$= \frac{1}{0 \cdot 1} e^{0 \cdot 1x} + c$$

17 $\int \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}\, dx$

$$u = \frac{1}{x}$$

$$du = \frac{-1}{x^2}\, dx$$

$$\int \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}\, dx \qquad = -\int e^{u}\, du$$

$$= -e^{u} + c = -e^{\frac{1}{x}} + c$$

18 $\int (2x + 1)\, e^{x^2+x+4}\, dx$

$$u = x^2 + x + 4$$

$$du = (2x + 1)\, dx$$

$$\int (2x + 1) e^{x^2+x+4}\, dx$$

$$= \int e^{u}\, du$$

$$= e^{u} + c$$

$$= e^{x^2+x+4} + c$$

(19) $\int (x^2-2)e^{x^3-6x}\,dx$

$u = x^3 - 6x$

$du = (3x^2 - 6)\,dx$

$\frac{1}{3}\int 3(x^2-2)e^{x^3-6x}\,dx$

$= \frac{1}{3}\int e^u\,du$

$= \frac{1}{3}e^u + c$

$= \frac{1}{3}e^{x^3-6x} + c$

(20) $\int \left(e^{0\cdot 5x} + \frac{0\cdot 5}{x}\right)dx$

$= \frac{1}{0\cdot 5}e^{0\cdot 5x} + 0\cdot 5\ln|x| + c$

(21) $\int \left(\frac{e^x}{e^x+1}\right)dx$

$u = e^x + 1$

$du = e^x$

$\int \frac{e^x}{e^x+1}dx = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + c$

$= \ln|e^x + 1| + c$

(22) $\int \left(\frac{x+1}{x^2+2x+5}\right)dx$

$u = x^2 + 2x + 5$

$du = 2x + 2$

$\frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{x^2+2x+5}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u}$

$= \frac{1}{2}\ln|u| + c$

$= \frac{1}{2}\ln|x^2+2x+5| + c$

23 $\int \left(\frac{x^3 - x}{x^4 - 2x^2}\right) dx$

$u = x^4 - 2x^2$

$du = 4x^3 - 4x$

$\int \frac{x^3 - x}{x^4 - 2x^2}\, dx =$

$\frac{1}{4}\int \frac{4(x^3 - x)}{x^4 - 2x^2}\, dx = \frac{1}{4}\int \frac{du}{u}$

$= \frac{1}{4} ln|u| + c$

$= \frac{1}{4} ln|x^4 - 2x^2| + c$

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (6—1)، ظلّل الدائرة (a) إذا كانت العبارة صحيحة و(b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) إذا كانت: $y = 4^{x-2}$ فإن: $\frac{dy}{dx} = 4x$ — a **(b)**

(2) إذا كانت: $f(x) = e^{x^2}$ فإن: $f'(x) = 2xe^{2x}$ — a **(b)**

(3) إذا كانت: $g(x) = \ln(2x+2)$ فإن: $g'(x) = \frac{1}{2x+2}$ — a **(b)**

(4) إذا كانت: $y = x\ln x - x$ فإن: $y' = \ln x$ — **(a)** b

(5) $\int \frac{1}{2x}dx = \frac{\ln x}{2} + C$ — a **(b)**

(6) $\int \frac{1}{3x+1}dx = \ln(3x+1) + C$ — a **(b)**

في التمارين (7—14)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(7) إذا كانت $y = e^{-5x}$، فإنّ $\frac{dy}{dx}$ تساوي:

(a) e^{-5x} (b) $-e^{-5x}$

(c) $-5e^{-5x}$ (d) $5e^{-5x}$

(8) إذا كانت $y = x^2e^x - x\,e^x$، فإنّ $\frac{dy}{dx}$ تساوي:

(a) $e^x(x^2 + x - 1)$ (b) $e^x(x^2 - x)$

(c) $2x\,e^x - e^x$ (d) $e^x(x^2 + 2x + 1)$

(9) إذا كانت $y = (\ln x)^2$، فإنّ $\frac{dy}{dx}$ تساوي:

(a) $\frac{\ln x}{x}$ (b) $\frac{2\ln x}{x}$

(c) $\frac{x\ln x}{2}$ (d) $\frac{2\ln^2 x}{x}$

(10) إذا كانت $y = \ln\left(\frac{10}{x}\right)$، فإنّ $\frac{dy}{dx}$ تساوي:

(a) $-\frac{10}{x}$ (b) $\frac{10}{x}$

(c) $\frac{1}{x}$ (d) $-\frac{1}{x}$

(11) إذا كانت $y = \ln(x^2 + 1)$، فإنّ $\frac{dy}{dx}$ تساوي:

(a) $\frac{x}{x^2+1}$ (b) $\frac{2}{x^2+1}$

(c) $\frac{2x}{x^2+1}$ (d) $-\frac{2x}{x^2+1}$

(12) $\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx =$

(a) $2\ln(x^2+1) + C$ (b) $\ln(x^2+1) + C$

(c) $\frac{x^2}{x^2+1} + C$ (d) $\frac{x}{\frac{1}{3}x^2+1} + C$

(13) $\int \frac{e^x + e^{-x}}{2}\,dx =$

(a) $\frac{e^x - e^{-x}}{2} + C$ (b) $\frac{e^x + e^{-x}}{2} + C$

(c) $\frac{e^{-x} - e^x}{2} + C$ (d) $\frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2} + C$

(14) $\int \frac{e^x}{e^x - 4}\,dx =$

(a) $-\frac{1}{2}(e^x - 4) + C$ (b) $\ln|e^x - 4| + C$

(c) $-\ln|e^x - 4| + C$ (d) $\frac{1}{2}\ln|e^x - 4| + C$

التكامل بالتجزيء

المجموعة A تمارين مقالية

في التمارين (1–14)، أوجد قيمة التكامل.

① $\int x\cos(3x)dx$

$u = x \qquad dv = \cos(3x)dx$

$du = dx \qquad v = \dfrac{\sin(3x)}{3}$

$$\int udv = uv - \int vdu$$

$$\int x\cos(3x)dx = \frac{x\sin(3x)}{3} - \int \frac{\sin 3x}{3}dx$$

$$= \frac{1}{3}x\sin(3x) - \frac{1}{3}\left(\frac{-\cos 3x}{3}\right) + C$$

$$= \frac{1}{3}x\sin(3x) - \frac{1}{9}\cos 3x + c$$

② $\int x\sin(5x)dx$

$u = x \qquad dv = \sin(5x)dx$

$du = dx \qquad v = \dfrac{-\cos(5x)}{5}$

$$\int udv = uv - \int vdu$$

$$\int x\sin(5x)dx$$

$$= \frac{-1}{5}x\cos(5x) - \int \frac{-\cos(5x)}{5}dx$$

$$= \frac{-1}{5}x\cos(5x) + \frac{1}{5}\int \cos(5x)\,dx$$

$$= \frac{-1}{5}x\cos(5x) + \frac{1}{5}\left(\frac{\sin(5x)}{5}\right) + c$$

$$= \frac{-1}{5}x\cos(5x) + \frac{1}{25}(\sin(5x)) + c$$

③ $\int xe^{x-3}dx$

$u = x \qquad dv = e^{x-3}\,dx$

$du = dx \qquad v = e^{x-3}$

$$\int udv = uv - \int vdu$$

$$\int xe^{x-3}dx = xe^{x-3} - \int e^{x-3}dx$$

$$= xe^{x-3} - e^{x-3} + c$$

$$= (x-1)e^{x-3} + c$$

④ $\int (x-5)e^{x-5}dx$

$u = x - 5 \qquad dv = e^{x-5}\,dx$

$du = dx \qquad v = e^{x-5}$

$$\int udv = uv - \int vdu$$

$$= (x-5)e^{x-5} - \int e^{x-5}dx$$

$$= (x-5)e^{x-5} - e^{x-5} + c$$

$$= (x-5-1)e^{x-5} + c$$

$$= (x-6)\,e^{x-5} + c$$

⑦ $\int (2x+1)\, ln(x+1)\, dx$

$u = ln(x+1)$ $\qquad dv = (2x+1)dx$

$du = \dfrac{1}{x+1} dx \longleftarrow v = x^2 + x$

$$\int udv = uv - \int vdu$$

$$= x(x+1)\ ln(x+1) - \int \frac{x^2+x}{x+1}\ dx$$

$$= \left(x^2 + x\right) ln(x+1) - \int \frac{x(x+1)}{x+1}\, dx$$

$$= \left(x^2 + x\right) ln(x+1) - \frac{x^2}{2} + c$$

⑪ $\int \left(x^2 - 2x\right) \cos x\, dx$

$u = x^2 - 2x$ $\qquad dv = \cos x\, dx$

$du = (2x-2)\, dx \longleftarrow v = \sin x$

$$\int udv = uv - \int vdu$$

$$\int \left(x^2 - 2x\right) \cos x\, dx =$$

$$\left(x^2 - 2x\right) \sin x - 2\int (x-1) \sin x\ \ dx \quad (1)$$

نستخدم قاعدة التجزيء مرة أخرى لإيجاد

$\int (x-1) \sin x\ \ dx$

$u = x - 1$ $\qquad dv = \sin x\, dx$

$du = dx \longleftarrow v = -\cos x$

$$\int udv = uv - \int vdu$$

$$\int (x-1) \sin x\ \ dx = -(x-1) \cos x + \int \cos x\ dx$$

$$= -(x-1) \cos x + \sin x + C \qquad (2)$$

من (2) ، (1) نحصل على

$$\int \left(x^2 - 2x\right) \cos x\, dx$$

$$= \left(x^2 - 2x\right) \sin x - 2[-(x-1) \cos x + \sin x] + C$$

$$= \left(x^2 - 2x\right) \sin x + 2(x-1) \cos x - 2 \sin x + C$$

$$⑫ \int (x^2+3x)\sin x\,dx$$

$u = x^2 + 3x \qquad dv = \sin x\,dx$

$du = (2x+3)\,dx \qquad v = -\cos x$

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

$$\int (x^2+3x)\sin x\,dx$$

$$= -(x^2+3x)\cos x + \int (2x+3)\cos x\,dx \quad (1)$$

نستخدم قاعدة التجزيء مرة أخرى لإيجاد

$$\int (2x+3)\cos x\,dx$$

$u = 2x + 3 \qquad dv = \cos x\,dx$

$du = 2dx \qquad v = \sin x$

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

$$\int (2x+3)\cos x\,dx = (2x+3)\sin x - \int 2\sin x\,dx$$

$$= (2x+3)\sin x + 2\cos x \qquad (2)$$

من (2) ، (1) نحصل على

$$\int (x^2+3x)\sin x\,dx =$$

$$-(x^2+3x)\cos x + (2x+3)\sin x + 2\cos x + c$$

13 $\int x^2 e^{x+1} dx$

$u = x^2 \quad dv = e^{x+1} dx$

$du = 2x dx \quad v = e^{x+1}$

$\int u dv = uv - \int v du$

$\int x^2 e^{x+1} dx$

$= x^2 e^{x+1} - 2\int x e^{x+1} dx \qquad (1)$

نستخدم قاعدة التجزيء مرة أخرى لإيجاد تكامل

$\int x e^{x+1} dx$

$u = x \quad dv = e^{x+1} dx$

$du = dx \quad v = e^{x+1}$

$\int u dv = uv - \int v du$

$\int x e^{x+1} dx = x e^{x+1} - \int e^{x+1} dx$

$= x e^{x+1} - e^{x+1} + C \qquad (2)$

من (2) ، (1) نحصل على

$\int x^2 e^{x+1} dx = x^2 e^{x+1} - 2\left[x e^{x+1} - e^{x+1}\right] + C$

$= \left(x^2 - 2x + 2\right) e^{x+1} + C$

14 $\int x^2 e^{2x-3} dx$

$u = x^2 \quad dv = e^{2x-3} dx$

$du = 2x dx \quad v = \frac{1}{2} e^{2x-3}$

$\int u dv = uv - \int v du$

$\int x^2 e^{2x-3} dx = \frac{1}{2} x^2 e^{2x-3}$

$- \int x e^{2x-3} dx \ldots\ldots\ldots (1)$

نستخدم قاعدة التجزيء مرة أخرى لإيجاد تكامل

$\int x e^{2x-3} dx$

$u = x \quad dv = e^{2x-3} dx$

$du = dx \quad v = \frac{1}{2} e^{2x-3}$

$\int u dv = uv - \int v du$

$\int x e^{2x-3} dx = \frac{1}{2} x e^{2x-3} - \frac{1}{2}\int e^{2x-3} dx$

$= \frac{1}{2} x e^{2x-3} - \frac{1}{4} e^{2x-3} + c \qquad (2)$

من (2) ، (1) نحصل على

$\therefore \int x^2 e^{2x-3} dx$

$= \frac{1}{2} x^2 e^{2x-3} - \frac{1}{2} x e^{2x-3} + \frac{1}{4} e^{2x-3} + c$

$= \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\right) e^{2x-3} + c$

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (5—1)، ظلّل الدائرة (a) إذا كانت العبارة صحيحة و(b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) $\int x\cos(2x)\,dx = \frac{1}{2}x\sin(2x) + \frac{1}{4}\cos 2x + C$ — (a) (b)

(2) $\int x\sin(\pi x)\,dx = -\frac{x}{\pi}\cos(\pi x) + \frac{1}{\pi^2}\sin(\pi x) + C$ — (a) (b)

(3) $\int x\,e^{6x}\,dx = \frac{1}{6}x\,e^{6x} - \frac{1}{36}e^{6x} + C$ — (a) (b)

(4) $\int x\,e^{-x}\,dx = -x\,e^{-x} + e^{-x} + C$ — (a) (b)

(5) $\int x\sec^2 x\,dx = x\tan x - \ln|\sec x| + C$ — (a) (b)

في التمارين (11—6)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(6) $\int (2x+1)\sin x\,dx$

(a) $(2x+1)\cos x + 2\sin x + C$

(b) $-(2x+1)\cos x + 2\sin x + C$

(c) $-(x+1)\cos x - 2\sin x + C$

(d) $(2x+1)\cos x - \sin x + C$

في التمرينين (11—10)، إذا كان $\int (3x-1)e^{3x+2}\,dx = uv - \int v\,du$ فإن:

(10) $uv =$

(a) $(3x-1)e^{3x+2}$

(b) $\frac{1}{3}(3x-1)e^{3x+2}$

(c) $(3x-1)e^{x+2}$

(d) $\frac{1}{3}(x-1)e^{3x+2}$

(11) $\int v\,du =$

(a) $-\frac{1}{3}e^{3x+2} + C$

(b) $-e^{3x+2} + C$

(c) $\frac{1}{3}e^{3x+2} + C$

(d) $e^{3x+2} + C$

تمرَّنْ
5–6

التكامل باستخدام الكسور الجزئية

المجموعة A تمارين مقالية

في التمارين (1–4)، أوجد الكسور الجزئيّة لكل دالة f مما يلي ثم أوجد $\int f(x)dx$.

① $f(x)=\dfrac{2}{(x-5)(x-3)}$

الحل

$$\frac{2}{(x-5)(x-3)}=\frac{A_1}{x-5}+\frac{A_2}{x-3}$$

اضرب طرفي المعادلة في $(x-5)(x-3)$ وبسط

$$2=A_1(x-3)+A_2(x-5)$$

عوض عن x بـ 5

$$2=2A_1 \quad \Rightarrow \quad A_1=1$$

عوض عن x بـ 3

$$2=-2A_2 \quad \Rightarrow \quad A_2=-1$$

$$\frac{2}{(x-5)(x-3)}=\frac{1}{x-5}+\frac{-1}{x-3}$$

$$\therefore f(x)=\frac{1}{(x-5)}+\frac{-1}{(x-3)}$$

$$\int f(x)dx=\int\frac{2}{(x-5)(x-3)}dx=$$

$$=\int\left(\frac{1}{x-5}-\frac{1}{x-3}\right)dx$$

$$=\int\frac{1}{x-5}\,dx-\int\frac{1}{x-3}\,dx$$

$$=ln|x-5|-ln|x-3|+c$$

② $f(x)=\dfrac{1}{x^2+2x}$

الحل

$$x^2+2x=x(x+2)$$

$$\frac{1}{x^2+2x}=\frac{A_1}{x}+\frac{A_2}{x+2}$$

اضرب طرفي المعادلة في $(x)(x+2)$ وبسط

$$1=A_1(x+2)+A_2\,x$$

عوض عن x بـ 0

$$1=2A_1 \quad \Rightarrow \quad A_1=\frac{1}{2}$$

عوض عن x بـ -2

$$1=-2A_2 \quad \Rightarrow \quad A_2=\frac{-1}{2}$$

$$\frac{1}{x^2+2x}=\frac{\frac{1}{2}}{x}+\frac{\frac{-1}{2}}{x+2}$$

$$\therefore f(x)=\frac{\frac{1}{2}}{x}+\frac{\frac{-1}{2}}{x+2}$$

$$\int f(x)dx=\int\frac{1}{x^2+2x}dx=$$

$$=\int\left(\frac{\frac{1}{2}}{x}+\frac{\frac{-1}{2}}{x+2}\right)dx$$

$$\int\frac{\frac{1}{2}}{x}\,dx+\int\frac{\frac{-1}{2}}{x+2}\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\,ln|x|-\frac{1}{2}\,ln|x+2|+c$$

③ $\boxed{f(x) = \dfrac{-x+10}{x^2+x-12}}$

الحل

$$x^2 + x - 12 = (x+4)(x-3)$$

$$\frac{-x+10}{(x+4)(x-3)} = \frac{A_1}{x+4} + \frac{A_2}{x-3}$$

اضرب طرفي المعادلة في $(x+4)(x-3)$ وبسط

$$-x + 10 = A_1(x-3) + A_2(x+4)$$

نعوض عن x بـ -4

$$14 = -7A_1 \qquad \Rightarrow \quad A_1 = -2$$

نعوض عن x بـ 3

$$7 = 7A_2 \qquad \Rightarrow \quad A_2 = 1$$

$$\frac{-x+10}{(x+4)(x-3)} = \frac{-2}{x+4} + \frac{1}{x-3}$$

$$\therefore f(x) = \frac{-2}{x+4} + \frac{1}{x-3}$$

$$\int f(x)dx = \int \frac{-x+10}{(x-5)(x-3)}dx =$$

$$= \int \left(\frac{-2}{x+4} - \frac{1}{x-3}\right)dx$$

$$\int \frac{-2}{x+4}dx - \int \frac{1}{x-3}dx =$$

$$= -2\ ln|x+4| + ln|x-3| + c$$

④ $\boxed{f(x) = \dfrac{12}{x^3+2x^2-3x}}$

الحل

$$x^3 + 2x^2 - 3x = x(x^2 + 2x - 3)$$

$$= x(x+3)(x-1)$$

$$\frac{12}{x^3+2x^2-3x} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x+3} + \frac{A_3}{x-1}$$

اضرب طرفي المعادلة في $x(x+3)(x-1)$ وبسط

$$12 = A_1(x+3)(x-1) + A_2x(x-1) + A_3x(x+3)$$

نعوض عن x بـ 0

$$12 = -3A_1 \qquad \Rightarrow \quad A_1 = -4$$

نعوض عن x بـ -3

$$12 = 12A_2 \qquad \Rightarrow \quad A_2 = 1$$

نعوض عن x بـ 1

$$12 = 4A_3 \qquad \Rightarrow \quad A_3 = 3$$

$$\frac{12}{x^3+2x^2-3x} = \frac{-4}{x} + \frac{1}{x+3} + \frac{3}{x-1}$$

$$\therefore f(x) = \frac{-4}{x} + \frac{1}{x+3} + \frac{3}{x-1}$$

$$\int f(x)dx = \int \frac{12}{x^3+2x^2-3x}dx =$$

$$= \int \left(\frac{-4}{x} + \frac{1}{x+3} + \frac{3}{x-1}\right)dx$$

$$\int \frac{-4}{x}dx + \int \frac{1}{x+3}dx + \int \frac{3}{x-1}dx =$$

$$= -4\ ln|x| + ln|x+3| + 3ln|x-1| + c$$

فى التمارين (11–5)، أوجد:

5 $\boxed{\int \frac{x+17}{2x^2+5x-3}\,dx}$

الحل

$$2x^2+5x-3=(2x-1)(x+3)$$

$$\frac{x+17}{(2x-1)(x+3)}=\frac{A_1}{2x-1}+\frac{A_2}{x+3}$$

اضرب طرفي المعادلة في $(2x-1)(x+3)$ وبسط

$$x+17=A_1(x+3)+A_2(2x-1)$$

نعوض عن $x=\frac{1}{2}$

$$\frac{35}{2}=\frac{7}{2}A_1 \quad \Rightarrow \quad A_1=5$$

نعوض $x=-3$

$$14=-7A_2 \quad \Rightarrow \quad A_2=-2$$

$$\frac{x+17}{(2x-1)(x+3)}=\frac{5}{2x-1}+\frac{-2}{x+3}$$

$$\therefore f(x)=\frac{5}{2x-1}+\frac{-2}{x+3}$$

$$\int f(x)dx=\int \frac{x+17}{(2x-1)(x+3)}\,dx$$

$$=\int\left(\frac{5}{2x-1}+\frac{-2}{x+3}\right)dx$$

$$=\int \frac{5}{2x-1}dx-\int \frac{2}{x+3}dx$$

$$=5\ln|2x-1|-2\ln|x+3|+c$$

6 $\boxed{\int \frac{-6x+25}{x^3-6x^2+9x}dx}$

الحل

$$\frac{-6x+25}{x^3-6x^2+9x}=\frac{-6x+25}{x(x-3)^2}$$

$$\frac{-6x+25}{x^3-6x^2+9x}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-3}+\frac{C}{(x-3)^2}$$

اضرب طرفي المعادلة في $x(x-3)^2$ وبسط

$$-6x+25=A(x-3)^2+Bx(x-3)+cx$$

نعوض $x=0 \Rightarrow A=\frac{25}{9}$

نعوض $x=3 \Rightarrow C=\frac{7}{3}$

نعوض $x=1$, $A=\frac{25}{9}$, $C=\frac{7}{3}$

$$\Rightarrow B=\frac{-25}{9}$$

$$f(x)=\frac{\frac{25}{9}}{x}+\frac{\frac{-25}{9}}{x-3}+\frac{\frac{7}{3}}{(x-3)^2}$$

$$\int f(x)\,dx=\int \frac{\frac{25}{9}}{x}+\frac{\frac{-25}{9}}{x-3}+\frac{\frac{7}{3}}{(x-3)^2}dx$$

$$=\frac{25}{9}\int\frac{1}{x}dx-\frac{25}{9}\int\frac{1}{x-3}dx+\frac{7}{3}\int\frac{1}{(x-3)^2}dx$$

$$=\frac{25}{9}\ln|x|-\frac{25}{9}\ln|x-3|+\frac{7}{3(x-3)}+c$$

7 $\boxed{\int \frac{3x^2-4x+3}{x^3-3x^2}\,dx}$

الحل

$$\frac{3x^2-4x+3}{x^3-3x^2}=\frac{3x^2-4x+3}{x^2(x-3)}$$

$$=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x-3}$$

اضرب طرفي المعادلة في $x^2\,(x-3)$ وبسط

$$3x^2-4x+3 = Ax(x-3)+B(x-3)+cx^2$$

$x=0$ نعوض $\Rightarrow$ $B=-1$

$x=3$ نعوض $\Rightarrow$ $C=2$

$x=1$ نعوض, $B=-1$, $C=2$

$\Rightarrow$ $A=1$

$$\int \frac{3x^2-4x+3}{x^3-3x^2}\,dx$$

$$=\int \frac{1}{x}\,dx+\int \frac{-1}{x^2}\,dx+\int \frac{2}{x-3}\,dx$$

$$=\ln|x|+\frac{1}{x}+2\ln|x-3|+c$$

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (4—1)، ظلّل الدائرة (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) $\int \frac{4dx}{(x+3)(x+7)}=\ln|x+3|+\ln|x+7|+C$ (a) (b)

(2) $\int \frac{-6dx}{x^2+3x}=-2\ln|x+3|+2\ln|x|+C$ (a) (b)

(3) الدالة: $f(x)=\frac{4x-11}{2x^2-x-3}$ على صورة كسور جزئية هي: $f(x)=\frac{3}{x+1}-\frac{2}{2x-3}$ (a) (b)

(4) للحدودية النسبية: $\frac{x^2-x+2}{x^3-2x^2+x}$ ثلاثة كسور جزئية. (a) (b)

في التمارين (5—10)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(5) $\int \frac{6}{x^2-9}dx =$

(a) $\ln|x+3|-\ln|x-3|+C$

(b) $\ln(x-3)-\ln(x+3)+C$

(c) $\ln|x+3|+\ln|x-3|+C$

(d) $\ln|x-3|-\ln|x+3|+C$

(6) $\int \frac{7x-7}{x^2-3x-10}dx =$

(a) $4\ln|x+2|+3\ln|x-5|+C$

(b) $3\ln|x+2|+2\ln|x-5|+C$

(c) $4\ln|x-5|+3\ln|x+2|+C$

(d) $4\ln|x-5|-3\ln|x+2|+C$

(7) الدالة النسبية: $f(x)=\frac{x}{x^2-4}$ على صورة كسور جزئية هي $f(x)$ تساوي:

(a) $\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x+2}$

(b) $\frac{1}{2(x-2)}+\frac{1}{2(x+2)}$

(c) $\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+2}$

(d) $\frac{1}{2(x-2)}-\frac{1}{2(x+2)}$

التكامل المحدد

المجموعة A تمارين مقالية

في التمارين (1–7)، أوجد:

① $\int_{-1}^{1} 3x(x-4)\,dx$

$= \int_{-1}^{1} (3x^2 - 12x)dx$

$= [x^3 - 6x^2]_{-1}^{1} = 2$

② $\int_{0}^{2} (x+1)^2\,dx$

$= \int_{0}^{2} (x^2 + 2x + 1)\ \ dx$

$= \left[\frac{x^3}{3} + x^2 + x\right]_0^2 = \frac{26}{3}$

③ $\int_{0}^{4} \frac{x^2-1}{x+1}\,dx$

$= \int_{0}^{4} \frac{(x-1)(x+1)}{(x+1)} dx$

$= \int_{0}^{4} (x-1)dx = \left[\frac{x^2}{2} - x\right]_0^4$

$= \left[\frac{x^2}{2} - x\right]_0^4$

$= 4$

④ $\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} \cos 3x\,dx$

$= \left[\frac{1}{3}\sin 3x\right]_0^{\frac{\pi}{3}} =$

$= \left(\frac{1}{3}\sin(\pi)\right) - \left(\frac{1}{3}\sin(0)\right)$

$= 0$

⑤ $\int_{1}^{4} \frac{8-x^4}{2x^2}\,dx$

$= \int_1^4 \frac{8-x^4}{2x^2}\quad dx \quad = \int_1^4 \left[\frac{8}{2x^2} - \frac{x^4}{2x^2}\right]\quad dx$

$= \int_1^4 \left[\frac{4}{x^2} - \frac{x^2}{2}\right]\quad dx \quad = \left[\frac{-1}{x}\right]_1^4 - \frac{1}{2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^4 \quad = -7.5$

⑥ $\boxed{\int_0^1 x\sqrt{x}\,dx}$

$= \int_0^1 x^{\frac{3}{2}}\,dx$

$= \left[\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}\right]_0^1$

$= \frac{2}{5}$

⑦ $\boxed{\int_1^2 \left(3e^x + \frac{5}{x}\right)dx}$

$= \int_1^2 3e^x\,dx + \int_1^2 \frac{5}{x}\,dx$

$= 3\int_1^2 e^x\,dx + 5\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx$

$= [3e^x]_1^2 + [5\,ln|x|]_1^2$

$= 3e(e-1) + 5ln2$

في التمارين (8–10)، أوجد:

⑧ $\boxed{\int_{-1}^3 |x-2|\,dx}$

$= \int_{-1}^2 (-x+2)\,dx + \int_2^3 (x-2)dx$

$= \left[\frac{-x^2}{2} + 2x\right]_{-1}^2 + \left[\frac{x^2}{2} - 2x\right]_2^3 = 5$

⑨ $\boxed{\int_{-1}^1 |x^3|\,dx}$

$= \int_{-1}^0 |x^3|\,dx + \int_0^1 |x^3|\,dx$

$= \int_{-1}^0 -x^3\,dx + \int_0^1 x^3\,dx$

$= \left[\frac{-x^4}{4}\right]_{-1}^0 + \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{2}$

⑩ $\boxed{\int_{-2}^3 (x|x|+3)\,dx}$

$= \int_{-2}^0 (x|x|+3)\,dx + \int_0^3 (x|x|+3)\,dx = \int_{-2}^0 (-x^2+3)dx + \int_0^3 (x^2+3)dx$

$= \left[\frac{-x^3}{3} + 3x\right]_{-2}^0 + \left[\frac{+x^3}{3} + 3x\right]_0^3 \qquad = -\left[\frac{8}{3} - 6\right] + [9+9-0]$

$= \frac{10}{3} + 18 = \frac{64}{3} = 21,3333$

في التمارين (15–14)، استعن برسم بيان الدوال لإيجاد:

(14) $\boxed{\int_{-3}^{3} \sqrt{9-x^2}\, dx}$

$y = \sqrt{9-x^2}$

$y^2 = 9 - x^2$

$x^2 + y^2 = 9$

و هي معادلة دائرة طول نصف قطرها 3

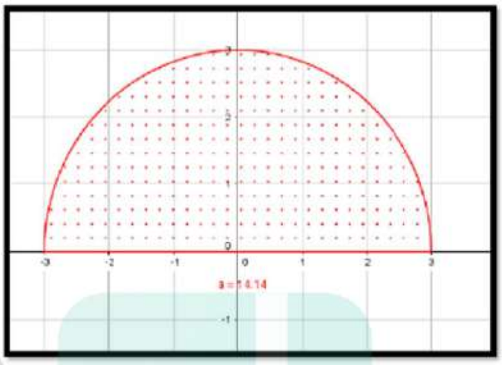
$y = \sqrt{9-x^2}$

$A = \frac{1}{2}\pi r^2$

$A = \frac{1}{2}\pi (3)^2$

$= 4.5\pi$

$= 14.137$



تمثل معادلة النصف **العلوي** من الدائرة

(15) $\boxed{\int_{-5}^{0} -\sqrt{25-x^2}\, dx}$

$y = -\sqrt{25-x^2}$

$y^2 = 25 - x^2$

$y^2 + x^2 = 25$

و هي معادلة دائرة طول نصف قطرها ٥ وحدات

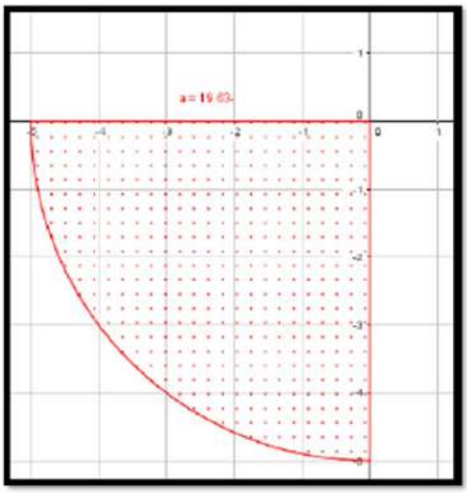
$y = -\sqrt{25-x^2}$

$A = -\frac{1}{4}\pi r^2$

$A = -\frac{1}{4}\pi (5)^2$

$= -6.25\pi$

$= -19.634$



تمثل معادلة النصف **السفلي** من الدائرة

في التمارين (16–19)، استخدم التعويض المناسب لحساب التكامل.

16 $\boxed{\int_0^3 \frac{dx}{(1+x)^2}}$

$\int_0^3 (1+x)^{-2} dx$

نفرض أن $u = 1 + x$

$= \int_1^4 u^{-2} du$

$= \left[\frac{u^{-1}}{-1}\right]_1^4 =$

$= \frac{3}{4}$

17 $\boxed{\int_e^6 \frac{dx}{x\ln x}}$

$= \int_e^6 \frac{\frac{1}{x}}{lnx}\, dx \xrightarrow{\text{تطبيق مباشر علي القاعدة}} \int \frac{g'(x)}{g(x)} dx$

$= [ln|lnx|]_e^6 = ln(ln6)$

18 $\boxed{\int_1^e \frac{\ln^6 x}{x} dx}$

$\int_1^e \frac{ln^6 x}{x}\ dx = \int_1^e \frac{(ln\ x)^6}{x}\ dx$

$u = ln\,x \qquad du = \frac{1}{x}\ dx$

$x \overset{=}{\rightarrow} e \qquad u \xrightarrow{=lne} 1$

$x \overset{=}{\rightarrow} 1 \qquad u \xrightarrow{=ln1} 0$

$\int_0^1 u^6\ du$

$\left[\frac{u^7}{7}\right]_0^1 = \frac{1}{7}$

19 $\boxed{\int_{-1}^3 \frac{x\,dx}{x^2+1}}$

$= \frac{1}{2} \int_{-1}^3 \frac{2x}{x^2+1}\ dx$

$= \frac{1}{2} \int_{-1}^3 \frac{1}{u}\ du$

$= \frac{1}{2} [ln|u|]_{-1}^3$

$= \frac{1}{2} \left[ln|x^2+1|\right]_{-1}^3$

$= \frac{1}{2}\ (\ln 10 - \ln 2)$

$= 0.8047189$

نفرض

$u = x^2+1$

$du = 2x$

في التمارين (24—26)، أوجد:

(25) $\boxed{\int_{-2}^{0} \frac{5x-1}{x^2+2x-3}\,dx}$

$$\frac{5x-1}{x^2+2x-3} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x+3)}$$

$$5x-1 = A(x+3) + B(x-1)$$

عوض عن $\xrightarrow{x=1}$ $4 = 4A$ $\overset{\text{ينتج}}{\longrightarrow}$ $A = 1$

عوض عن $\xrightarrow{x=-3}$ $-16 = -4B$ $\overset{\text{ينتج}}{\longrightarrow}$ $B = 4$

$$= \int_{-2}^{0}\left(\frac{1}{(x-1)} + \frac{4}{(x+3)}\right)\,dx$$

$$= [\ln|x-1|]_{-2}^{0} + 4ln[|x+3|]_{-2}^{0}$$

$$= 3\ln 3$$

(24) $\boxed{\int_{-1}^{1} \frac{4}{x^2-4}\,dx}$

$$\frac{4}{(x-2)(x+2)} = \frac{A}{(x-2)} + \frac{B}{(x+2)}$$

$$= A(x+2) + B(X-24)$$

عوض عن $\xrightarrow{c=-2}$ $4 = -4B$ $\overset{\text{ينتج}}{\longrightarrow}$ $B = -1$

عوض $\xrightarrow{x=+2}$ $4 = 4A$ $\overset{\text{ينتج}}{\longrightarrow}$ $B = +1$

$$\frac{4}{(x-2)(x+2)} = \frac{1}{(x-2)} + \frac{-1}{(x+2)}$$

$$= \int_{-1}^{1} \frac{1}{(x-2)} + \frac{-1}{(x+2)} \quad dx$$

$$= [ln|x-2|]_{-1}^{1} \quad -[ln|x+2|]_{-1}^{1}$$

$$= -2ln3$$

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (1—7)، ظلّل الدائرة (a) إذا كانت العبارة صحيحة و(b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\,dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \cos^2 x\,dx = \frac{\pi}{2}$ — (a) (b)

(2) $\int_{-3}^{-2} (|x| + x + 5)dx = -2$ — (a) (b)

(3) $\int_{-1}^{1} (|x|)^3 dx = -\frac{1}{2}$ — (a) (b)

(4) $\int_{0}^{1} 12(3x-2)^3 dx = -15$ — (a) (b)

(5) $\int_{-1}^{1} \frac{1}{\pi}\sqrt{1-x^2}\,dx = 1$ — (a) (b)

(6) $\int_{2}^{3} f(x)\,dx + \int_{3}^{5} f(x)\,dx - \int_{5}^{2} f(x)\,dx = 0$ — (a) (b)

(7) $\int_{2}^{4} f(x)\,dx + \int_{4}^{2} g(x)\,dx = 0$ — (a) (b)

في التمارين (12–8)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(8) إذا كان: $\int_{3}^{-1} g(x)\,dx = 2$ ، $\int_{-1}^{3} f(x)\,dx = 4$ فإن $\int_{-1}^{3}(2f(x)+3g(x)+1)\,dx$ تساوي:

(a) 18 (b) -6 (c) 6 (d) 12

(9) $\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{18}} \sqrt{2}\,dx =$

(a) 2 (b) $2\sqrt{2}$ (c) 4 (d) 8

(10) $\int_{-1}^{1}(1-|x|)\,dx =$

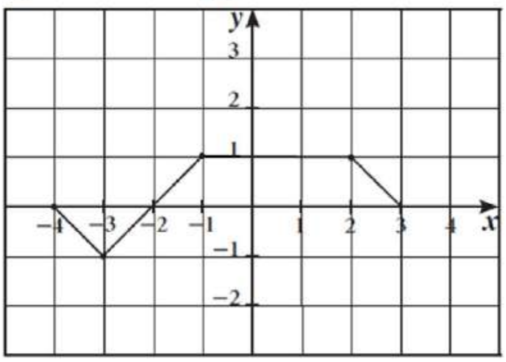
(a) 1 (b) -1 (c) 0 (d) $\frac{1}{2}$

(11) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin x+\cos x)\,dx =$

(a) 4 (b) 2 (c) 0 (d) π

في التمارين (15–13)، لديك قائمتان، اختر من القائمة (2) ما يناسب كل تمرين من القائمة (1) لتحصل على عبارة صحيحة.

13 ------------ (d)
14 ------------ (b)
15 ------------ (c)



إذا كان بيان الدالة f كما في الشكل المقابل، فإن:

(1)	(2)
(13) $\int_{-4}^{3} f(x)\,dx$ يساوي: 3	(a) 6
(14) مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f ومحور السينات هي: 5	(b) 5
(15) $\int_{-4}^{-1}\left(f(x)+\frac{1}{6}\right)dx$ يساوي: 0	(c) 0
	(d) 3

تمرّنْ
6−1

المساحات في المستوي

المجموعة A تمارين مقالية

(1) أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f : $f(x) = 8x^3$ ومحور السينات والمستقيمين $x = 1$, $x = 3$

الحل : نوجد قيم x بحيث :

$$f(x) = 0$$
$$8x^3 = 0$$
$$x = 0, \qquad 0 \notin (1,3)$$
$$A = \left| \int_1^3 f(x)dx \right| = \left| \int_1^3 (8x^3)dx \right| = \left| \left[8\frac{x^4}{4} \right]_1^3 \right|$$
$$= \left| [2x^4]_1^3 \right| = \left| [2(3)^4] - [2(1)^4] \right| = 160 \quad \textit{units square}$$

(2) أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f : $f(x) = x^2 - 5x$ ومحور السينات.

الحل : نوجد قيم x بحيث :

$$f(x) = 0$$
$$x^2 - 5x = 0$$
$$x = 0, \qquad x = 5$$
$$A = \left| \int_0^5 f(x)dx \right|$$
$$= \left| \int_0^5 (x^2 - 5x)dx \right|$$

$$= \left| \left[\frac{x^3}{3} - 5\frac{x^2}{2} \right]_0^5 \right|$$
$$= \left| \left[\frac{(5)^3}{3} - 5\frac{(5)^2}{2} \right] - \left[\frac{(0)^3}{3} - 5\frac{(0)^2}{2} \right] \right|$$
$$= \frac{125}{6} \quad \textit{units square}$$

(3) أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f : $f(x) = 12 - x^2$ ومحور السينات.

الحل : نوجد قيم x بحيث :

$$f(x) = 0$$
$$12 - x^2 = 0$$
$$x = 2\sqrt{3}, \qquad x = -2\sqrt{3}$$
$$A = \left| \int_{-2\sqrt{3}}^{2\sqrt{3}} f(x)dx \right|$$
$$= \left| \int_{-2\sqrt{3}}^{2\sqrt{3}} (12 - x^2)dx \right|$$

$$= \left| \left[12x - \frac{x^3}{3}\right]_{-2\sqrt{3}}^{2\sqrt{3}} \right|$$
$$= \left| \left[12(2\sqrt{3}) - \frac{(2\sqrt{3})^3}{3}\right] - \left[12(-2\sqrt{3}) - \frac{(-2\sqrt{3})^3}{3}\right] \right|$$
$$\approx 55.425 \quad units\ square$$

في التمارين (4–6)، أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f ومحور السينات في الفترة المحددة:

(4) $f(x) = x^2 - x - 6$, $[-3, 2]$

الحل : نوجد قيم x بحيث :

$$f(x) = 0$$
$$x^2 - x - 6 = 0$$
$$x = -2 \qquad x = 3$$
$$-2 \in (-3,2) \qquad 3 \notin (-3,2)$$
$$A = \left| \int_{-3}^{-2} f(x)dx \right| + \left| \int_{-2}^{2} f(x)dx \right|$$
$$A = \left| \int_{-3}^{-2} (x^2 - x - 6)dx \right| + \left| \int_{-2}^{2} (x^2 - x - 6)dx \right|$$
$$= \left| \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 6x\right]_{-3}^{-2} \right| + \left| \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 6x\right]_{-2}^{2} \right|$$
$$= \left| \left[\frac{-8}{3} - 2 + 12\right] - \left[-9 - \frac{9}{2} + 18\right] \right| + \left| \left[\frac{8}{3} - 2 - 12\right] - \left[\frac{-8}{3} - 2 + 12\right] \right|$$
$$= \frac{43}{2} \quad units\ \ square$$

(5) $f(x) = x^3 - 6x \ , \ [0 , 3]$

الحل : نوجد قيم x بحيث :

$f(x) = 0$

$x^3 - 6x = 0$

$x = \sqrt{6}$ $\qquad$ $x = 0$ $\qquad$ $x = -\sqrt{6}$

$\sqrt{6} \in (0,3)$ $\qquad$ $0 \notin (0,3)$ $\qquad$ $-\sqrt{6} \notin (0,3)$

$$A = \left| \int_0^{\sqrt{6}} f(x)dx \right| + \left| \int_{\sqrt{6}}^{3} f(x)dx \right|$$

$$A = \left| \int_0^{\sqrt{6}} (x^3 - 6x)dx \right| + \left| \int_{\sqrt{6}}^{3} (x^3 - 6x)dx \right|$$

$$= \left| \left[\frac{x^4}{4} - 3x^2\right]_0^{\sqrt{6}} \right| + \left| \left[\frac{x^4}{4} - 3x^2\right]_{\sqrt{6}}^{3} \right|$$

$$= \left| \left[\frac{(\sqrt{6})^4}{4} - 3(\sqrt{6})^2\right] - \left[\frac{(0)^4}{4} - 3(0)^2\right] \right| + \left| \left[\frac{(3)^4}{4} - 3(3)^2\right] - \left[\frac{(\sqrt{6})^4}{4} - 3(\sqrt{6})^2\right] \right|$$

$$= \frac{45}{4} \ units \ \ square$$

(6) $f(x) = \cos 2x \ , \ \left[-\frac{\pi}{4} , \frac{\pi}{2}\right]$

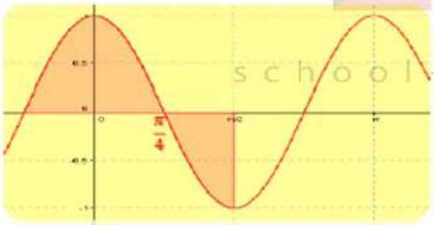
الحل : نرسم منحنى الدالة f

نلاحظ أنه في الفترة $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$

تنقسم المنطقة المطلوبة إلى منطقتين حيث

$f(x) = 0$ عند $x = \frac{\pi}{4}$

فتكون المساحة المطلوبة كما يلي :



$$A = \left| \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} f(x)dx \right| + \left| \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx \right|$$

$$= \left| \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (\cos 2x)dx \right| + \left| \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos 2x)dx \right|$$

$$= \left| \left[\frac{1}{2} sin2x\right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \right| + \left| \left[\frac{1}{2} sin2x\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \right|$$

$$= \left| \left[\frac{1}{2} sin2(\frac{\pi}{4})\right] - \left[\frac{1}{2} sin2(-\frac{\pi}{4})\right] \right| + \left| \left[\frac{1}{2} sin2(\frac{\pi}{2})\right] - \left[\frac{1}{2} sin2(\frac{\pi}{4})\right] \right| = \frac{3}{2}$$

$units \ \ square$

(7) أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f : $f(x) = 4x - x^2$
ومنحنى الدالة g : $g(x) = 5 + x^2$ والمستقيمين $x = 0$, $x = 2$
علمًا بأن منحنيي الدالتين g , f غير متقاطعين.

الحل : المنحنيين غير متقاطعين لذلك نأخذ قيمة اختيارية تنتمي إلى الفترة $(0,2)$ و لتكن $x = 1$

$f(1) = 4(1) - (1)^2 = 3$, $g(1) = 5 + (1)^2 = 6$

$g(x) > f(x) \qquad \forall x \in [0,2]$

$$A = \int_0^2 (g(x) - f(x))dx = \int_0^2 (5 + x^2 - (4x - x^2))dx$$

$$= \int_0^2 (2x^2 - 4x + 5)dx = \left[\frac{2}{3}x^3 - 2x^2 + 5x\right]_0^2$$

$$= \left[\frac{2}{3}(2)^3 - 2(2)^2 + 5(2)\right] - \left[\frac{2}{3}(0)^3 - 2(0)^2 + 5(0)\right] = \frac{22}{3} \text{ units square}$$

(8) أوجد مساحة المنطقة المحددة بالمنحنيين $f(x) = x$, $g(x) = \sqrt[3]{x}$
، والمستقيمين $x = 8$, $x = 1$.

الحل :

لإيجاد الإحداثيات السينية لنقطتي التقاطع نضع : $f(x) = g(x)$

$x = \sqrt[3]{x}$

$x^3 = x$

$x^3 - x = 0$

$x = 0 \qquad x = -1 \qquad x = 1$

$0 \notin (1,8) \qquad -1 \notin (1,8) \qquad 1 \notin (1,8)$

نأخذ قيمة اختيارية تنتمي إلى الفترة $(1,8)$ و لتكن $x = 3$

$f(3) = 3$, $g(3) = \sqrt[3]{3} \cong 1.44$

$f(x) \geq g(x) \qquad \forall x \in [1,8]$

$$A = \int_1^8 (f(x) - g(x))dx = \int_1^8 (x - \sqrt[3]{x})dx = \int_1^8 \left(x - x^{\frac{1}{3}}\right)dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}\right]_1^8$$

$$= \left[\frac{(8)^2}{2} - \frac{3}{4}(8)^{\frac{4}{3}}\right] - \left[\frac{(1)^2}{2} - \frac{3}{4}(1)^{\frac{4}{3}}\right] = 20.25 \qquad \text{units square}$$

ملاحظة : يمكن الحل باستخدام القيمة المطلقة .

(9) أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f : $f(x) = 2x^2$ ومنحنى الدالة g : $g(x) = 3 - x$ والمستقيمين $x = 3$, $x = 0$.

الحل : لإيجاد الإحداثيات السينية لنقاط التقاطع نضع :

$$f(x) = g(x)$$

$$2x^2 = 3 - x$$

$$2x^2 + x - 3 = 0$$

$$x = -\frac{3}{2}, \qquad x = 1$$

$$-\frac{3}{2} \notin (0,3) \qquad 1 \in (0,3)$$

$$A = \left| \int_0^1 (f(x) - g(x))dx \right| + \left| \int_1^3 (f(x) - g(x))dx \right|$$

$$= \left| \int_0^1 (2x^2 + x - 3)dx \right| + \left| \int_1^3 (2x^2 + x - 3)dx \right|$$

$$A = \left| \int_0^1 (2x^2 + x - 3)dx \right| + \left| \int_1^3 (2x^2 + x - 3)dx \right|$$

$$= \left| \left[\frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 3x\right]_0^1 \right| + \left| \left[\frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 3x\right]_1^3 \right|$$

$$= \left| \left[\frac{2}{3} - \frac{1}{2} - 3\right] - [(0)] \right| + \left| \left[18 - \frac{9}{2} - 9\right] - \left[\frac{2}{3} - \frac{1}{2} - 3\right] \right|$$

$$= \frac{103}{6} \quad units\ square$$

(10) أوجد مساحة المنطقة بين المنحنى $f(x) = 3 - x^2$ والمستقيم $g(x) = -1$.

الحل : لإيجاد الإحداثيات السينية لنقطتي التقاطع نضع : $f(x) = g(x)$

$$3 - x^2 = -1$$

$$x^2 - 4 = 0$$

$$x = -2 , \qquad x = 2$$

$$A = \left| \int_{-2}^{2} (f(x) - g(x))dx \right| = \left| \int_{-2}^{2} ((3 - x^2) - (-1))dx \right|$$

$$= \left| \int_{-2}^{2} (-x^2 + 4)dx \right| = \left| \left[-\frac{1}{3}x^3 + 4x\right]_{-2}^{2} \right|$$

$$= \left| \left[-\frac{1}{3}(2)^3 + 4(2)\right] - \left[-\frac{1}{3}(-2)^3 + 4(-2)\right] \right| = \frac{32}{3}$$

units square

في التمارين (11–13)، أوجد مساحة المنطقة المحددة بالمنحنيات التالية:

(11) $f(x) = x^2 - 2 , \; g(x) = 2$

الحل : لإيجاد الإحداثيات السينية لنقطتي التقاطع نضع : $f(x) = g(x)$

$$x^2 - 2 = 2$$

$$x^2 - 4 = 0$$

$$x = -2 , \qquad x = 2$$

$$A = \left| \int_{-2}^{2} (f(x) - g(x))dx \right| = \left| \int_{-2}^{2} ((x^2 - 2) - (2))dx \right|$$

$$= \left| \int_{-2}^{2} (x^2 - 4)dx \right| = \left| \left[\frac{1}{3}x^3 - 4x\right]_{-2}^{2} \right|$$

$$= \left| \left[\frac{1}{3}(2)^3 - 4(2)\right] - \left[\frac{1}{3}(-2)^3 - 4(-2)\right] \right| = \frac{32}{3}$$

units square

(12) $f(x) = 2x - x^2 \ , \ g(x) = -2x$

الحل : لإيجاد الإحداثيات السينية لنقطتي التقاطع نضع : $f(x) = g(x)$

$2x - x^2 = -2x$

$x^2 - 4x = 0$

$x = 0 , \qquad x = 4$

$$A = \left| \int_0^4 (f(x) - g(x))dx \right| = \left| \int_0^4 ((2x - x^2) - (-2x))dx \right|$$

$$= \left| \int_0^4 (-x^2 + 4x)dx \right| = \left| \left[-\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 \right]_0^4 \right|$$

$$= \left| \left[-\frac{1}{3}(4)^3 + 2(4)^2 \right] - \left[-\frac{1}{3}(0)^3 + 2(0)^2 \right] \right| = \frac{32}{3}$$

units square

(13) $f(x) = 7 - 2x^2 \ , \ g(x) = x^2 + 4$

الحل : لإيجاد الإحداثيات السينية لنقطتي التقاطع نضع : $f(x) = g(x)$

$7 - 2x^2 = x^2 + 4$

$3x^2 - 3 = 0$

$x = -1 , \qquad x = 1$

$$A = \left| \int_{-1}^{1} (f(x) - g(x))dx \right| = \left| \int_{-1}^{1} ((7 - 2x^2) - (x^2 + 4))dx \right|$$

$$= \left| \int_{-1}^{1} (-3x^2 + 3)dx \right| = \left| [-x^3 + 3x]_{-1}^{1} \right|$$

$$= \left| [-(1)^3 + 3(1)] - [-(-1)^3 + 3(-1)] \right| = 4 \ \ units \ \ square$$

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (1—5)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f ومحور السينات والمستقيمين $x = a\ ,\ x = b$ هي: $\int_a^b f(x)\,dx$

(a) (b)

(2) مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f : $f(x) = 4 - x^2$ ومحور السينات في $[-2,2]$ هي: $2\int_0^2 f(x)\,dx$

(a) (b)

(3) إذا كانت: $f(x) \leq 0 \quad \forall x \in [a,b]$ فإن مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f ومحور السينات في $[a,b]$ هي: $\int_b^a f(x)\,dx$

(a) (b)

(4) إذا كان منحنى الدالة f : $f(x) = x^2 - 2x - 3$ يقطع محور السينات عند $x = -1$، $x = 3$.
فإن مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f ومحور السينات هي: $A = \int_{-1}^{3} f(x)\,dx$

(a) (b)

(5) مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f : $f(x) = |x|$ ومحور السينات.
في الفترة $[-2,2]$ هي: 2 وحدة مساحة

(a) (b)

في التمارين (6—10)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(6) مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f : $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$ ومحور السينات هي:

(a) 9π units^2 (b) 6π units^2

(c) 3π units^2 (d) $\frac{9}{2}\pi$ units^2

(7) مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة g : $g(x) = (x-2)^3$ ومحور السينات في الفترة $[0,4]$ بالوحدات المربعة هي:

(a) $2\int_0^2 g(x)\,dx$ (b) $-2\int_0^2 g(x)\,dx$

(c) $\int_0^4 g(x)\,dx$ (d) $-2\int_2^4 g(x)\,dx$

(8) مساحة المنطقة المحددة بين منحنى الدالة $f(x) = 2$ ومنحنى الدالة g : $g(x) = -\sqrt{x}$ والمستقيمين $x = 0$ ، $x = 4$ هي:

(a) 20 units^2 (b) $\frac{8}{3}$ units^2

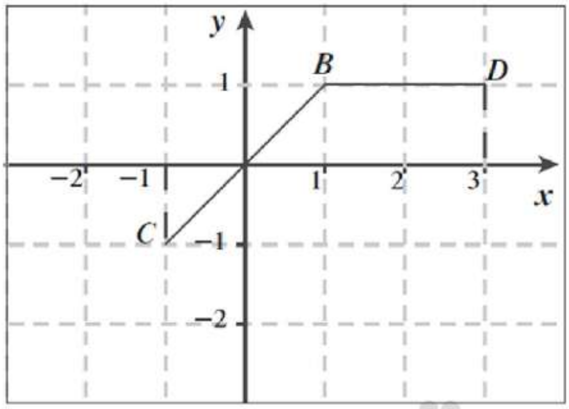
(c) $\frac{40}{3}$ units^2 (d) 8 units^2

(9) مساحة المنطقة المحددة بين منحنى الدالة f : $f(x)=\sqrt{4-x^2}$ ومنحنى الدالة g : $g(x)=x+2$
في $[-2,2]$ هي:

(a) $\pi-2$ units^2 (b) π units^2

(c) $\pi+2$ units^2 (d) 2 units^2

(10) إذا كان بيان الدالة f يمثله $\overline{CB}\cup\overline{BD}$ كما هو موضح بالشكل فإن مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f ومحور السينات والمستقيمين $x=-1$, $x=3$ هي:



(a) 3 units^2

(b) 4 units^2

(c) 2 units^2

(d) 5 units^2

تمرَّنْ
6-2

حجوم الأجسام الدورانية

المجموعة A تمارين مقالية

في التمارين (1-8)، أوجد حجم المجسّم الناتج من دوران المنطقة المستوية دورة كاملة حول محور السينات والمحددة بكل من المستقيمات والمنحنيات التالية:

(1) $y_1 = x^2 \ , \ y_2 = 0 \ , \ x = 2, \ x = 0$

$$V = \pi \int_0^2 (f(x))^2 dx = \pi \int_0^2 (x^2)^2 dx$$

$$= \pi \int_0^2 x^4 dx$$

$$= \pi \left[\frac{x^5}{5}\right]_0^2$$

$$= \pi\left(\left[\frac{(2)^5}{5}\right] - \left[\frac{(0)^5}{5}\right]\right)$$

$$= \frac{32}{5}\pi \quad units\ cube$$

(2) $y_1 = \frac{1}{x} \ , \ y_2 = 0 \ , \ x = 1 \ , \ x = 4$

$$V = \pi \int_1^4 (f(x))^2 dx$$

$$= \pi \int_1^4 \left(\frac{1}{x}\right)^2 dx$$

$$= \pi \int_1^4 \left(\frac{1}{x^2}\right) dx$$

$$= \pi \left[\frac{-1}{x}\right]_1^4$$

$$= \pi\left(\left[\frac{-1}{4}\right] - \left[\frac{-1}{1}\right]\right) = \frac{3}{4}\pi$$

units cube

(3) $y_1 = \sqrt{1 - x^2} \ , \ y_2 = 0$

الحل : نوجد نقاط التقاطع

$$y_1 = y_2$$

$$\sqrt{1 - x^2} = 0$$

بتربيع الطرفين :

$$1 - x^2 = 0$$

$$x = 1 \ , \qquad x = -1$$

$$V = \pi \int_{-1}^{1} (f(x))^2 dx = \pi \int_{-1}^{1} (\sqrt{1 - x^2})^2 dx$$

$$= \pi \int_{-1}^{1} (1 - x^2) dx$$

$$= \pi \left[x - \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1}$$

$$= \pi\left(\left[(1) - \frac{(1)^3}{3}\right] - \left[(-1) - \frac{(-1)^3}{3}\right]\right) = \frac{4}{3}\pi$$

units cube

(4) $y_1 = x^2 + 1\ ,\ y_2 = x + 3$

الحل :

نضع $y_2 = g(x)\quad ,\quad y_1 = f(x)$

نوجد نقاط التقاطع

$$f(x) = g(x)$$
$$x^2 + 1 = x + 3$$
$$x^2 + 1 - x - 3 = 0$$
$$x^2 - x - 2 = 0$$
$$x = 2\ ,\quad x = -1$$

نأخذ نقطة اختيارية في الفترة $(-1,2)$ و لتكن $x = 0$

$$f(0) = (0)^2 + 1 = 1$$
$$g(0) = (0) + 3 = 3$$
$$g(x) \ge f(x) \ge 0 \quad \forall x \in [-1, 2]$$

$$V = \pi \int_{-1}^{2} ((g(x))^2 - (f(x))^2)dx = \pi \int_{-1}^{2} ((x+3)^2 - (x^2+1)^2)dx$$

$$= \pi \int_{-1}^{2} ((x^2 + 6x + 9) - (x^4 + 2x^2 + 1))dx = \pi \int_{-1}^{2} (x^2 + 6x + 9 - x^4 - 2x^2 - 1)dx$$

$$= \pi \int_{-1}^{2} (-x^4 - x^2 + 6x + 8)dx = \pi \left[-\frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3} + 3x^2 + 8x \right]_{-1}^{2}$$

$$= \pi\left(\left[-\frac{32}{5} - \frac{8}{3} + 12 + 16\right] - \left[\frac{1}{5} + \frac{1}{3} + 3 - 8\right]\right) = \frac{117}{5}\pi \quad units\ cube$$

(5) $y_1 = \sec x\ ,\ y_2 = \sqrt{2}\ ,\ -\frac{\pi}{4} \le x \le \frac{\pi}{4}$

الحل : نضع $y_2 = g(x)\quad ,\quad y_1 = f(x)$

نأخذ نقطة اختيارية في الفترة $(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$ و لتكن $x = 0$

$$f(0) = \sec(0) = 1$$
$$g(0) = \sqrt{2}$$
$$g(x) \ge f(x) \ge 0 \quad \forall x \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$$

$$V = \pi \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} ((g(x))^2 - (f(x))^2)dx$$

$$= \pi \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} ((\sqrt{2})^2 - (\sec x)^2)dx$$

$$= \pi \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (2 - \sec x^2)dx$$

$$= \pi [2x - \tan x]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \pi\left(\left[2\left(\frac{\pi}{4}\right) - \tan\left(\frac{\pi}{4}\right)\right] - \left[2\left(-\frac{\pi}{4}\right) - \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]\right)$$

$$= \pi^2 - 2\pi \quad units\ cube$$

$(6)\ y_1 = x+1\ ,\ y_2 = x-1\ ,\ x = 1\ ,\ x = 4$

الحل :

حدود التكامل $x = 1\ , x = 4$

نضع $y_1 = f(x) \quad , \quad y_2 = g(x)$

نأخذ نقطة اختيارية في الفترة $(1,4)$ و لتكن $x = 3$

$$f(3) = (3) + 1 = 4$$

$$g(3) = (3) - 1 = 2$$

$$f(x) \geq g(x) \geq 0 \quad \forall x \in [1\ , 4\ ]$$

$$V = \pi \int_1^4 ((f(x))^2 - (g(x))^2) dx$$

$$= \pi \int_1^4 ((x+1)^2 - (x-1)^2) dx$$

$$= \pi \int_1^4 ((x^2 + 2x + 1) - (x^2 - 2x + 1)) dx$$

$$= \pi \int_1^4 (x^2 + 2x + 1 - x^2 + 2x - 1) dx$$

$$= \pi \int_1^4 (4x) dx = \pi [2x^2]_1^4$$

$$= \pi ([2(4)^2] - [2(1)^2]) = 30\pi \quad units\ \ cube$$

$(7)\ y_1 = x\ ,\ y_2 = 1\ ,\ x = 0$

الحل :

نضع $y_1 = f(x) \quad , \quad y_2 = g(x)$

نوجد نقاط التقاطع

$$f(x) = g(x)$$

$$x = 1$$

حدود التكامل $x = 0\ , x = 1$

نأخذ نقطة اختيارية في الفترة $(0,1)$ و لتكن $x = \frac{1}{2}$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \quad , \quad g\left(\frac{1}{2}\right) = 1$$

$$g(x) \geq f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [0\ , 1\ ]$$

$$V = \pi \int_0^1 ((g(x))^2 - (f(x))^2) dx = \pi \int_0^1 ((1)^2 - (x)^2) dx = \pi \int_0^1 (1 - x^2) dx$$

$$= \pi \left[x - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \pi\left(\left[(1) - \frac{(1)^3}{3}\right] - \left[(0) - \frac{(0)^3}{3}\right]\right) = \frac{2}{3}\pi \quad units\ \ cube$$

(8) $y_1 = \sqrt{x}$, $y_2 = 0$, $x = 4$

الحل :

نضع $y_1 = f(x)$, $y_2 = g(x)$

نوجد نقاط التقاطع

$$f(x) = g(x)$$
$$\sqrt{x} = 0$$
$$x = 0$$

حدود التكامل $x = 0 , x = 4$

نأخذ نقطة اختيارية في الفترة $(0,4)$ و لتكن $x = 1$

$$f(1) = \sqrt{1} = 1 \quad , \quad g(1) = 0$$

$$f(x) \geq g(x) \geq 0 \quad \forall x \in [0,4]$$

$$V = \pi \int_0^4 ((f(x))^2 - (g(x))^2)dx = \pi \int_0^4 ((\sqrt{x})^2 - (0)^2)dx = \pi \int_0^4 (x)dx$$

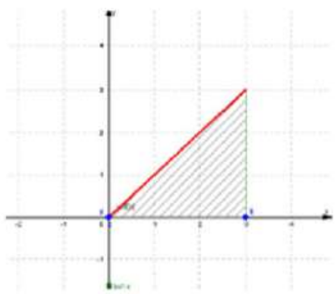
$$= \pi \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^4 = \pi\left(\left[\frac{(4)^2}{2} - \frac{(0)^2}{2}\right]\right) = 8\pi \quad units\ cube$$

(9) باستخدام التكامل المحدد استنتج الصيغة التي تعطي حجم مخروط دائري قائم ارتفاعه h (وحدة طول) وطول نصف قطر قاعدته r (وحدة طول)من دوران منطقة مستوية دورة كاملة حول محور السينات.

(إرشاد: استخدم الدالة f : $f(x) = \frac{r}{h}x$ في الفترة $[0,h]$)

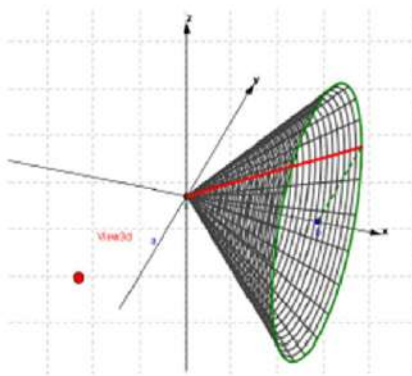
الحل :

$$f(x) = \frac{r}{h}x$$



تمثل معادلة خط مستقيم يمر من نقطة الأصل و ميله $\frac{r}{h}$

المجسم الناتج من دوران المنطقة المستوية دورة كاملة حول محور السينات و المحدد بمنحنى الدالة f و محور السينات في الفترة $[0,h]$ هو مخروط دوراني قائم



$$V = \pi \int_0^h (f(x))^2 dx = \pi \int_0^h (\frac{r}{h}x)^2 dx$$

$$= \pi \int_0^h (\frac{r^2}{h^2}x^2)dx = \pi \left[\frac{r^2}{h^2}(\frac{x^3}{3})\right]_0^h$$

$$= \pi\left(\left[\frac{r^2}{h^2}(\frac{h^3}{3})\right] - \left[\frac{r^2}{h^2}(\frac{0^3}{3})\right]\right) = \frac{1}{3}\pi r^2 h \quad units\ cube$$

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (4–1)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) حجم المجسم الناتج من دوران دورة كاملة حول محور السينات للمنطقة المحددة بمنحنى الدالة f : $f(x)=\sqrt[3]{x}$ في الفترة $[1,8]$ هو: $V=\pi\int_8^1 (\sqrt[3]{x})^2 dx$

(a) (b)

(2) حجم المجسم الناتج من دوران دورة كاملة حول محور السينات للمنطقة المحددة بمنحنى الدالة f : $f(x)=2\sqrt{x}$ في الفترة $[1,4]$ هو: $V=\pi\int_0^4 4x dx-\pi\int_0^1 4x dx$

(a) (b)

(3) حجم المجسم الناتج من دوران دورة كاملة حول محور السينات للمنطقة المحددة بمنحنى الدالة f : $f(x)=x$ ومنحنى الدالة g : $g(x)=\frac{1}{2}x^2$ هو: $V=\pi\int_0^2\left(x-\frac{1}{2}x^2\right)dx$

(a) (b)

(4) حجم المجسم الناتج من دوران دورة كاملة حول محور السينات للمنطقة المحددة بمنحنى الدالة f : $f(x)=x^3$ ومنحنى الدالة g : $g(x)=8$ و $x=0$ يساوي حجم المجسم الناتج من دوران دورة كاملة حول محور السينات لمنحنى الدالة f ومنحنى الدالة h : $h(x)=-8$, $x=0$

(a) (b)

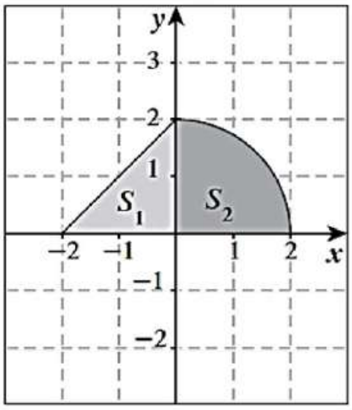
في التمارين (12–5)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(5) حجم المجسم الناتج من دوران دورة كاملة حول محور السينات للمنطقة المحددة بمنحنى الدالة f : $f(x)=3$ ومحور السينات في الفترة $[-1,1]$ بالوحدات المكعبة هو:

(a) 6π (b) 18 (c) 18π (d) 81π

(6) المنطقة المظللة $S=S_1\cup S_2$ حيث S_1 منطقة مثلثة، S_2 منطقة ربع دائرة كما هو موضح بالشكل.

حجم المجسم الناتج من دوران دورة كاملة حول محور السينات للمنطقة S بالوحدات المكعبة يساوي:



(a) $\frac{40}{3}\pi$

(b) $4+2\pi$

(c) $\frac{16}{3}\pi$

(d) 8π

(7) حجم المجسم الناتج من دوران دورة كاملة حول محور السينات للمنطقة المحددة بمنحنى الدالة $y=-\sqrt{4-x^2}$ بالوحدات المكعبة هو:

(a) 4π (b) 6π (c) $\frac{16}{3}\pi$ (d) $\frac{32}{3}\pi$

(8) حجم المجسم الناتج من دوران دورة كاملة حول محور السينات للمنطقة المحددة بين منحنى الدالة f : $f(x)=\frac{1}{x}$ والمستقيمات $x=1$, $x=2$, $y=0$ هو:

(a) π units^3 (b) $\frac{\pi}{3}$ units^3 (c) $\frac{\pi}{2}$ units^3 (d) $\frac{\pi}{4}$ units^3

(9) حجم المجسم الناتج من دوران دورة كاملة حول محور السينات للمنطقة المحددة بين منحنى الدالة f : $f(x)=\sqrt{x+1}$ ومحور السينات والمستقيمين $x=3$, $x=-1$ بالوحدات المكعبة هو:

(a) 8π (b) 7π (c) 8 (d) $\frac{5}{2}\pi$

(10) حجم المجسم الناتج من دوران دورة كاملة حول محور السينات للمنطقة المحددة بالمستقيمات $x=0$, $y=-2$ ومنحنى الدالة f : $f(x)=-\sqrt{x}$ بالوحدات المكعبة هو:

(a) 4π (b) 16π (c) 8π (d) 2π

(11) حجم المجسم الناتج من دوران دورة كاملة حول محور السينات للمنطقة المحددة بين المنحنيين $y=\sqrt{x}$, $x=2y$ هو:

(a) $\int_0^4\left(x-\frac{x}{2}\right)^2dx$ (b) $\pi\int_0^4\left(\frac{x^2}{4}-x\right)dx$ (c) $\int_0^4\left(x-\frac{x^2}{4}\right)dx$ (d) $\pi\int_0^4\left(x-\frac{x^2}{4}\right)dx$

(12) حجم المجسم الناتج من دوران دورة كاملة حول محور السينات للمنطقة المحددة بين منحنى $y=\sqrt{x}$ ومنحنى $x=2y$، هو:

(a) $\frac{64\pi}{15}$ units^3 (b) $\frac{32\pi}{15}$ units^3 (c) $\frac{64\pi}{5}$ units^3 (d) $\frac{8\pi}{3}$ units^3

تمرَّنْ
6−3

طول قوس ومعادلة منحنى دالة

المجموعة A تمارين مقالية

(4) أوجد معادلة منحنى الدالة f الذي ميله عند أي نقطة عليه (x, y) هو: $-x^2 + 2x - 4$ ويمر بالنقطة $A(3, 7)$

الحل :

$$f'(x) = -x^2 + 2x - 4$$

$$f(x) = \int (-x^2 + 2x - 4)dx$$

$$= \frac{-x^3}{3} + \frac{2x^2}{2} - 4x + C \quad = \frac{-x^3}{3} + x^2 - 4x + C$$

لإيجاد قيمة الثابت C نعوض بالنقطة $A(3,7)$ في المعادلة السابقة فنجد :

$$7 = \frac{-(3)^3}{3} + (3)^2 - 4(3) + C$$

$$7 = -9 + 9 - 12 + C$$

$$C = 19$$

معادلة منحنى الدالة f المطلوب هو : $f(x) = \frac{-x^3}{3} + x^2 - 4x + 19$

(5) أوجد معادلة منحنى الدالة f الذي ميله عند أي نقطة عليه (x, y) هو: $-4x^3 + 2x + 5$ ويمر بالنقطة $A(1, 3)$

الحل :

$$f'(x) = -4x^3 + 2x + 5$$

$$f(x) = \int (-4x^3 + 2x + 5)dx$$

$$= \frac{-4x^4}{4} + \frac{2x^2}{2} + 5x + C$$

$$= -x^4 + x^2 + 5x + C$$

لإيجاد قيمة الثابت C نعوض بالنقطة $A(1,3)$ في المعادلة السابقة فنجد :

$$3 = -(1)^4 + (1)^2 + 5(1) + C$$

$$3 = -1 + 1 + 5 + C$$

$$C = -2$$

معادلة منحنى الدالة f المطلوب هو : $f(x) = -x^4 + x^2 + 5x - 2$

(6) أوجد معادلة منحنى الدالة f الذي ميله عند أي نقطة عليه (x,y) هو: $\cos 2x$ ويمر بالنقطة $A\left(\frac{-\pi}{4},\frac{5}{2}\right)$

الحل :

$$f'(x) = \cos 2x$$

$$f(x) = \int \cos 2x\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\sin 2x + C$$

لإيجاد قيمة الثابت C نعوض بالنقطة $A(-\frac{\pi}{4},\frac{5}{2})$ في المعادلة السابقة فنجد :

$$\frac{5}{2} = \frac{1}{2}\sin 2(-\frac{\pi}{4}) + C$$

$$\frac{5}{2} = -\frac{1}{2} + C$$

$$C = 3$$

معادلة منحنى الدالة f المطلوب هو : $f(x) = \frac{1}{2}\sin 2x + 3$

(7) أوجد معادلة منحنى الدالة f الذي ميله عند أي نقطة عليه (x,y) هو: $\sin 3x$ ويمر بالنقطة $A\left(\frac{2\pi}{9},\frac{7}{6}\right)$

الحل :

$$f'(x) = \sin 3x$$

$$f(x) = \int \sin 3x\, dx$$

$$= -\frac{1}{3}\cos 3x + C$$

لإيجاد قيمة الثابت C نعوض بالنقطة $A(\frac{2\pi}{9},\frac{7}{6})$ في المعادلة السابقة فنجد

$$\frac{7}{6} = -\frac{1}{3}\cos 3(\frac{2\pi}{9}) + C$$

$$\frac{7}{6} = \frac{1}{6} + C$$

$$C = 1$$

معادلة منحنى الدالة f المطلوب هو : $f(x) = -\frac{1}{3}\cos 3x + 1$

(8) إذا كان ميل العمودي على منحنى الدالة f عند أي نقطة عليه (x,y) هو $2x+5$ فأوجد معادلة منحنى الدالة f إذا كان يمر بالنقطة $B(-2,3)$

الحل :

ميل العمودي $= \frac{-1}{f'(x)}$

$$f'(x) \neq 0$$

$$\frac{-1}{f'(x)} = 2x + 5$$

$$f'(x) = \frac{-1}{2x+5}$$

$$f(x) = \int \frac{-1}{2x+5}dx \ = \frac{-1}{2}\ln|2x+5| + C$$

لإيجاد قيمة الثابت C نعوض بالنقطة $B(-2,3)$ في المعادلة السابقة فنجد :

$$3 = \frac{-1}{2}\ln|2(-2)+5| + C$$

$$C = 3$$

معادلة منحنى الدالة f المطلوب هو : $f(x) = \frac{-1}{2}\ln|2x+5| + 3$

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (4–1)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(2) منحنى الدالة f الذي ميله عند أي نقطة عليه (x,y) هو: x^3+2 ويمر بالنقطة $A(2,6)$ معادلته: $f(x)=\frac{x^4}{4}+2x+2$

(a) (b)

(3) منحنى الدالة f الذي ميله عند أي نقطة عليه (x,y) هو: $x+\sqrt{x}-$ ويمر بالنقطة $A(1,1)$ معادلته: $f(x)=-\frac{2}{3}x\sqrt{x}+x^2+\frac{2}{3}$

(a) (b)

(4) لتكن $A(1,3)$ نقطة على منحنى الدالة f : $f'(x)=3x^2-12x+9$ فإن معادلة الدالة f هي $f(x)=x^3-6x^2+9x-1$

(a) (b)

في التمارين (9–5)، ظلّل رمز الدائرة الدالّ على الإجابة الصحيحة.

(7) معادلة منحنى الدالة الذي ميل العمودي عليه عند أي نقطة (x,y) هو: $-x+3$ ويمر بالنقطة $A(2,3)$ هي y تساوي:

(a) $-\frac{x^2}{2}+3x-4$ (b) $\ln|3-x|+3$ (c) $-\frac{x^2}{2}+3x+4$ (d) $3-\ln|3-x|$

(8) معادلة منحنى الدالة الذي ميله عند أي نقطة (x,y) هو: $2x-3\sqrt{x}$ ويمر بالنقطة $A(4,-2)$ هي:

(a) $x^2+2\sqrt{x^3}-2$ (b) $x^2-2\sqrt{x^3}$ (c) $x^2-2\sqrt{x^3}-2$ (d) $\frac{x^2}{2}-2\sqrt{x^3}+2$

(9) إذا كانت النقطة $A(0,2)$ نقطة حرجة لمنحنى الدالة f : $f''(x)=12x-6$ فإن النقطة الحرجة الأخرى للدالة f هي:

(a) $B(-2,0)$ (b) $B(0,-2)$ (c) $B(1,-1)$ (d) $B(1,1)$

تمرّنْ
6 – 4

المعادلات التفاضلية

المجموعة A تمارين مقالية

(1) أثبت أن الدالة: $y = 3e^x$ هي حل للمعادلة التفاضلية $y'' - y' + 2x = 2x$

الحل :

أوجد المشتقة الأولى $y' = 3e^x$

أوجد المشتقة الثانية $y'' = 3e^x$

عوّض في المعادلة التفاضلية $3e^x - 3e^x + 2x = 2x$

الدالة $y = 3e^x$ هي حل للمعادلة التفاضلية

(2) أثبت أن الدالة: $y = e^x$ هي حل للمعادلة التفاضلية $y + y'' = 2e^x$

الحل :

أوجد المشتقة الأولى $y' = e^x$

أوجد المشتقة الثانية $y'' = e^x$

عوّض في المعادلة التفاضلية $e^x + e^x = 2e^x$

الدالة $y = e^x$ هي حل للمعادلة التفاضلية

(3) $y' = x^2 + x + 2$ التي تحقق $y = 4$ عند $x = 1$

الحل :

$$y = \int y'\, dx$$

$$y = \int (x^2 + x + 2)\, dx$$

$$= \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x + C$$

$$4 = \frac{(1)^3}{3} + \frac{(1)^2}{2} + 2(1) + C$$

$$4 = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 2 + C$$

$$C = \frac{7}{6}$$

$$y = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x + \frac{7}{6}$$

(4) $xy' = 1 - x^2$

الحل :

$$xy' = 1 - x^2$$
$$y' = \frac{1 - x^2}{x}$$
$$y' = \frac{1}{x} - \frac{x^2}{x}$$
$$y' = \frac{1}{x} - x$$

$$y = \int y'\, dx$$
$$y = \int \left(\frac{1}{x} - x\right) dx$$
$$y = ln|x| - \frac{x^2}{2} + C$$

(5) $xy' = 4y$ التي تحقق $y = 1$ عند $x = 1$

الحل :

$$y' = \frac{4y}{x}$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{4y}{x}$$
$$\frac{dy}{y} = \frac{4dx}{x}$$
$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{4dx}{x}$$
$$ln|y| = 4ln|x| + C$$
$$ln|y| = ln|x|^4 + C$$
$$ln|y| = lnx^4 + C$$

$$|y| = e^{lnx^4 + C}$$
$$y = \pm e^{C} . e^{lnx^4}$$
$$y = kx^4$$
$$1 = k(1)^4$$
$$k = 1$$
$$y = x^4$$

(6) $y' = 3y$

الحل : $y = ke^{3x}$

(7) $y' = 5y$

الحل : $y = ke^{5x}$

(8) $2y' - 5y = 0$ التي تحقق $y = 4$ عند $x = 2$

الحل :

$$y' = \frac{5}{2}y$$
$$y = ke^{\frac{5}{2}x}$$
$$4 = ke^{\frac{5}{2}(2)}$$
$$4 = ke^5$$

$$k = 4e^{-5}$$
$$y = 4e^{-5}. e^{\frac{5}{2}x}$$
$$y = 4. e^{\frac{5}{2}x - 5}$$

$x = 0$ عند $y = \sqrt{2}$ التي تحقق $\sqrt{2}y' + y = 0$ (9)

الحل :

$$\sqrt{2}y' = -y$$

$$y' = \frac{-1}{\sqrt{2}}y$$

$$y = ke^{\frac{-1}{\sqrt{2}}x}$$

$$\sqrt{2} = ke^{\frac{-1}{\sqrt{2}}(0)}$$

$$k = \sqrt{2}$$

$$y = \sqrt{2}e^{\frac{-1}{\sqrt{2}}x}$$

$y' = y + 1$ (10)

الحل :

$$y = ke^{x} - 1$$

$x = \frac{1}{4}$ عند $y = \frac{3}{4}$ التي تحقق $\frac{1}{2}y' + 4y = 1$ (11)

الحل :

$$\frac{1}{2}y' = -4y + 1$$

$$y' = -8y + 2$$

$$y = ke^{-8x} + \frac{1}{4}$$

$$\frac{3}{4} = ke^{-8(\frac{1}{4})} + \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{2} = ke^{-2}$$

$$k = \frac{1}{2}e^{2}$$

$$y = \frac{1}{2}e^{2}.e^{-8x} + \frac{1}{4}$$

$$y = \frac{1}{2}e^{-8x+2} + \frac{1}{4}$$

$x = 0$ عند $y = 2$ التي تحقق $2y' + y = 4$ (12)

الحل :

$$2y' = -y + 4$$

$$y' = -\frac{1}{2}y + 2$$

$$y = ke^{-\frac{1}{2}x} + 4$$

$$2 = ke^{-\frac{1}{2}(0)} + 4$$

$$k = -2$$

$$y = -2e^{-\frac{1}{2}x} + 4$$

$y'' = -4\sin 4x$ (13)

الحل :

$$y' = \int(-4\sin 4x)dx$$

$$y' = \cos 4x + C$$

$$y = \int(\cos 4x + C)dx$$

$$y = \frac{1}{4}\sin 4x + Cx + C_1$$

(14) $y'' = 6x - 8$

الحل :

$$y' = \int (6x - 8)dx$$
$$y' = 3x^2 - 8x + C$$

$$y = \int (3x^2 - 8x + C)dx$$
$$y = x^3 - 4x^2 + Cx + C_1$$

(20) (a) حل المعادلة التفاضلية: $y' + 2y = 0$

(b) أوجد الحل الذي يحقق $y = \frac{1}{2}$ عند $x = 0$

الحل :

$$y' = -2y$$
$$y = ke^{-2x}$$
$$\frac{1}{2} = ke^{-2(0)}$$
$$k = \frac{1}{2}$$
$$y = \frac{1}{2}e^{-2x}$$

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (1–7)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) المعادلة التفاضلية التالية: $x^2y''' + (y')^2 + y = 0$ من الرتبة الثالثة والدرجة الأولى. (a) (b)

(2) المعادلة التفاضلية التالية: $(y')^2 + 2xy = 0$ من الرتبة الثانية والدرجة الأولى. (a) (b)

(3) إذا كان $y = \frac{1}{2}$ عند $x = 0$ و $y' + 2y = 0$ فإن $y = \frac{1}{4}e^{-2x} + \frac{1}{4}$ (a) (b)

(4) إذا كان $y = 1$ عند $x = 0$ و $y' + y = 2$ فإن $y = 2e^{-x}$ (a) (b)

في التمارين (8–14)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(8) المعادلة التفاضلية التالية: $\frac{(2y'' + x)^2}{xy} = 3$ من:

(a) الرتبة الأولى والدرجة الثانية.

(b) الرتبة الثانية والدرجة الأولى.

(c) الرتبة الثانية والدرجة الثانية.

(d) الرتبة الأولى والدرجة الأولى.

(9) حل المعادلة التفاضلية $\frac{dy}{dx} = 2x$ الذي يحقق $y = -2$ عندما $x = 1$ هو:

(a) $y = x^2 + 3$

(b) $y = x^2 - 3$

(c) $y = \frac{x^2}{2} - 3$

(d) $y = \frac{x^2}{2} + 3$

(10) إذا كان $y'' = 2x^2 + 3x$ فإنّ:

(a) $y = \frac{2x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + c$

(b) $y = \frac{2x^3}{3} + \frac{3x^2}{2}$

(c) $y = \frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{2}x^3 + c_1 x + c_2$

(d) $y = \frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{2}x^3 + c_1 x$

(11) حل المعادلة التفاضلية $2y' + y = 1$ الذي يحقق $y = 3$ عند $x = 5$ هو:

(a) $y = 2e^{\frac{5}{2}}$

(b) $y = \frac{2}{e^{\frac{5}{2}}}$

(c) $y = 2e^{\left(-\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}\right)} + 1$

(d) $y = 2e^{\left(-\frac{1}{2}x - \frac{5}{2}\right)} + 1$

المجموعة A تمارين مقالية

في التمارين (3−1)، أوجد معادلة القطع المكافئ، الذي:

(1) رأسه نقطة الأصل والبؤرة $(-3,0)$

الحل:

الرأس : نقطة الأصل $(0,0)$

∵ البؤرة $F(-3,0)$ تنتمي إلي الجزء السالب من محور السينات

$p = -3$ ، معادلة الدليل : $x = 3$ (مستقيم رأسي)

خط تماثل القطع هو محور السينات (فتحة القطع لليسار)

∴ معادلة القطع المكافئ هي على الصورة $y^2 = 4px$

معادلة القطع المكافئ هي : $y^2 = -12x$

(2) رأسه نقطة الأصل والبؤرة $(0,-2)$

الرأس : نقطة الأصل $(0,0)$

∵ البؤرة $F(0,-2)$ تنتمي إلي الجزء السالب من محور الصادات

فتحة القطع للأسفل

$p = -2$ ، معادلة الدليل : $y = 2$ (مستقيم أفقي)

∴ معادلة القطع المكافئ هي على الصورة $x^2 = 4py$

معادلة القطع المكافئ هي : $x^2 = -8y$

(3) بؤرته $F(0,2)$ ومعادلة دليله $y=-2$

$\because$ **البؤرة $F(0,2)$ تنتمي إلى الجزء الموجب من محور الصادات**

فتحة القطع للأعلى

$p = 2$ ، معادلة الدليل : $y = -2$ (مستقيم أفقي)

رأس القطع في منتصف المسافة بين البؤرة و الدليل أي $(0,0)$

$\therefore$ **معادلة القطع المكافئ هي على الصورة $x^2 = 4py$**

معادلة القطع المكافئ هي : $x^2 = 8y$

في التمارين (4—7)، أوجد البؤرة، والدليل، وخط تماثل القطع المكافئ. ارسم تخطيطًا للرسم البياني للقطع المكافئ.

(4) $x^2 = -y$

$\because$ **المعادلة المعطاة للقطع المكافئ على الصورة $x^2 = 4py$**

$\therefore$ **محور التماثل هو y - $axis$**

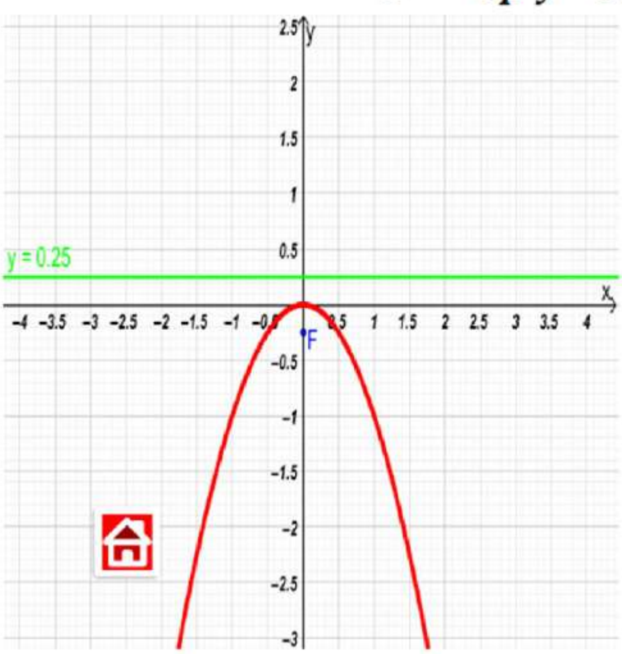
$$\therefore\ 4p = -1 \implies p = \frac{-1}{4}\ , p < 0$$

$\therefore$ **البؤرة** $F(0,p) = F\left(0, \frac{-1}{4}\right)$

$\therefore$ **معادلة الدليل :**

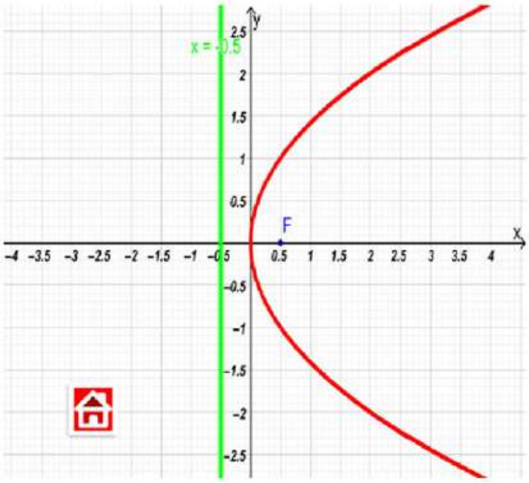
$$y = -p \implies y = -\left(\frac{-1}{4}\right)$$

$$y = \frac{1}{4}$$



(5) $y^2 = 2x$

الحل: $\because$ المعادلة المعطاة للقطع المكافئ على الصورة $y^2 = 4px$



$\therefore$ المعادلة : $y^2 = 2x$

$\therefore\ 4p = 2 \Rightarrow p = \frac{1}{2}\ , p > 0$

محور التماثل هو x - axis

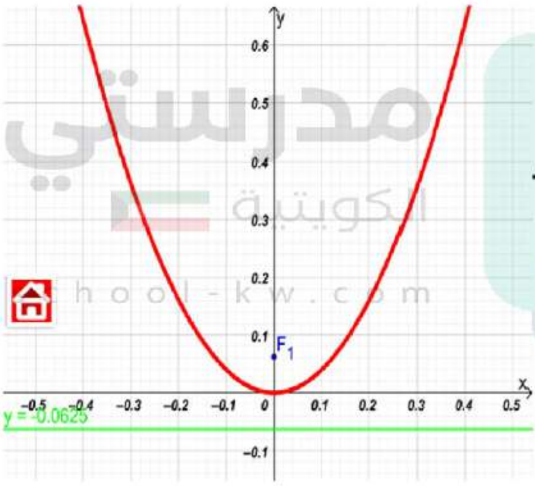
$\therefore$ البؤرة $F(P, 0) = F\left(\frac{1}{2}, 0\right)$

$\therefore$ معادلة الدليل :

$$x = -p \quad \Rightarrow \quad x = -\frac{1}{2}$$

(6) $y = 4x^2$

الحل: نضع المعادلة في الصورة $x^2 = 4py$



$x^2 = \frac{1}{4}y$

محور التماثل هو محور الصادات

$\therefore\ 4p = \frac{1}{4} \Rightarrow p = \frac{1}{16}\ , p > 0$

$\therefore$ البؤرة $F(0, p) = F\left(0, \frac{1}{16}\right)$

$\therefore$ معادلة الدليل :

$$y = -p \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{1}{16}$$

(7) $x = -8y^2$

الحل: نضع المعادلة على الصورة $y^2 = -\frac{1}{8}x$

$\because$ المعادلة المعطاة للقطع المكافئ على الصورة $y^2 = 4px$

$\therefore\ 4p = -\frac{1}{8} \Rightarrow p = -\frac{1}{32}\ , p < 0$

محور التماثل هو x - axis

$\therefore$ البؤرة $F(p, 0) = F\left(-\frac{1}{32}, 0\right)$

$\therefore$ معادلة الدليل :

$$x = -p \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{32}$$

(8) أوجد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل ويمر بالنقطة $A(-1,2)$ وخط تماثله $x-axis$.

رأس القطع المكافئ نقطة الأصل ، و خط تماثله x - $axis$

المعادلة في الصورة $y^2 = 4\mathrm{p}x$

القطع المكافئ يمر بالنقطة $A(-1,2)$ تحقق المعادلة أي أن :

$$(2)^2 = 4\mathrm{p}(-1)$$

$$\therefore\ \ 4 = -4p\ \Rightarrow p = -1 \qquad p < 0$$

المعادلة هو $y^2 = 4(-1)x$

$$y^2 = -4x$$

(9) أوجد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل ويمر بالنقطتين $A(-3,4)$, $B(3,4)$.

$\because$ منحنى القطع المكافئ يمر بالنقطتين $A(-3\,,4)$, $B(2,3)$

، رأسه نقطة الأصل

$\therefore$ القطع في وضع قياسي و محور تماثله ينطبق على y-$axis$

المعادلة في الصورة : $x^{\,2} = 4py$

و بالتعويض بأحد النقطتين و لتكن B

$$(3)^{\,2} = 4p(4)$$

$$9 = 16p\ \Rightarrow p = \frac{9}{16}$$

المعادلة هي : $x^{\,2} = \frac{9}{4}y$

(10) أوجد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل ومعادلة دليله $y = 4$.

معادلة الدليل $y = 4$ (مستقيم أفقي)

∵ دليل القطع يكون عموديًا على محور تماثله

خط التماثل أفقي ($y - axis$)

معادلة القطع المكافئ هي على الصورة $x^2 = 4py$

معادلة الدليل هي على الصورة $y = -p$

$y = 4 \Rightarrow \quad p = -4$

معادلة القطع: $x^2 = 4py$

$x^2 = 4(-4)y$

$x^2 = -16y$

(11) أوجد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل ومعادلة دليله $x = -5$.

معادلة الدليل $x = -5$ (مستقيم رأسي)

و الدليل متعامد مع خط التماثل

خط التماثل أفقي ($x - axis$)

معادلة القطع المكافئ هي على الصورة $y^2 = 4px$

معادلة الدليل هي على الصورة $x = -p$

$x = -5 \quad \Rightarrow \quad p = 5$

المعادلة $y^2 = 4px$

$y^2 = 4(5)x$

$y^2 = 20x$

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (7—1)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة، و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) معادلة القطع المكافئ الذي رأسه $(0,0)$ وبؤرته $(0,2)$ هي: $x^2 = 8y$ — (a) (b)

(2) معادلة القطع المكافئ الذي رأسه $(0,0)$ ودليله $x = -2$ هي: $x^2 = 8y$ — (a) (b)

(3) معادلة القطع المكافئ الذي بؤرته $(-4,0)$ ودليله $x = 4$ هي: $y^2 = -16x$ — (a) (b)

(4) $y^2 = \frac{1}{2}x$ هي معادلة قطع مكافئ، بؤرته $\left(0, \frac{-3}{2}\right)$ — (a) (b)

في التمارين (7—5)، معادلة القطع المكافئ هي: $y^2 = -\frac{1}{6}x$

(5) بؤرة القطع المكافئ هي: $\left(-\frac{1}{24}, 0\right)$ — (a) (b)

(6) معادلة الدليل هي: $y = \frac{1}{24}$ — (a) (b)

(7) خط التماثل هو محور السينات. — (a) (b)

في التمارين (15—8)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(8) المعادلة التي تمثل قطعًا مكافئًا رأسه $(0,0)$ وبؤرته $(-5,0)$ هي:

(a) $x^2 = 20y$ (b) $y^2 = 20x$ (c) $x^2 = -20y$ (d) $y^2 = -20x$

(9) المعادلة التي تمثل قطع مكافئ مفتوح إلى الأسفل هي:

(a) $y^2 = \frac{-1}{2}x$ (b) $y^2 = \frac{1}{2}x$ (c) $x^2 = \frac{-1}{2}y$ (d) $x^2 = \frac{1}{2}y$

(10) النقطة المشتركة بين كل القطوع المكافئة التي هي على الصورة $x^2 = 4py$ هي:

(a) $(1,1)$ (b) $(1,0)$ (c) $(0,1)$ (d) $(0,0)$

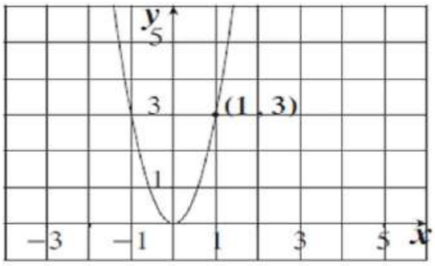
(11) المعادلة التي تمثل قطعًا مكافئًا رأسه $(0,0)$ ويمر بالنقطتين $A(-5,-2), B(-5,2)$ هي:

(a) $y^2 = -\frac{4}{5}x$ (b) $x^2 = -\frac{4}{5}y$ (c) $y^2 = \frac{4}{5}x$ (d) $x^2 = \frac{4}{5}y$

(12) المعادلة التي تمثل قطعًا مكافئًا رأسه $(0,0)$ ويمر بالنقطة $C(-5,-6)$ وخط تماثله $y-axis$ هي:

(a) $y^2 = -\frac{25}{6}x$ (b) $x^2 = -\frac{25}{6}y$ (c) $y^2 = -\frac{6}{25}x$ (d) $x^2 = -\frac{6}{25}y$

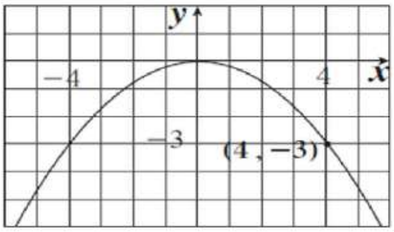
(13) بؤرة القطع المكافئ في الشكل المقابل هي:



ⓐ $\left(0, \frac{-4}{3}\right)$ ⓑ $\left(\frac{9}{20}, 0\right)$

ⓒ $\left(0, \frac{1}{12}\right)$ ⓓ $\left(\frac{1}{12}, 0\right)$

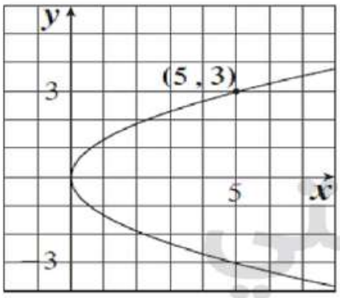
(14) معادلة دليل القطع المكافئ في الشكل المقابل هي:



ⓐ $y = \frac{4}{3}$ ⓑ $y = \frac{9}{20}$

ⓒ $y = -\frac{1}{12}$ ⓓ $y = -\frac{4}{3}$

(15) معادلة القطع المكافئ للبيان التالي هي:



ⓐ $x^2 = -\frac{25}{3}y$ ⓑ $y^2 = \frac{9}{5}x$

ⓒ $x^2 = \frac{25}{3}y$ ⓓ $y^2 = \frac{5}{9}x$

في التمارين (18–16)، لديك قائمتان. اختر من القائمة (2) ما يناسب كل تمرين في القائمة (1) لتصل بيان كل دالة بمعادلتها.

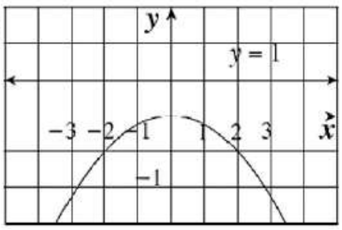
16 ------------ (c)

17 ------------ (b)

18 ------------ (d)

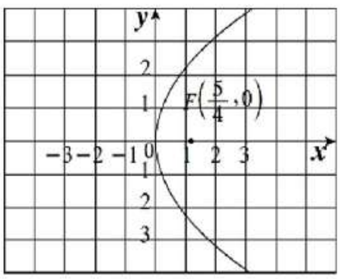
(17) $x^2 = -4y$

ⓑ



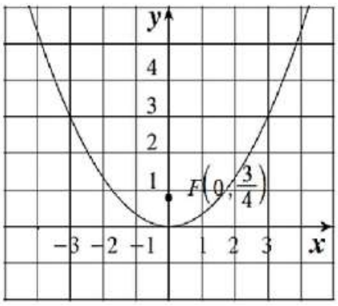
(18) $y^2 = 5x$

ⓓ



(16) $x^2 = 3y$

ⓒ



القطع الناقص

المجموعة A تمارين مقالية

في التمارين (1–4)، لكل معادلة من معادلات القطع الناقص التالية أوجد: رأسي القطع – طرفي المحور الأصغر – البؤرتين – معادلتي دليلي القطع – طول كل من المحورين، ثم ارسم شكلاً تقريبيًا لكل قطع.

(1) معادلة القطع الناقص هي: $\frac{x^2}{8^2}+\frac{y^2}{6^2}=1$

الحل:

من معادلة القطع الناقص نجد أن :

$a^2=64 \Rightarrow a=8 \Rightarrow 2a=16$

$b^2=36 \Rightarrow b=6 \Rightarrow 2b=12$

$C^2=a^2-b^2$

$C^2=28 \Rightarrow C=5.29$

رأسا القطع الناقص هما : $B_1(0,-6)\,,B_2(0,6)$

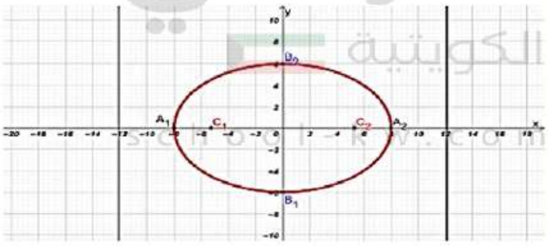
طرفا المحور الاصغر هما : $A_1(-8,0)\,,A_2(8,0)$

البؤرتين : $F_1(-5.29,0)\,,F_2(5.29,0)$

معادلة الدليلين:

$x=\frac{a^2}{c}\quad,\quad x=-\frac{a^2}{c}$

$x=\frac{64}{5.29}\quad,\quad x=\frac{-64}{5.29}$



(2) معادلة القطع الناقص هي: $\frac{x^2}{4^2}+\frac{y^2}{6^2}=1$

ومن معادلة القطع الناقص نجد أن :

$a^2=36 \Rightarrow a=6 \Rightarrow 2a=12$

$b^2=16 \Rightarrow b=4 \Rightarrow 2b=8$

$C^2=a^2-b^2 \Rightarrow C^2=20 \Rightarrow C=4.47$

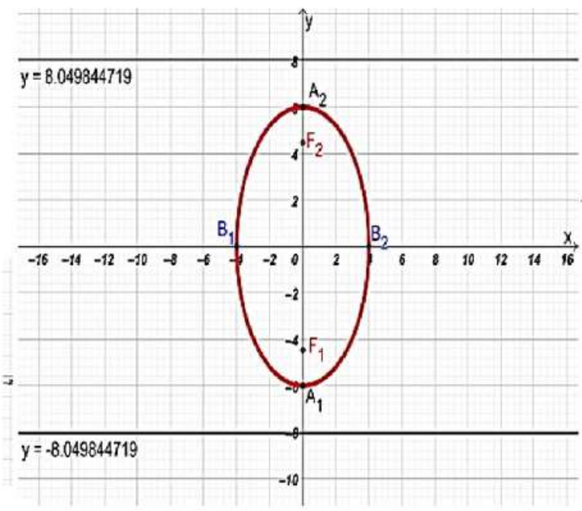
رأسا القطع الناقص هما : $A_1(0,-6)\,,A_2(0,6)$

طرفا المحور الاصغر هما : $B_1(-4,0)\,,B_2(4,0)$

البؤرتين: $F_1(0,-4.47)\,,F_2(0,4.47)$

معادلتا الدليلين:

$y=\frac{36}{4.47}\quad,\quad y=\frac{-36}{4.47}$



(3) معادلة القطع الناقص هي: $\dfrac{x^2}{75}+\dfrac{y^2}{45}=1$

ومن معادلة القطع الناقص نجد أن :

$a^2=75 \Rightarrow a=8.66 \Rightarrow 2a=17.32$

$b^2=45 \Rightarrow b=6.708 \Rightarrow \ 2b=13.416$

$C^2=a^2-b^2 \Rightarrow C^2=30 \Rightarrow C \ =5.47$

رأسا القطع الناقص هما :

$A_1(-8.66,0)\,,A_2\,(8.66,0)$

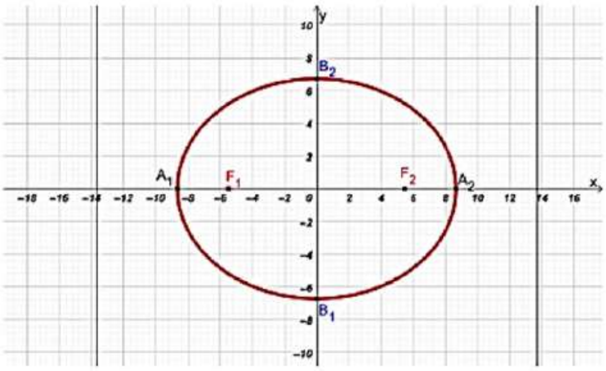
طرفا المحور الاصغر هما :

$B_1(0,-6.708)\,,B_2(0,6.708)$

البؤرتين: $F_1(5.477,0)\,,F_2(-5.477,0)$

معادلتا الدليلين: $x=-\dfrac{a^2}{c} \quad , \quad x=\dfrac{a^2}{c}$

$x=\dfrac{-75}{5.477} \quad , \quad x=\dfrac{75}{5.477}$



(4) معادلة القطع الناقص هي: $\dfrac{x^2}{7}+\dfrac{y^2}{28}=1$

ومن معادلة القطع الناقص نجد أن :

$a^2=28 \Rightarrow a=5.29 \Rightarrow 2a=10.58$

$b^2=7 \Rightarrow b=2.64 \Rightarrow \ 2b=5.29$

$C^2=a^2-b^2 \Rightarrow C^2=21 \Rightarrow C=4.47$

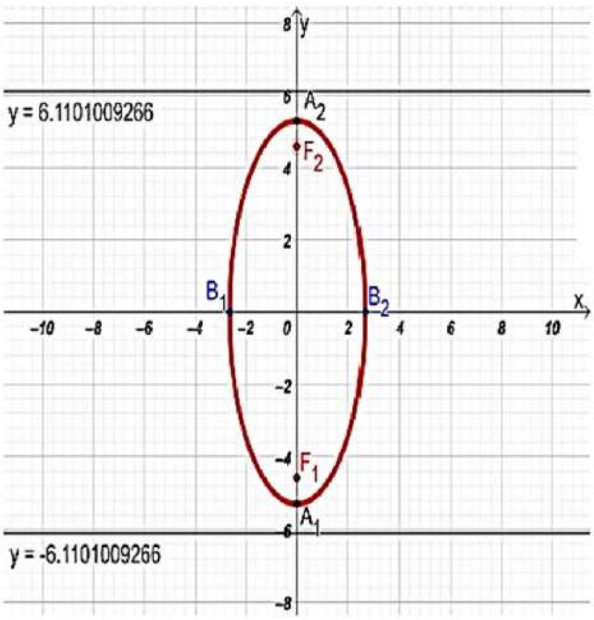
رأسا القطع الناقص هما : $A_1(0,-5.29)\,,A_2\,(0,5.29)$

طرفا المحور الاصغر هما : $B_1(-2.64,0)\,,B_2(2.64,0)$

البؤرتين: $F_1(0,-4.47)\,,F_2(0,4.47)$

معادلتا الدليلين:

$y=\dfrac{28}{4.47} \quad , \quad y=\dfrac{-28}{4.47}$



فى التمارين (5–12)، اكتب معادلة القطع الناقص الذي فيه:

(5) البؤرتان $F_2\ (2,0)$ ، $F_1\ (-2,0)$ ، ونقطتا طرفي المحور الأصغر $B_1\ (0,-3)$ ، $B_2\ (0\ ,\ 3)$.

الحل: تقع البؤرتان على محور السينات فتكون المعادلة علي الصورة: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

وتكون $c = 2$

طرفا المحور الاصغر هما : $B_1(0,-3)\ ,B_2\ (0,3) \Leftarrow b = 9$

$C^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow 4 = a^2 - 9 \Rightarrow a^2 = 13$

∴معادلة القطع الناقص هي: $\frac{x^2}{13}+\frac{y^2}{9}=1$

(6) $V_1F_1 + V_1F_2 = 10$، حيث إنّ V_1 هو نقطة على القطع الناقص، F_2 و F_1 هما البؤرتين، علمًا أنّ $F_1(3,0)$ ،$F_2(-3,0)$.

الحل: تقع البؤرتان على محور السينات فتكون المعادلة علي الصورة: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ وتكون $c=3$

$V_1F_1 + V_2F_2 = 10 \Rightarrow 2a = 10 \Rightarrow a = 5 \Rightarrow a^2 = 25$

$C^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow 9 = 25 - b^2 \Rightarrow b^2 = 16$

∴معادلة القطع الناقص هي: $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$

(7) نقطتا طرفي المحور الأكبر هما $A_1\ (0,-5)\ ,\ A_2\ (0,5)$ ، طول المحور الأصغر 4.

الحل:

تقع البؤرتان على محور الصادات فتكون المعادلة علي الصورة : $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$

طول المحور الاصغر = 4 $\Leftarrow 2b = 4 \Leftarrow b = 2$

طرفا المحور الاكبر هما : $A_1(0,-5)\ ,A_2\ (0,5) \Leftarrow a = 5 \Leftarrow a^2 = 25$

∴ معادلة القطع الناقص هي: $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{25}=1$

(8) نقطتا طرفي المحور الأصغر $B_2\ (0,4)$, $B_1\ (0,-4)$ ، طول المحور الأكبر 10.

الحل: تقع البؤرتان على محور السينات فتكون المعادلة علي الصورة : $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

طول المحور الاكبر= 10 : $2a=10 \Rightarrow a=5$

طرفا المحور الاصغر هما : $B_1(0,-4)\ ,B_2\ (0,4)$

$b=4 \quad \Rightarrow \quad b^2=16$

∴معادلة القطع الناقص هي: $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$

(9) مركزه نقطة الأصل وإحدى بؤرتيه $F(5,0)$ ويمر بالنقطة $C(2,3)$.

الحل:

تقع البؤرتان على محور السينات فتكون المعادلة علي الصورة: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

وتكون $c=5$ ∵ القطع يمر بالنقطة $C(2,3)$:

من تعريف القطع الناقص: $C\,F_1+C\,F_2=2\,a$

$2a=\sqrt{(2-5)^2+(3-0)^2}+\sqrt{(2+5)^2+(3-0)^2}$

$2a=\sqrt{18}+\sqrt{58}\approx 11.858$ $\qquad a\approx 5.929$

$C^2=a^2-b^2 \Rightarrow 25=(5.929)^2-b^2$

$b^2\approx 10.153$

∴ معادلة القطع الناقص هي: $\frac{x^2}{35.153}+\frac{y^2}{10.1539}=1$

(10) محوره الأكبر نقطتاه الطرفيتان $A_2(6,0)$, $A_1(-6,0)$ ومحوره الأصغر إحدى نقطتيه الطرفيتين $B_1(0,-4)$.

الحل:

تقع البؤرتان على محور السينات فتكون المعادلة علي الصورة : $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

∵ الرأسين $A_1\,(6\,,0)$ ، $A_2\,(-6\,,0)$

$\therefore a=6 \Rightarrow a^2=36$

∵ إحدى طرفي المحور الأصغر $B_1(0\,,-4)$

$\therefore b=4$

$b^2=16$

∴معادلة القطع الناقص هي: $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{16}=1$

(11) بؤرتاه $F_1(5,0)$, $F_2(-5,0)$ وطول محوره الأصغر 6.

الحل:

تقع البؤرتان على محور السينات فتكون المعادلة علي الصورة: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

$\because$ البؤرتين $F_1(5,0)$ ، $F_2(-5,0)$

$\therefore C=5 \Rightarrow C^2=25$

$\because$ طول محوره الاصغر $=6$

$\therefore 2b=6 \Rightarrow b=3$

$b^2=9$

$C^2=a^2-b^2 \Rightarrow 25=a^2-9$

$a^2=34$

$\therefore$ معادلة القطع الناقص هي: $\frac{x^2}{34}+\frac{y^2}{9}=1$

(12) طول المحور الأكبر الذي ينطبق على محور السينات 10 والمسافة بين البؤرتين 6 ومركزه نقطة الأصل.

الحل:

تقع البؤرتان على محور السينات فتكون المعادلة علي الصورة : $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

$\because$ طول محوره الأكبر $=10$

$\therefore 2a=10 \rightarrow a=5$

$\because$ المسافة بين البؤرتين $=6$

$2C=6 \Rightarrow C=3$

$C^2=a^2-b^2 \Rightarrow 9=25-b^2$

$b^2=16$

$\therefore$ معادلة القطع الناقص هي: $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (1—5)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة، و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) رأسي القطع للقطع الناقص الذي معادلته: $\frac{x^2}{9^2}+\frac{y^2}{5^2}=1$ هما: $(-9,0)$، $(9,0)$ — (a) (b)

(2) النقطة $(\sqrt{33},0)$ هي إحدى بؤرتي القطع الناقص الذي معادلته: $\frac{x^2}{7^2}+\frac{y^2}{4^2}=1$ — (a) (b)

(3) طول المحور الأكبر للقطع الناقص الذي معادلته $25x^2+9y^2=225$ يساوي 10 units — (a) (b)

(4) بؤرتا القطع الناقص الذي معادلته: $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25}=1$، هما $(\pm3,0)$ — (a) (b)

(5) في القطع الناقص الذي معادلته: $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{36}=1$، طول المحور الأصغر يساوي 8 — (a) (b)

في التمارين (12–6)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(6) النقطتان الطرفيتان للمحور الأصغر للقطع الناقص الذي معادلته $4x^2+9y^2=36$ هما:

ⓐ $(\pm 2,0)$ ⓑ $(\pm 3,0)$

ⓒ $(0,\pm 2)$ ⓓ $(0,\pm 3)$

(7) معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه $(\pm 7,0)$ والنقطتان الطرفيتان لمحوره الأصغر $(0,\pm 6)$ هي:

ⓐ $\frac{x^2}{85}+\frac{y^2}{36}=1$ ⓑ $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{85}=1$

ⓒ $\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{36}=1$ ⓓ $\frac{x^2}{85}+\frac{y^2}{49}=1$

(8) معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه على محور السينات ومركزه نقطة الأصل وطول محوره الأكبر 9 units وطول محوره الأصغر 4 units هي:

ⓐ $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ ⓑ $\frac{x^2}{20.25}+\frac{y^2}{4}=1$

ⓒ $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ ⓓ $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{20.25}=1$

(9) النقطة $A(-10,0)$ تنتمي إلى القطع الناقص الذي معادلته $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{64}=1$. مجموع المسافتين AF_1+AF_2 حيث F_1 ، F_2 هما البؤرتان يساوي:

ⓐ 10 units ⓑ 12 units

ⓒ 14 units ⓓ 20 units

(10) طول المحور الأكبر للقطع الناقص $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{64}=1$ يساوي:

ⓐ 12 units ⓑ $2\sqrt{41}$ units

ⓒ 16 units ⓓ 20 units

(11) المسافة بين البؤرتين للقطع الناقص $15x^2+25y^2-75=0$ هي:

ⓐ $\sqrt{2}$ ⓑ $2\sqrt{2}$

ⓒ 10 ⓓ $2\sqrt{3}$

(12) المسافة بين نقطة الأصل وأحد رأسي القطع الناقص على المحور الأكبر الذي معادلته $\frac{x^2}{20.25}+\frac{y^2}{4}=1$ هي:

ⓐ 9 ⓑ 2

ⓒ 4.5 ⓓ 16.25

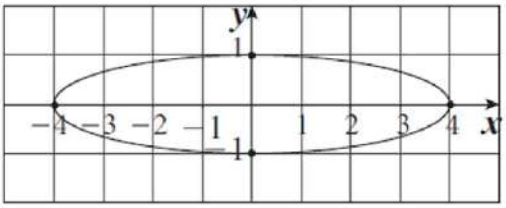
في التمارين (15–13)، لديك قائمتان. اختر من القائمة (2) ما يناسب كل تمرين في القائمة (1) لتصل بيان كل قطع ناقص بمعادلته.

(13) $\frac{x^2}{16}+y^2=1$ 13 --------- (b)

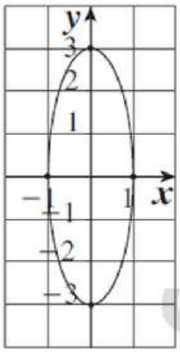
(14) $x^2+\frac{y^2}{9}=1$ 14 ---------- (c)

(15) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16}=1$ 15 ---------- (d)

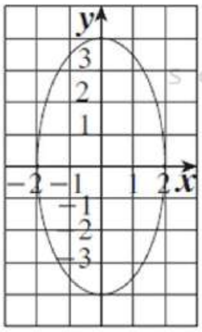
b



c



d



القطع الزائد

المجموعة A تمارين مقالية

في التمرينين (2—1)، لكل معادلة من معادلات القطع الزائد التالية أوجد: رأسي القطع — البؤرتين — معادلة كل من الخطين المقاربين — معادلة كل من الدليلين — طول كل من المحورين، ثم ارسم شكلا تخطيطيًا للقطع الزائد.

(1) $\frac{y^2}{25}-\frac{x^2}{16}=1$

الحل:

(1) معادلة القطع الزائد هي: $\frac{y^2}{25}-\frac{x^2}{16}=1$ $\Leftarrow$ المحور القاطع ينطبق علي محور الصادات

ومن معادلة القطع الزائد نجد أن :

$a^2=25 \Rightarrow a=5$

$b^2=16 \Rightarrow b=4$

$C^2=a^2+b^2$

$C^2=25+16=41 \Rightarrow C=\sqrt{41}$

رأسا القطع الزائد هما : $A_1(0,-5)\,,A_2(0,5)$

البؤرتين: $F_1(0,-\sqrt{41})\,,F_2(0,\sqrt{41})$

معادلة كل من الخطين المقاربين :

$y=\pm\frac{a}{b}x \quad \Rightarrow \quad y=\pm\frac{5}{4}x$

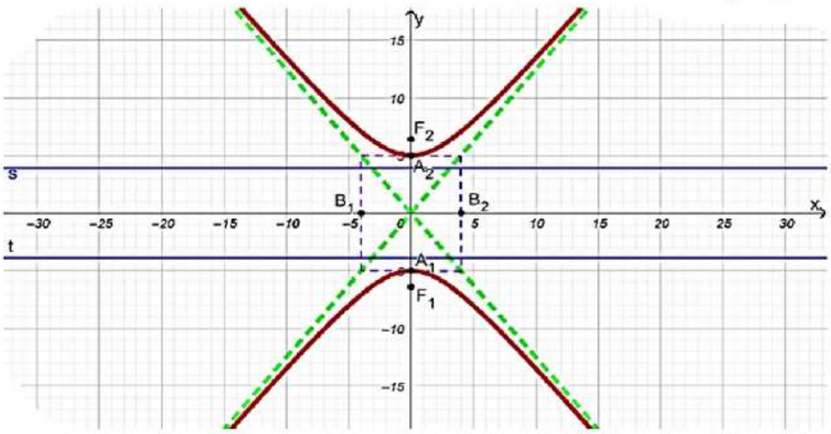
معادلة الدليلين:

$y=\pm\frac{a^2}{c} \quad \Rightarrow \quad y=\pm\frac{25}{\sqrt{41}}$

طول المحور القاطع : $2a=2\times 5=10$

طول المحور المرافق هو: $2b=2\times 4=8$

شكل القطع:



(2) $24x^2 - 12y^2 - 192 = 0$

الحل:

$$24x^2 - 12y^2 = 192 \overset{\div}{\Longrightarrow} \frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{16} = 1$$

$\therefore$ المحور القاطع ينطبق علي محور السينات

من معادلة القطع الزائد نجد أن : $a^2 = 8 \Rightarrow a = 2\sqrt{2}$

$b^2 = 16 \Rightarrow b = 4$

$C^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow C^2 = 8 + 16 = 24$

$C = 2\sqrt{6}$

رأسا القطع الزائد هما : $A_1(-2\sqrt{2}, 0)\ ,\ A_2(2\sqrt{2}, 0)$

البؤرتين: $F_1(-2\sqrt{6}, 0)\ ,\ F_2(2\sqrt{6}, 0)$

معادلة كل من الخطين المقاربين :

$$y = \pm\frac{b}{a}x \quad \Rightarrow \quad y = \pm\frac{4}{2\sqrt{2}}x$$

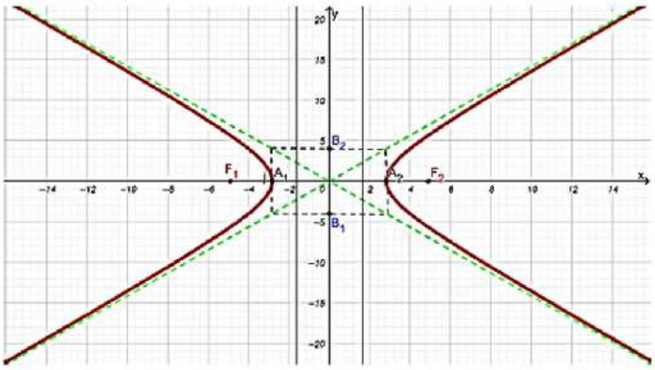
معادلة الدليلين:

$$x = \pm\frac{a^2}{c} \quad \Rightarrow \quad x = \pm\frac{8}{2\sqrt{6}}$$

طول المحور القاطع هو: $2a = 2 \times 2\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$

طول المحور المرافق هو: $2b = 2 \times 4 = 8$

شكل القطع:



(3) أوجد معادلة القطع الزائد الذي إحدى بؤرتيه $F_1(-5,0)$ ورأساه $A_2(3,0)$ ، $A_1(-3,0)$
ثم أوجد معادلة كل من خطيه المقاربين وارسم شكلاً تقريبيًا له.

الحل:

$\because$ البؤرتان تقعان على محور السينات

$\therefore$ معادلة القطع تكون على الصورة: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

احدي البؤرتين $F_1(-5,0)$ ومنها : $c = 5$

احدي الرأسين $A_2(3,0)$ ومنها : $a = 3$

$\because C^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow 5^2 = 3^2 + b^2$

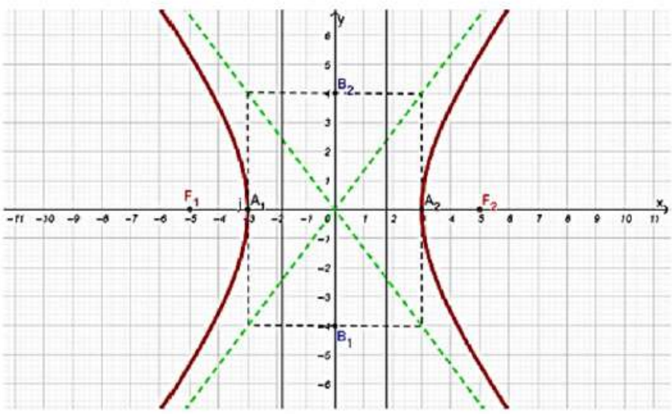
$b^2 = 25 - 9 = 16$

$b = \sqrt{16} = 4$

$\therefore$ معادلة القطع الزائد هي: $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$

معادلة كل من الخطين المقاربين :

$$y = \pm\frac{b}{a}x \quad \Rightarrow \quad y = \pm\frac{4}{3}x$$



(4) أوجد معادلة القطع الزائد الذي مركزه $(0\ ,\ 0)$ وإحدى بؤرتيه $F_1(0,-\sqrt{5})$ ومعادلة أحد خطيه المقاربين $y = 2x$.

الحل:

∵ البؤرتان تقعان على محور الصادات

∴ معادلة القطع تكون علي الصورة: $\dfrac{y^2}{a^2} - \dfrac{x^2}{b^2} = 1$

∵ احدي البؤرتين $F_1(0, -\sqrt{5}) \Leftarrow C = -\sqrt{5}$

$C^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow 5 = a^2 + b^2$ ....(1)

∵ معادلة أحد الخطين المقاربين: $y = 2x$ بالمقارنة بالمعادلة $y = \dfrac{a}{b}x$

$\therefore \frac{2}{1} = \frac{a}{b} \Rightarrow a = 2b$ .....(2)

بالتعويض من (2) في (1) :

$5 = (2b)^2 + b^2 \Rightarrow 5b^2 = 5 \Rightarrow b^2 = \dfrac{5}{5} = 1$

بالتعويض في (2) : $a = 2 \times 1 = 2$

$a^2 = 4$

معادلة القطع هي: $\dfrac{y^2}{4} - \dfrac{x^2}{1} = 1$

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (1—4)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة، و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) $x^2 - y^2 = 4$ هي معادلة قطع زائد. (a) (b)

(2) الخطّان المقاربان للقطع الزائد الذي معادلته $x^2 - y^2 = 12$ هما متعامدان. (a) (b)

(3) إحداثيات بؤرتي القطع الزائد الذي معادلته $\dfrac{y^2}{9} - \dfrac{x^2}{18} = 1$ هما: $(0,3)$, $(0,-3)$. (a) (b)

(4) نقطتا طرفي المحور المرافق للقطع الزائد الذي معادلته $\dfrac{x^2}{25} - y^2 = 1$ هما: $B_1(1,0)$, $B_2(-1,0)$. (a) (b)

في التمارين (5—11)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(5) معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه $(0, \pm 3)$ وطول محوره القاطع 4 هي:

(a) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$

(b) $\frac{y^2}{5} - \frac{x^2}{4} = 1$

(c) $\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{5} = 1$

(d) $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = 1$

(6) إذا كانت معادلة القطع الزائد $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{3} = 1$؛ فيمرّ أحد الخطين المقاربين له في النقطة:

(a) $\left(2, 2\sqrt{\frac{3}{5}}\right)$

(b) $\left(\sqrt{\frac{5}{3}}, 2\right)$

(c) $\left(2\sqrt{\frac{3}{5}}, 2\right)$

(d) $\left(\sqrt{\frac{5}{3}}, 2\sqrt{\frac{3}{5}}\right)$

(7) معادلة القطع الزائد الذي نقطتي تقاطعه مع المحور السيني هما $(\pm 6, 0)$ هي:

(a) $y^2 - x^2 = 36$

(b) $\frac{y^2}{36} - \frac{x^2}{49} = 1$

(c) $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{36} = 1$

(d) $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{4} = 1$

(8) البعد بين بؤرتي القطع الزائد الذي معادلته: $50y^2 - 25x^2 - 100 = 0$ بوحدة الطول يساوي:

(a) $\sqrt{6}$

(b) $2\sqrt{6}$

(c) 6

(d) $2\sqrt{2}$

(9) منحنى أي معادلة مما يلي **لا يقطع** المحور الصادي في $(0, \pm 4)$:

(a) $y^2 - x^2 = 16$

(b) $4y^2 - 16x^2 = 64$

(c) $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1$

(d) $\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{9} = 1$

(10) نقطتا تقاطع القطع الزائد الذي معادلته: $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{49} = 1$ مع محور السينات هما:

(a) $(\pm 7, 0)$

(b) $(\pm 5, 0)$

(c) $(0, \pm 5)$

(d) ليس أيًّا مما سبق

(11) معادلتا الخطين المقاربين للقطع الزائد: $\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{32} = 2$ هما:

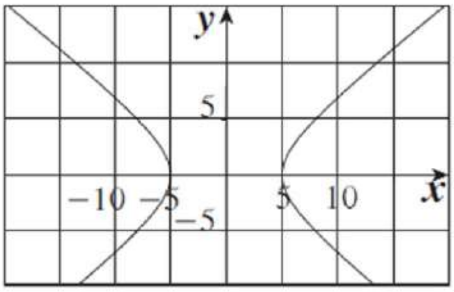
(a) $y = \pm 2x$

(b) $y = \pm \frac{1}{2}x$

(c) $y = \pm 4x$

(d) $y = \pm \frac{1}{4}x$

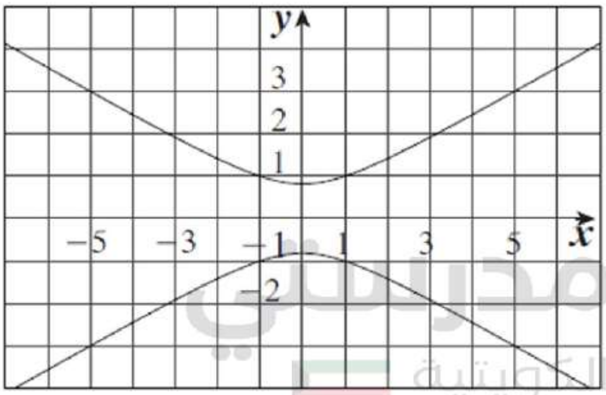
c



12 --- (c)

$$\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{16}=1 \quad \textbf{(12)}$$

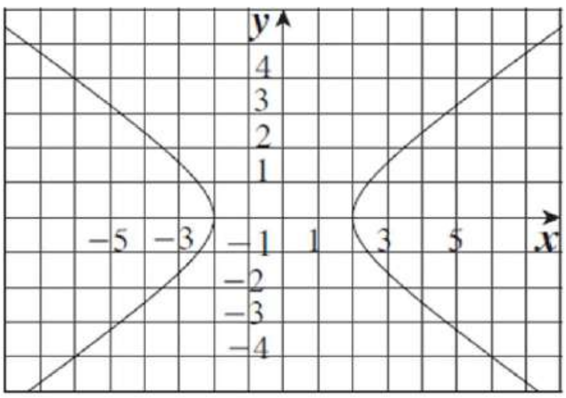
a



13 --- (a)

$$3y^2-x^2=2 \quad \textbf{(13)}$$

d



14 --- (d)

$$\frac{1}{2}x^2-y^2-2=0 \quad \textbf{(14)}$$

الاختلاف المركزي

المجموعة A تمارين مقالية

في التمارين (4-1)، حدّد نوع القطع في كل ممّا يلي، ثم أوجد معادلته.

(1) اختلافه المركزي $e = \frac{3}{2}$ وإحدى بؤرتيه $F(0,3)$

الحل:

$$\because \ e = \frac{3}{2} \ , \qquad \frac{3}{2} > 1$$

∴ القطع هو قطع زائد محوره الأساسي جزء من محور الصادات

∵ البؤرة $(0,3)$ $\Leftarrow$ $c = 3$

$$\therefore \ \frac{c}{a} = \frac{3}{2} \ \Rightarrow \ \frac{3}{a} = \frac{3}{2} \ \Rightarrow \ a = 2$$

$$\because \ b^2 = c^2 - a^2 \ \Rightarrow \ b^2 = 9 - 4 = 5$$

معادلة القطع هي: $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$

$$\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{5} = 1$$

(2) اختلافه المركزي $e = \frac{\sqrt{7}}{4}$ وإحدى بؤرتيه $F(0, -\sqrt{7})$

الحل:

$$\because \ e = \frac{\sqrt{7}}{4} \ , \qquad \frac{\sqrt{7}}{4} < 1$$

∴ القطع هو قطع ناقص محوره الأكبر جزء من محور الصادات

∵ البؤرة $(0,-\sqrt{7})$ $\Leftarrow$ $c = \sqrt{7}$

$$\therefore \ \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{7}}{4} \ \Rightarrow \ \frac{\sqrt{7}}{a} = \frac{\sqrt{7}}{4} \ \Rightarrow \ a = 4$$

$$\because \ b^2 = a^2 - c^2 \ \Rightarrow \ b^2 = 16 - 7 = 9$$

معادلة القطع الناقص هي: $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$$

(3) اختلافه المركزي $e = \frac{5}{3}$ وأحد رأسيه $A(-4,0)$

الحل:

$$\because\ e = \frac{5}{3} \quad , \quad \frac{5}{3} > 1$$

∴ القطع هو قطع زائد محوره الأساسي جزء من محور السينات

∵ الرأس $(-4,0)$ ⇐ $a = 4$

$$\frac{c}{a} = \frac{5}{3} \Rightarrow \frac{c}{4} = \frac{5}{3} \Rightarrow c = \frac{20}{3}$$

$$\because\ b^2 = c^2 - a^2 \Rightarrow b^2 = \frac{400}{9} - 16 = \frac{256}{9}$$

معادلة القطع الناقص هي: $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{\frac{256}{9}} = 1$

$$\frac{y^2}{16} - \frac{9x^2}{256} = 1$$

(4) اختلافه المركزي $e = \frac{3}{4}$ ومعادلة دليله $x = 8$

الحل:

$$\because\ e = \frac{3}{4} \quad , \quad \frac{3}{4} < 1$$

∴ القطع هو قطع ناقص معادلة الدليل $x = 8$

∴ المحور الأكبر هو جزء من محور السينات

$$e = \frac{c}{a} \Rightarrow \frac{c}{a} = \frac{3}{4} \Rightarrow c = \frac{3}{4}a$$

$$x = \frac{a^2}{c} \Rightarrow \frac{a^2}{c} = 8 \Rightarrow \frac{a^2}{\frac{3}{4}a} = 8 \Rightarrow \frac{a}{\frac{3}{4}} = 8 \xRightarrow{a \neq 0} a = 6$$

$$\because\ b^2 = a^2 - c^2 \Rightarrow b^2 = 36 - \frac{81}{4} = \frac{63}{4}$$

معادلة القطع هي:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{36} + \frac{4y^2}{63} = 1$$

في التمرينين (6–5)، أوجد الاختلاف المركزي لكل قطع ممّا يلي حيث معادلته:

(5) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$

$$a^2 = 9 \Rightarrow a = 3$$

$$b^2 = 4 \Rightarrow b = 2$$

$$c^2 = 9 - 4 = 5 \Rightarrow c = \sqrt{5}$$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

(6) $4y^2 - 9x^2 = 36$

$$4y^2 - 9x^2 = 36 \xRightarrow{\div 36} \frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{4} = 1$$

$$a^2 = 9 \Rightarrow a = 3$$

$$b^2 = 4 \Rightarrow b = 2$$

$$c^2 = 9 + 4 = 13 \Rightarrow c = \sqrt{13}$$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{13}}{3}$$

في التمرينين (7–8)، أوجد الرأسين والبؤرتين والاختلاف المركزي ومعادلتي الدليلين للقطع الزائد.

(7) المعادلة: $\frac{x^2}{7}-\frac{y^2}{16}=1$

$a^2 = 7 \Rightarrow a = \sqrt{7}$
$b^2 = 16 \Rightarrow b = 4$
$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c^2 = 7 + 16 = 23 \Rightarrow c = \sqrt{23}$

الرأسين: $(7,0)$, $(-7,0)$

البؤرتان: $(\sqrt{23},0)$, $(-\sqrt{23},0)$

معادلتا الدليلين: $x = \frac{c}{a} \Longrightarrow x = \pm\frac{\sqrt{23}}{\sqrt{7}}$

(8) المعادلة: $\frac{y^2}{16}-\frac{x^2}{4}=1$

$a^2 = 16 \Rightarrow a = 4$
$b^2 = 4 \Rightarrow b = 2$
$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c^2 = 16 + 4 = 20 \Rightarrow c = 2\sqrt{5}$

الرأسين: $(0,4)$, $(0,-4)$

البؤرتان: $(0, 2\sqrt{5})$, $(0, -2\sqrt{5})$

معادلتا الدليلين: $x = \frac{c}{a} \Longrightarrow x = \pm\frac{2\sqrt{5}}{4}$

$x = \pm\frac{\sqrt{5}}{2}$