بسط كل عدد مما يلي مستخدماً الوحدة التخيلية i

a) $\sqrt{-2} = \sqrt{2}i$

b) $-\sqrt{-12} = -2\sqrt{3}i$

c) $\sqrt{-36} = 6i$

اكتب كلاً من الأعداد المركبة التالية على الصورة الجبرية :

a) $\sqrt{-18} + 7 = 3\sqrt{2}i + 7 = 7 + 3\sqrt{2}$

b) $\dfrac{10 - \sqrt{-100}}{5} = \dfrac{10 - 10i}{5}$
$= 2 - 2i$

c) $\dfrac{\sqrt{-9} + 5}{7} = \dfrac{3\mathrm{i} + 5}{7} = \dfrac{5}{7} + \dfrac{3}{7}\mathrm{i}$

مدرستي الكويتية
school-kw.com

أوجد قيم كل من $x, y \in \mathbb{R}$ في كل مما يلي :

a) $x + 5\mathrm{i} = 7 - 3\mathrm{yi}$

$x = 7$ $\quad 5 = -3y$

$y = -\dfrac{5}{3}$

b) $(x + 3) + y^2 i = 5 - yi$

$x + 3 = 5$ $\quad y^2 = -y$

$x = 5 - 3$ $\quad y^2 + y = 0$

$\mathrm{x} = 2$ $\quad y(y + 1) = 0$

$y = 0$

$y = -1$

c) $3i = 2x - 5yi$

$0 + 3i = 2x - 5yi$

$2x = 0$ $\quad -5y = 3$

$x = 0$ $\quad y = -\dfrac{3}{5}$

مثل كلّاً مما يلي في المستوي المركب :

$a)\ z_1 == 4 - i$

$M_1(4,-1)$

$b)\ z_2 = -3i$

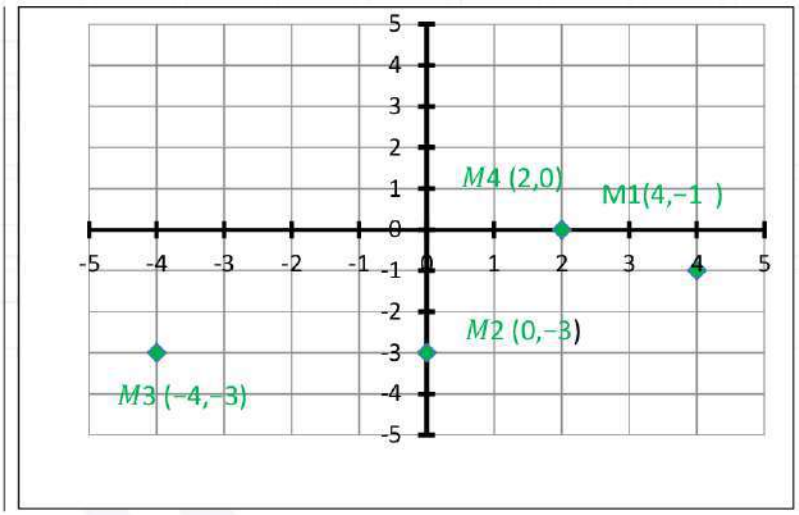
$M_2(0,-3)$

$c)\ z_3 = -4 - 3i$

$M_3(-4,-3)$

$d)\ z_4 = 2$

$M_4(2,0)$



اكتب العدد المركب المناظر لكل من النقاط التالية: K (7,0), H (1,-2), N (-4,1)

K (7,0)

$z_1 = 7$

H $(1,-2)$

$z_2 = 1 - 2i$

N $(-4,1)$

$z_3 = -4 + i$

إذا كان $z_1 = -2 + 5i$, $z_2 = 3.4 - 1.2i$, $z_3 = -0.3i$

أوجد :

$a) z_1 + z_2 = (-2 + 5i) + (3.4 - 1.2i)$

$= -2 + 5i + 3.4 - 1.2i$

$= 1.4 + 3.8i$

$b)\ z_2 - z_1$

$= (3.4 - 1.2i) - (-2 + 5i)$

$= 3.4 - 1.2i + 2 - 5i$

$= 5.4 - 6.2i$

$c)\ z_3 - z_2 - z_1$

$= (-0.3i) - (3.4 - 1.2i) - (-2 + 5i)$

$= 0.3i - 3.4 + 1.2i + 2 - 5i$

$= -1.4 - 4.1i$

أوجد الناتج :

$a)\ (6 - 5i)(4 - 3i)$

$= 24 - 18i - 20i + 15i^2$

$= 24 - 18i - 20i - 15$

$= 9 - 38i$

$b)\ (9 + 4i)(4 - 9i) =$

$= 36 - 81i + 16i - 36i^2$

$= 36 - 81i + 16i + 36$

$= 72 - 65i$

مدرستي الكويتية
school-kw.com

c)$(12i)(7i)(i+1)=$
$=84i^2(i+1)=-84(i+1)$
$=-84i-84=-84-84i$

إذا كان $z_2=1+4i$, $z_1=2-3i$ فأوجد ما يلي:

a) $\frac{1}{2}z_1=\frac{1}{2}(2-3i)$
$=1-\frac{3}{2}i$

b) $z_1.z_2=$
$=(2-3i)\cdot(1+4i)$
$=2+8i-3i-12i^2$
$=2+8i-3i+12$
$=14+5i$

أوجد :

a) $5(i)^{73}=5(i)^{18\times4+1}=5i$

b) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)^3=$

$z=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\Rightarrow z^2=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)^2$

$=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{1}{2}i\right)+\left(\frac{1}{2}i\right)^2$

$z^3=z^2\cdot z=\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)$

$=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}i+\frac{\sqrt{3}}{2}i\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\cdot\frac{1}{2}i$

$=\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{1}{4}i+\frac{3}{4}i-\frac{\sqrt{3}}{4}=i$

c) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^4=$

$z=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\Rightarrow z^2=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^2$

$=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^2$
$=i$

$z^4=z^2\cdot z^2=i.i=i^2=-1$

إذا كان $z_2=3+5i$, $z_1=2-7i$ فأوجد:

مدرستي الكويتية
school-kw.com

a) $\overline{z}_1 + \overline{z}_2 =$

$= (2 + 7i) + (3 - 5i)$

$=2 + 7i + 3 - 5i = 5 + 2i$

b) $\overline{z_1 - z_2} =$

$= \overline{z}_1 - \overline{z}_2$

$= (2 + 7i) - (3 - 5i)$

$= 2 + 7i - 3 + 5i$

$= -1 + 12i$

c) $\overline{z_1 . z_2} = \overline{z}_1 . \overline{z}_2$

$= (2 + 7i) \cdot (3 - 5i)$

$= 6 - 10i + 21i - 35i^2$

$= 6 - 10i + 21i + 35$

$= 41 + 11i$

d) $\overline{z}_1 . \overline{z}_{2=}$

$= (2 + 7i) \cdot (3 - 5i)$

$= 6 - 10i + 21i - 35i^2$

$= 6 - 10i + 21i + 35$

$= 41 + 11i$

مدرستي الكويتية
school-kw.com

أوجد المعكوس الضربي لكل من:

a) $z_1 = -3i - 7 = -7 - 3i$

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{-7 - 3i} \times \frac{-7 + 3i}{-7 + 3i}$$

$$= \frac{3i - 7}{(-7)^2 + (-3)^2} = \frac{-7 + 3i}{58}$$

$$= \frac{-7}{58} + \frac{3}{58} i$$

b) $z_2 = 5 + 11i$

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{5 + 11i} \times \frac{5 - 11i}{5 - 11i}$$

$$= \frac{5 - 11i}{(5)^2 + (11)^2} = \frac{5 - 11i}{146} = \frac{5}{146} - \frac{11}{146}$$

c) $z_3 = 6i$

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{6i} \times \frac{i}{i} = \frac{i}{6i^2} = \frac{i}{-6} = -\frac{1}{6} i$$

أوجد ناتج قسمة $3 - 2i$ على $1 + 2i$

$$\frac{2i-3}{1+2i}=\frac{2i-3}{1+2i}\times\frac{1-2i}{1-2i}=\frac{2i-4i^2-3+6i}{(1)^2+(2)^2}$$
$$=\frac{2i+4-3+6i}{5}=\frac{1+8i}{5}=\frac{1}{5}+\frac{8}{5}i$$

أوجد كلاً مما يلي في الصورة الجبرية :

a) $\frac{3+\mathrm{i}}{2+5\mathrm{i}}=\frac{3+i}{2+5i}\times\frac{2-5i}{2-5i}$
$$=\frac{6-15i+2i-5i^2}{(2)^2+(5)^2}$$
$$=\frac{6-15i+2i+5}{29}$$
$$=\frac{11-13l}{29}=\frac{11}{29}-\frac{13}{29}i$$

b) $\frac{2-i}{2+i}=\frac{2-i}{2+i}\times\frac{2-i}{2-i}$
$$=\frac{4-2i-2i+i^2}{(2)^2+(1)^2}$$
$$=\frac{4-2l-2l-1}{5}$$
$$=\frac{3-4i}{5}=\frac{3}{5}-\frac{4}{5}i$$

c) $\frac{\overline{5+i}}{2-3i}=\frac{5-i}{2+3i}\times\frac{2-3i}{2-3i}$
$$=\frac{10-15i-2i+3i^2}{(2)^2+(3)^2}$$
$$=\frac{10-15i-2i-3}{13}$$
$$=\frac{7-17i}{13}=\frac{7}{13}-\frac{17}{13}i$$

مدرستي الكويتية
edu-kw.com

أوجد

$a)|6-4i|=\sqrt{(6)^2+(-4)^2}=2\sqrt{13}$

$b)|-2+5i|=\sqrt{(-2)^2+(5)^2}=\sqrt{29}$

أوجد الزوج المرتب (x,y) الذي يمثل الإحداثيات الديكارتية لكل من النقطتين

$a)\ A(5,300^\circ)$

$r=5,\theta=300^\circ$

$x=r\cos\theta=5\cos(300^\circ)=\frac{5}{2}$

$y=r\sin\theta=5\sin(300^\circ)=\frac{-5\sqrt{3}}{2}$

الإحداثيات الديكارتية:

$(x,y)=\left(\frac{5}{2},\frac{-5\sqrt{3}}{2}\right)$

$b)\ B\left(2,\frac{2\pi}{3}\right)$

$r=5,\theta=\frac{2\pi}{3}$

$x=r\cos\theta=2\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)=-1$

$y=r\sin\theta=2\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)=\sqrt{3}$

الإحداثيات الديكارتية :

$(x,y)=(-1,\sqrt{3})$

أوجد الزوج المرتب : (r,θ) لكل نقطة مما يلي حيث $0\le\theta<2\pi$

$a)D(3\sqrt{3},3)$

$r=\sqrt{x^2+y^2}$

$=\sqrt{(3\sqrt{3})^2+3^2}=6$

بفرض α زاوية الإسناد بالتالي:

$\tan\alpha=\left|\frac{y}{x}\right|=\left|\frac{3}{3\sqrt{3}}\right|=\frac{3}{3\sqrt{3}}$

$\alpha=\tan^{-1}\left(\frac{3}{3\sqrt{3}}\right)=\frac{\pi}{6}$

$b)\ C(4,-2\sqrt{5})$

$r=\sqrt{x^2+y^2}$

$=\sqrt{4^2+(-2\sqrt{5})^2}=6$

بفرض α زاوية الإسناد بالتالي:

$\tan\alpha=\left|\frac{y}{x}\right|=\left|\frac{-2\sqrt{5}}{4}\right|=\frac{\sqrt{5}}{2}\Rightarrow$

$\alpha=\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)=0{,}84$

θ في الربع 1 : $x > 0, y > 0$

$\theta = \alpha = \frac{\pi}{6}$

$(r, \theta) = \left(6, \frac{\pi}{6}\right)$

θ في الربع 4 : $x > 0, y < 0$

$\theta = 2\pi - \alpha$
$= 2\pi - 0.84$
$= 5.44$

$(r, \theta) = (6, 5.44)$

ضع كلاً مما يلي في الصورة المثلثية :

$a) z_1 = \frac{5}{\sqrt{2}} - \frac{5}{\sqrt{2}} i$

$x = \frac{5}{\sqrt{2}}, y = \frac{-5}{\sqrt{2}}$

بفرض a زاوية الإسناد بالتالي

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$

$\tan \alpha = \left|\frac{y}{x}\right| = \left|\frac{\frac{-5}{\sqrt{2}}}{\frac{5}{\sqrt{2}}}\right| = 1 \Rightarrow$

$= \sqrt{\left(\frac{5}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{-5}{\sqrt{2}}\right)^2} = 5$

$\alpha = \tan^{-1}(1) = \frac{\pi}{4}$

$x > 0, y < 0$

θ الربع في 4

$\theta = 2\pi - \alpha$

$= 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}$

الصورة المثلثية $z = 5\left(\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4}\right)$

$b) z_2 = -1 - i$

$x = -1, y = -1$

بفرض a زاوية الإسناد بالتالي

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$

$\tan \alpha = \left|\frac{y}{x}\right| = \left|\frac{-1}{-1}\right| = 1 \Rightarrow$

$\alpha = \tan^{-1}(1) = \frac{\pi}{4}$

$x < 0, y < 0$

θ في الربع 3

$\theta = \pi + \alpha$

$= \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$

$= \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$

الصورة المثلثية: $z = r(\cos \theta + i \sin \theta) = \sqrt{2}\left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4}\right)$

$c) z_3 = -2 + 2\sqrt{3}i$

بفرض a زاوية الإسناد بالتالي

$x = -2.\ y = 2\sqrt{3}$

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$

$= \sqrt{(-2)^2 + (2\sqrt{3})^2} = 4$

$\tan\ \alpha = \left|\frac{y}{x}\right| = \left|\frac{2\sqrt{3}}{-2}\right| = \sqrt{3} \Rightarrow$

$\alpha = \tan^{-1}(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}$

$x < 0, y > 0$

2 في الربع θ

$\theta = \pi - \alpha$

$= \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$

الصورة المثلثية $z = r(\cos\ \theta + i\sin\ \theta) = 4\left(\cos\ \frac{2\pi}{3} + i\sin\ \frac{2\pi}{3}\right)$

ضع كلاً مما يلي بالصورة المثلثية $z = r(\cos\ \theta + i\sin\ \theta)$

a) $3\left(-\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

$x = 3\left(-\cos\frac{\pi}{3}\right), y = 3\sin\ \frac{\pi}{3}$

$x < 0, y > 0 \Rightarrow \theta = \pi - \alpha$

$3\left(-\cos\ \frac{\pi}{3} + i\sin\ \frac{\pi}{3}\right)$

$= 3\left(\cos\ \left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) + i\sin\ \left(\pi - \frac{\pi}{3}\right)\right)$

$= 3\left(\cos\ \left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\ \left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$

b) $2\left(\sin\ \frac{\pi}{4} + i\cos\ \frac{\pi}{4}\right)$ $\quad x > 0, y > 0$

$= r(\cos\ \theta + i\sin\ \theta)$

$= 2\left(\cos\ \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\ \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\right)$

$= 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$

c) $-\sqrt{3}\left(-\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

$x = \sqrt{3}\cos\frac{\pi}{4}, y = \sqrt{3}\sin\frac{\pi}{4}$

$x > 0, y > 0 \Rightarrow \theta = \alpha$

$-\sqrt{3}\left(-\cos\ \frac{\pi}{4} - i\sin\ \frac{\pi}{4}\right)$

$= \sqrt{3}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$

d) $3(\cos 50^\circ - i\sin(-130^\circ))$

$x = 3\cos\ 50^\circ, y = 3\left(-\sin\ (-130^\circ)\right)$

$= 3\sin\ 130^\circ$

$x > 0, y > 0 \Rightarrow \theta = \alpha$

$3(\cos 50^\circ - i\sin(-130^\circ))$

$= 3\left(\cos\ (50^\circ) + i\sin\ (50^\circ)\right)$

ضع في الصورة المثلثية كلّاً من الأعداد التالية :

مدارس الكويتية school-kw.com

أوجد مجموعة حل المعادلة : $2z + i = 3 + 2i$ في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$

$$2z = 3 + 2i - i$$
$$\frac{2z}{2} = \frac{3}{2} + \frac{i}{2} \Rightarrow z = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}i \Rightarrow \text{مجموعة الحلول} = \left\{\frac{3}{2} + \frac{1}{2}i\right\}$$

أوجد مجموعة حل المعادلة : $z + i = 2\bar{z} + 1$ في $\mathbb{C}$

بفرض : $z = x + yi \quad \bar{z} = x - yi : x, y \in \mathbb{R}$

$$(x + yi) + i = 2(x - yi) + 1$$
$$x + yi + i = 2x - 2yi + 1$$
$$x + (y + 1)i = 2x + 1 - 2yi$$

$$x = 2x + 1$$
$$x - 2x = 1$$
$$-x = 1$$
$$x = -1$$

$$y + 1 = -2y$$
$$y + 2y = 1$$
$$3y = 1$$
$$y = \frac{1}{3}$$

$$z = -1 + \frac{1}{3}i \Rightarrow \text{مجموعة الحلول} = \left\{-1 + \frac{1}{3}i\right\}$$

أوجد مجموعة حل كل معادلة مما يلي : حيث $x \in \mathbb{C}$:

a) $3x^2 + 48 = 0$

$$3x^2 = -48$$
$$x^2 = \frac{-48}{3}$$
$$x^2 = -16$$
$$x = \mp\sqrt{-16} = \mp 4i$$
$$\text{م ح} = \{-4i, 4i\}$$

b) $-5x^2 - 150 = 0$

$$\frac{-5x^2}{-5} = \frac{150}{-5}$$
$$x^2 = -30$$
$$x = \mp\sqrt{-30}$$
$$x = \mp\sqrt{30}i$$
$$\text{م ح} = \{-\sqrt{30}i, \sqrt{30}i\}$$

c) $8x^2 + 2 = 0$

$$8x^2 = -2$$
$$x^2 = -\frac{2}{8} = \frac{-1}{4}$$
$$x = \mp\sqrt{\frac{-1}{4}} == \mp\frac{1}{2}i$$
$$\text{م ح} = \left\{-\frac{1}{2}i, +\frac{1}{2}i\right\}$$

أوجد مجموعة حل المعادلة : $z^2 - 2z + 2 = 0$ في $\mathbb{C}$

$$a = 1 \qquad b = -2 \qquad c = 2$$
$$\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4(1)(2) = -4$$

مدرستي الكويتية
schoolkw.com

$$z = \frac{-b \mp \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2 \mp \sqrt{-4}}{2} = \frac{2 \mp 2i}{2} = 1 \mp i$$

$$\text{م ح} = \{1 - i, 1 + i\}$$

لتكن المعادلة $2z^2 - 6z + 5 = 0$

أثبت أن العدد المركب $z_1 = \frac{3-i}{2}$ هو جذر لهذه المعادلة $a)$

$$2z^2 - 6z + 5$$
$$= 2\left(\frac{3-i}{2}\right)^2 - 6\left(\frac{3-i}{2}\right) + 5$$
$$= 2\left(\frac{3^2 - 2 \times 3 \times i + i^2}{4}\right) - 3(3-i) + 5$$
$$= \frac{1}{2}(9 - 6i - 1) - 3(3-i) + 5 = 0$$

أوجد الجذر الثاني $b)$

الجذران مترافقان

$$z_2 = \frac{3+i}{2}$$

أوجد الجذرين التربيعين للعدد المركب $z = -3 - 4i$

بفرض $w = m + ni$ جذراً تربيعياً لـ z بالتالي :

$$w^2 = z \Rightarrow m^2 - n^2 + 2mni = -3 - 4i$$
$$m^2 - n^2 = -3 \rightarrow (1)\ ,\ 2mn = -4 \Rightarrow mn = -2 \rightarrow (2)$$
$$|w|^2 = |z| \Rightarrow m^2 + n^2 = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2}$$
$$m^2 + n^2 = 5 \rightarrow (3)$$

نجمع (1)مع (3) :

$$2m^2 = 2 \Rightarrow m^2 = 1 \Rightarrow \mathbf{m} = \pm\mathbf{1}$$

بالتعويض في (3)

$$1 + n^2 = 5 \Rightarrow n^2 = 4 \Rightarrow \boldsymbol{n} = \pm\mathbf{2}$$

من المعادلة (2) نجد أن m, n متعاكسان بالإشارة بالتالي :

$m = -1 \quad n = 2$

$m = 1 \quad n = -2$

الجذران هما $w_2 = 1 - 2i \quad w_1 = -1 + 2i$

أوجد الجذرين التربيعين للعدد المركب $z = 5 + 12i$

بفرض $w = m + ni$ جذراً تربيعياً لـ z بالتالي :

$$w^2 = z \Longrightarrow\ m^2 - n^2 + 2mni = 5 + 12i$$
$$\mathrm{m}^2 - \mathrm{n}^2 = 5 \rightarrow\ (1)\ ,\ 2mn = 12 \Rightarrow mn = 6 \rightarrow\ (2)$$
$$|w|^2 = |z| \Longrightarrow m^2 + n^2 = \sqrt{(5)^2 + (12)^2}$$
$$\mathrm{m}^2 + \mathrm{n}^2 = 13 \rightarrow\ (3)$$

نجمع (1)مع (3) :

$$2m^2 = 18 \Rightarrow m^2 = 9 \Rightarrow \mathbf{m} = \pm\mathbf{3}$$

بالتعويض في (3)

$$9 + n^2 = 13 \Rightarrow n^2 = 4 \Rightarrow \boldsymbol{n} = \pm\mathbf{2}$$

من المعادلة (2) نجد أن m, n لهما نفس الإشارة بالتالي :

$m = -3 \quad n = -2$
$m = 3 \quad n = 2$

الجذران هما $w_2 = 3 + 2i \quad w_1 = -3 - 2i$

مدرستي الكويتية
school-kw.com

أوجد الجذرين التربيعين للعدد المركب $z = 7 + 24i$

بفرض $w = m + ni$ جذراً تربيعياً لـ z بالتالي :

$$w^2 = z \Longrightarrow\ m^2 - n^2 + 2mni = 7 + 24i$$
$$\mathrm{m}^2 - \mathrm{n}^2 = 7 \rightarrow\ (1)\ ,\ 2mn = 24 \Rightarrow mn = 12 \rightarrow\ (2)$$
$$|w|^2 = |z| \Longrightarrow m^2 + n^2 = \sqrt{(7)^2 + (24)^2}$$
$$\mathrm{m}^2 + \mathrm{n}^2 = 25 \rightarrow (3)$$

نجمع (1)مع (3) :

$$2m^2 = 32 \Rightarrow m^2 = 16 \Rightarrow \mathrm{m} = \pm 4$$

بالتعويض في (3)

$$16 + n^2 = 25 \Rightarrow n^2 = 9 \Rightarrow \boldsymbol{n} = \pm\mathbf{3}$$

من المعادلة (2) نجد أن m, n لهما نفس الإشارة بالتالي :

$m = -4 \quad n = -3$
$m = 4 \quad n = 3$

الجذران هما $w_2 = 4 + 3i$ $w_1 = -4 - 3i$

مدرستي الكويتية
school-kw.com

1-8 التمثيل البياني للدوال المثلثية (الجيب، جيب التمام، الظل)

أوجد الدورة والسعة لكل دالة مما يلي :

$a) y = -2cos5x \quad a = -2 \ , b = 5$

$|a| = |-2| = 2 =$ السعة

$\frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{|5|} = \frac{2\pi}{5} =$ الدورة

$b) \ y = \frac{1}{2}\cos(-x) \ a = \frac{1}{2} \ , b = -1$

$|a| = \left|\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2} =$ السعة

$\frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{|-1|} = 2\pi =$ الدورة

اكتب معادلة الدالة على الصورة $y = acosbx$ إذا كانت :

$a) \ a = -2 \ , \frac{\pi}{3}$: الدورة

$\frac{2\pi}{|b|}$ تمثل دورة الدالة بالتالي : $\frac{2\pi}{|b|} = \frac{\pi}{3} \Rightarrow |b| = \frac{2\pi \times 3}{\pi} = 6 \Rightarrow b = \mp 6$

المعادلة المطلوبة من الشكل $y = acosbx$

$y = -2\cos(6x) \ , y = -2\cos(-6x)$

$b) a = 0.25 \ , \pi$: الدورة

$\frac{2\pi}{|b|}$ تمثل دورة الدالة بالتالي : $\frac{2\pi}{|b|} = \frac{\pi}{1} \Rightarrow |b| = \frac{2\pi}{\pi} = 2 \Rightarrow b = \mp 2$

المعادلة المطلوبة من الشكل $y = acosbx$

$y = 0.25\cos(2x) \ , y = 0.25\cos(-2x)$

$c) \ a = 1 \ , 2$: الدورة

$\frac{2\pi}{|b|}$ تمثل دورة الدالة بالتالي : $\frac{2\pi}{|b|} = \frac{2}{1} \Rightarrow |b| = \frac{2\pi}{\pi} = \pi \Rightarrow b = \mp \pi$

المعادلة المطلوبة من الشكل $y = acosbx$

$y = \cos(\pi x) \ , y = \cos(-\pi x)$

مدرستي الكويتية school-kw.com

أوجد السعة والدورة لكل دالة مما يلي ثم ارسمها بيانياً

$a)\ y = \frac{1}{2}sin4x$

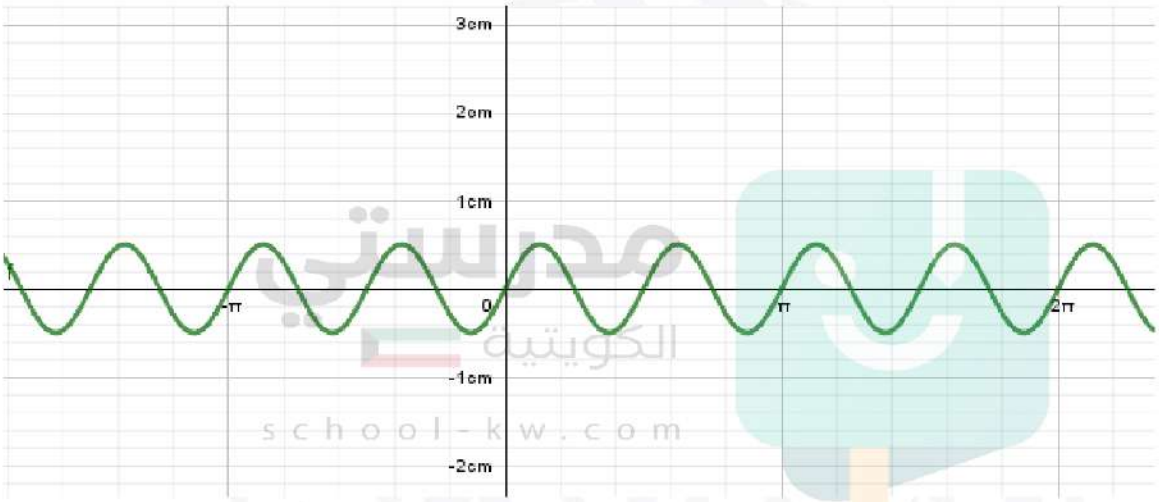
$a = \frac{1}{2}, b = 4$

$|a| = \frac{1}{2}$ = السعة

$\frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{|4|} = \frac{\pi}{2}$ = الدورة

$\frac{1}{4} \times \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{8}$ = ربع الدورة

x	0	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{\pi}{2}$
y	0	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0



مدرستي الكويتية
school-kw.com

$c)\ y = -4sinx\ , x \in [-\pi, 2\pi]$

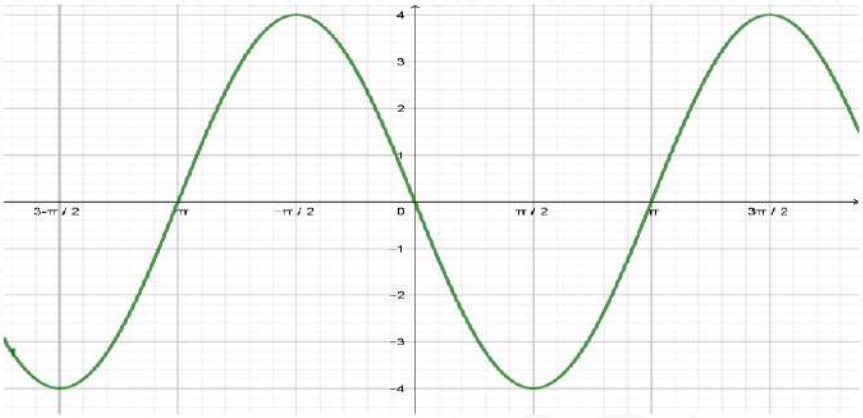
$a = -4\ , b = 1$

السعة $= |a| = 4$

الدورة $= \frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{|1|} = 2\pi$

$\frac{1}{4} \times 2\pi = \frac{\pi}{2}$ = ربع الدورة

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
y	0	-4	0	4	0



أوجد الدور ة أو السعة لكل دالة مما يلي ثم ارسمها بيانياً

$a)\ y = 3cos2x \qquad a = 3, b = 2$

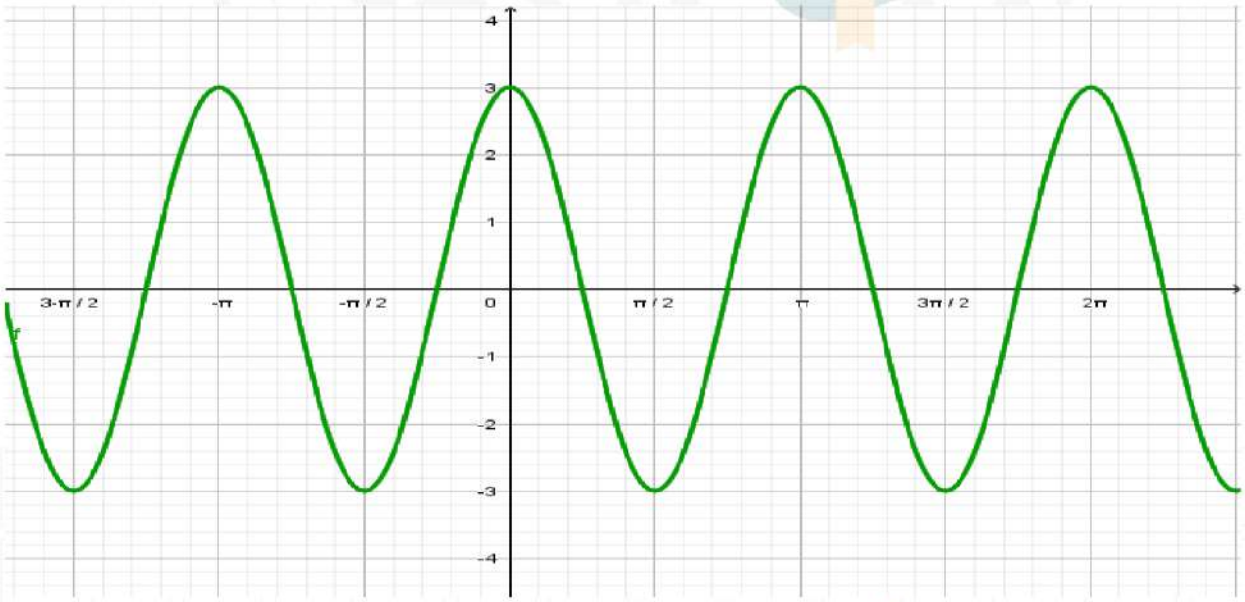
$|a| = 3 =$ السعة

$\frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{|2|} = \pi =$ الدورة

$\frac{1}{4} \times \pi = \frac{\pi}{4} =$ ربع الدورة

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
y	3	0	-3	0	3

مدرستي الكويتية
school-kw.com



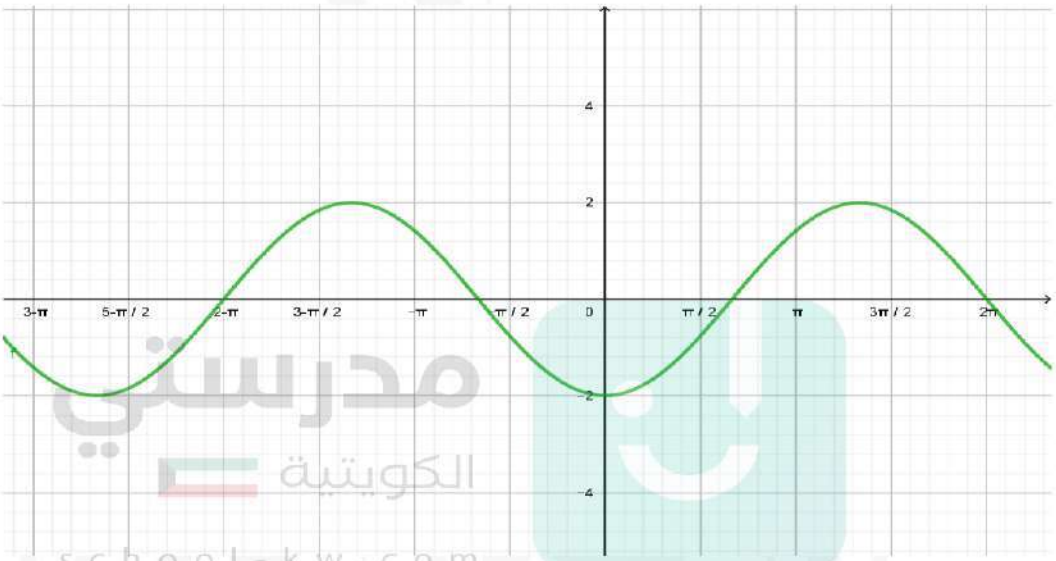
$b)\ y = -2\cos\left(\frac{3}{4}x\right) \qquad ,0 \le x \le 2\pi \qquad a = -2, b = \frac{3}{4}$

السعة $= |a| = |-2| = 2$

الدورة $= \frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{\left|\frac{3}{4}\right|} = \frac{8\pi}{3}$

ربع الدورة $= \frac{1}{4} \times \frac{8\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$

x	0	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{4\pi}{3}$	2π	$\frac{8\pi}{3}$
y	-2	0	2	0	-2



مدرستي الكويتية
school-kw.com

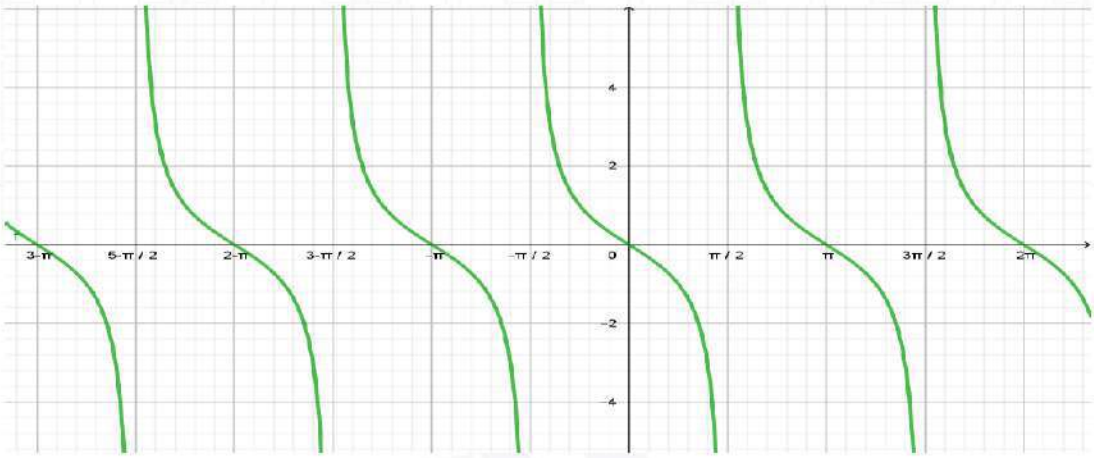
أوجد الدورة لكل دالة مما يلي ثم ارسم بيانها :

$a)\ y = -\tan x \quad a = -1\ , b = 1$

الدورة $= \frac{\pi}{|b|} = \frac{\pi}{|1|} = \pi$

ربع الدورة $= \frac{1}{4} \times \pi = \frac{\pi}{4}$

x	$\frac{-\pi}{2}$	$\frac{-\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
y	غير معرف	1	0	-1	غير معرف



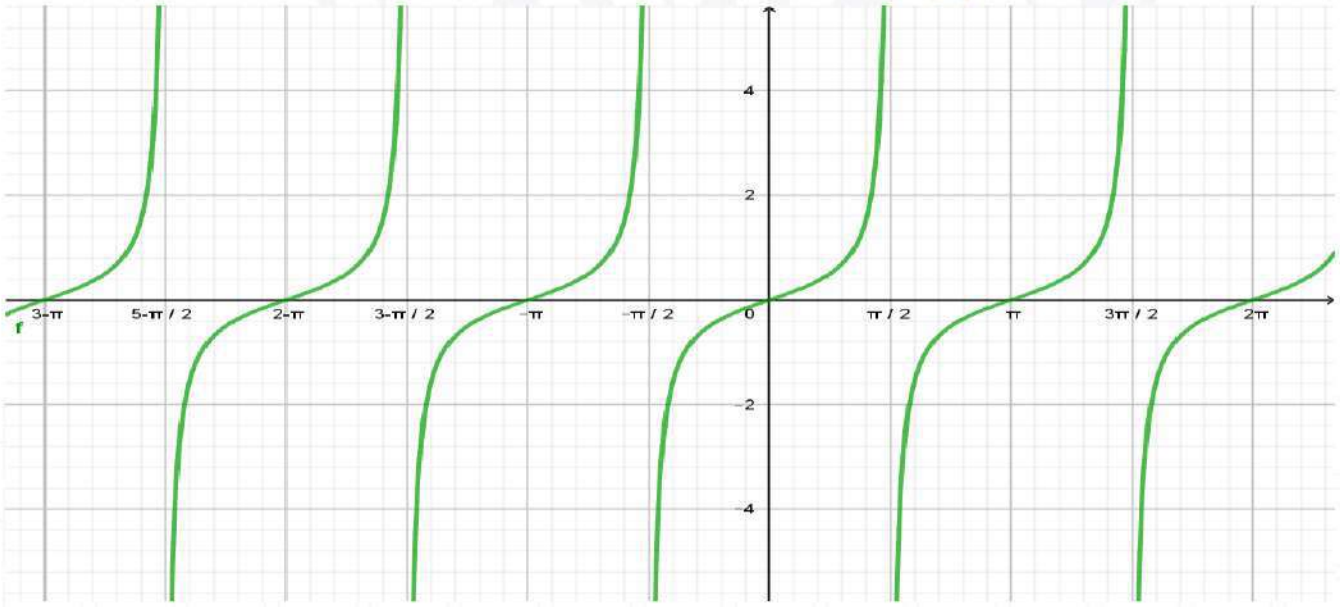
b) $y = \frac{1}{2}\tan x$

x	$\frac{-\pi}{2}$	$\frac{-\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
y	غير معرف	$\frac{-1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	غير معرف

الدورة $= \frac{\pi}{|b|} = \frac{\pi}{|1|} = \pi$

ربع الدورة $= \frac{1}{4} \times \pi = \frac{\pi}{4}$

مدرستي الكويتية
school-kw.com



صف العلاقة بين التمثيل البياني لكل من الدالتين:

$a)\ y_1 = \sin x \qquad b)\ y_2 = \frac{1}{3}\sin x$

سعة الدالة y_2 هي

$|a| = \left|\frac{1}{3}\right| = \frac{1}{3}$

$a < 1$

التمثيل البياني للدالة : $y_2 = \frac{1}{3}\sin x$ هو انكماش رأسي للدالة $y_1 = \sin x$ بمعامل $\frac{1}{3}$

صف العلاقة بين التمثيل البياني لكل من الدالتين:

$a)\ y_1 = cos\, x \qquad b)\ y_2 = \cos\frac{x}{2}$

دورة $y_1 = 2\pi$

دورة $y_1 = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$

يمكن الحصول على بيان y_2 من بيان y_1 بتمدد أفقي بمعامل =4

ارسم دورتين من الدالة $y_2 = \cos\frac{x}{2}$

صف العلاقة بين التمثيل البياني لكل من الدالتين:

$a)\ y_1 = cos\, x \qquad b)\ y_2 = 2\cos\left(-\frac{1}{3}x\right)$

سعة $y_1 = 1$ و سعة $y_2 = 2$

دورة $y_1 = 2\pi$

دورة $y_2 = \frac{2\pi}{\left|-\frac{1}{3}\right|} = 6\pi$

y_2 هي تمديد أفقي لـ y_1 بمعامل $= \frac{1}{|b|} = \frac{1}{\left|-\frac{1}{3}\right|} = 3$

صف العلاقة بين التمثيل البياني لكل من الدالتين:

مدرستي الكويتية
school-kw.com

$a)\ y_1 = \cos x \quad , y_2 = \cos\left(x + \frac{3\pi}{4}\right)$

$$y_2 = \cos\left(x - \left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right)$$

يمكن الحصول على y_2 من y_1 بإزاحة أفقية مقدارها $\frac{3\pi}{4}$ لجهة اليسار

$b)\ y_1 = \sin 3x \quad , y_2 = \sin(3x - 7)$

يمكن الحصول على y_2 من y_1 بإزاحة أفقية مقدارها 7 لجهة اليمين

صف العلاقة بين التمثيل البياني لكل من الدالتين:

$a)\ y_1 = \frac{3}{4}\sin x \qquad b)\ y_2 = \frac{3}{4}\sin x + 2$

يمكن الحصول على y_2 من y_1 بإزاحة رأسية مقدارها 2 نحو الأعلى لأن $k = 2$

وضح كيف يمكن الحصول على التمثيل البياني لكل من الدالتين التاليتين عن طريق التمثيلات البيانية للدوال المثلثية : $\sin x$ و $\cos x$ أوجد أيضا سعة كل دالة ودورتها

$a)\ y = \cos(1 - x) + 2$

$y = 1\cos(-1(x - 1)) + 2$

$a = 1, b = -1, \frac{h}{b} = 1, k = 2$

يمكن الحصول على التمثيل البياني للدالة y من التمثيل البياني للدالة $cosx$ عن طريق اتحويلات التالية :

1- تمديد أفقي بمعامل $\frac{1}{|b|} = \frac{1}{|-1|} = 1$

2- غزاحة أفقية إلى اليمين بمقدار 1

3- تمدد رأسي بمعامل $|a| = 1$

4- إزاحة رأسية إلى أعلى بمقدار $k = 1$

وتكون السعة $|a| = |1| = 1$

دورة الدالة $\frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{|-1|} = 2\pi$

مدرستي الكويتية school-kw.com

$b) 2\sin\left(\frac{x}{3}+\frac{\pi}{4}\right)-1$

$y=2\sin\left(\frac{1}{3}\left(x-\frac{-3\pi}{4}\right)\right)-1$

$a=2\,,b=\frac{1}{3}\quad,\quad \frac{h}{b}=\frac{-3\pi}{4}\,,\quad k=-1$

مدرستي الكويتية
school-kw.com

حل ΔABC حيث $\alpha = 36°, \beta = 48°, a = 8\text{cm}$

مجموع قياسات زوايا المثلث $180°$

$$\gamma = 180° - (36° + 48°) = 96°$$

$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c}$$

$$\frac{\sin 36°}{8} = \frac{\sin 48°}{b} = \frac{\sin 96°}{c}$$

$$b = \frac{8 \times \sin 48°}{\sin 36°} \approx 10.11\text{cm}$$

$$c = \frac{8 \times \sin 96°}{\sin 36°} \approx 13.54\text{cm}$$

حل ΔABC حيث $a = 7\text{cm}, b = 6\text{cm}, \alpha = 26.3°$

$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c}$$

$$\frac{\sin 26.3°}{7} = \frac{\sin\beta}{6}$$

$$\sin\beta = \frac{6\sin 26.3°}{7} \approx 0.3798$$

$$\sin\beta > 0$$

$$\beta_1 = \sin^{-1}(0.3798) \approx 22.3$$

$$\alpha + \beta_1 = 48.6° < 180°$$

$$\gamma_1 = 180° - (26.3° + 22.3°) = 131.4°$$

$$\frac{\sin 26.3°}{7} = \frac{\sin 131.4°}{c}$$

$$c = \frac{7\sin 131.4°}{\sin 26.3°} \approx 11.9\text{cm}$$

$$\beta_2 = 180° - 22.3° = 15$$

$$\alpha + \beta_2 = 184° > 180°$$

مرفوضة

حل ΔABC حيث : $a = 6\text{cm}, b = 7\text{cm}, \alpha = 45°$

$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c}$$

$$\frac{\sin 45°}{6} = \frac{\sin\beta}{7}$$

$$\sin\beta = \frac{7\sin 45°}{6} = \frac{7\sqrt{2}}{12}$$

$$\sin\beta > 0$$

$$\beta_1 = \sin^{-1}\frac{7\sqrt{2}}{12} \approx 55.6°$$

$$\alpha + \beta_1 \approx 100.6° < 180°$$

$$\gamma_1 = 180° - (45° + 55.6°) = 79.4°$$

$$\frac{\sin 45}{6} = \frac{\sin 79.4}{c_1}$$

$$c_1 = \frac{6\sin 79.4°}{\sin 45°} \approx 8.34\text{cm}$$

$$\beta_2 = 180° - 55.6° \approx 124.4°$$

$$\alpha + \beta_2 \approx 169.4° < 180°$$

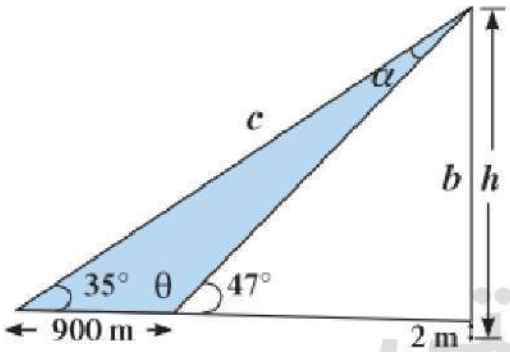
$$\gamma_2 = 180° - (45° + 124.4°) = 10.6°$$

$$\frac{\sin 45°}{6} = \frac{\sin 10.6°}{c_2}$$

$$c_2 = \frac{6\sin 10.6°}{\sin 45°} \approx 1.56\text{cm}$$

لمعرفة ارتفاع جبل , قام طبوغرافي بأخذ قياسين للذروة من نقطتين تبعدان 900m عن بعضهما بعضاً حيث بلغ قياس كل من الزاويتين $15^\circ, 25^\circ$

إذا كان ارتفاع مستوى النظر الأفقي عن سطح الأرض 2m , فما ارتفاع الجبل



$$\theta = 180 - 25 = 155$$

$$\alpha = 180 - (15 + 155) = 10$$

$$\frac{\sin 10}{900} = \frac{\sin 155}{c} \Rightarrow$$

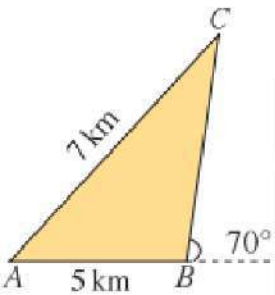
$$c = \frac{900 \sin 155}{\sin 10} = 2190.3$$

$$\sin 15 = \frac{b}{c} \Rightarrow b = 2190.3 \sin 15 = 566.9$$

$$\text{ارتفاع الجبل} = 566.9 + 2 = 568.9\text{m}$$

يمثل الشكل المقابل مسار اليخوت في أحد السباقات انطلاقاً من النقطة A إلى النقطة B ثم إلى النقطة C ثم إلى النقطة A

أوجد مسافة السباق .



مدرستي الكويتية
school-kw.com

$$\beta = 180 - 70 = 110^{\circ}$$

$$\frac{\sin 110}{7} = \frac{\sin \gamma}{5}$$

$$\sin \gamma = \frac{5 \sin 110}{7} = 0.67$$

$$\gamma = 42.16^{\circ}$$

$$\therefore \alpha = 180 - (110 + 42.16) = 27.83$$

$$\frac{\sin 110}{7} = \frac{\sin 27.83}{9}$$

$$a = \frac{7 \sin 27.83}{\sin 110} = 3.5\text{k} \cdot \text{m}$$

مسافة السباق $= 5 + 3.5 + 7 = 15.5\text{k} \cdot \text{m}$

مدرستي الكويتية
school-kw.com

حل ΔABC حيث: $a = 11\text{cm}, b = 5\text{cm}, \gamma = 20^\circ$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$
$$= 11^2 + 5^2 - 2 \times 11 \times 5\cos(20^\circ) \approx 42.63 \Rightarrow c = \sqrt{42.63} \approx 6.53\text{cm}$$
$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{5^2 + (6.53)^2 - 11^2}{2 \times 5 \times 6.53} \approx -0.817 \Rightarrow \alpha = \cos^{-1}(-0.817)$$
$$\approx 144.8^\circ$$
$$\beta = 180^\circ - (20^\circ + 144.8^\circ) \approx 15.2^\circ$$

مجموع قياسات زوايا المثلث: 180°

في ΔABC حيث: $a = 9\text{cm}, b = 7\text{cm}, c = 5\text{cm}$ أوجد قياس الزاوية الأكبر

الزاوية الأكبر هي التي تقابل الضلع الأكبر بالتالي:

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{7^2 + 5^2 - 9^2}{2 \times 7 \times 5} = \frac{-1}{10} \Rightarrow \alpha = \cos^{-1}\left(\frac{-1}{10}\right) \approx 95.7^\circ$$

حل ΔABC حيث: $a = 5\text{cm}, b = 6.5\text{cm}, \alpha = 25^\circ$

$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c}$$
$$\frac{\sin 25^\circ}{5} = \frac{\sin\beta}{6.5}$$
$$\sin\beta = \frac{6.5\sin 25^\circ}{5}$$
$$\approx 0.549$$

$$\beta_1 = \sin^{-1}(0.549) \approx 33.3^\circ$$
$$\alpha + \beta_1 = 58.3^\circ < 180^\circ$$
$$\gamma_1 = 180^\circ - (25^\circ + 33.3^\circ)$$
$$= 121.7^\circ$$
$$\frac{\sin 25^\circ}{5} = \frac{\sin 121.7^\circ}{c_1}$$
$$c_1 = \frac{5\sin 121.7^\circ}{\sin 25^\circ} \approx 10.07\text{cm}$$

$$\beta_2 = 180^\circ - 33.3^\circ \approx 146.7^\circ$$
$$\alpha + \beta_2 = 171.7^\circ < 180^\circ$$
$$\gamma_2 = 180^\circ - (25^\circ + 146.7^\circ)$$
$$= 8.3^\circ$$
$$\frac{\sin 25^\circ}{5} = \frac{\sin 8.3^\circ}{c_2}$$
$$c_2 = \frac{5\sin 8.3^\circ}{\sin 25^\circ} \approx 1.7\text{cm}$$

أوجد مساحة المثلث ABC حيث : $a = 5\text{cm}, b = 6\text{cm}, c = 8\text{cm}$

$$s = \frac{1}{2}(a+b+c) = \frac{1}{2}(5+6+8) = 9.5\text{cm}$$

$$\text{Area } (ABC) = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$= \sqrt{9.5(9.5-5)(9.5-6)(9.5-8)} \approx 14.98\text{cm}^2$$

أوجد مساحة المثلث ABC حيث : $a = 4\text{cm}, b = 4\text{cm}, c = 3\text{cm}$

$$s = \frac{1}{2}(a+b+c) = \frac{1}{2}(4+4+3) = 5.5\text{cm}$$

$$\text{Area } (ABC) = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$= \sqrt{5.5(5.5-4)(5.5-4)(5.5-3)} = \frac{3\sqrt{55}}{4}\text{cm}^2 \approx 5.56\text{cm}^2$$

مدرستي الكويتية
school-kw.com

بسط المقادير التالية :

$$a)\ 3\cos^2\theta + 3\sin^2\theta = 3(\cos^2\theta + \sin^2\theta)$$
$$= 3 \times 1 = 3$$

$$b)\ \cos^2\theta + \tan^2\theta\cos^2\theta =$$
$$= \cos^2\theta(1 + \tan^2\theta)$$
$$= \cos^2\theta \times \sec^2\theta$$
$$= \cos^2\theta \times \frac{1}{\cos^2\theta} = 1$$

بسط التعبير المثلثي التالي :

$$\sec\theta\ \cot\theta = \frac{1}{\cos\theta} \times \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{1}{\sin\theta} = \csc\theta$$

بسط المقادير التالية :

$$a)\ \cos^2 x(1 + \tan^2 x)$$
$$= \cos^2 x \cdot \sec^2 x$$
$$= \cos^2 x \cdot \frac{1}{\cos^2 x} = 1$$

$$b)\ \frac{1 - \cos x}{\sin x} + \frac{\sin x}{1 - \cos x}$$
$$= \frac{(1 - \cos x)(1 - \cos x)}{\sin x(1 - \cos x)} + \frac{\sin x \cdot \sin x}{\sin x \cdot (1 - \cos x)}$$
$$= \frac{(1 - \cos x)^2 + \sin^2 x}{\sin x(1 - \cos x)} = \frac{1 - 2\cos x + \cos^2 x + \sin^2 x}{\sin x(1 - \cos x)}$$
$$= \frac{1 - 2\cos x + 1}{\sin x(1 - \cos x)}$$
$$= \frac{2 - 2\cos x}{\sin x(1 - \cos x)} = \frac{2(1 - \cos x)}{\sin x(1 - \cos x)}$$
$$= \frac{2}{\sin x} = 2\csc x$$

بسط المقدار :

$$\tan x\cot x - \sin^2 x$$

$$= \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{\cos x}{\sin x} - \sin^2 x$$
$$= 1 - \sin^2 x$$
$$= \cos^2 x$$

بسط المقدار التالي :

$$\frac{\sec^2(-\theta) - \tan^2(-\theta)}{\sec(-\theta)}$$
$$= \frac{(\sec\theta)^2 - (-\tan\theta)^2}{\sec\theta}$$
$$= \frac{\sec^2\theta - \tan^2\theta}{\sec\theta}$$
$$= \frac{1}{\sec\theta} = \cos\theta$$

اكتب $\sin^4 x - \sin^2 x$ في صورة ناتج ضرب عوامل

$$\sin^4 x - \sin^2 x$$
$$= \sin^2 x(\sin^2 x - 1)$$
$$= \sin^2 x(\sin x - 1)(\sin x + 1)$$

حلل المقدار : $\sin^2 x - \frac{5}{4}\sin x + \frac{3}{8}$

$$\sin^2 x - \frac{5}{4}\sin x + \frac{3}{8}$$
$$= \left(\sin x - \frac{3}{4}\right)\left(\sin x - \frac{1}{2}\right)$$

مدرستي الكويتية
school-kw.com

أثبت صحة المتطابقة:

$$\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}+\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}=2\csc\theta$$

$$\text{LHS}=\frac{\sin^2\theta+(1+\cos\theta)^2}{(1+\cos\theta)\sin\theta}$$

$$=\frac{\sin^2\theta+1+2\cos\theta+\cos^2\theta}{(1+\cos\theta)\sin\theta}$$

$$=\frac{2+2\cos\theta}{(1+\cos\theta)\sin\theta}=\frac{2(1+\cos\theta)}{(1+\cos\theta)\sin\theta}$$

$$=2\cos\theta=RHS$$

أثبت صحة المتطابقة :

$$\frac{1+\sin x}{1-\sin x}-\frac{1-\sin x}{1+\sin x}=4\tan x\cdot\sec x$$

$$\text{LHS}=\frac{(1+\sin x)^2-(1-\sin x)^2}{(1-\sin x)(1+\sin x)}$$

$$=\frac{(1+2\sin x+\sin^2 x)-(1-2\sin x+\sin^2 x)}{(1)^2-(\sin x)^2}$$

$$=\frac{1+2\sin x+\sin^2 x-1+2\sin x-\sin^2 x}{\cos^2 x}$$

$$=\frac{4\sin x}{\cos x\cos x}=4\tan x\sec x=\text{RHS}$$

أثبت صحة المتطابقة:

$$\frac{1-\cos x}{1+\cos x}=(\csc x-\cot x)^2$$

$$\text{LHS}=\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\times\frac{1-\cos x}{1-\cos x}=\frac{(1-\cos x)^2}{(1)^2-(\cos x)^2}$$

$$=\frac{(1-\cos x)^2}{\sin^2 x}=\left(\frac{1-\cos x}{\sin x}\right)^2$$

$$=\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{\cos x}{\sin x}\right)^2=(\csc x-\cot x)^2=\text{RHS}$$

أثبت أن :

$$\frac{\sec x+\tan x}{\cot x+\cos x}=\sin x+\sin x\tan^2 x$$

$$\text{LHS} = \frac{\sec x + \tan x}{\cot x + \cos x} = \frac{\frac{1}{\cos x} + \frac{\sin x}{\cos x}}{\frac{\cos x}{\sin x} + \frac{\cos x}{1}}$$

$$= \frac{\left(\frac{1 + \sin x}{\cos x}\right)}{\left(\frac{\cos x + \cos x \sin x}{\sin x}\right)}$$

$$= \frac{1 + \sin x}{\cos x} \times \frac{\sin x}{\cos x + \cos x \sin x}$$

$$= \frac{1 + \sin x}{\cos x} \times \frac{\sin x}{\cos x(1 \pm \sin x)} = \frac{\sin x}{\cos^2 x}$$

$$\text{RHS} = \sin x + \sin x \tan^2 x$$

$$= \sin x\,(1 + \tan^2 x)$$

$$= \sin x \sec^2 x = \sin x \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{\sin x}{\cos^2 x}$$

أثبت صحة المتطابقة: $\sin^6 x + \cos^6 x = 1 - 3\sin^2 x \cos^2 x$

إرشاد $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$

مدرستي الكويتية
school-kw.com

$$\sin^6 x + \cos^6 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin^4 x - \sin^2 x \cos^2 x + \cos^4 x).$$

$$= (\sin^4 x - \sin^2 x \cos^2 x + \cos^4 x)$$

$$= (\sin^4 x + 2\sin^2 x \cos^2 x + \cos^4 x) - 2\sin^2 x \cos^2 x - \sin^2 x \cos^2 x$$

$$= (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 3\sin^2 x \cos^2 x$$

$$= 1 - 3\sin^2 x \cos^2 x$$

حل المعادلة : $\sqrt{2}\cos\ x = 1$

بفرض α زاوية الإسناد للزاوية x بالتالي :

$$\cos\ x = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\cos\ \alpha = |\cos\ x| = \left|\frac{1}{\sqrt{2}}\right| = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \alpha = \cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{4}$$

$$\cos\ x > 0 \Rightarrow x \text{ في الربع } 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}$$

$$x \text{ في الربع } 4 \text{ (أو)} \Rightarrow x = 2\pi - \alpha + 2k\pi = 2\pi - \frac{\pi}{4} + 2k\pi = \frac{7\pi}{4} + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}$$

حل المعادلة هو: $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ أو $x = \frac{7\pi}{4} + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}$

حل المعادلة : $5\sin\ \theta - 3 = \sin\ \theta$

$$5\sin\theta - \sin\theta = 3 \Rightarrow 4\sin\theta = 3 \Rightarrow \sin\theta = \frac{3}{4}$$

بفرض α زاوية الإسناد للزاوية θ بالتالي :

$$\sin\alpha = |\sin\theta| = \left|\frac{3}{4}\right| = \frac{3}{4} \Rightarrow \alpha = \sin^{-1}\left(\frac{3}{4}\right) \approx 0.848$$

$$\sin\theta > 0 \Rightarrow \theta \text{ في الربع } 1 \Rightarrow \theta = 0.848 + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}$$

$$\theta \text{ في الربع } 2 \text{ أو } \Rightarrow \theta = \pi - \alpha + 2k\pi = \pi - 0.848 + 2k\pi = 2.294 + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}$$

حل المعادلة هو : $x = 0.848 + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}$ أو $x = 2.294 + 2k\pi$

حل المعادلة : $\tan\ x = 1$

بفرض α زاوية الإسناد للزاوية x بالتالي :

$$\tan\alpha = |\tan x| = |1| = 1 \Rightarrow \alpha = \tan^{-1}(1) = \frac{\pi}{4}$$

بما أن $tan\ x > 0$ بالتالي x تقع في الربع الأول أو في الربع الثالث :

لكن $tan\ x$ دالة دورية دورتها π فيكون $\tan\ (\pi + x) = \tan\ x$ ومنه يكون حل المعادلة

$$x = \frac{\pi}{4} + k\pi\ :\ k \in \mathbb{Z}$$

مدرستي الكويتية school-kw.com

حل المعادلة : $\sin\theta\cos\theta - \cos\theta = 0$

$\cos\theta(\sin\theta - 1) = 0$

$\cos\theta = 0 \Rightarrow$ زاوية ربعية$\theta \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \; \theta = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi : \; k \in \mathbb{Z}$

$\sin\theta - 1 = 0 \Rightarrow \sin\theta = 1 \Rightarrow$ زاوية ربعية$\theta \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \; : \; k \in \mathbb{Z}$

حل المعادلة هو: $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ أو $x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}$

$x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ أو $x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}$

$\theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \; \theta = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi : \; k \in \mathbb{Z}$

$\theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \; \theta = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi : \; k \in \mathbb{Z}$

حل المعادلة : $\cos^2 x + 3\cos x + 2 = 0$

معادلة تربيعية في $\cos x$

$(\cos x + 1)(\cos x + 2) = 0$

$\cos x + 1 = 0$
$\cos x = -1$
زاوية ربعية x
$x = \pi + 2k\pi$
$k \in \mathbb{Z}$

$\cos x + 2 = 0$
$\cos x = -2$
$-1 \leq \cos x \leq 1$
$-2 \notin [-1,1]$
ليس لها حل

حل المعادلة هو: $x = \pi + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}$

حل المعادلة : $4\cos 2x = 2$ حيث $0° \leq x < 360°$

$0° \leq x \leq 360° \Rightarrow 0° \leq 2x \leq 720°$ تقع في دورتين $2x$

$\cos 2x = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

بفرض α زاوية الإسناد للزاوية $2x$ بالتالي :

$\cos\alpha = |\cos 2x| = \left|\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = \cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$

$\cos 2x > 0$

$2x$ تقع في الربع الأول:

$2x = 60° + 360°k$
$x = 30° + 180°k$
$k = 0 \Rightarrow x = 30° \in [0°, 360°)$

$2x$ تقع في الربع الرابع :

$2x = 360° - 60° + 360°k = 300° + 360°k$
$x = 150° + 180°k$
$k = 0 \Rightarrow x = 150° \in [0°, 360°)$

$k = 1 \Rightarrow x = 30° + 180° = 210° \in [0°, 360°)$
$k = 2 \Rightarrow x = 30° + 360° = 390° \notin [0°, 360°)$

$k = 1 \Rightarrow x = 150° + 180° = 330° \in [0°, 360°)$
$k = 2 \Rightarrow x = 150° + 360° = 510° \notin [0°, 360°)$

حل المعادلة $x = 30°, x = 210°, x = 150°, x = 330°$

مدرستي الكويتية
school-kw.com

أثبت أن $\cos\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)=\sin\theta$

$$LHS=\cos\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)$$
$$=\cos\left(-\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right)=\cos\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)=\sin\theta=RHS$$

أثبت أن $\sec\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)=\csc\theta$

$$\text{LHS}=\frac{1}{\cos\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)}$$
$$=\frac{1}{\cos\left(-\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right)}=\frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}==\frac{1}{\sin\theta}$$
$$=\csc\theta=RHS$$

أوجد دون استخدام آلة حاسبة كلاً مما يلي :

$a)\ sin15°=$
$=\sin(45°-30°)$
$=\sin 45°\cos 30°-\cos 45°\sin 30°$
$=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}$
$=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

$b)\ cos75°=$
$=\cos(30°+45°)$
$=\cos 30°\cos 45°-\sin 30°\sin 45°$
$=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$
$=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

$c)\ \tan 105°$
$=\tan(45°+60°)$
$=\frac{\tan 45°+\tan 60°}{1-\tan 45°\times\tan 60°}$
$=\frac{1+\sqrt{3}}{1-(1)(\sqrt{3})}=-2-\sqrt{3}$

أثبت صحة متطابقة جيب تمام ضعف الزاوية : $\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$

$$\begin{aligned} LHS &= \cos 2\theta = \cos(\theta + \theta) \\ &= \cos\theta\cos\theta - \sin\theta\sin\theta \\ &= \cos^2\theta - \sin^2\theta \\ &= 1 - \sin^2\theta - \sin^2\theta \\ &= 1 - 2\sin^2\theta \\ &= RHS \end{aligned}$$

إذا كان $\sin x = \frac{5}{13}$ استخدم متطابقة جيب تمام ضعف الزاوية لإيجاد $\cos 2x$

$$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x = 1 - 2\left(\frac{5}{13}\right)^2 = \frac{119}{169}$$

إذا كان

$\cos\theta = \frac{3}{5}, 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ فأوجد $\sin 2\theta$

الزاوية θ تقع في الربع الأول : $\Rightarrow 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1 \Rightarrow$$

$$\sin\theta = \mp\sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \pm\frac{4}{5}$$

$$\sin\theta > 0 \Rightarrow \sin\theta = +\frac{4}{5}$$

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$$

$$= 2\left(\frac{4}{5}\right)\left(\frac{3}{5}\right) = \frac{24}{25}$$

إذا كان $\tan\theta = \sqrt{3}$ استخدم متطابقة ظل ضعف الزاوية لإيجاد $\tan 2\theta$

$$\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1 - \tan 2\theta}$$

$$= \frac{2(\sqrt{3})}{1 - (\sqrt{3})^2} = -\sqrt{3}$$

أثبت صحة المتطابقة : $2\cos 2\theta = 4\cos^2\theta - 2$

$$2\cos 2\theta = 2(2\cos^2\theta - 1)$$
$$= 4\cos^2\theta - 2$$

أثبت صحة المتطابقة : $\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$

$$\sin 3\theta = \sin(2\theta + \theta) = \sin 2\theta\cos\theta + \cos 2\theta\sin\theta$$
$$= 2\sin\theta\cos\theta\cos\theta + (1 - 2\sin^2\theta)\sin\theta$$
$$= 2\sin\theta\cos^2\theta + \sin\theta - 2\sin^3\theta$$

$$= 2\sin\theta(1 - \sin^2\theta) + \sin\theta - 2\sin^3\theta$$
$$= 2\sin\theta - 2\sin^3\theta + \sin\theta - 2\sin^3\theta$$
$$= 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$$

استخدم متطابقات نصف الزاوية : لإيجاد $\cos 15^\circ$

$$\frac{\alpha}{2} = 15^\circ \Rightarrow \alpha = 30^\circ$$

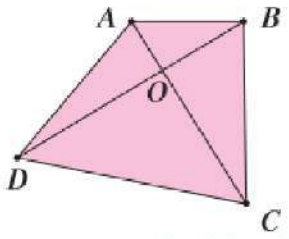
15° في الربع الأول :

$$\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos\alpha}{2}}$$

$$\cos 15^\circ = +\sqrt{\frac{1 + \cos 30^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2 + \sqrt{3}}{4}} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2}$$

مدرستي الكويتية
school-kw.com

في الشكل المقابل $\overline{BD}$, $\overline{AC}$ يتقاطعان في O أثبت أن أضلاع الرباعي $ABCD$ تقع جميعها في مستوٍ واحد



$\overleftrightarrow{AC}, \overleftrightarrow{BD}$ متقاطعان في O يعينان مستوي وحيد وليكن π

$A, B \in \pi \Rightarrow \overline{AB} \subset \pi$

$A, D \in \pi \Rightarrow \overline{AD} \subset \pi$

$D, C \in \pi \Rightarrow \overline{DC} \subset \pi$

$B, C \in \pi \Rightarrow \overline{BC} \subset \pi$

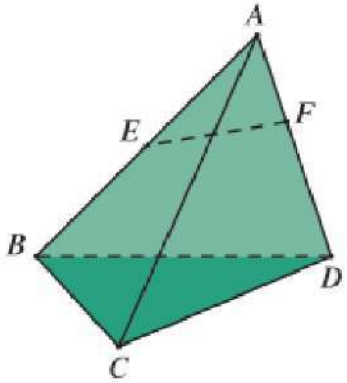
أضلاع الرباعي $ABCD$ جميعها تقع في مستو واحد π

مدرستي الكويتية
school-kw.com

اذا كان $ABCD$ هرم ثلاثي القاعدة

النقطة E تنتمي الى $\overline{AB}$, النقطة F تنتمي الى $\overline{AD}$ ، $\overleftrightarrow{EF}$ لايوازي $\overleftrightarrow{BD}$

أثبت أن : $\overleftrightarrow{EF}$ يقطع (BCD)



$\overleftrightarrow{EF}$, $\overleftrightarrow{BD}$ يقعان في (ABD) وهما غير متوازيين بالتالي هما متقاطعان في نقطة ولتكن M

$M \in \overleftrightarrow{BD}, \overleftrightarrow{BD} \subseteq (BCD) \Rightarrow M \in (BCD)$

$\overleftrightarrow{EF}$ يقطع (BCD) في النقطة M

ثلاثة مستقيمات مختلفة تتقاطع في A , المستقيم t يقطع المستقيمات الثلاثة في B, C, D على الترتيب أثبت أن المستقيمات l, m, n, t تقع في مستوٍ واحد $\vec{l}, \vec{m}, \vec{n}$

$\vec{l}, \vec{m}$ متقاطعان في A يشكلان مستو π

$$\left.\begin{array}{ll} B \in \vec{l} & \vec{l} \subseteq \pi \Rightarrow B \in \pi \\ C \in \vec{m} & \vec{m} \subseteq \pi \Rightarrow C \in \pi \end{array}\right\} \Rightarrow \overleftrightarrow{BC} = \vec{t} \subseteq \pi$$

$$\left.\begin{array}{ll} A \in \vec{l} & \vec{l} \subseteq \pi \Rightarrow A \in \pi \\ D \in \vec{t} & \vec{t} \subseteq \pi \Rightarrow D \in \pi \end{array}\right\} \Rightarrow \overleftrightarrow{AD} = \vec{n} \subseteq \pi$$

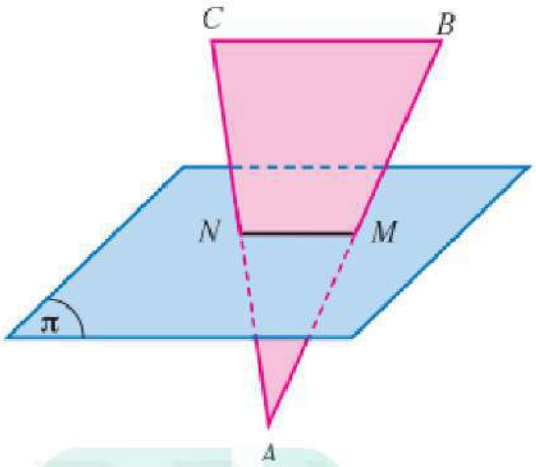
المستقيمات l, m, n, t تقع في π

مدرستي الكويتية
school-kw.com

في الشكل المقابل : المثلث ABC فيه M منتصف $\overline{AB}$ و N منتصف $\overline{AC}$

M, N تنتميان إلى المستوي π

أثبت أن $\overleftrightarrow{BC}//\pi$



M منتصف $\overline{AB}$ و N منتصف $\overline{AC}$ $\leftarrow \overleftrightarrow{MN}//\overleftrightarrow{BC}$ (1)

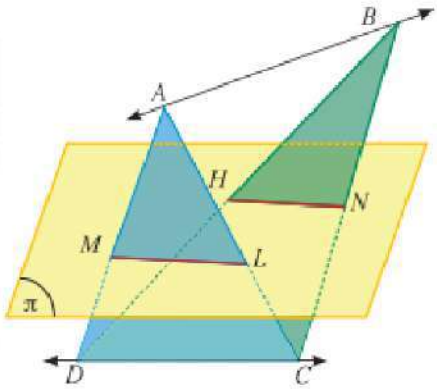
N, M تنتميان إلى المستوي $\pi \supset \overleftrightarrow{MN}$ $\leftarrow$ (2)

من (1)و (2) وحسب النظرية 1نجد أن $\overleftrightarrow{BC}//\pi$

في الشكل المقابل: إذا كان $\overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{CD}$ متخالفان $\overleftrightarrow{CD}//\pi$ و $\overleftrightarrow{AD}$ تقطع π في M

و $\overleftrightarrow{AC}$ تقطع π في L و $\overleftrightarrow{BD}$ تقطع π في H و $\overleftrightarrow{BC}$ تقطع π في N

إذا كان $\overleftrightarrow{AB}//\pi$ فأثبت أن $LMHN$ متوازي أضلاع



$\overleftrightarrow{BC}, \overleftrightarrow{AC}$ متقاطعان بالتالي يعينان مستوي وحيد (ABC)

$\overleftrightarrow{AC} \cap \pi = \{L\}, \overleftrightarrow{BC} \cap \pi = \{N\} \Rightarrow (ABC) \cap \pi = \overleftrightarrow{LN}$

$\overleftrightarrow{AB}//\pi, \overleftrightarrow{AB} \subset (ABC), \pi \cap (ABC) = \overleftrightarrow{LN} \Rightarrow \overleftrightarrow{AB}//\overleftrightarrow{LN} \rightarrow$ (3) نظرية

$\overleftrightarrow{AD}, \overleftrightarrow{BD}$ متقاطعان بالتالي يعينان مستوي وحيد (ABD)

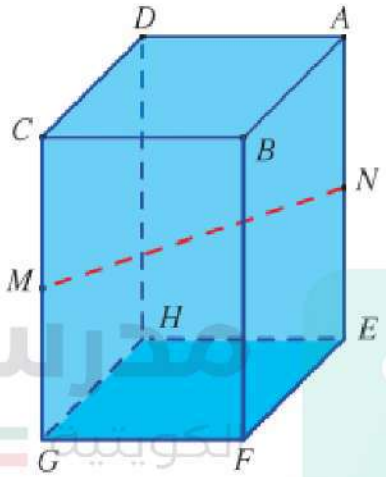
$\overleftrightarrow{AD} \cap \pi = \{M\}, \overleftrightarrow{BD} \cap \pi = \{H\} \Rightarrow (ABD) \cap \pi = \overleftrightarrow{MH}$

$\overleftrightarrow{AB}//\pi, \overleftrightarrow{AB} \subset (ABD), \pi \cap (ABD) = \overleftrightarrow{MH} \Rightarrow \overleftrightarrow{AB}//\overleftrightarrow{MH} \rightarrow$ (4)

من (3),(4) نستنتج $\overleftrightarrow{MH}//\overleftrightarrow{LN}$ نظرية

متوازي أضلاع $\overleftrightarrow{ML}//\overleftrightarrow{NH}, \overleftrightarrow{LN}//\overleftrightarrow{MH} \Rightarrow LMHN$

$ABCDEFGH$ شبه مكعب M منتصف $\overline{CG}$ و N منتصف $\overline{AE}$



أثبت أن $(EFGH)$ يوازي $\overleftrightarrow{MN}$

نرسم $\overline{GE}$ من خواص شبه المكعب ، الضلعان $\overline{CG}, \overline{AE}$ متوازيان ومتساويان بالطول

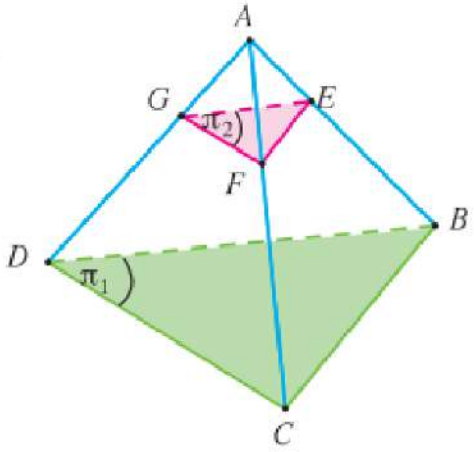
M منتصف $\overline{CG}$ و N منتصف $\overline{AE}$

متوازي أضلاع $MNEG \Rightarrow$

$\overline{MN}//\overline{GE}, \overline{GE} \subset (EFGH) \Rightarrow \overline{MN}//(EFGH)$ نظرية (1)

في الشكل المقابل : $ABCD$ هرم ثلاثي : المستويان π_1, π_2 متوازيان

إذا كان $FG = 6\text{cm}, \frac{AE}{EB} = \frac{1}{3}$ فأوجد DC .



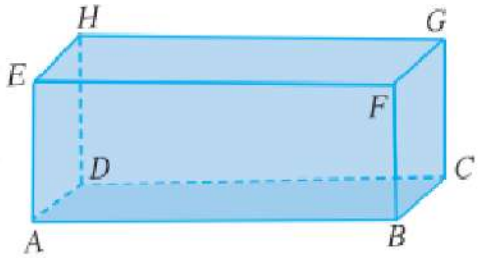
$\pi_1 // \pi_2$
$(ACD) \cap \pi_1 = \overleftrightarrow{CD}$
$(ACD) \cap \pi_2 = \overleftrightarrow{GF}$
$\Rightarrow \overleftrightarrow{GF} // \overleftrightarrow{CD}$ نظرية
$\triangle AGF \sim \triangle ADC \Rightarrow$
$\frac{AG}{AD} = \frac{GF}{DC} = \frac{AF}{AC}$

$\pi_1 // \pi_2$
$(ABC) \cap \pi_1 = \overleftrightarrow{BC}$
$(ABC) \cap \pi_2 = \overleftrightarrow{EF}$
$\Rightarrow \overleftrightarrow{BC} // \overleftrightarrow{EF}$ نظرية
$\triangle AFE \sim \triangle ACB \Rightarrow$
$\frac{AF}{AC} = \frac{FE}{CB} = \frac{AE}{AB}$

$$\Rightarrow \frac{GF}{DC} = \frac{AE}{AB} \Rightarrow \frac{6}{DC} = \frac{1}{4} \Rightarrow DC = 24\text{cm}$$

مدرستي
school-kw.com

في شبه المكعب المقابل: أثبت أن المثلث BEH قائم في $\hat{E}$



حسب خواص شبه المكعب نجد أن : $\overleftrightarrow{HE} \perp \overleftrightarrow{EA}, \overleftrightarrow{HE} \perp \overleftrightarrow{EF}$

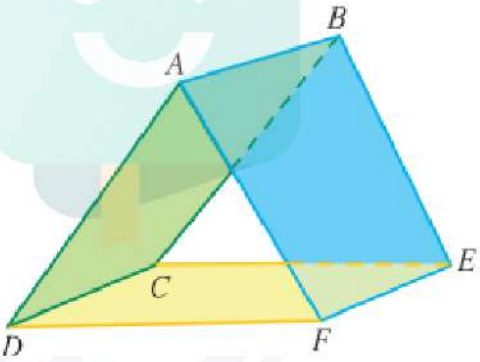
بالتالي حسب النظرية 5 نجد أن : $\overleftrightarrow{HE} \perp (ABFE)$

$\overleftrightarrow{HE} \perp \overleftrightarrow{EB}, \overleftrightarrow{EB} \subset (ABFE), \overleftrightarrow{HE} \perp (ABFE)$

المثلث BEF قائم في $\hat{E}$

في الشكل المقابل: $ABEF, ABCD$ مستطيلان

أثبت أن (AFD) و (BEC) متوازيان



حسب خواص المستطيل نجد أن : $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{AD}, \overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{AF}$

$\overleftrightarrow{AD}, \overleftrightarrow{AF}$ متقاطعان ، بالتالي حسب النظرية 5 نجد أن :

$\overleftrightarrow{AB} \perp (AFD) \rightarrow (1)$

حسب خواص المستطيل نجد أن : $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{BC}, \overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{BE}$

$\overleftrightarrow{BE}, \overleftrightarrow{BC}$ متقاطعان ، بالتالي حسب النظرية 5 نجد أن :

$\overleftrightarrow{AB} \perp (BEC) \rightarrow (2)$

من (1),(2) وحسب النظرية 6 نجد أن $(AFD)//(BEC)$

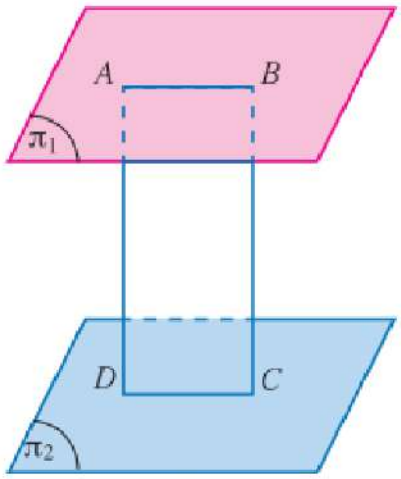
في الشكل المقابل $\pi_1//\pi_2$

مدرستي الكويتية school-kw.com

A, B نقطتان في π_1 ,

C, D نقطتان في π_2 حيث A, B, C, D في مستوي واحد $\overline{AD} \perp \pi_2, \overline{BC} \perp \pi_2$

أثبت أن $ABCD$ مستطيل



نظرية (1) $\overrightarrow{AD} \perp \pi_2, \overrightarrow{BC} \perp \pi_2 \Rightarrow \overrightarrow{AD} // \overrightarrow{BC} \rightarrow$

النقاط A, B, C, D في مستوي واحد $(ABCD)$ معطى

$$\left.\begin{array}{l} \pi_1 \cap (ABCD) = \overrightarrow{AB} \\ \pi_2 \cap (ABCD) = \overrightarrow{DC} \\ \pi_1 // \pi_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{AB} // \overrightarrow{DC} \rightarrow (2)$$

من (1)و (2) نجد أن الشكل $ABCD$ متوازي أضلاع

نظرية $\overrightarrow{AD} \perp \pi_2, \overrightarrow{DC} \subset \pi_2 \Rightarrow \overrightarrow{AD} \perp \overrightarrow{DC}$

بالتالي الشكل $ABCD$ مستطيل لأنه متوازي أضلاع إحدى زواياه قائمة

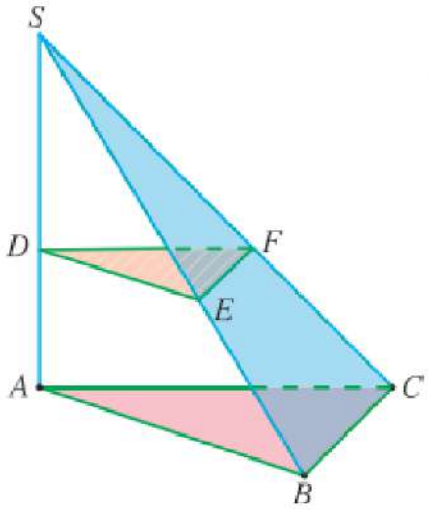
في الشكل المقابل :

المستويان $(ABC), (DEF)$ متوازيان $\overrightarrow{SA} \perp (ABC)$

إذا كان $SE = 5\text{cm}, SD = 3\text{cm}, DA = 2\text{cm}, BC = 5\text{cm}, AC = 6\text{cm}$

فأوجد محيط المثلث: DEF

مدرستي
school-kw.com



بفرض $(ABC)=\pi_2,(DEF)=\pi_1$

نظرية $\overleftrightarrow{SA}\perp\pi_2,\pi_1//\pi_2\Rightarrow\overleftrightarrow{SA}\perp\pi_1$

$\overline{\mathrm{DE}}\subset\pi_1\Rightarrow\overline{\mathrm{SD}}\perp\overline{\mathrm{DE}}$

المثلث SDE قائم في الزاوية D بالتالي حسب نظرية فيثاغورث نجد أن

$$DE=\sqrt{5^2-3^2}=4\text{cm}$$

مدرستي الكويتية
school-kw.com

$$\triangle SDF\sim\triangle SAC\Leftarrow 4\text{ نظرية }\overline{\mathrm{DF}}//\overline{\mathrm{AC}}\Leftarrow\begin{cases}(SAC)\cap\pi_1=\overline{\mathrm{DF}}\\(SAC)\cap\pi_1=\overline{\mathrm{AC}}\\\pi_1//\pi_2\end{cases}$$

من التشابه نجد أن

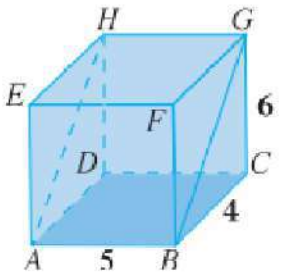
$$\frac{SD}{SA}=\frac{DF}{AC}=\frac{SF}{SC}\Rightarrow\frac{3}{5}=\frac{DF}{6}\Rightarrow 5.DF=18\Rightarrow DF=3.6\text{cm}$$

بالمثل نجد أن $\overline{\mathrm{BC}}//\overline{\mathrm{EF}}$ بالتالي المثلث SEC يشابه المثلث SBC بالتالي:

$$\frac{SE}{SB}=\frac{EF}{BC}=\frac{SF}{SC}\Rightarrow\frac{EF}{5}=\frac{3}{5}\Rightarrow 5EF=15\Rightarrow EF=3\text{cm}$$

ومنه نجد أن محيط المثلث DEF يساوي: $4+3.6+3=10.6\text{cm}$

في شبه المكعب المقابل ، أثبت أن الزاوية GBC هي الزاوية المستوية للزاوية الزوجية للمستويين $(ABCD), (ABGH)$ ، ثم أوجد قياسها



حافة الزاوية الزوجية $\overleftrightarrow{AB}$

من خواص شبه المكعب لدينا: $\overline{AB} \perp \overline{BC}$ حيث $\overline{BC} \subset (ABCD)$ (1)

من خواص شبه المكعب لدينا $\overline{AB} \perp \overline{BF}, \overline{AB} \perp \overline{BC}$

بالتالي حسب النظرية 5 نجد أن $\overline{AB} \perp (BCGF)$

وبما أن $\overline{BG} \subset (BCGF)$ إذا $\overline{AB} \perp \overline{BG}$ حيث $\overline{BG} \subset (ABGH)$ (2)

من (1) و (2) نجد أن الزاوية $C\hat{B}G$ هي الزاوية المستوية للزاوية الزوجية المطلوبة

من المثلث القائم GBC في الزاوية C نجد أن :

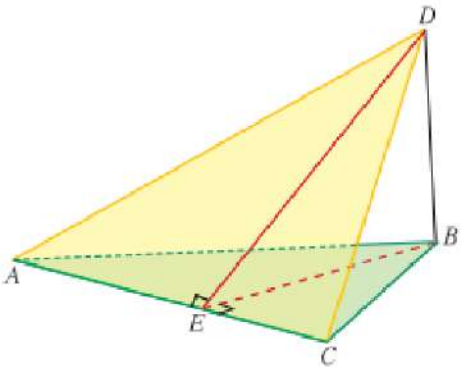
$$\tan\theta = \frac{6}{4} \Rightarrow \theta = \tan^{-1}\left(\frac{6}{4}\right) \simeq 56.3^{\circ}$$

في الشكل المقابل D نقطة من خارج مستوي المثلث ABC ،

$$DB = 5cm, AB = 10cm, m(\widehat{BAC}) = \frac{\pi}{6}$$

$$\overline{BE} \perp \overline{AC}, \overline{DE} \perp \overline{AC}, \overline{DB} \perp (ABC)$$

أوجد قياس الزاوية الموجهة بين المستويين (BAC)،(DAC) إذا كان $m(\widehat{BAC}) = 45^{\circ}$



من المثلث BEA القائم في E

$$\sin 45^\circ = \frac{BE}{10} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow 2(BE) = 10\sqrt{2} \Rightarrow BE = 5\sqrt{2}$$

حافة الزاوية الزوجية $\overleftrightarrow{AC}$

معطى $\overleftrightarrow{EB} \perp \overleftrightarrow{AC}, \overleftrightarrow{EB} \subset (ABC)$

معطى $\overleftrightarrow{DE} \perp \overleftrightarrow{AC}, \overleftrightarrow{DE} \subset (ACD)$

إذاً $\widehat{DEB}$ هي الزاوية المستوية للزاوية الزوجية المطلوبة

$\overleftrightarrow{DB} \perp (ABC), \overleftrightarrow{EB} \subset (ABC), \overleftrightarrow{DB} \perp \overleftrightarrow{EB}$

إذاً المثلث BED قائم في B بالتالي :

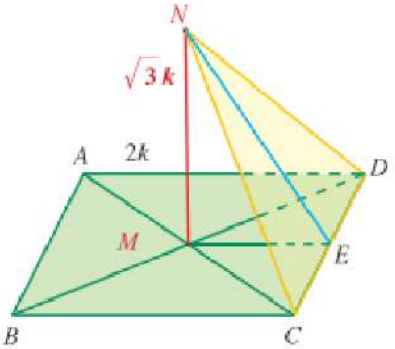
$$\tan\theta = \frac{5}{5\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \theta = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \simeq 35.26^\circ$$

قياس الزاوية الزوجية بين المستويين $\simeq 35.26^\circ$

ABCD مستطيل تقاطع قطراه في M وفيه $AD = 2k$

أقيم $\overline{MN}$ عمودا على $(ABCD)$ حيث N خارج مستواه بحيث $MN = \sqrt{3}k$

إذا كان $AB = 6K$ فأوجد قياس الزاوية الموجهة بين المستويين $ABCD, NBC$



مدرستي الكويتية
schools-k.com

نرسم $\overline{ME}$ حيث E منتصف $\overline{CD}$

حافة الزاوية الزوجية هي $\overline{CD}$

$$\overline{NM} \perp (ABCD), \overline{CD} \subset (ABCD) \Rightarrow \overline{NM} \perp \overline{CD} \rightarrow (1)$$

من خواص المستطيل نجد أن المثلث CMD متطابق الضلعين فيه E منتصف $\overline{CD}$ بالتالي :

$$\overline{ME} \perp \overline{CD} \text{ حيث } \overline{ME} \subset (ABCD) \leftarrow (2)$$

وبما أن $\overline{NM}$ و $\overline{ME}$ متقاطعان بالتالي يكون $\overline{CD} \perp (MNE)$

وبما أن $\overline{NE} \subset (\mathrm{N}CD)$ بالتالي: $\overline{NE} \perp \overline{CD} \leftarrow (2)$

من (1),(2) نجد أن $\widehat{NEM}$ هي الزاوية المستوية للزاوية الزوجية $\overleftrightarrow{CD}$

من خواص المستطيل نجد أن $ME = 1/2AD = 1/2 \times 2k = k$

من المثلث NEM القائم في M نجد :

$$\tan\theta = \frac{\sqrt{3}k}{1k} = \sqrt{3} \Rightarrow \theta = \tan^{-1}(\sqrt{3}) = 60^\circ$$

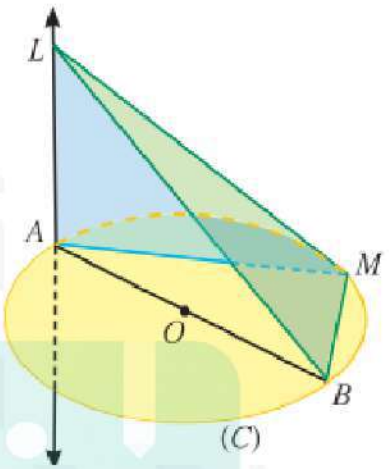
قياس الزاوية الزوجية بين المستويين $ABCD, NCD = 60^\circ$

مدرستي الكويتية
school-kw.com

في الشكل المقابل C دائرة مركزها O ، $\overline{AB}$ قطر M نقطة تنتمي إلى الدائرة $\overleftrightarrow{LA}$ متعامد مع مستوي الدائرة .

$a)$ أثبت أن $\overleftrightarrow{\mathrm{BM}} \perp (LAM)$

$b)$ $(LBM) \perp (LAM)$



$\overleftrightarrow{LA}$ متعامد مع مستوي الدائرة, $\overline{\mathrm{BM}}$ محتوى في مستوي الدائرة

(1) $\overleftrightarrow{LA} \perp \overline{\mathrm{BM}}$

الزاوية $A\widehat{M}B$ محيطية تقابل قوس نصف الدائرة

(2) $\overline{\mathrm{AM}} \perp \overline{\mathrm{BM}}$

من (1) و (2) وحسب النظرية 5 نجد أن $\overline{\mathrm{BM}} \perp (LAM)$

نظرية(10) $\overline{\mathrm{BM}} \perp (LAM), \overline{\mathrm{BM}} \subset (LBM) \Rightarrow (LAM) \perp (LBM)$

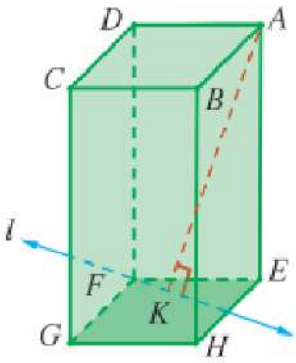
في شبه المكعب $ABCDEFGH$ المقابل :

$\overleftrightarrow{l}$ مستقيم في $(EFGH)$ يمر في F $\overline{AK} \perp \overleftrightarrow{l}$

أثبت أن : $a)$ $\overline{EK} \perp \overleftrightarrow{l}$

$b)$ $(FDK) \perp (AEK)$

مدرستي الكويتية
school-kw.com



(1) $\overline{AK} \perp \overleftrightarrow{l}$

من خواص شبه المكعب لدينا $\overline{AE} \perp (EFGH)$

(2) $\overline{AE} \perp (EFGH), \overleftrightarrow{l} \subset (EFGH) \Rightarrow \overline{AE} \perp \overleftrightarrow{l} \rightarrow$

من (1) و (2) وحسب النظرية 5 نجد أن $\overleftrightarrow{l} \perp (AEK)$

$\overleftrightarrow{l} \perp (AEK), \overleftrightarrow{EK} \subset (AEK) \Rightarrow \overleftrightarrow{l} \perp \overline{EK}$

نظرية10 $\overleftrightarrow{l} \perp (AEK), \overleftrightarrow{l} \subset (FDK) \Rightarrow (AEK) \perp (FDK)$

مدرستي الكويتية
school-kw.com

لتكن $A = \{1,2,4,5,6\}$ يراد تكوين أعداد ذات ثلاثة منازل باستخدام عناصر A

أوجد :

$a)$ عدد الأعداد الفردية الممكن تكوينها

$5 \times 5 \times 2 = 50$

$b)$ عدد الأعداد الزوجية الممكن تكوينها

$5 \times 5 \times 3 = 75$

$c)$ عدد الأعداد الزوجية المختلفة الأرقام الممكن تكوينه

$3 \times 4 \times 3 = 36$

لتكن $B = \{0,3,4,5,7,9\}$

تم تكوين اعداد ذات أربعة منازل باستخدام عناصر B

أوجد:

$a)$عدد الأعداد مختلفة الأرقام الممكن تكوينها

$5 \times 5 \times 4 \times 3 = 300$

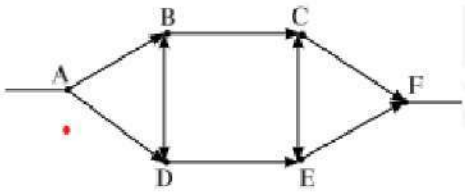
$b)$ عدد الأعداد التي تقبل القسمة على 10 الممكن تكوينها

$5 \times 6 \times 6 \times 1 = 180$

$c)$ عدد الأعداد مختلفة الأرقام والأكبر من 5000 الممكن تكوينها

$3 \times 5 \times 4 \times 3 = 180$

بكم طريقة مختلفة يمكن الانتقال من المحطة A إلى المحطة F باتباع (الأسهم) مروراً بخمس محطات فقط ؟



$ADBCF$,$ABDEF$, $ABCEF$, $ADCEF$

يوجد 4 طرق

ماعدد الطرائق المختلفة لوصول اليخوت الثلاثة الأوائل إذا اشترك في السباق 10 يخوت؟

$$_{10}P_3 = \frac{10!}{(10-3)!} = 10 \times 9 \times 8 = 720$$

حل المعادلات التالية :

$a)\ {}_nP_7 = 12 \times {}_nP_5$

$$n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)$$
$$= 12n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)$$
$$n \geq 5, n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4) \neq 0$$

نبحث عن عددين كليين متتاليين حاصل ضربهما يساوي 12 العددان هما 3,4 بالتالي:

$$(n-5)(n-6) = 12 = 4 \times 3$$
$$n - 5 = 4 \Rightarrow n = 4 + 5 = 9$$

b) $${}_8P_r = 4 \times {}_8P_{r-1}$$
$$\frac{8!}{(8-r)!} = 4 \times \frac{8.}{(8-(r-1))!}$$
$$\frac{1}{(8-r)!} = \frac{4}{(8-r+1)!}$$
$$\frac{1}{(8-r)!} = \frac{4}{(9-r)!}$$
$$\frac{1}{(8-r)!} = \frac{4}{(9-r)(8-r)!} : \mathbf{(8-r)! \neq 0}$$
$$\frac{1}{1} = \frac{4}{9-r} \Rightarrow 9 - r = 4 \Rightarrow r = 5$$

في مكتبة المدرسة 15 كتاباً مختلفاً من مجموعة روايات التاريخ الإسلامي

بكم طريقة مختلفة يمكنك اختيار 7 كتب ؟

$${}_{15}C_7 = \frac{15!}{7!\,(15-7)!} = 6435$$

بكم طريقة مختلفة يمكنك اختيار 8 كتب ؟

$${}_{15}C_8 = \frac{15!}{8!\,(15-8)!} = 6435$$

ماذا تلاحظ؟

$${}_{15}C_7 = {}_{15}C_8$$

ترشح 10 طلاب لتمثيل القسم العلمي من مدرستك يجري اختبار الممثلين الثلاثة

بالاقتراع السري بكم طريقة مختلفة يمكنك الاقتراع لـ 5 طلاب أو أقل ؟

$${}_{10}C_5 + {}_{10}C_4 + {}_{10}C_3 + {}_{10}C_2 + {}_{10}C_1 + {}_{10}C_0 = 638$$

في الصف الحادي عشر 28 طالباً وفي الصف الثاني عشر 24 طالباً

أراد معلم الرياضة اختيار 5 طلاب لتشكيل فريق لكرة السلة،ماعدد الخيارات الممكنة شرط أن يتضمن الفريق على الأقل لاعبين من الصف الثاني عشر؟

مدرستي
school-kw.com

$$_{24}C_2 \times_{28} C_3 +_{24}C_3 \times_{28} C_2 +_{24}C_4 \times_{28} C_1 +_{24}C_5 \times_{28} C_0$$
$$= 904176 + 765072 + 297528 + 42504 + 2009280$$

يتكون فريق كرة القدم في المدرسة من 18 لاعباً يريد المدرب تشكيل فريق من 11 لاعباً :

$a)$ أوجد عدد الفرق المختلفة الممكن تكوينها

$$_{18}C_{11} = 31824$$

$b)$ أوجد عدد الفرق المختلفة الممكن تكوينها إذا أراد المدرب أن يتضمن الفريق اللاعب عبد العزيز $_{17}C_{10} = 19448$

$c)$ أوجد عدد الفرق المختلفة الممكن تكوينها إذا استثنى المدرب اللاعب عبد العزيز من تشكيلة الفريق بطريقتين مختلفتين طريقة أولى : $_{17}C_{11} = 12376$

طريقة ثانية: $_{18}C_{11} -_{17}C_{10} = 31824 - 19448 = 12376$

أوجد قيمة n في كل مما يلي :

$a)$ $_nC_2 = 105$

$$\frac{n(n-1)}{2!} = 105 \Rightarrow \frac{n(n-1)}{2} = \frac{105}{1}$$
$$n(n-1) = 210$$
$$n^2 - n - 210 = 0, (n+14)(n-15) = 0 \Rightarrow n = -14 \text{ (مرفوض)}, n = 15$$

b) $_nC_4 = {}_nC_5$

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{5!}$$
$$: n(n-1)(n-2)(n-3) \neq 0$$
$$\frac{1}{4!} = \frac{(n-4)}{5 \times 4!} \Rightarrow n - 4 = 5 \Rightarrow n = 9$$

مدرستي الكويتية
schools-kw.com

استخدم نظرية ذي الحدين لفك كل مما يلي :

$a)(a-b)^4$

$= {}_4C_0a^4 + {}_4C_1a^3(-b) + {}_4C_2a^2(-b)^2 + {}_4C_3a(-b)^3 + {}_4C_4(-b)^4$

$= 1a^4 + (-4)a^3b + 6a^2b^2 + (-4)ab^3 + 1b^4$

$= a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4$

$b)(d+2)^7$

$= {}_7C_0d^7 + {}_7C_1d^6 2 + {}_7C_2d^5 2^2 + {}_7C_3d^4 2^3 + {}_7C_4d^3 2^4 + {}_7C_5d^2 2^5$
$+ {}_7C_6d2^6 + {}_7C_7 2^7$

$= d^7 + 7d^6 2 + 21d^5 2^2 + 35d^4 2^3 + 35d^3 2^4 + 21d^2 2^5 + 7d2^6 + 2^7$

$= d^7 + 14d^6 + 84d^5 + 280d^4 + 560d^3 + 672d^2 + 448d + 128$

$c)(2x-y^2)^5$

$= {}_5C_0(2x)^5 + {}_5C_1(2x)^4(-y^2) + {}_5C_2(2x)^3(-y^2)^2 + {}_5C_3(2x)^2(-y^2)^3 + {}_5C_4(2x)(-y^2)^4$
$+ {}_5C_5(-y^2)^5$

$= 1 \times 2^5x^5 + 5 \times 2^4x^4(-1)y^2 + 10 \times 2^3x^3(-1)^2y^4 + 10 \times 2^2 \cdot x^2(-1)^3y^6 + 5 \times 2x(-1)^4$
$+1(-1)^5y^{10}$

$= 32x^5 - 80x^4y^2 + 80x^3y^4 - 40x^2y^6 + 10xy^8 - y^{10}$

في مفكوك : $(3x^2-y)^{15}$ أوجد معامل T_{12}

$r+1 = 12 \Rightarrow r = 11$

$n = 15, A = 3x^2, B = -y$

$T_{r+1} = {}_nC_rA^{n-r}B^r$

$T_{12} = {}_{15}C_{11}(3x^2)^{15-11}(-y)^{11}$

$= \frac{15!}{11!\,(15-11)!}(3)^4x^8(-1)^{11}y^{11}$

$= 1365(3)^4 \cdot x^8(-1)^{11}y^{11}$

$= -110565x^8y^{11}$

معامل $T_{12} = -110565$

أوجد الحد الذي يحتوي x^2y^3 في مفكوك $(3x-y)^5$

$n = 5, A = 3x, B = -y, r = ?$

$T_{r+1} = {}_nC_rA^{n-r}B^r$

$T_{r+1} = {}_5C_r(3x)^{5-r}(-y)^r \Rightarrow r = 3$

$T_4 = {}_5C_3(3x)^{5-3}(-y)^3$

$= \frac{5!}{3!\,(5-3)!} \cdot 3^2 \cdot x^2(-1)^3y^3$

$= 10 \cdot 3^2 \cdot x^2(-1)^3y^3$

$= -90x^2y^3$

في أحد المخيمات الصيفية يشارك الطالب في مجموعة من الأنشطة وهي : كرة القدم ، كرة المضرب ، الكرة الطائرة ، السباحة وركوب الدراجات

- اكتب وحدد نوع كل من الإحداثيات التالية :

a) (1) A: المشاركة في كرة المضرب فقط

(2) B: المشاركة في الأنشطة التي تستخدم فيها كرة كبيرة

(3) C: المشاركة في الأنشطة التي لا تستخدم فيها الكرة

b) (1): بين قيما إذا كان الحدثان B, C متنافيان أم لا

(2) : أعط مثالاً عن حدثين متنافيين

a) $s = \{$الدراجات،السباحة،الطائرة،المضرب،السلة ،القدم$\}$

حدث بسيط: $A = \{$المضرب$\}$

حدث مركب: $B = \{$الطائرة،السلة،القدم$\}$

حدث مركب : $C = \{$الدراجات،السباحة$\}$

مدرستي الكويتية
school-kw.com

b) (1): بين قيما إذا كان الحدثان B, C متنافيان أم لا

$B \cap C = \emptyset$

$B \cup C =$ {الدراجات , السباحة, الطائرة, المضرب, السلة, القدم} $\neq S$

B, C غير متناقيين

(2) : أعط مثالاً عن حدثين متنافيين

B, C متناقيين , $B \cap C = \emptyset$

يبين الجدول المقابل وسيلة النقل التي يستخدمها طلاب الصف الحادي عشر بشعبتيه للمجيء إلى المدرسة

اختبر طالب عشوائياً من بين طلاب شعبتي الصف الحادي عشر

ما احتمال أن يكون هذا الطالب من الذين يقلونهم أهلهم إلى المدرسة ؟

ما احتمال أن يكون هذا الطالب من الشعبة B ؟

وسيلة النقل	الشعبة A	الشعبة B	المجموع
الحافلة المدرسية	16	15	31
مع الأهل	6	8	14
سيارة نقل عام	2	5	7
المجموع	24	28	52

احتمال أن يكون هذا الطالب من الذين يقلونهم أهلهم إلى المدرسة

$$\frac{14}{52}=\frac{7}{26}$$

احتمال أن يكون هذا الطالب من الشعبة B

$$\frac{28}{52}=\frac{7}{13}$$

حصل الطلاب : مصطفى ، محمد ، طه ، أحمد ، أمين على الدرجة النهائية العظمى في اختبار الر ياضيات وأراد مدير المدرسة اختبار 3 منهم لتمثيل المدرسة في مسابقة ثقافية اعتذر طه عن المشاركة ، فما احتمال اختيار محمد ؟

عندما يعتذر طه يكون الاختيار من 4 فقط $n(s) = {}_4C_3 = 4$

يكون اختيار محمد بطريقة واحدة ${}_1C_1 = 1$

واختيار الطالبين بثلاثة طرق ${}_3C_2 = 1$

عدد النواتج : ${}_1C_1 \times {}_3C_2 = 3 \times 1 = 1$

احتمال اختيار محمد $P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{3}{4}$

يتصل المستمعون بإحدى الإذاعات ، لتسمية أغنيتهم المفضلة تختار إدارة الإذاعة كل ساعة 4 مستمعين وتبث أغانيهم اتصلت مرتين الأولى بعد الثامنة صباحاً والثانية بعد الثالثة بعد الظهر الجدول المقابل يبين عدد المتصلين

مدرستي الكويتية
school-kw.com

الساعة	عدد المتصلين
الثامنة صباحًا	125
الثالثة بعد الظهر	200

إذا اختارت إدارة الإذاعة 5 متصلين كل ساعة

فما احتمال أن تبث أغنيتيك المفضلتين ؟

الحدث A تم اختيارك من بين متصلي الساعة الثامنة

الحدث B تم اختيارك من بين متصلي الساعة الثالثة

$$P(A) = \frac{{}_1C_1 X_{124}C_4}{{}_{125}C_5} = \frac{1}{25}$$

$$P(B) = \frac{{}_1C_1 \times {}_{199}C_4}{{}_{200}C_5} = \frac{1}{40}$$

A,B مستقلين

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = \frac{1}{25} \times \frac{1}{25} = \frac{1}{1000}$$

حوالي 53% من طلاب إحدى الجامعات عمرهم أصغر من 25 عاماً وحوالي 21% من طلاب هذه الجامعة عمرهم أكبر من 34 عاماً اختير طالب عشوائياً من هذه الجامعة أوجد احتمال كل حدث مما يلي :

a) عمر الطالب بين 25 عاماً و 34 عاماً

الحدث عمر الطالب بين 25 عاماً و 34عاماً هو حدث متمم لـ $P(A \cup B)$

$$P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B)$$
$$= 1 - 0.74 = 0.26$$

b) عمر الطالب 34 عاماً وأقل

الحدث عمر الطالب 34عاماً وأقل هو الحدث المتمم لـ B

$$P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 1 - 0.21 = 0.79$$

رمي حجر نرد منتظم . فما احتمال الحصول على عدد زوجي أو عدد أولي ؟

A الحصول على عدد زوجي

B الحصول على عدد أولي

$S = \{1,2,3,4,5,6\}$
$A = \{2,4,6\}$
$B = \{2,3,5\}$
$A \cap B = \{2\}$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{3}{6} + \frac{3}{6} - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

خلال شهر التسوق يقدم يقدم أحد المحلات العرض التالي : عند شراء كل صنف تحصل على بطاقة . تفوز 40% من البطاقات بجوائز ويتم اختيار هذه البطاقات الرابحة بشكل عشوائي مع راشد 3 بطاقات . ما احتمال أن يفوز راشد بجائزة واحدة فقط ؟

$$m = 40\% = \frac{40}{100}, n = 3, k = 1$$
$$P(E) = {}_nC_k m^k (1-m)^{n-k}$$
$$= {}_3C_1 \left(\frac{40}{100}\right)^1 \left(1 - \frac{40}{100}\right)^{3-1}$$
$$= 3 \times \frac{18}{125} = \frac{54}{125}$$

مدرستي الكويتية
school-kw.com

في إحدى الآلات الحاسبة 4 بطاريات احتمال أن تخدم كل بطارية مدة عام كامل يساوي 90% ، مااحتمال أن تحدم 3 بطاريات فقط مدة عام كامل ؟

E حدث أن تخدم ثلاث بطاريات فقط مدة عام كامل

$$n = 4, m = 90\% = \frac{90}{100}, k = 3$$
$$P(E) = {}_nC_k m^k (1-m)^{n-k}$$
$$= {}_4C_3 \left(\frac{90}{100}\right)^3 \left(1 - \frac{90}{100}\right)^{4-3}$$
$${}_4C_3 = \frac{4!}{3!\,(4-3)!} = 4 :$$
$$= 4 \times 0.0729 = 0.2916$$