الخلاصـــة في الرياضيات - أ. حســن عودة

حلول الموضوعي مع السبب - ١١ علمي

حسب الطبعة الثانية من الكراسة

حلول الموضوعي

كامل كراسة التمارين ...

مع ذكر السبب

الترم الثاني : ٢٠٢٥/٢٠٢٤ م

مع حذف الأجزاء المعلقة

الأعداد المركبة

Complex Numbers

تمرَّنْ 7−1

المجموعة B تمارين موضوعية

(1) الصورة الجبرية للعدد: $\sqrt{-4}+3$ هي: $3+2i$

a b

السبب:

بأستخدام الآلة الحاسبة $\sqrt{-4}+3 = 2i + 3 = 3 + 2i$

(2) مرافق العدد المركب: $z = 3+4i$ هو: $\overline{z} = -3-4i$

a b

السبب:

مرافق العدد المركب: $z = 3+4i$ هو $\overline{z} = 3 - 4i$

(3) المعكوس الجمعي للعدد المركب $z = 3-2i$ هو: $-z = 3+2i$

a b

السبب:

المعكوس الجمعي للعدد المركب $z = 3-2i$ هو $-z = -3+2i$

(4) الصورة المبسّطة للتعبير: $(12+5i)-(2-i)$ هي: $10+6i$

a b

السبب:

ملوحظة عند استخدام الآلة الحاسبة يجب استخدام زر الطرح وليس اشارة (-) ولا سنحصل على خطأ

باستخدام الآلة الحاسبة $(12+5i)-(2-i) = 12+5i-2+i = 10-6i$

في التمارين (5—14)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(5) العدد: $\sqrt{-225}+32$ يكتب بالصورة الجبرية كما يلي:

a) $-15+6i$ b) $6+15i$ c) $6-15i$ d) $32+15i$

السبب:

الإجابات c و b و a لاتصلح لان جزءها الحقيقي لايساوي 32

باستخدام الآلة الحاسبة $\sqrt{-225}+32 = 15i+32 = 32+15i$

(6) حل المعادلة: $-10-6i = 2x+3yi$ هو:

a) $x=5\ ,\ y=-2$ b) $x=-5\ ,\ y=-2$ c) $x=-5\ ,\ y=2$ d) $x=5\ ,\ y=2$

السبب:

$$\begin{cases} 2x = -10 \\ 3y = -6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{-10}{2} = -5 \\ y = \frac{-6}{3} = -2 \end{cases} \quad x=-5, y=-2$$

(7) إذا كان $z_1 = 5i + 2$ ، $z_2 = -3 - i$ فإنّ $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}$ تساوي:

(a) $\frac{1}{10} + \frac{17}{10}i$ (b) $\frac{-1}{10} - \frac{17}{10}i$ (c) $\frac{-1}{10} + \frac{17}{10}i$ (d) $\frac{1}{10} - \frac{17}{10}i$

السبب: كتابة العدد المركب في الصور الجبرية

$z_1 = 2 + 5i$, $z_2 = -3 - i$

$\overline{z}_1 = 2 - 5i$, $\overline{z}_2 = -3 + i$

باستخدام الآلة الحاسبة

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}} = \frac{2-5i}{-3+i} = -\frac{1}{10} + \frac{17}{10}$$

---

(8) إذا كان: $x i^2 + 3 y i = 5 + 3 i^5$ فإن (x , y) تساوي

(a) $(5, 1)$ (b) $(-5, -1)$ (c) $(5, -1)$ (d) $(-5, 1)$

السبب:

$i^2 = -1$ $.i^5 = i^4 \times i = 1 \times i = i$

$$x i^2 + 3 y i = 5 + 3 i^5 \Rightarrow -x + 3 yi = 5 + 3 i$$

$$\begin{cases} -x = 5 \Rightarrow x = -5 \\ 3y = 3 \Rightarrow y = 1 \end{cases}$$

$x = -5$, $y = 1$, $(x, y) = (-5, 1)$

---

(9) أبسط صورة للتعبير: $(3 + \sqrt{-4})(4 + \sqrt{-9})$ هي:

(a) $18 + 17i$ (b) $18 + 3\sqrt{-9} + 4\sqrt{-4}$

(c) $6 + 17i$ (d) 18

السبب:

$$(3 + \sqrt{-4})(4 + \sqrt{-9}) = (3 + 2i)(4 + 3i) = 6 + 17i$$

يمكن كتابة التعبير السابق مباشرة باستخدام الآلة الحاسبة وسيظهر الناتج مباشرة

(بشرط أن تكون الآلة الحاسبة بوضع الأعداد المركبة)

كيفية التنفيذ MODE + 2

---

(10) الصورة الجبرية للعدد المركب: $z = (1 + 2i)^2$ هي:

(a) $z = -3 + 4i$ (b) $z = 5 + 4i$ (c) $z = -3$ (d) $z = 5$

السبب:

باستخدام الآلة الحاسبة

$$z = (1 + 2i)^2 = -3 + 4i$$

(11) الصورة الجبرية للعدد المركب: $z=(2-i)^3$ هي:

(a) $z=14+13i$ (b) $z=14-13i$ (c) $z=2-11i$ (d) $z=2-13i$

السبب: باستخدام الآلة الحاسبة

$$z=(2-i)^3=(2-i)^2\cdot(2-i)^1=2-11\,i$$

---

(12) الصورة الجبرية للعدد المركب: $z=\dfrac{i}{i+2}$ هي:

(a) $z=\frac{1}{5}+\frac{2}{5}i$ (b) $z=-\frac{1}{5}-\frac{2}{5}i$

(c) $z=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}i$ (d) $z=-\frac{1}{3}+\frac{2}{3}i$

السبب: باستخدام الآلة الحاسبة

$$z=\frac{i}{i+5}=\frac{1}{5}+\frac{2}{3}\,i$$

---

(13) إذا كان $z=i$ فإنّ z^{250} يساوي:

(a) $-i$ (b) i (c) 1 (d) -1

السبب: عند أستخدام الآلة الحاسبة مباشرتا في هذا التمرين سوف نحصل Err عند الأستخدام

∵ (250) عدد زوجي في هذا الحالة سوف نسبعد كلا من الأجابة (a) و (b)

∵ (250) لا تقبل القسمة على 4 ∴ الإجابة (-1) هي

$$(i)^{250}=(i^2)^{125}=(-1)^{125}=-1$$

---

(14) ليكن $x\in\mathbb{Z}^+$ فإنّ مجموعة قيم x التي تجعل العدد $(5+i^x)$ عددًا حقيقيًّا هي:

(a) $\mathbb{Z}^+$ (b) $\{0,2,4,6,\ldots\}$ (c) $\{1,3,5,\ldots\}$ (d) $\{2,4,6,\ldots\}$

السبب:

∵ الناتج عدداً حقيقي ∴ x يجب أن تكون عدد زوجب

∵ الشرط أن $x\in\mathbb{Z}^+$ ∴ x لايمكن أن تكون صفر

الأجابة (d) مجموعة الأعداد الزوجية الموجبة " بدون الصفر "

تمرَّنْ
7−2

الإحداثيات القطبية والصورة المثلثية لعدد مركب

Polar Coordinates and Trigonometric Form of a Complex Number

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (1−6)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و(b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) الإحداثيات الديكارتية للنقطة: $A\left(4,\frac{7\pi}{6}\right)$ هي: $A(-2\sqrt{3},2)$ — a — **b**

السبب:

$r=4$. $\theta=\frac{7\pi}{6}$

$x=r\cos\theta=4\cos\frac{7\pi}{6}=-2\sqrt{3}$. $y=r\sin\theta=4\sin\frac{7\pi}{6}=-2$

$A=(-2\sqrt{3}\ .-2)$

(2) الإحداثيات الديكارتية للنقطة: $B(\sqrt{2},135^\circ)$ هي: $B(-1,1)$ — **a** — b

السبب:

$r=\sqrt{2}$. $\theta=135^\circ$

$x=r\cos\theta=4\cos 135^\circ=-1$. $y=r\sin\theta=4\sin 135^\circ=1$

$B=(-1\ .1)$

(3) الإحداثيات القطبية للنقطة: $M\left(\frac{-\sqrt{2}}{2},\frac{-\sqrt{2}}{2}\right)$ هي: $M\left(1,\frac{5\pi}{4}\right)$ — **a** — b

السبب:

$r=1$. $\theta=\frac{7\pi}{6}$

$x=r\cos\theta=1\cos\frac{5\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$. $y=r\sin\theta=1\sin\frac{5\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

$B=\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\ .\frac{-\sqrt{2}}{2}\right)$

(4) العدد المركب: $z=\sqrt{3}-i$ بصورة المثلثية هو: $z=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$ — a — **b**

السبب:

$z=2\left(\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)\right)=\sqrt{3}+i$

(5) الصورة الجبرية للعدد المركب: $z=\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$ هي: $z=1-i$

ⓐ ⓑ

السبب:

$$z=\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}\right)=1-1$$

(6)

في التمارين (13–7)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(7) الإحداثيات الديكارتية للنقطة: $A\left(4,\frac{5\pi}{3}\right)$ هي:

ⓐ $A(2,2\sqrt{3})$ الربع الأول ⓑ $A(-2,2\sqrt{3})$ الربع الثاني ⓒ $A(-2,-2\sqrt{3})$ الربع الثالث ⓓ $A(2,-2\sqrt{3})$ الربع الرابع

السبب:

$$A\left(4.\frac{5\pi}{3}\right) \quad .\ \theta=\frac{5\pi}{3}=\frac{5\times180^{\circ}}{3}=300^{\circ}$$ (الربع الرابع)

(8) الإحداثيات القطبية للنقطة: $B\left(\frac{-\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ هي:

ⓐ $B\left(1,\frac{-\pi}{4}\right)$ ⓑ $B\left(1,\frac{\pi}{4}\right)$ ⓒ $B\left(1,\frac{3\pi}{4}\right)$ ⓓ $B\left(1,\frac{-3\pi}{4}\right)$

السبب:

$$B\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$.\ r=\sqrt{\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=1$$

$$\alpha\ \tan^{-1}\left|\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{-\sqrt{2}}{2}}\right|=\frac{\pi}{4} \qquad .\ \theta=\pi-\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}$$

$$y<0\ .\ x>0$$

$\therefore$ z (تقع في الربع الرابع)

(9) الصورة المثلثية للعدد المركب: $z = 2 - 2\sqrt{3}i$ حيث $\theta \in [0, 2\pi)$ هي:

(a) $= 4\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$ ربع رابع

(b) $z = 4\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$ ربع أول

(c) $z = 4\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$ ربع أول

(d) $z = 4\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$ ربع ثاني

السبب:

بدون حل يمكن مناقشة الاختيارات

$y < 0$, $x > 0$ أي أن z تقع في الربع الرابع

(10) الصورة المثلثية للعدد المركب: $z = \frac{-4}{1-i}$ حيث $0 \leqslant \theta < 2\pi$ هي:

(a) $z = 4\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$

(b) $z = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$

(c) $z = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$

(d) $z = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$

الحل

$$z = \frac{-4}{1-i} = -2 - 2i$$

$$. \ r = \sqrt{(-2)^2 + (2)^2} = 2\sqrt{2}$$

$$\alpha \ \tan^{-1}\left|\frac{-2}{-2}\right| = \frac{\pi}{4} \quad . \ \theta = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$$

$$y < 0 \ . \ x < 0$$

$\therefore$ z **(تقع في الربع الثالث)**

(11) الصورة الجبرية للعدد المركب: $z = 3\left(\cos\frac{2\pi}{3} - i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$ حيث $0 \leqslant \theta < 2\pi$ هي:

(a) $z = -\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i$

(b) $z = -\frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i$

(c) $z = -\frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i$

(d) $z = \frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i$

السبب:

$$z = 3\left(\cos\frac{2\pi}{3} - i\ \sin\frac{2\pi}{3}\right) = 3\cos\frac{2\pi}{3} - 3\ \sin\frac{2\pi}{3} i = -\frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}\ i$$

(12) $\forall n \in \mathbb{Z}^+$ فإنّ قيمة $(i^{2n+2} + i^{2n+8})$ تساوي:

ⓐ 1 ⓑ 0 ⓒ -1 ⓓ i^{-2n}

السبب:

$$(i^{2n+2} + i^{2n+8}) = (i^{2n} \times i^2 + i^{2n} \times i^8) = i^{2n}(i^2 + i^2)$$

$$= i^{2n}(-1+1) = 0$$

---

(13) $(6 - 2i + 3i^5)^2$ تساوي:

ⓐ $35 - 12i$ ⓑ $35 + 12i$ ⓒ $81 - 12i$ ⓓ $81 + 12i$

السبب:

$$(6 - 2i + 3i^5)^2 = (6 - 2i + 3i \times i^4)^2 = (6 - i)^2 = 35 - 12i$$

حل معادلات

Solving Equations

تمرَّنْ 7−3

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (1−6)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) حل المعادلة: $\bar{z}+2=5-i$ هو: $z=3+i$ **a** b

$$z=3+i \quad \Longrightarrow \quad \bar{z}=3-i$$

$$\bar{z}+2=3-i+2=5-i$$

(2) حل المعادلة: $2z+\bar{z}-3-5i=0$ هو: $z=1-5i$ a **b**

$$z=1-5i \quad \Longrightarrow \quad \bar{z}=1+5i$$

$$2(1-5i)+1+5i-3-5i = -10i \neq 0$$

(3) مجموعة حل المعادلة: $z^2-4z+5=0$ هي: $\{-2-i, 2+i\}$ a **b**

باستخدام الآلة الحاسبة مود 5 , 3 نجد أن نجد أن الجواب خاطئ

أو ملاحظة : يجب أن يكون الحلان عددان مترافقان لأنها معادلة تربيعية ذات معاملات حقيقية

(4) الجذران التربيعيان للعدد -1 هما: $-1, 1$ a **b**

الجذر التربيعية للعدد السالب أعداد تخيلية

(5) الجذران التربيعيان للعدد المركب: $z = 16 + 30i$ هما: $z_1 = 5 + 3i,\ z_2 = -5 - 3i$

a　b

باستخدام الآلة الحاسبة : $(5 + 3i)^2 = 16 + 30\,i$ والجذر الآخر هو المعكوس الجمعي

(6) إذا كان z_1 , z_2 جذران تربيعيان للعدد z فإن $z_1 + z_2 = 0$

a　b

إذا كان z_1 جذر للعدد z فإن الجذر الآخر هو المعكوس الجمعي $z_2 = z_1$

$\therefore\ z_2 + z_1 = 0$ صحيحة

في التمارين (7–10)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(7) حل المعادلة: $2z - 5 + 6i = -3\bar{z}$ هو:

a) $z = 1 + 6i$　b) $z = -1 + 6i$　c) $z = 1 - 6i$　d) $z = -1 - 6i$

يجب الحل بطريقة مقالية أو التعويض بالآلة الحاسبة أربع مرات

$$2\,z - 5 + 6i = -3\,\bar{z} \Rightarrow 2\,z + 3\bar{z} = 5 - 6i$$

$$2(x + i\,y) + 3\,(x - iy) = 5 - 6i \Rightarrow x = 1\ .y = 6$$

$$z = 1 + \quad i$$

(8) مجموعة حل المعادلة: $z^2 - 4z + 20 = 0$ هي:

a) $\{2 - 4i, -2 - 4i\}$　b) $\{-2 + 4i, -2 - 4i\}$

c) $\{2 - 4i, -2 + 4i\}$　d) $\{2 - 4i, 2 + 4i\}$

باستخدام الآلة الحاسبة الاجابة الجذرين عددين مترافقين إذا a , b لاتنفع مباشرة

(9) الجذران التربيعيان للعدد المركب: $z = 33 - 56i$ هما:

ⓐ $\begin{cases} z_1 = -7 - 4i \\ z_2 = 7 + 4i \end{cases}$ ⓑ $\begin{cases} z_1 = 7 - 4i \\ z_2 = -7 + 4i \end{cases}$

ⓒ $\begin{cases} z_1 = 7 + 4i \\ z_2 = 7 - 4i \end{cases}$ ⓓ $\begin{cases} z_1 = -7 - 4i \\ z_2 = -7 + 4i \end{cases}$

جذري العدد المركب متعاكسين اذا c . d لا ينفعان

في الحل a إشارة الجزئين الحقيقي والتخيلي متماثلين والحل مرفوض لأن إشارة الجزء التخيلي للعدد سالبة وبالتالي يجب أن يكون الأشارتين مختلفتين

(10) حل المعادلة $(3 - 4i)z = 5 - 2i$ هو:

ⓐ $\frac{5}{3} + \frac{1}{2}i$ ⓑ $\frac{5}{3} - \frac{1}{2}i$ ⓒ $\frac{23}{25} + \frac{14}{25}i$ ⓓ $\frac{23}{25} - \frac{14}{25}i$

باستخدام الآلة الحاسبة $z = \frac{5-2i}{3-4i} = \frac{23}{25} + \frac{14}{25}\, i$

تمرَّنْ 8−1

التمثيل البياني للدوال المثلثية (الجيب، جيب التمام، الظل)

Graphs of Trigonometric Functions (Sine, Cosine and Tangent)

المجموعة B تمارين موضوعيّة

في التمارين (1−7)، ظلّل a إذا كانت العبارة صحيحة و b إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) معادلة الدالة المثلثية $y = a\sin(b\theta)$ حيث السعة 5 والدورة 3π هي $y = 5\sin\left(\frac{2}{3}\theta\right)$ a **b**

يوجد أكثر من دالة لها نفس السعة والدورة $y = \pm a\ \sin(\pm\, b\, x)$

(2) الدالة التي دورتها $\frac{\pi}{2}$ وسعتها 3 يمكن أن تكون $y = 3\sin\left(\frac{\pi\theta}{2}\right)$ a **b**

الدورة $= \frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{|\frac{\pi}{2}|} = 4$

(3) الدالة $y = 3\tan\left(\frac{3}{4}x\right)$ دورتها $\frac{4}{3}\pi$ **a** b

دورة دالة الظل $= \frac{\pi}{|b|} = \frac{\pi}{|\frac{3}{4}|} = \frac{4\pi}{3}$

(4) الدالة التي دورتها $\frac{\pi}{3}$ وسعتها 4 يمكن أن تكون $y = -4\cos(6x)$ **a** b

الدورة $= \frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{|6|} = \frac{\pi}{3}$

ملاحظة :

الفرق بين السؤال الأول والسؤال الرابع حدد الدالة أما في السؤال الرابع كتب يمكن أن يكون

(5) سعة الدالة $y = -5\cos 2x$ هي -5

a　　b

لا يمكن أن تكون السعة سالبة السعة = $|a| = 5$

(6) في الدالة f حيث $f(x) = a\cos bx$ يكون: $2|a| = \max f + \min f$

a　　b

$$2|a| = \max f - \min f$$

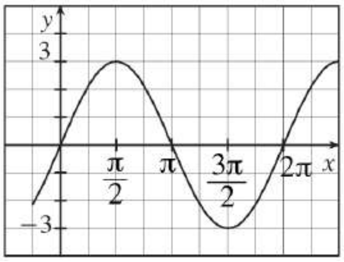
(7) الدالتان f, g حيث $g(x) = \tan 4x$ ، $f(x) = \cos 8x$ لهما نفس الدورة.

a　　b

دورة الظل = $\frac{\pi}{|b|} = \frac{\pi}{4}$ ، دورة جيب التمام = $\frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{8} = \frac{\pi}{4}$

في التمارين (17–8)، ظلّل رمز الدائرة الدالّ على الإجابة الصحيحة.

(8) البيان التالي يمثل بيان الدالة:



a) $f(x) = 3\cos x$　　b) $f(x) = 3\sin x$

c) $f(x) = -3\sin x$　　d) $f(x) = \sin 3x$

(a) لا تنفع لان المنحني يمر بالنقطة الأصل .

(b) تنفع لان المنحني يمر بالنقطة الأصل والسعة تساوي 3 والدورة هي $\frac{2\pi}{1}$

(b) لا تنفع لان أشارة الدالة سالب منحناها يبدأ من الأسفل وليس من الأعلي

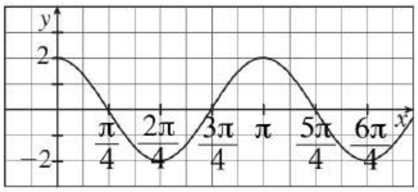
(d) لا تنفع لان سعة 1 وادورة $\frac{2\pi}{1}$ وليست $\frac{2\pi}{3}$

(9) لتكن $f(x) = 3\tan 2x$ فإن:

(a) السعة $= 1$ (b) السعة $= 2$ (c) السعة $= 3$ (d) f ليس لها سعة

دالة الظل " *tan* " ليس لها سعة

(10) ليكن بيان f كما في الشكل التالي:



فإن f يمكن أن تكون:

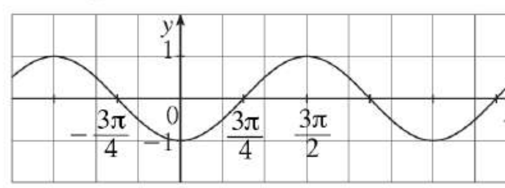
(a) $2\cos 2x$ (b) $\cos 2x$ (c) $\cos \frac{x}{2}$ (d) $\sin 2x$

من خلال الرسم نلاحظ أن السعة 2 الأجابة حتما (a)

ملحوظة :

يمكن التعويض بنقطة من الخط البياني أو أكثر من نقطة في كل أجابة للتحقق مثل النقط (0,2)

(11) ليكن g دالة دورية بيانها كما في الشكل التالي فإن الدورة تساوي:

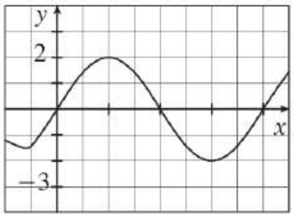


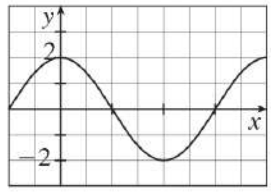
(a) π (b) 2π (c) 3π (d) $\frac{6\pi}{4}$

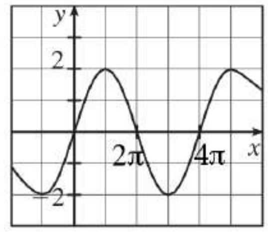
نحسب نصف الدورة :
بين قمة وقاع " من 0 إلي $\frac{3\pi}{2}$ " $= \frac{3\pi}{2}$
بين نقطتي تقاطع مع محور الأفقي متتاليتين " من $\frac{-3\pi}{4}$ إلي $\frac{3\pi}{4}$ "

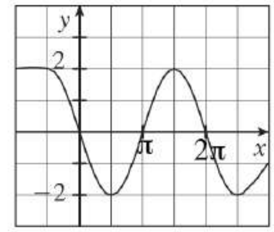
نضرب نصف الدورة بـ (2) الدورة $= \frac{3\pi}{2} \times 2 = 3\pi$

(12) لتكن الدالة g حيث: $g(x) = a \sin bx$ فإن بيان g لا يمكن أن يكون:

a


b


c


d


الدالة $y = a \sin b\, x$ يجب أن تمر من نقطة الأصل

∴ المنحني b لا ينفع أن يكون منحني للدالة .

(13) معادلة الدالة المثلثية $y = a\cos(bx)$ حيث السعة 4 والدورة 6 يمكن أن تكون:

a) $y = \frac{1}{4}\cos\left(\frac{x}{3}\right)$

b) $y = -4\cos\left(\frac{\pi}{3}x\right)$

c) $y = -4\cos\left(\frac{3}{\pi}x\right)$

d) $y = 4\cos\left(\frac{x}{3}\right)$

$$\frac{2\pi}{|b|} = 6 \Rightarrow |b| = \frac{2\pi}{6} \Rightarrow |b| = \frac{\pi}{3}$$

(14) الدالة $y = a\cos(bx)$ حيث $a = 2$ ودورتها $\frac{\pi}{4}$ يمكن أن تكون:

a) $y = 2\cos\left(\frac{\pi}{4}x\right)$

b) $y = 8\cos(8x)$

c) $y = 2\cos(8x)$

d) $y = 8\cos\left(\frac{x}{4}\right)$

الإجابة $(d)\,,(b)$ لا تنفع سعتهما مختلفة الأجابة أ م $(a)\,,(c)$ لان السعة متساوية

$$\frac{2\pi}{|b|} = \frac{\pi}{4} \Rightarrow |b| = \frac{8\pi}{\pi} \Rightarrow |b| = 8$$

(15) معادلة الدالة المثلثية $y = a\sin(bx)$ حيث السعة 3 والدورة $\frac{\pi}{2}$ يمكن أن تكون:

a) $y = 3\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ أو $y = -3\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$

b) $y = 3\sin\left(\frac{2}{\pi}x\right)$ أو $y = -3\sin\left(\frac{2}{\pi}x\right)$

c) $y = 3\sin\left(\frac{\pi}{4}x\right)$ أو $y = -3\sin\left(\frac{\pi}{4}x\right)$

d) $y = 3\sin(4x)$ أو $y = -3\sin(4x)$

$$\frac{2\pi}{|b|} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow |b| = \frac{4\pi}{\pi} = 4$$

$$y = -3\ \sin 4x \quad . \quad y = 3\ \sin 4x$$

(16) معادلة الدالة المثلثية $y = \tan(bx)$ حيث الدورة $\frac{3}{4}$ يمكن أن تكون:

a) $y = \tan\left(\frac{4}{3}\pi x\right)$

b) $y = \tan\left(\frac{3}{4}x\right)$

c) $y = \tan\left(\frac{4}{3}x\right)$

d) $y = \tan\left(\frac{3}{4}\pi x\right)$

$$\frac{\pi}{|b|} = \frac{3}{4} \Rightarrow |b| = \frac{4\pi}{3}$$

(17) في الدالة المثلثية $y = -2\sin\left(\frac{3}{5}x\right)$ السعة والدورة هما:

a) $-2\ ,\ \frac{3\pi}{5}$

b) $2\ ,\ \frac{10\pi}{3}$

c) $2\ ,\ \frac{3\pi}{5}$

d) $2\ ,\ \frac{2\pi}{15}$

الدورة هي $\frac{2\pi}{|b|} = \frac{10\pi}{3}$ ، السعة $= |a| = |-2| = 2$

قانون الجيب

Law of Sine

تمرّنْ 8−3

المجموعة B تمارين موضوعيّة

في التمارين (3−1)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) في المثلث ABC: $m(\widehat{A}) = 100^{\circ}$, $m(\widehat{B}) = 30^{\circ}$, $BC = 20$ cm فإنّ: $AC = 10.154$ cm (b) (a)

من قانون الجيب :

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

$$\frac{AC}{\sin\beta} = \frac{BC}{\sin\alpha}$$

$$AC = BC \cdot \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}$$

$$AC = 10 \cdot \frac{\sin 30^{\circ}}{\sin 40^{\circ}} = 10.1542\,6612$$

(2) في المثلث ABC: $m(\widehat{B}) = 80^{\circ}$, $AB = 12$ cm , $AC = 16$ cm فإنّ: $m(\widehat{C}) = 50^{\circ}$ (b) (a)

من قانون الجيب :

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

$$\frac{AC}{\sin\beta} = \frac{16}{\sin 80^{\circ}} = 16.2$$

$$\frac{AB}{\sin\gamma} = \frac{12}{\sin 50^{\circ}} = 15.6$$

$$\frac{AC}{\sin\beta} \neq \frac{AB}{\sin\gamma}$$

(3) في كل مثلث ABC يكون: $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{\sin\gamma}{c}$

a　　b

القانون خطأ : القانون الصحيحة هي : $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$

في التمارين (4–9)، ظلّل رمز الدائرة الدالّ على الإجابة الصحيحة.

(4) في المثلث ABC: $m(\widehat{A}) = 80^\circ$, $m(\widehat{B}) = 40^\circ$, $AC = 10\,\text{cm}$ فإنّ طولي $\overline{BC}$, $\overline{AB}$ يساويان:

a) 7.43 cm , 15.32 cm

b) 6.53 cm , 13.47 cm

c) 13.47 cm , 15.32 cm

d) 7.43 cm , 6.53 cm

$\alpha = 80^\circ \;.\beta = 40^\circ .\gamma = 60^\circ$

$b = 10\ cm$

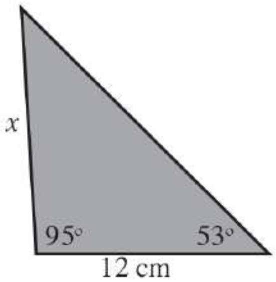
$\because$ الزاوية β هي أصغر زاوية $\therefore$ الضلع b هو أصغر ضلع

$BC > 0\ .\ AB > 10$

الإجابة الوحيد التي تصلح هي الإجابة (c)

ملاحظة : ترتيب الأضلاع يشبه ترتيب قياسات الزوايا الضلع الأطول يقابل الزاوية الأكبر .

(5) في المثلث المقابل، x تساوي حوالي:



a) 8.6 cm

b) 15 cm

c) 18.1 cm

d) 19.2 cm

$$\vartheta = 180^\circ - (95^\circ + 53^\circ) = 32^\circ$$

$$\frac{x}{\sin 53^\circ} = \frac{12}{\sin 32^\circ} \Longrightarrow x = \frac{12\cdot\sin 53^\circ}{\sin 32^\circ} = 18.1$$

(6) مثلث قياسات زواياه: $70^{o}, 60^{o}, 50^{o}$، طول أصغر ضلع فيه هو 9 cm
طول أطول ضلع حوالي:

(a) 11 cm   (b) 11.5 cm   (c) 12 cm   (d) 12.5 cm

الضلع المقابل لأصغر زاوية 50° هو أصغر ضلع
إذا كان x أكبر ضلع فهو مقابل لأكبر زاوية 70°

$$\frac{9}{\sin 50^{\circ}} = \frac{x}{\sin 70^{\circ}}$$

$$x = \frac{9 \cdot \sin 70^{\circ}}{\sin 50^{\circ}} = 11.04$$

(7) القياسات المعطاة في المثلث ABC: $m(\widehat{A}) = 56^{o}$, $AC = 23\,\text{cm}$, $AB = 19\,\text{cm}$، طول $\overline{BC}$ يساوي:

(a) 12 cm   (b) 18 cm
(c) 19 cm   **(d)** لا يمكن استخدام قانون الجيب

المعلوم ضلعين وزاوية محصورة بينهما $\therefore$ لا يمكن استخدام قانون الجيب

<u>ملحوظة</u> : لا ستخدام قانون الجيب نحن بحاجة الي ضلع وزاوية مقابلة

(8)

نو

نو

تمرَّنْ 8–4

قانون جيب التمام

Law of Cosine

المجموعة B تمارين موضوعيّة

في التمارين (1–4)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) في المثلث ABC: $AB = 24\text{ cm}$, $AC = 19\text{ cm}$, $BC = 27\text{ cm}$ فإنّ: $m(\widehat{A}) \approx 76.82^\circ$ (b)   **a**

$$\cos(\hat{A}) = \frac{AC^2 + AB^2 - BC^2}{2 \cdot AC \cdot AB} = \frac{19^2+24^2-27^2}{2\times19\times24} = \frac{13}{57}$$

$$\therefore m(\hat{A}) = \cos^{-1}\frac{13}{57} \approx 76 \cdot 82^\circ$$

(2) في المثلث ABC: $m(\widehat{A}) = 60^\circ$, $BC = 44\text{ cm}$, $AB = 20\text{ cm}$ فإنّ: $AC \approx 50.5\text{ cm}$ (b)   **a**

معلوم ضلعين وزاوية مقابل أحدهما يجب تطبيق قانون الجيب :

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

$$\frac{44}{\sin(60^\circ)} = \frac{20}{\sin\gamma} \Longrightarrow \sin\gamma = \frac{20\sin(60^\circ)}{44} = \frac{5\sqrt{3}}{22}$$

$$\therefore \gamma = \sin^{-1}\left(\frac{5\sqrt{3}}{22}\right) = 23^\circ \Longrightarrow \beta = 180^\circ - (60^\circ + 23^\circ) = 97^\circ$$

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} \Longrightarrow \frac{44}{\sin(60^\circ)} = \frac{b}{\sin 97^\circ} \Longrightarrow b = \frac{44\sin 97^\circ}{\sin(60^\circ)} = 50 \cdot 5\ cm$$

(3) في المثلث ABC: $b^2 + c^2 < 2bc\cos A$ (a)   **b**

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,b\,c\,\csc A$$

$$\because a^2 > 0 \Rightarrow b^2 + c^2 - 2\,b\,c\,\csc A > 0 \Longrightarrow b^2 + c^2 > 2\,b\,c\,\csc A$$

(4) إذا كانت أطوال أضلاع مثلث تساوي $5\,cm, 8\,cm, 12\,cm$ فإن قياس الزاوية الكبرى في هذا المثلث يساوي حوالي 133.4°

(a) (b)

أكبر زاوية تقابل ضلع " 12 cm "

$$\cos\theta = \frac{5^2+8^2-12^2}{2\times5\times8} = -\frac{11}{16}$$

$$\therefore\ \theta = \cos^{-1}\left(-\frac{11}{16}\right) = 133\cdot4^\circ$$

في التمارين (5–10)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(5) في المثلث ABC: $m(\widehat{C}) = 60^\circ$ ، $AC = 10\,cm$ ، $BC = 20\,cm$ فإن طول $\overline{AB}$ يساوي:

(a) $AB = 10\sqrt{7}\,cm$ (b) $AB = 10\sqrt{3}\,cm$ (c) $AB = 12.4\,cm$ (d) $AB = 29\,cm$

$$AB = \sqrt{BC^2 + AC^2 - 2\,BC\cdot AC\,\cos(c)}$$

$$AB = \sqrt{20^2 + 10^2 - 2\times 20\times10\,\cos(60^\circ)} = 10\sqrt{3}\ cm$$

(6) في المثلث ABC: $m(\widehat{A}) = 120^\circ$ ، $AB = 30\,cm$ ، $AC = 40\,cm$ فإنّ طول $\overline{BC}$ يساوي:

(a) $BC \approx 60.8\,cm$ (b) $BC \approx 36\,cm$ (c) $BC \approx 68\,cm$ (d) $BC \approx 21\,cm$

$$BC = \sqrt{AC^2 + AB^2 - 2AC\cdot AB\,\cos(A)}$$

$$AB = \sqrt{40^2 + 30^2 - 2\times 40\times30\,\cos(120^\circ)} = 10\sqrt{37} \approx 60\cdot8\ cm$$

(7) إذا كان $BC = 25\,cm$ ، $AC = 17\,cm$ ، $AB = 12\,cm$ فإنّ قياس الزاوية الكبرى في المثلث ABC يساوي حوالي:

(a) 118° (b) 110° (c) 125° (d) 100°

أكبر زاوية تقابل ضلع " 12 cm "

$$\cos\alpha = \frac{17^2+12-25^2}{2\times17\times12} = -\frac{8}{17}$$

$$\therefore\ \alpha = \cos^{-1}\left(-\frac{8}{17}\right) = 118^\circ$$

تمرَّنْ
8–5

مساحة المثلث

Area of Triangle

المجموعة B تمارين موضوعيّة

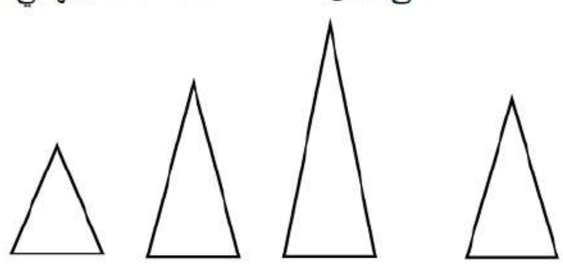
في التمارين (1–6)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) إذا عرفت أطوال أضلاع مثلث فيمكن استخدام قاعدة هيرون لإيجاد مساحته. b a

الإجابة صحيحة لأن قاعدة هيرون تعتمد على الأضلاع والمحيط

(2) لا يمكن إيجاد مساحة مثلث بمعلومية قياسات زواياه الثلاثة. b a

الإجابة صحيحة لأن لايجاد مساحة مثلث أو لحل مثلث أو لرسم مثلث نحن نحتاج إلي ضلع واحد على الأقل ... هناك عدد لانهائي من المثلثات يمكن أن تكون لها نفس القياسات الزوايا



.. وهكذا

(3) لا يمكن استخدام قاعدة هيرون إذا كان المثلث قائم الزاوية. b a

خطأ : يمكن أستخدام قاعدة هيرون لأي مثلث علم أطوال أضلاعه

(4) إن معرفة قياس إحدى زوايا مثلث هو شرط ضروري لإيجاد مساحته.

(a) **(b)**

يمكن إيجاد المساحة بمعلومية الأضلاع فقط .

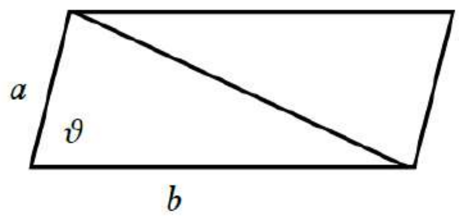
(5) إذا كان a, b طولا ضلعين متتاليين في متوازي أضلاع و θ قياس الزاوية بينهما

فإن مساحة متوازي الأضلاع تساوي $ab\sin\theta$

(a) (b)

قطر متوازي الأضلاع يقسمه إلي مثلثين متطابقين مساحة كلاً منهما يساوي $\frac{1}{2}\, ab\ \sin\vartheta$

مساحة متوازي الأضلاع = $ab\ \sin\vartheta$



(6) في المثلث ABC: $AC = 9\,\text{cm}$, $AB = 7\,\text{cm}$, $BC = 5\,\text{cm}$

فإن مساحة المثلث ABC تساوي حوالي $15\,\text{cm}^2$

(a) **(b)**

$$s = \frac{1}{2}(9+7+5) = 10\cdot 5\ cm$$

$$Area = \sqrt{10\cdot 5\,(10\cdot 5-9)(10\cdot 5-7)(10\cdot 5-5)} \approx 17\cdot 4\ cm^2$$

في التمارين (7–10)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(7) إذا كان: $m(\widehat{C}) = 40^\circ$, $b = 3\,\text{cm}$, $a = 2\,\text{cm}$ فإن مساحة المثلث ABC تساوي حوالي:

(a) $4.6\,\text{cm}^2$

(b) $3.86\,\text{cm}^2$

(c) $1.93\,\text{cm}^2$

(d) $2.3\,\text{cm}^2$

$$Area = \frac{1}{2}\, a\cdot b\ \ \sin c = \frac{1}{2}\times 2\times 3\times \sin 40^\circ \approx 1\cdot 93\ cm^2$$

(8) مساحة المثلث الذي أطوال أضلاعه 7 cm , 8 cm , 9 cm هي:

a) $6\sqrt{15}\ \text{cm}^2$ b) $12\sqrt{5}\ \text{cm}^2$

c) $16\sqrt{3}\ \text{cm}^2$ d) $18\sqrt{3}\ \text{cm}^2$

$$s = \frac{1}{2}(7+8+9) = 12\ cm$$

$$Area = \sqrt{12(12-7)(12-8)(12-9)} = 12\sqrt{5}\ \ Cm^2$$

(9) مساحة مثلث متطابق الأضلاع طول ضلعه a هي:

a) $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\ \text{units}^2$ b) $a^2\ \text{units}^2$

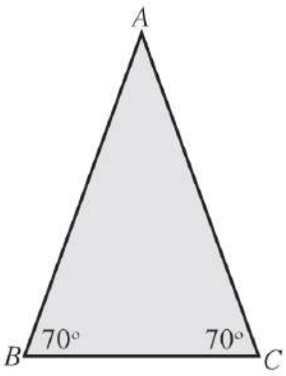
c) $\frac{1}{2}a^2\text{units}^2$ d) $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}\ \text{units}^2$

$$s = \frac{1}{2}(a+a+a) = \frac{3a}{2}\ \ cm$$

$$Area = \sqrt{\frac{3a}{2}\left(\frac{3a}{2}-a\right)\left(\frac{3a}{2}-a\right)\left(\frac{3a}{2}-a\right)}\ \ Cm^2$$

$$= \sqrt{\frac{3a}{2}\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{a}{2}} = \sqrt{\frac{3}{16}a^4} = \frac{\sqrt{3}}{4}a^4\ \text{units}^2$$

(10) إذا كانت مساحة المثلث ABC تساوي حوالي $8\ \text{cm}^2$ فإن طول $\overline{AB}$ هو حوالي:



a) 5 cm b) 8 cm

c) 4 cm d) 6 cm

$$\alpha = 180^\circ - (70^\circ + 70^\circ) = 40^\circ$$

$$Area = \frac{1}{2}\ a\cdot b\ \ \sin\alpha$$

$$8 = \frac{1}{2}\cdot x\cdot x\cdot \sin 40^\circ$$

$$\frac{16}{\sin 40^\circ} = x^2 \Rightarrow x^2 = 25 \quad \Rightarrow x = 5\ cm$$

تمرّنْ
9-2

إثبات صحة متطابقات مثلثية

Confirming Trigonometric Identities

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (1–4)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) $3\sin x = \sin(3x)$ تمثل متطابقة.

a　**b**

من خلال التعويض في طرفي المتطابق ببعض القيم غير الصفر

لأنه إذا كانت $x = 30^\circ$ مثلاً فإن :

الطرف الأيسر = $3\ \sin 30^\circ = 3\times\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

الطرف الأيمن = $\sin 3\times 30^\circ = \sin 90^\circ = 1$

(2) $\cos 2x = \sin^2 x - \cos^2 x$ تمثل متطابقة.

a　**b**

من خلال التعويض في طرفي المتطابق ببعض القيم غير الصفر

لأنه إذا كانت $x = 60^\circ$ مثلاً فإن :

الطرف الأيسر = $cos2x = cos2\times 60^\circ = \cos 120^\circ = -\frac{1}{2}$

الطرف الأيمن = $\sin^2 x - \cos^2 x = \sin^2 60^\circ - \cos^2 60^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$

وبالتالي : $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x \neq \sin^2 x - \cos^2 x$

(a) (b)

(3) $\sec x - \cos x = \tan x \ \sin x$ تمثل متطابقة.

$$\sec x - \cos x = \frac{1}{\cos x} - \cos x = \frac{1-\cos^2 x}{\cos x}$$

$$= \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\sin x \sin x}{\cos x} = \tan x \ \sin x$$ = الطرف الأيمن

(4)

في التمارين (5—10)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(5) المقدار: $\frac{\sec^2 x - 1}{\sin x}$ متطابق مع المقدار:

(a) $\sin x \tan x$

(b) $\sin x \sec^2 x$

(c) $\cos x \sec^2 x$

(d) $\sin x \csc x$

$$\frac{\sec^2 x - 1}{\sin x} = \frac{\tan^2 x}{\sin x} = \tan^2 x \cdot \frac{1}{\sin x}$$

$$= \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \cdot \frac{1}{\sin x} = \sin x \cdot \sec^2 x$$

(6) المقدار: $(\cos x + \sin x)^2 - (\cos x - \sin x)^2$ متطابق مع المقدار:

(a) $-4 \sin x \cos x$

(b) 2

(c) -2

(d) $4 \sin x \cos x$

$$(\cos x + \sin x)^2 - (\cos x - \sin x)^2$$
$$= \cos^2 x + 2\cos x \sin x + \sin x^2 - \cos x^2 + 2\cos x \sin x - \sin^2 x$$
$$= 4\sin x \cos x$$

(7) المقدار: $\frac{1}{\tan x} + \tan x$ متطابق مع المقدار:

- **a** $\sec x \csc x$
- **b** $\sec x \sin x$
- **c** $\sec x \cos x$
- **d** $\sin x \cos x$

$$\frac{1}{\tan x} + \tan x = \cot x + \tan x = \frac{\cos x}{\sin x} + \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\sin x \cos x}$$
$$= \frac{1}{\sin x \cos x} = \csc x \sec x$$

(8) المقدار: $\tan^2 x - \sin^2 x$ متطابق مع المقدار:

- **a** $\tan^2 x$
- **b** $\cot^2 x$
- **c** $\tan^2 x \sin^2 x$
- **d** $\cot^2 x \cos^2 x$

$$\tan^2 x - \sin^2 x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - \sin^2 x = \sin^2 x\left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right)$$
$$= \sin^2 x(\sec^2 x - 1) = \sin^2 x \tan^2 x$$

(9) المقدار: $\frac{\sin x}{\csc x} + \frac{\cos x}{\sec x} + 1$ متطابق مع المقدار:

- **a** 1
- **b** -1
- **c** 2
- **d** -2

$$\frac{\sin x}{\csc x} + \frac{\cos x}{\sec x} + 1 = \sin x \cdot \sin x + \cos x \cdot \cos x + 1$$
$$= \sin^2 x + \cos x^2 + 1 = 1 + 1 = 2$$

(10) المقدار: $\frac{\cos^2 x - 1}{\cos x}$ متطابق مع المقدار:

(a) $-\tan x \sin x$ (b) $-\tan x$

(c) $\tan x \sin x$ (d) $\tan x$

$$\frac{\cos^2 x - 1}{\cos x} = \frac{-\sin x}{\cos x} = -\sin x \cdot \frac{\sin x}{\cos x} = -\sin x \cdot \tan x$$

تمرَّنْ 9−3

حل معادلات مثلثية

Solving Trigonometric Equations

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (1−5)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) حل المعادلة $\sin x = \frac{1}{2}$ هو: $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$، حيث k عدد صحيح.

a b

$$\sin\alpha = |\sin x| = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = \sin^{-1}\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$$

$\because \sin x > 0$

$\therefore$ x تقع في الربع الأول أو الثاني

$$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad or \quad x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi\, x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \quad : k \in \mathbb{Z}$$

المعادلة $\cos x = \sqrt{2} \approx 1.4$ ليس لها حل

(2) حل المعادلة $\cos x = \sqrt{2}$ هو: $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ أو $x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$، حيث k عدد صحيح.

a b

(3) حل المعادلة $\tan x = -\sqrt{3}$ هو: $x = +\frac{5\pi}{6} + k\pi$، حيث k عدد صحيح.

a b

$$\tan\alpha = |\tan x| = \sqrt{3} \Rightarrow \alpha = \tan^{-1}\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$$

$\tan x < 0$

$\therefore$ x تقع في الربع الثاني أو الربع الرابع

$$x = \pi - \frac{\pi}{3} + k\pi = \frac{2\pi}{3} + k\pi : k \in \mathbb{Z}$$

$$or \quad x = 2\pi - \frac{\pi}{3} + k\pi\, x = \frac{5\pi}{3} + k\pi \quad : k \in \mathbb{Z}$$

(4) حلول المعادلة $\sin x \tan^2 x = \sin x$ على الفترة $(0,\pi)$ هي: $\frac{\pi}{4}$ و $\frac{3\pi}{4}$

(a) (b)

$$\sin x \tan^2 x = \sin x \Rightarrow \sin x \tan^2 x - \sin x = 0$$

$$\sin x (\tan^2 x - 1) = 0$$

$$\sin x = 0 \Rightarrow x = 0 \notin (0.\pi).\pi \notin (0.\pi)$$

$$\tan^2 x - 1 = 0 \Rightarrow \tan x = \pm 1$$

$$\tan x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} \in (0.\pi) \quad or \quad x\frac{5\pi}{4} \notin (0.\pi)$$

$$\tan x = -1 \Rightarrow x = \frac{3\pi}{4} \in (0.\pi) \quad or \quad x\frac{7\pi}{4} \notin (0.\pi)$$

(5) حلول المعادلة $2\sin^2 x = 1$ على الفترة $[0,2\pi)$ هي: $\frac{\pi}{4}$ و $\frac{5\pi}{4}$

(a) (b)

$$2\sin^2 x = 1 \Rightarrow \sin^2 x = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sin x = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} \in [0,2\pi) \quad .x = \frac{3\pi}{4} \in [0,2\pi)$$

$$\sin x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow x = \frac{5\pi}{4} \in [0,2\pi) \quad .x = \frac{7\pi}{4} \in [0,2\pi)$$

في التمارين (6–11)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(6) إذا كان $\sin x + \cos x = 0$ فإن x تقع في الربع:

(a) الأول
(b) الأول أو الثالث
(c) الثالث
(d) الثاني أو الرابع

$$\sin x + \cos x = 0 \Rightarrow \sin x = -\cos x$$

$$\frac{\sin x}{\cos x} = -1 \Rightarrow \tan x = -1 \Rightarrow \tan x < 0$$

وبالتالي فأن x تقع في الربع الثاني أو الرابع

(7) حلول المعادلة: $2\sin^2 x + 3\sin x + 1 = 0$ على الفترة $[0, 2\pi)$ هي:

(a) $-\frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}$ (b) $\frac{4\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{3}$

(c) $\frac{3\pi}{2}, \frac{11\pi}{6}$ **(d)** $\frac{7\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}, \frac{11\pi}{6}$

$$2\sin^2 x + 3\sin x + 1 = 0 \Longrightarrow (2\sin x + 1)(\sin x + 1) = 0$$

$2\sin x + 1 = 0 \Rightarrow \sin x = -\frac{1}{2}$	$\sin x + 1 = 0 \Rightarrow \sin x = -1$
x تقع في الربع الثالث أو الربع الرابع	x زاوية ربعية فتكون
$x = \pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6} \in [0 .2\pi]$	$x = \frac{3\pi}{2} \in [0 .2\pi]$
$x = 2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{11\pi}{2} \in [0 .2\pi]$	

(8) حلول المعادلة: $2\sqrt{2}\sin x\cos x - \sqrt{2}\cos x - 2\sin x = -1$ على الفترة $[0, 2\pi)$ هي:

(a) $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}$ **(b)** $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{4}$

(c) $\frac{\pi}{6}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}, \frac{5\pi}{4}$ (d) $\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{7\pi}{4}$

$$2\sqrt{2}\sin x\cos x - \sqrt{2}\cos x - 2\sin x = -1$$

$$2\sqrt{2}\sin x\cos x - \sqrt{2}\cos x - 2\sin x + 1 = 0$$

$$(\sqrt{2}\sin x\cos x - 2\sin x) - (\sqrt{2}\cos x - 1) = 0$$

$$2\sin x(\sqrt{2}\cos x - 1) - (\sqrt{2}\cos x - 1) = 0$$

$$(\sqrt{2}\cos x - 1)(2\sin x - 1) = 0$$

$\sqrt{2}\cos x - 1 = 0 \Rightarrow \cos x = \frac{1}{\sqrt{2}}$	$2\sin x - 1 = 0 \Rightarrow \sin x = \frac{1}{2}$
x تقع في الربع الأول أو الربع الرابع	x تقع في الربع الأول أو الربع الثاني
$x = \frac{\pi}{4} \in [0 .2\pi)$	$x = \frac{\pi}{6} \in [0 .2\pi)$
$x = 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4} \in [0 .2\pi)$	$x = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} \in [0 .2\pi)$

تمرَّنْ
9–4

متطابقات المجموع و الفرق

Sum and Difference Identities

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (1–4)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) $\sin 75° = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ **(a)**   (b)

باستخدام الآلة الحاسبة

$$\sin 75^\circ = \sin(45^\circ + 30^\circ) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

(2) $\cos \dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ (a)   **(b)**

باستخدام الآلة الحاسبة

$$\cos\frac{\pi}{12} = \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \cos(60^\circ - 45^\circ) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

(3) $\cos\left(h + \dfrac{\pi}{2}\right) = -\cos h$ (a)   **(b)**

$$\cos\left(h + \frac{\pi}{2}\right) = \cos h\,\cos\frac{\pi}{2} - \sin h\,\sin\frac{\pi}{2} = 0 - \sin h \times 1 = -\sin h$$

(4) $\tan^2\frac{\pi}{12}+\tan^2\frac{5\pi}{12}=14$

a **b**

باستخدام الآلة الحاسبة

$$\tan^2\frac{\pi}{12}+\tan^2\frac{5\pi}{12}=\left(2-\sqrt{3}\right)^2+\left(2+\sqrt{3}\right)^2=14$$

في التمارين (11–5)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(5) $\tan\frac{7\pi}{12}$ تساوي:

a) $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{\sqrt{2}+\sqrt{6}}$
b) $\sqrt{2}+\sqrt{6}$
c) $2+\sqrt{3}$
d) $-2-\sqrt{3}$

باستخدام الآلة الحاسبة

$$\tan\frac{7\pi}{12}=\tan\left(\frac{4\pi}{12}+\frac{3\pi}{12}\right)=\tan\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)=-2-\sqrt{3}$$

(6) $\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$ تساوي:

a) $\frac{1}{2}\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x$
b) $\frac{1}{2}(\sin x+\cos x)$
c) $\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\frac{1}{2}\cos x$
d) $\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x-\frac{1}{2}\cos x$

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\sin x\cdot\cos\frac{\pi}{6}-\cos x\,\sin\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\frac{1}{2}\cos x$$

(7) $\tan\left(h+\frac{\pi}{4}\right)$ تساوي:

a) $1+\tan h$
b) $\frac{1-\tan h}{1+\tan h}$
c) $\frac{1+\tan h}{1-\tan h}$
d) $1-\tan h$

$$\tan\left(h+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\tan h+\tan\frac{\pi}{4}}{1-\tan h\cdot\tan\frac{\pi}{4}}=\frac{\tan h+1}{1-\tan h\times 1}=\frac{\tan h+1}{1-\tan h}$$

(8) $\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$ تساوي:

(a) $\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x-\sin x)$

(b) $\sqrt{2}(\cos x+\sin x)$

(c) $\frac{\sqrt{3}}{2}(\cos x+\sin x)$

(d) $\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x+\sin x)$

$$\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\cos x\ \cos\frac{\pi}{4}+\sin x\ \sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x+\sin x)$$

(9) $\cos 94°\cos 18°+\sin 94°\sin 18°$ تساوي:

(a) $\cos 112°$

(b) $\cos 76°$

(c) $\sin 112°$

(d) $\sin 76°$

$$\cos 94^\circ\ \cos 18^\circ-\sin 94^\circ\ \sin 18^\circ=\cos(94^\circ-18^\circ)=\cos 78^\circ$$

(10) $\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{7}-\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{\pi}{3}$ تساوي:

(a) $\cos\frac{4\pi}{21}$

(b) $\sin\frac{4\pi}{21}$

(c) $\cos\frac{10\pi}{21}$

(d) $\sin\frac{10\pi}{21}$

$$\sin\frac{\pi}{3}\ \cos\frac{\pi}{7}-\cos\frac{\pi}{3}\ \sin\frac{\pi}{7}=\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{7}\right)=\sin\frac{4\pi}{21}$$

(11) $\dfrac{\tan\frac{\pi}{5} - \tan\frac{\pi}{3}}{1 + \tan\frac{\pi}{5}\tan\frac{\pi}{3}}$ تساوي:

(a) $\tan\dfrac{2\pi}{15}$ (b) $\tan\dfrac{8\pi}{15}$

(c) $\tan\left(\dfrac{-8\pi}{15}\right)$ (d) $\tan\left(\dfrac{-2\pi}{15}\right)$

$$\frac{\tan\frac{\pi}{5} - tan\,\frac{\pi}{3}}{1 - \tan\frac{\pi}{5}\cdot\tan\frac{\pi}{3}} = \tan\left(\frac{\pi}{5} - \frac{\pi}{3}\right) = \tan\left(-\frac{2\pi}{15}\right)$$

تمرَّنْ 9–5

متطابقات ضعف الزاوية ونصفها

Double–Angle and Half–Angle Identities

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (1–5)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) $\sin 4x = 2\sin 2x \cos 2x$ — (a) (b)

لأنه من قانون ضعف الزاوية يكون

$\sin 4x = \sin 2(2x) = 2\ \sin(2x)\cos(2x)$

(2)

(3) $\sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{2}$ — (a) (b)

$\sin\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$

بتربيع الطرفين

$\sin^2\frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{2}$

(4) $\cos 6x = 2\cos^2 3x - 1$ — (a) (b)

لأنه من قانون ضعف الزاوية يكون

$\cos 6x = \cos 2(3x) = 2\ \cos^2(3x) - 1$

(5) $\cos x = 2\cos^2\frac{x}{2} - 1$

a b

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$$

بالتعويض عن x بـــــ $\frac{x}{2}$ يكون

$$\cos 2\left(\frac{x}{2}\right) = 2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - 1 \Rightarrow \cos x = 2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - 1$$

في التمارين (6–8)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(6) $2\cos^2\frac{x}{2}$ تساوي:

a $\frac{1+\cos x}{2}$ **b** $1+\cos x$

c $1+\cos 2x$ d $\frac{1-\cos 2x}{2}$

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$$

بالتعويض عن x بـــــ $\frac{x}{2}$ يكون

$$\cos x = \cos 2\left(\frac{x}{2}\right) = 2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - 1 \Rightarrow 2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) = \cos x + 1$$

(7) $\cos\frac{\pi}{8}$ تساوي:

a $\frac{2+\sqrt{2}}{2}$ b $\sqrt{2}-1$

c $\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ d $\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2}}$

$$\cos\frac{\pi}{8} = \cos\left(\frac{\frac{\pi}{4}}{2}\right) \qquad .\ 0 < \frac{x}{4} < \frac{\pi}{2} \quad .\ 0 < \frac{x}{8} < \frac{\pi}{2}$$

$$\cos\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{2+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{\frac{2+\sqrt{2}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$

(8) إذا كان: $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$, $\cos\theta = \frac{-7}{25}$ فإن $\cos\frac{\theta}{2}$ يساوي:

(b) $\frac{-2}{5}$	(a) $\frac{2}{5}$
(d) $\frac{3}{5}$	(c) $\frac{-3}{5}$

$$0 < \vartheta < \frac{3\pi}{2} \qquad \Rightarrow 0 < \frac{\vartheta}{2} < \frac{3\pi}{4}$$

الزاوية $\frac{\vartheta}{2}$ تقع في الربع الثاني ويكون $\cos\frac{\vartheta}{2} < 0$

$$\cos\frac{\vartheta}{2} = -\sqrt{\frac{1+\cos\frac{\vartheta}{2}}{2}} = -\sqrt{\frac{1+\left(\frac{-7}{25}\right)}{2}}$$

$$= -\sqrt{\frac{1-\frac{7}{25}}{2}} = -\sqrt{\frac{\frac{18}{25}}{2}} = -\sqrt{\frac{9}{25}} = -\frac{3}{5}$$

تمرَّنْ 10−1

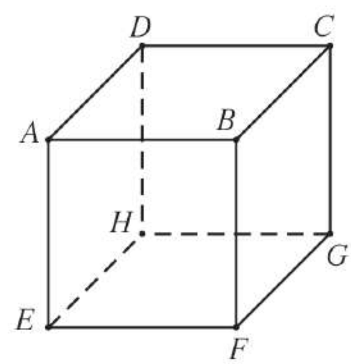
المستقيمات والمستويات في الفضاء

Lines and Planes in Space

المجموعة B تمارين موضوعية

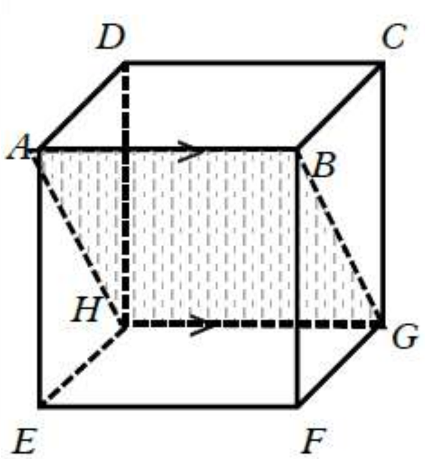
في التمارين (1−5)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

$ABCDEFGH$ مكعّب.



(1) المستقيمان AB , HG يعينان مستويًا.

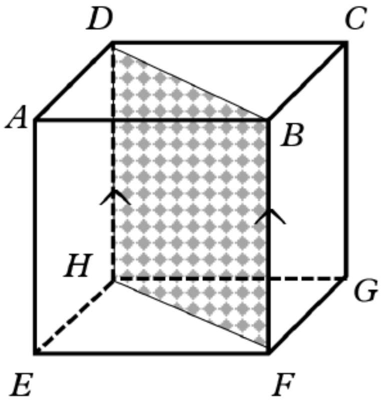
a b



المستقيمان $A B$, $H G$ يعينان مستوياً

(لأنهما مستقيمان متوازيان)

(2) النقاط B, D, H, F تعيّن مستويًا.



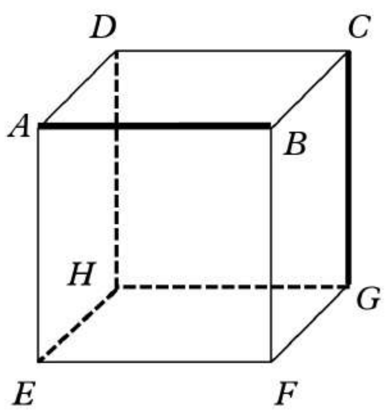
النقاط B , D , H , F تعين مستوياً

لأن $\overleftrightarrow{BF} \,//\, \overleftrightarrow{DH}$

وبالتالي فأن B , D , H , F تعين المستو $(BDHF)$

a b

(3) النقاط A, B, G, C تعيّن مستويًا.

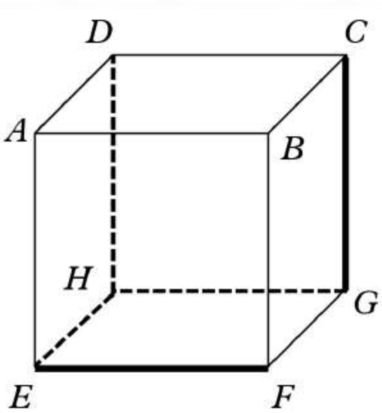


النقاط $A . B . G . C$ لا تعين مستوياً

لأن $\overleftrightarrow{AB}$ و $\overleftrightarrow{GC}$ متخالفان ولا يمكن أن يحويهما مستو واحد

a b

(4) المستقيمان GC, EF يعينان مستويًا.

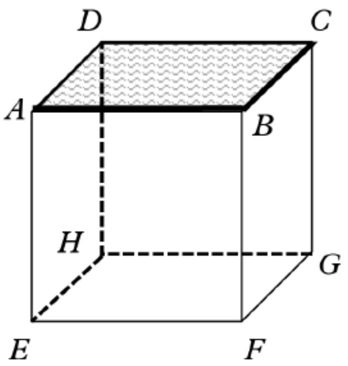


المستقيمان $\overleftrightarrow{GC} . \overleftrightarrow{EF}$ لا يعينان مستوياً

لأنهما مستقيمان متخالفان

(5) المستقيمان BC, AB يعينان مستويًا.

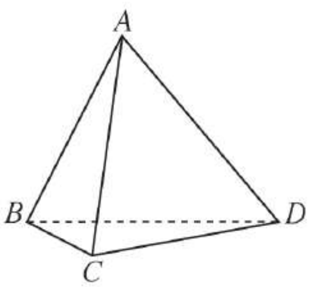
a b



المستقيمان BC . AB يعينان مستوياً

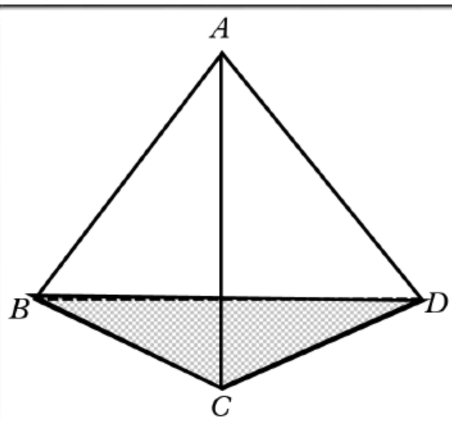
لأنهما مستقيمان متقاطعان $\overleftrightarrow{BC} \cap \overleftrightarrow{AB} = \{B\}$

في التمرينين (7–6)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.



(6) النقاط B, C, D تعيّن:

a مستويًا واحدًا
b مستويين مختلفين
c عدد لا منته من المستويات المختلفة
d لا يمكن أن تعيّن مستويًا



النقاط $B . C . D$ تعين مستوياً واحداً

(لأنهما ليست على استقامة واحدة)

(7)

تمرَّنْ 10−2

المستقيمات والمستويات المتوازية في الفضاء

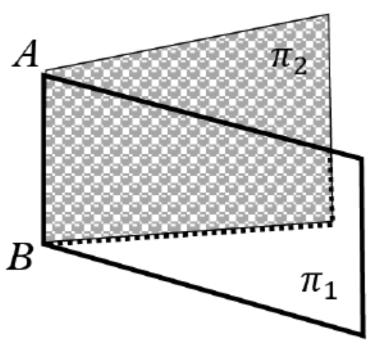
Parallel Lines and Planes in Space

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (1−5)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) يكون المستويان متوازيين إذا اشتركا في نقطة واحدة على الأقل. a **b**

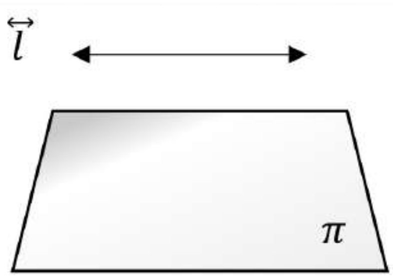
إذا اشتركا المستويان π_2 . π_1 في نقطة واحدة على الأقل فإنها يشتركان في مستقيم وبالتالي فهما غير متوازيين .

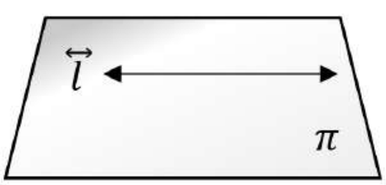


(2) إذا وازى مستقيم مستويًا فإنهما لا يشتركان في أي نقطة من نقاطهما. a **b**

إذا كان $\overleftrightarrow{l} // \pi$

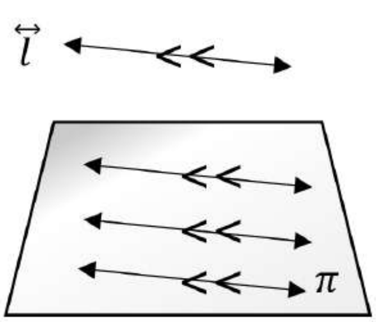
فأنه أما يكون $\overleftrightarrow{l} \subset \pi$ أو $\overleftrightarrow{l} \cap \pi = \emptyset$





(3) إذا وازى مستقيم l مستوي π فإن $\overleftrightarrow{l}$ يوازي مستقيمًا وحيدًا في π a **b**

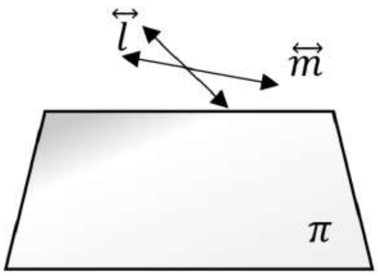
إذا مستقيم $\overleftrightarrow{l}$ مستوي π فإنه يوازي عدد لانهائي من المستقيمات المتوازية في π وليس مستقيماً واحداً .



(4) إذا كان: $\overleftrightarrow{m} \,//\, \pi$ ، $\overleftrightarrow{l} \,//\, \pi$ فإن $\overleftrightarrow{l} \,//\, \overleftrightarrow{m}$

a b

من الممكن أن $\overleftrightarrow{l}$ لأيوازى $\overleftrightarrow{m}$

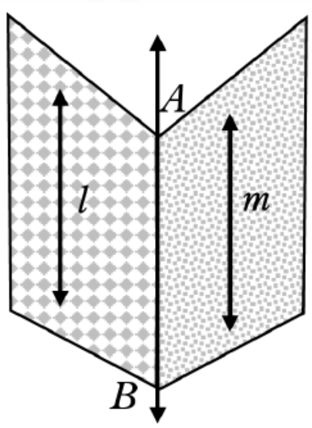


(5) إذا توازى مستقيمان ومرّ بهما مستويان متقاطعان فإن تقاطعهما هو مستقيم يوازي كلًّا من هذين المستقيمين.

a b

إذا $\overleftrightarrow{l} \,//\, \overleftrightarrow{m}$ ، $\overleftrightarrow{l} \subset \pi_1$ ، $\overleftrightarrow{m} \subset \pi_2$

فأن $\overleftrightarrow{l} \,//\, \overleftrightarrow{m} \,//\, \overleftrightarrow{AB}$



في التمارين (6–8)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(6) إذا توازى مستويان مختلفان وقطعهما مستو ثالث فإن خطّي التقاطع:

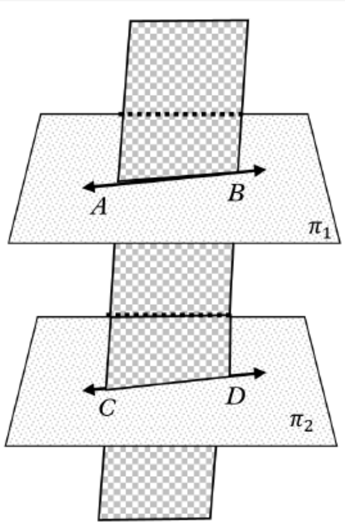
a متقاطعان b متخالفان

c متوازيان d متعامدان

إذا كان $\pi_1 \,//\, \pi_2$ ، المستوى π قاطع لهما

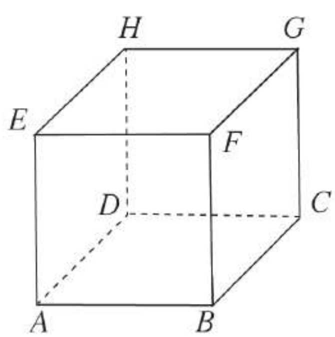
وكان $\pi_2 \cap \pi = \overleftrightarrow{CD}$. $\pi_1 \cap \pi = \overleftrightarrow{AB}$

فإن $\overleftrightarrow{AB} \,//\, \overleftrightarrow{CD}$



(7)

(8) في المكعّب $ABCDEFGH$، $\overleftrightarrow{BD}$, $\overleftrightarrow{EG}$ هما:

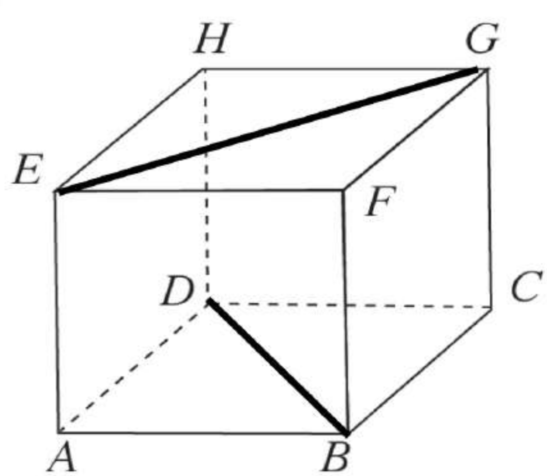


a) متوازيان

b) متقاطعان

c) متخالفان

d) يحويهما مستوٍ واحد



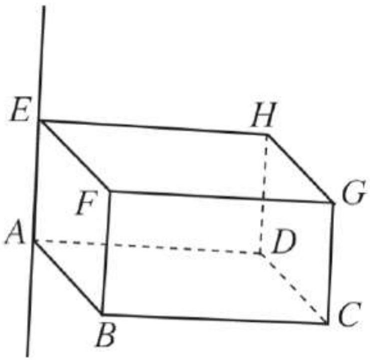
في المكعب $ABCDEFGH$

$\overleftrightarrow{BD}$ // $\overleftrightarrow{EG}$ مستقيمان متخلفان

تمرّنْ 10–3

تعامد مستقيم مع مستوٍ

Perpendicular Line with a Plane



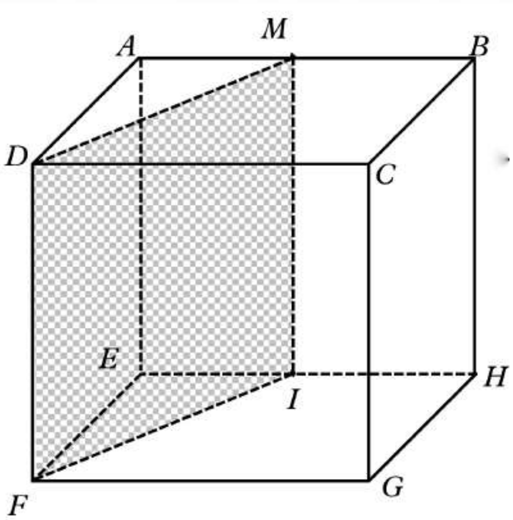
المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (1–7)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

أسئلة التمرينين (1–2)، على الشكل المقابل حيث $ABCDEHGF$ مكعّب،

النقطة M منتصف $\overline{AB}$، I منتصف $\overline{EH}$.

(1) $\overleftrightarrow{MI} \perp (EFGH)$ — (a) (b)



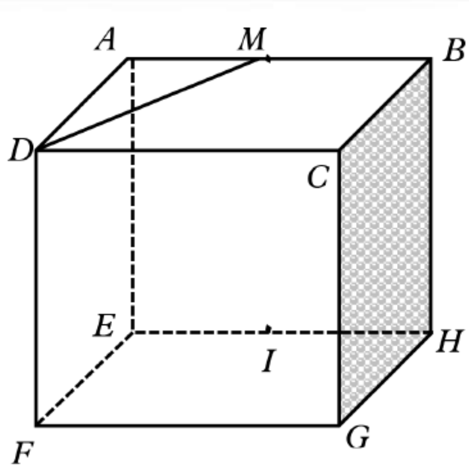
لأن وجه المكعب مربع الشكل والقطعة المستقيمة الواصلة بين منتصفي ضلعين متقابلين توازي هذين الضلعين

، وبالتالي فإن $\overline{MI} \,//\, \overline{BH}$

وحيث $\overline{BH} \perp (EFGH)$

فأن $\overline{MI} \perp (EFGH)$

(2) $\overleftrightarrow{MD} \perp (BCGH)$ — (a) (b)



$\overline{AD} \,//\, \overline{BC}$ ، $\overline{MD}$ ليس عمودي على $\overline{AD}$

وبالتالي فإن $\overline{MD}$ ليس عمودياً على $\overline{BC}$

وحيث $\overline{MD} \subset (BCGH)$

فإن $\overline{MD}$ ليس عمودي على $(BCGH)$

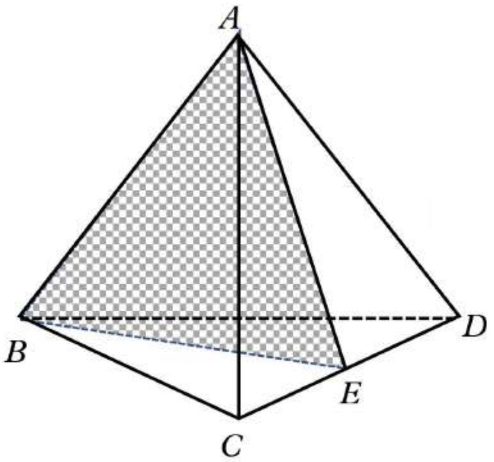
(3) إذا كان $ABCD$ هرم ثلاثي القاعدة جميع أحرفه متطابقة فإن: $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{CD}$

a　　b

إذا كان الهرم ثلاثي القاعدة وجميع أحرفه متطابقة فإن أي وجه من أوجهه يكون مثلث متطابق الأضلاع ، ويكون

$(ABE) \perp \overleftrightarrow{CD}$ لأن ∴ منتصف $\overline{CD}$

وبالتالي فإن $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{CD}$ لأن $\overleftrightarrow{AB} \subset (ABE)$

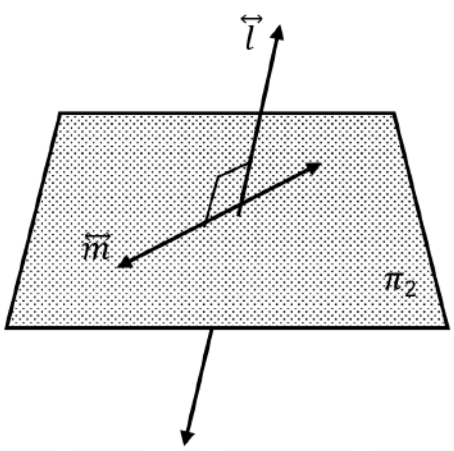


(4) إذا كان $\overleftrightarrow{m} \subset \pi$, $\overleftrightarrow{l} \perp \overleftrightarrow{m}$ فإن $\overleftrightarrow{l} \subset \pi$

a　　b

في الشكل المقابل $\overleftrightarrow{l} \perp \pi . \overleftrightarrow{m} \subset \pi$

π **ليست محتواه** $\overleftrightarrow{l}$

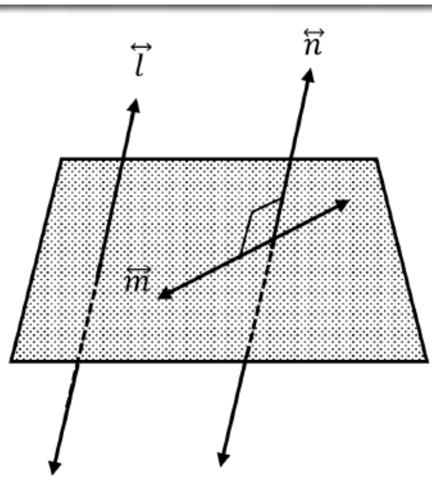


(5) إذا كان المستقيمان l , m متخالفان و كان $\overleftrightarrow{n} \perp \overleftrightarrow{m}$ فإن $\overleftrightarrow{l} \perp \overleftrightarrow{n}$

a　　b

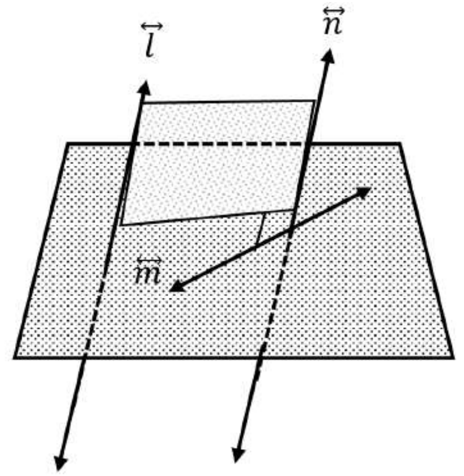
في الشكل المقابل $\overleftrightarrow{m}$ $\overleftrightarrow{l}$ متخالفان $\overleftrightarrow{m} \perp \overleftrightarrow{n}$

$\overleftrightarrow{l}$ **ليست عموديا** $\overleftrightarrow{n}$



(6) إذا كان المستقيمان l , m متخالفان و كان $\overleftrightarrow{n} \perp \overleftrightarrow{m}$ فإن $\overleftrightarrow{l} , \overleftrightarrow{n}$ متخالفان.

a　b



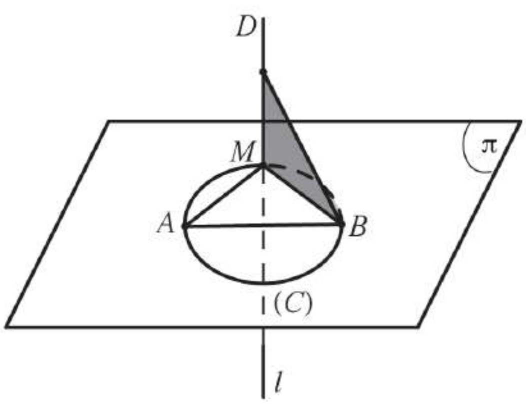
في الشكل المقابل $\overleftrightarrow{m}$ $\overleftrightarrow{l}$ متخالفان $\overleftrightarrow{m} \perp \overleftrightarrow{n}$

فقد يكون $\overleftrightarrow{l} . \overleftrightarrow{n}$ يحويهما مستوي واحد

في التمارين (8–11)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

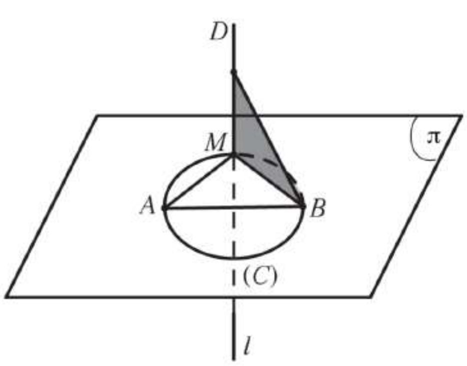
(7) في الشكل المقابل :

إذا كان $\overleftrightarrow{l} \perp (AMB)$ ، $\overline{AB}$ قطر في الدائرة (C) فإن:



a) $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{BD}$　b) $\overleftrightarrow{l} \perp (BMD)$

c) $\overleftrightarrow{AM} \perp (BMD)$　d) $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{BM}$



$\because \overleftrightarrow{l} \perp (AMB) \ . \overleftrightarrow{AM} \subseteq (AMB)$

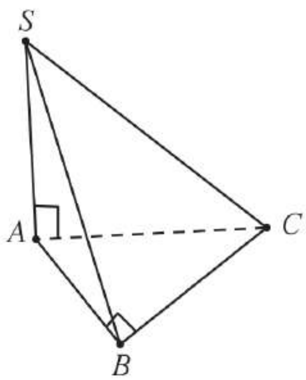
$\therefore \overleftrightarrow{l} \perp \overleftrightarrow{AM}$ ———————— (1)

$\because$ الزاوية المحيطية المرسومة على قطر الدائرة تساوي 90°

$\therefore \overleftrightarrow{MB} \perp \overleftrightarrow{AM}$ ———————— (2)

من　$\overleftrightarrow{AM} \perp (BMD)$　نظرية

(8) في الشكل المقابل إذا كان $\overleftrightarrow{SA} \perp (ABC)$ ، $m(\widehat{B}) = 90^\circ$ فإن:

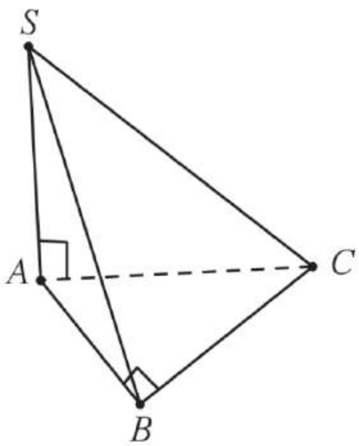


(a) المثلث SAB قائم في $\widehat{B}$

(b) $\overleftrightarrow{CB} \perp (SAB)$

(c) المثلث SAB متطابق الضلعين.

(d) المثلث SCB قائم في $\widehat{C}$



$\because \overleftrightarrow{SA} \perp (ABC) \,.\, \overleftrightarrow{BC} \subseteq (ABC)$

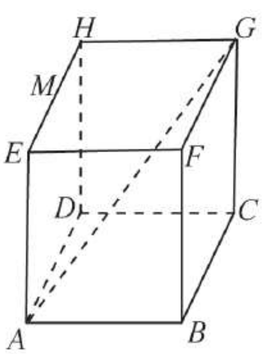
$\therefore \overleftrightarrow{SA} \perp \overleftrightarrow{BC}$ ———————— (1)

$\because$ في المثلث ABC فيه $m(\hat{B}) = 90^\circ$

$\therefore \overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{BC}$ ———————— (2)

من نظرية $\overleftrightarrow{CB} \perp (SAB)$

(9) يمثل الشكل المقابل مكعبًا، إذا كان طول حرفه $3\,cm$ فإن طول قطره $\overline{AG}$ يساوي:

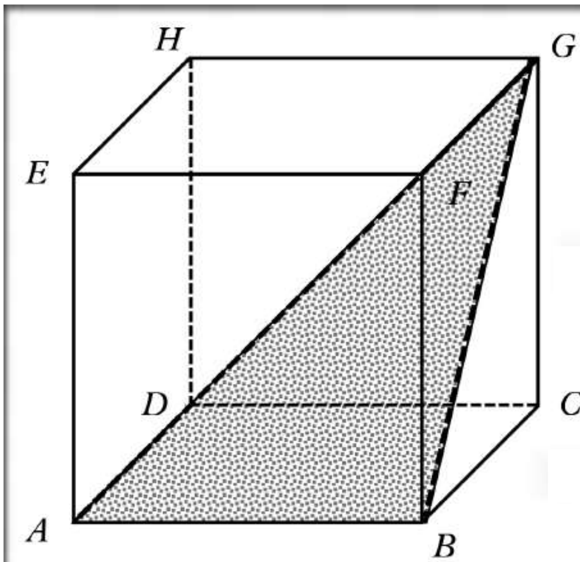


(a) $\sqrt{3}\,cm$

(b) $3\sqrt{3}\,cm$

(c) $9\,cm$

(d) $18\,cm$



لديك الأن معلومة هامة:

في المكعب تكون النسبة بين

طول ضلع المكعب : طول قطر أحد الأوجه : طول القطر المكعب

$= 1 : \sqrt{2} : \sqrt{3}$

وحيث أن طول ضلع المكعب $= 3\,cm$ C

طول ضلع المكعب : طول قطر أحد الأوجه : طول القطر المكعب

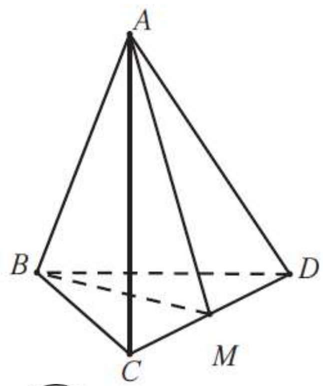
$= 3 : 3\sqrt{2} : 3\sqrt{3}$

الزاوية الزوجية

The Dihedral Angle

تمرَّنْ 10−4

المجموعة B تمارين موضوعية



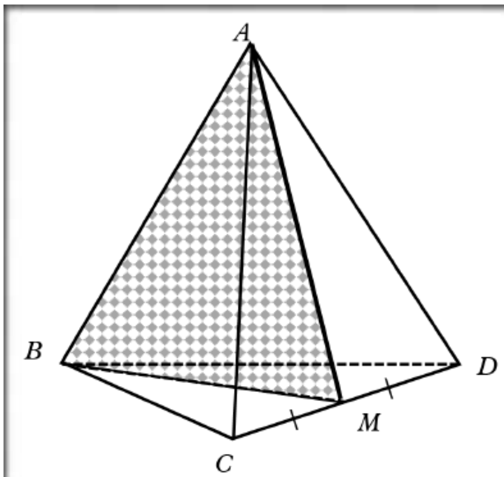
في التمارين (1−4)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

أسئلة التمرينين (1−2)، على الشكل المقابل.

إذا كان $ABCD$ هرم جميع حروفه متساوية الطول، M منتصف $\overline{CD}$

فإن:

(1) $\overline{CD}$ عمودي على $\overline{AB}$ (a)   (b)



إذا كان الهرم ثلاثي القاعدة وجميع أوجهه متطابقة

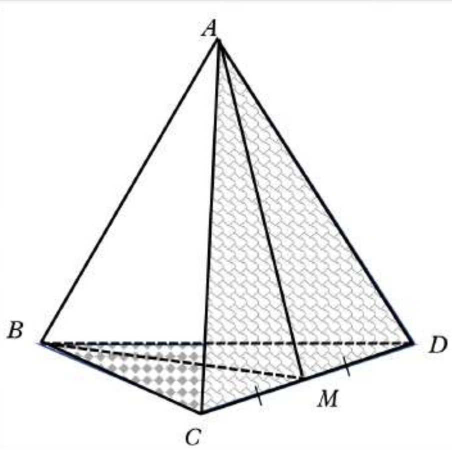
أي أن يكون كل وجه من أوجه مثلث متطابق الأضلاع

ويكون : $\overleftrightarrow{AM} \perp \overleftrightarrow{CD}$. $\overleftrightarrow{BM} \perp \overleftrightarrow{CD}$

يكون : $\overleftrightarrow{CD} \perp (ABM)$

$\overleftrightarrow{AB} \subset (ABM)$ ، $\overleftrightarrow{CD} \perp \overleftrightarrow{AB}$

(2) الزاوية المستوية للزاوية الزوجية $(BDC , \overleftrightarrow{DC} , ADC)$ هي $A\widehat{M}D$ (a)   (b)



لأن حافة الزاوية الزوجية هي : $\overleftrightarrow{CD}$

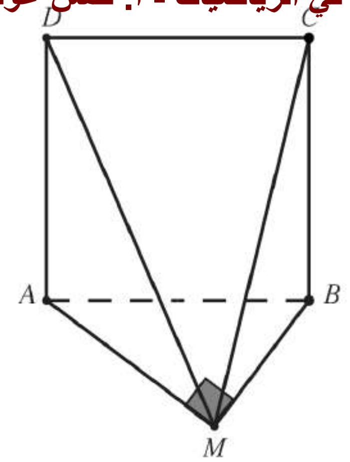
$\overleftrightarrow{AM} \perp \overleftrightarrow{CD}$. $\overleftrightarrow{AM} \subset (ACD)$

$\overleftrightarrow{BM} \perp \overleftrightarrow{CD}$. $\overleftrightarrow{BM} \subset (BCD)$

وبالتالي فإن :

الزاوية المستوية للزاوية الزوجية

$(BCD . \overleftrightarrow{DC} . ADC)$ **هي** $A\,\widehat{M}\,B$



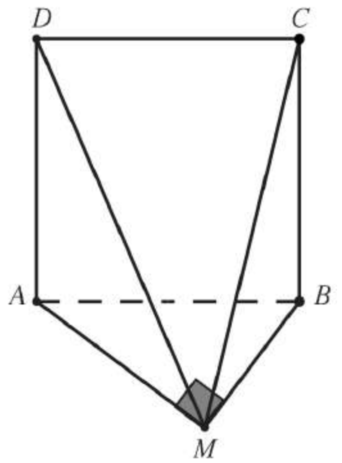
أسئلة التمرينين (4–3)، على الشكل المقابل.

المثلث AMB قائم الزاوية في M، $\overleftrightarrow{AD}$ متعامد مع المستوي AMB

إذا أخذنا النقطة C بحيث يكون $ABCD$ مربعًا.

فإن:

(3) $\overleftrightarrow{BM}$ متعامد مع (MAD) b   a



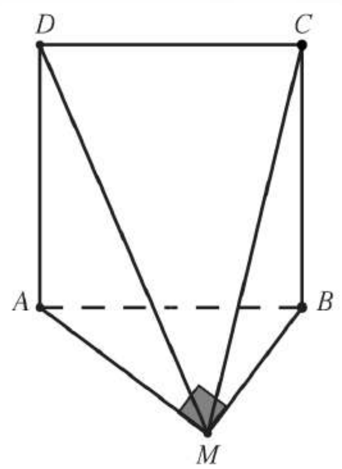
$\because \overleftrightarrow{AD} \perp (AMB) \ . \overleftrightarrow{BM} \subset (AMB)$

$\therefore \overleftrightarrow{AD} \perp \overleftrightarrow{BM}$ ——— (1)

$\therefore \overleftrightarrow{AM} \perp \overleftrightarrow{BM}$ ——— (2)

من (2) , (1) $\therefore \overleftrightarrow{BM} \perp (MAD)$ نظرية

(4) $\overleftrightarrow{CB}$ متعامد مع (AMB) b   a



$\because \overleftrightarrow{AD} \perp (AMB) \ . \overleftrightarrow{BM} \subset (AMB)$

$\therefore \overleftrightarrow{AD} \perp \overleftrightarrow{BM}$ ——— (1)

$\therefore \overleftrightarrow{AM} \perp \overleftrightarrow{BM}$ ——— (2)

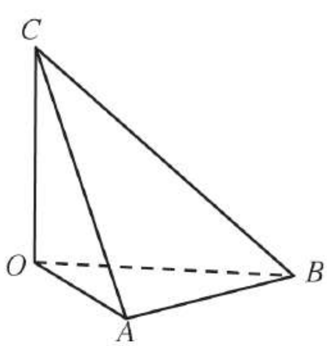
من (2) , (1) $\therefore \overleftrightarrow{BM} \perp (MAD)$ نظرية

(من خواص المربع) $\overleftrightarrow{BC} \parallel \overleftrightarrow{AD}$. $\overleftrightarrow{AD} \perp (AMB)$

$\overleftrightarrow{BC} \perp (AMB)$

(7)

أسئلة التمرينين (8–9) على الشكل المقابل.



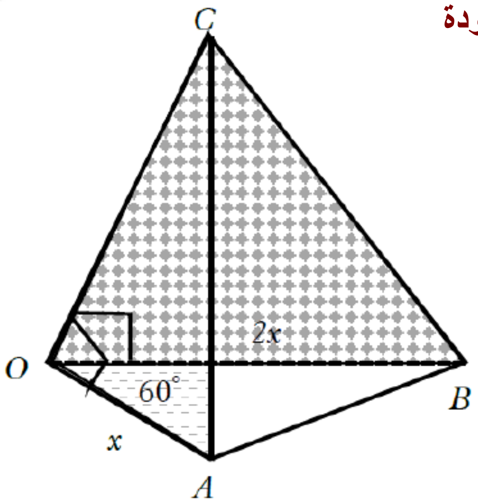
إذا كان OAB مثلث فيه:

$OA = x$ ، $OB = 2x$ ، $m(A\widehat{O}B) = 60^\circ$

$\overleftrightarrow{OC}$ متعامد مع المستوي OAB

(8) طول $\overline{AB}$ يساوي:

ⓐ x ⓑ $x\sqrt{2}$ ⓒ $x\sqrt{3}$ ⓓ $\frac{x}{2}$



لإيجاد AB نستخدم قانون جيب التمام في المثلث AOB

$$(AB)^2 = (OA)^2 + (OB)^2 - 2OA \cdot OB\ \cos(A\hat{O}B)$$

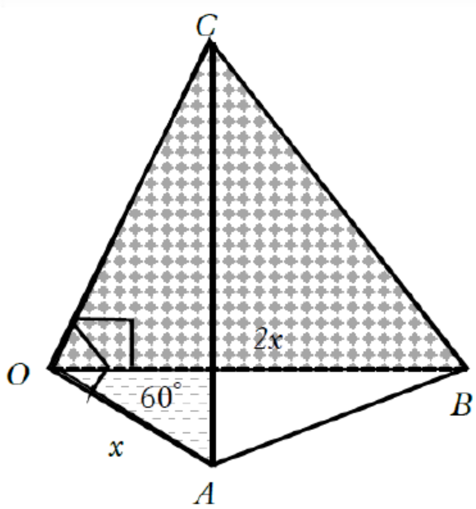
$$(AB)^2 = (x)^2 + (2x)^2 - 2 \times x \times 2x\ \cos(60)$$

$$(AB)^2 = x^2 + 4x^2 - 4x^2 \times \frac{1}{2} = 3x^2$$

$$AB = \sqrt{3}\, x$$

(9) قياس الزاوية الزوجية $(AOC, \overleftrightarrow{OC}, BOC)$ هو:

ⓐ 30° ⓑ 45° ⓒ 60° ⓓ 90°

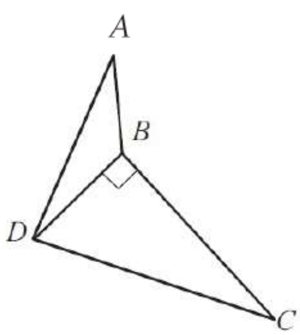


$A\ \hat{O}\ B$ هي الزاوية المستوية للزاوية الزوجية $(AOC . \overleftrightarrow{OC} . BOC)$

وبالتالي فإن قياس الزاوية الزوجية $(AOC . \overleftrightarrow{OC} . BOC)$ يساوي 60°

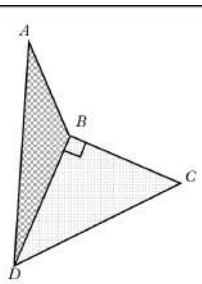
(10) في الشكل المقابل، المثلث DBC قائم الزاوية في B،

فإذا كان $\overleftrightarrow{AB}$ عمودي على (DBC) فإن الزاوية المستوية للزاوية الزوجية $\overleftrightarrow{BD}$ هي:



ⓑ $A\hat{B}C$ ⓐ $D\hat{B}C$

ⓓ $A\hat{D}C$ ⓒ $A\hat{B}D$



لان حافة الزاوية الزوجية هي $\overleftrightarrow{BD}$

$\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{BD}$ ، $\overleftrightarrow{CB} \perp \overleftrightarrow{BD}$

وبالتالي فإن الزاوية المستوية للزاوية الزوجية

$\overleftrightarrow{BD}$ هي $A\hat{B}C$

تمرَّنْ 11-1

مبدأ العد والتباديل والتوافيق

Counting Principle, Permutations and Combinations

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (1-5)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) قيمة المقدار $10!$ هي 3 628 800 — **a** b

باستخدام الآلة الحاسبة نجد أن : $10! = 3628800$

(2) قيمة المقدار $4! \times 5!$ هي 360 — a **b**

لأن باستخدام الآلة الحاسبة : نجد أن : $5! \times 4! = 120 \times 24 = 2880$

(3) عدد طرق جلوس 4 أشخاص على 4 مقاعد في صفّ هو $4!$ — **a** b

لان الشخص الأولي لدية أربعة فرص في الجلوس ، و الشخص الثاني لدية ثلاثة فرص في الجلوس ، الشخص الثاني لدية فرصتان في الجلوس ، الشخص الرابع لدية فرص واحده في الجلوس

وبالتالي يكون عدد طرق الجلوس = $4! = 4\times3\times2\times1$

(4) قيمة المقدار $3 \times {}_5C_4$ هي 15 — **a** b

باستخدام الآلة الحاسبة $3\times {}_5C_3 = 5\times3 = 15$

(5) $(n-r)! = n! - r!$

a   **b**

$(n-r)! \neq n! - r!$ لأن المضروب لا يمكن توزيعه

في التمارين (6–15)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(6) قيمة المقدار $\frac{10!}{7!3!}$ هي:

a $\frac{10}{21}$ b $\frac{1}{120}$ **c** 120   d 1

باستخدام الآلة الحاسبة نجد أن :

$$\frac{10!}{7!\times 3!} = \frac{10\times 9\times 8\times 7!}{7!\times 3\times 2\times 1} = \frac{10\times 9\times 8}{3\times 2\times 1} = 120$$

(7) قيمة المقدار ${}_{10}C_6 \times {}_6P_4$ هي:

a 75 600   b 7 560   c 2.5   d 210

باستخدام الآلة الحاسبة نجد أن :

$${}_{10}C_6 \times {}_6P_4 = 120\times 360 = 75600$$

(8) قيمة المقدار ${}_9C_2 \times \frac{{}_7C_4}{{}_9C_4}$ هي:

a 18   b 5.184   **c** 10   d 735

باستخدام الآلة الحاسبة نجد أن :

$${}_9C_2 \times \frac{{}_7C_4}{{}_9C_4} = \frac{\frac{7\times 6\times 5\times 4}{4\times 3\times 2\times 1}}{\frac{9\times 8\times 7\times 6}{4\times 3\times 2\times 1}} = 10$$

(9) بكم طريقة مختلفة يمكن اختيار 5 لاعبين لفريق السلة من بين 12 لاعبًا إذا كان ترتيب المراكز في الفريق مهمًّا؟

a 95 040   b 475 200   c 392   d 11 404 800

إذا كان ترتيب المراكز مهم فإن عدد طرق اختيار 5 لاعبين من بين 12 لاعبا

يساوي ${}_{12}P_5$ وباستخدام الآلة الحاسبة نجد أن ${}_{12}P_5 = 95040$

(10) بكم طريقة مختلفة يمكن اختيار 3 أعلام من مجموعة من 7 أعلام مختلفة؟

(a) 210 (b) 35 (c) 840 (d) 24

حيث أن الاختيار من مجموعة فهذا يعني أن ترتيب العناصر غير مهم ذلك نحسب عدد التوافيق ، وبالتالي فأن عدد طرق اختيار 3 أعلام من 7 أعلام تساوي $_7C_3$ باستخدام الآلة الحاسبة نجد أن $_7C_3 =$

(11)

(12)

(13)

(14) إذا كان: $_nP_3 = 60$ فإن n تساوي

ⓐ 6 ⓑ 5 ⓒ 4 ⓓ 2

$$_nP_3 = 60$$

$$n\,(n-1)\,(n-2) = 60$$

$$n\,(n-1)\,(n-2) = 5 \times 4 \times 3$$

$$n = 5$$

(15) مجموعة حلّ المعادلة: $_6C_r = 15$ هي:

ⓐ $\{2\}$ ⓑ $\{4\}$ ⓒ $\{2, 4\}$ ⓓ $\{3\}$

عندما $r = 2$ **فإن** $_6C_r = {}_6C_2 = 15$ **(مقبول)**

عندما $r = 3$ **فإن** $_6C_r = {}_6C_3 = 20$ **(مرفوض)**

عندما $r = 4$ **فإن** $_6C_r = {}_6C_4 = 15$ **(مقبول)**

تمرَّنْ 11−2

نظرية ذات الحدين

The Binomial Theorem

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (5−1)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) مفكوك $(c+1)^5$ هو: $c^5+5c^4+10c^3+10c^2+5c+1$

a ●   b

مفكوك

$$(c+1)^5 = {}_5C_0c^5 + {}_5C_1c^4 + {}_5C_2c^3 + {}_5C_3c^2 + {}_5C_4c + {}_5C_5c^0$$

$$(c+1)^5 = c^5 + 5c^4 + 10c^3 + 10c^2 + 5c + 1$$

(2) إذا كان الحد $126c^4d^5$ أحد حدود مفكوك $(c+d)^n$، فإنّ قيمة n هي 5

a   b ●

إذا كان الحد $126\,C^4d^5$ **أحد مفكوك** $(c+d)^n$ **فإن** :

$$n - r = 4 \ldots\ldots\ldots (1) \quad , r = 5 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

بالتعويض من $(1) , (2)$ **فإن**

$$n - 5 = 4 \Rightarrow n = 9$$

(3) إذا كان معامل الحد الثاني في مفكوك $(r+x)^n$ هو 7 فإنّ قيمة n هي 7

a ●   b

معامل T_2 **يساوي** 7

$${}_nC_1 = 7 \Rightarrow n = 7$$

(4) الحدّ الثاني من $(x+3)^9$ هو $54x^8$

a **b**

نوجد الحد الثاني في مفكوك $(x+3)^9$

$$\because T_{r+1} = n\,C_r \times x^{n-r} \times y^r$$

$$T_2 = T_{1+1} = 9\,C_1 \times x^{9-1} \times 3^1 = 27\,x^9$$

(5) معامل الحد السابع في مفكوك $(x-y)^7$ هو عدد سالب.

a **b**

نوجد الحد السابع في مفكوك $(x-3)^7$

$$\because T_{r+1} = n\,C_r \times x^{n-r} \times y^r$$

$$T_7 = T_{6+1} = 7\,C_6 \times x^{7-6} \times (-3)^6 = 27\,x$$

يكون معامل الحد السابع موجب لأن (-3) مرفوعة لأس زوجي

(6) مفكوك $(a-b)^3$ هو:

a) $a^3 + a^2b + ab^2 + b^3$

b) $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

c) $a^3 - a^2b + ab^2 - b^3$

d) $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

مفكوك

$$(a-b)^3 = {}_3C_0\,a^3 - {}_3C_1\,a^3b + {}_5C_2\,c^2b^2 - {}_3C_3\,b^3$$
$$= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

(7) الحد الثالث من مفكوك $(a-b)^7$ هو:

a) $-21a^5b^2$

b) $-7a^6b$

c) $7a^6b$

d) $21a^5b^2$

نوجد الحد الثالث في مفكوك $(a-b)^7$

$$\because\ T_{r+1} = n\,C_r \times x^{n-r} \times y^r$$

$$T_3 = T_{2+1} = 7\,C_2 \times (a)^{7-2} \times (-b)^2 \quad = 21\,a^5\,b^2$$

(8) في مفكوك $(2a-3b)^6$ الحد الذي معامله 2 160 هو:

(a) الحدّ الثاني

(b) الحد الثالث

(c) الحد الرابع

(d) الحد الخامس

مفكوك $(2a-3\,b)^6$

$$(2a-3\,b)^6 = {}_6C_0(2a)^6 + {}_6C_1(2a)^{6-1}(-3b)^1 + {}_6C_2(2a)^{6-2}(-3b)^2$$

$${}_6C_3(2a)^{6-3}(-3b)^3 + {}_6C_4(2a)^{6-4}(-3b)^4 + {}_6C_5(2a)^{6-5}(-3b)^5$$

$$+\,{}_6C_6(2a)^{6-6}(-3b)^6$$

$$(2a-3\,b)^6 = 64\,a^6 - 576a^5\,b + 2160\,a^4\,b^2 + \cdots$$

معامل الحد الثالث الذي معاملة *2160*

(9) معامل الحد الثالث في مفكوك $(3c-4b)^5$ هو:

(a) 5 170

(b) 3 312

(c) 4 320

(d) 2 316

نوجد الحد الثالث في مفكوك $(3c-4b)^5$

$$\because\ T_{r+1} = n\,C_r \times x^{n-r} \times y^r$$

$$T_3 = T_{2+1} = 5\,C_2 \times (3c)^{5-2} \times (-4b)^2 \quad = 4320\,a^3\,b^2$$

(10) في مفكوك $(x+y)^9$ تكون رتبة الحد: $126x^5y^4$ هي:

(a) الرابعة (b) الخامسة (c) السادسة (d) التاسعة

إذا كان الحد $126\,x^5\,y^4$ أحد حدود مفكوك $(x+y)^9$

$\because\ T_{r+1} = n\,C_r \times x^{n-r} \times y^r$

$n = 9\ .\ 9 - r = 5 \ \Rightarrow r = 9 - 5 = 4$

وبالتالي فإن : $r = 4$ وتكون رتبة الحد هي الرتبة الخامسة لأن

$T_5 = T_{4+1}$

(11) في مفكوك $(3x+2y)^8$ الحد الذي يحوي x^3y^5 هو:

(a) T_3 (b) T_6 (c) T_5 (d) T_8

في مفكوك كثيرة الحدود $(3x+2y)^8$ نجد $n = 8$

في الحد الذي يحتوي على x^3y^5 نلاحظ أن أس y يساوي 5 وبالتالي فإن $r = 5$

$\because\ T_{r+1} = n\,C_r \times x^{n-r} \times y^r$

$\therefore\ T_{5+1} = 8\,C_3 \times (3x)^{8-5} \times (2y)^5 = 8\,C_5 \times 3^3 \times 2^5\, x^3 y^5$

الحد السادس هو الذي يحتوي على x^3y^5 أي الحد هو T_6

تمرَّنْ
11−3

الاحتمال

Probability

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (1−4)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1)

لأ

(2) الحدثان m، n مستقلان، $P(m)=\frac{12}{17}$ ، $P(n)=\frac{3}{8}$ إذًا $P(m\cap n)=\frac{9}{17}$

a　**b**

حيث أن الحدثين m , n مستقلان فيكون

$$p(n \cap m) = p(n) \cdot p(m) = \frac{2}{8} \times \frac{12}{17} = \frac{9}{34}$$

(3) عند رمي حجر نرد، فإن احتمال ظهور العدد 4 أو ظهور عدد زوجي يساوي $\frac{1}{2}$

a　b

$S = \{1.2.3.4.5.6\}$　　　$.n(s) = 6$

$A = \{4\}$　,　$B = \{2, 4, 6\}$

الحدث $A \cup B$ (**للحصول** 4 **أو عدد زوجي**)

$A \cup B = \{4\} \cup \{2.4.6\} = \{2.4.6\}$　　　$n(A \cup B) = 3$

$$p(A \cup B) = \frac{n(A\cup B)}{n(s)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

(4) في اختبار صح – خطأ، أجبت عن 5 أسئلة عشوائيًّا. احتمال أن تكون 3 من إجاباتك صحيحة هو $\frac{5}{16}$

a　b

الحدث E : (أن يكون 3 من إجاباتك صحيحة)
وحيث أن الإختيار صح أو خطأ فنستخدم احتمال ذات الحدين ،

وتكون $K = 3 \ .n = 5 \ \ 1 - m = \frac{1}{2} \ .m = \frac{1}{2}$

$\because P\,(E) = nC_k\, m^k \cdot (1-m)^{n-k}$

$\therefore P\,(E) = {}_5C_3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{5-3} = 10 \times \frac{1}{8} \times \frac{1}{4} = \frac{5}{16}$

في التمارين (5–11)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(5) الحدثان m، n مستقلان، $P(m) = \frac{1}{3}$، $P(n) = \frac{9}{10}$ إذاً $P(m \cap n)$ تساوي:

- a) $\frac{1}{3}$
- b) $\frac{25}{30}$
- c) $\frac{3}{10}$
- d) $\frac{11}{30}$

حيث أن n, m مستقلان فيكون

$p\,(n \cap m) = p(n) \cdot p(m)) = \frac{1}{3} \times \frac{9}{10} = \frac{3}{10}$

(6) الحدثان t، r متنافيان، $P(t) = \frac{3}{5}$، $P(r) = \frac{1}{3}$ إذاً $P(t \cup r)$ تساوي:

- a) $\frac{1}{5}$
- b) $\frac{14}{15}$
- c) $\frac{4}{15}$
- d) 0

حيث أن الحدثين r, t متنافيان فيكون :

$P\,(t \cup r) = P(t) + P(r) = \frac{3}{5} + \frac{1}{3} = \frac{14}{15}$

(7) الحدثان t، r متنافيان $P(t)=\frac{1}{7}$، $P(r)=60\%$ إذًا $P(t\cup r)$ تساوي:

a) 28%

b) 42%

c) $\frac{16}{35}$

d) $\frac{26}{35}$

حيث أن الحدثين $r\,,t$ متنافيان فيكون :

$$P\,(t\,\cup r\,)=P(t)+P(r)=\frac{1}{7}+\frac{3}{5}=\frac{26}{35}$$

(8) عند رمي حجر نرد فإن احتمال ظهور عدد زوجي أو عدد أولي يساوي:

a) $\frac{2}{3}$

b) $\frac{5}{6}$

c) $\frac{1}{2}$

d) 1

$S=\{1.2.3.4.5.6\}$ $\quad .n\,(s)=6$

$A=\{\,2,4,6\,\}\quad,\quad B=\{\,2\,,3\,,5\,\}$

الحدث $A\,\cup B$ (للحصول عدد زوجي أو عدد أولي)

$A\,\cup B=\{\,2.4.6\,\}\cup\{\,2\,.\,3.\,5\,\}=\{\,2.3.4.5.6\}\quad n\,(A\cup B)=5$

$$p\,(A\,\cup B\,)=\frac{n\,(A\cup B)}{n\,(s)}=\frac{5}{6}$$

(9) يحتوي كيس على 5 كرات من اللون الأزرق، 3 كرات من اللون الأحمر. أخذت عشوائيًّا كرتان معًا من الكيس. احتمال الحدث: «أن تكون كرة حمراء والأخرى كرة زرقاء» هو:

a) $\frac{1}{14}$

b) $\frac{28}{15}$

c) $\frac{2}{7}$

d) $\frac{15}{28}$

بفرض أن S فضاء العينة فيكون : $\quad n\,(S)=\,_8C_2=28$

وبفرض الحدث B : (كرة زرقاء وكرة حمراء) فيكون

$$n\,(B)=\,_5C_1\times{}_3C_1=5\times3=15$$

$$P\,(B)=\frac{\text{عدد نواتج الحدث B}}{\text{عدد نواتج فضاء العينة S}}=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{15}{28}$$