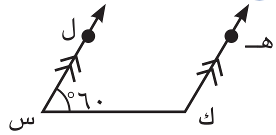
هل أنت مستعدّ؟

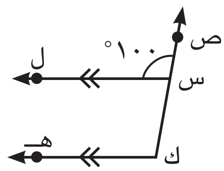
١ في كلّ من الأشكال التالية $\overleftarrow{\text{ك هـ}}$ // $\overleftarrow{\text{س ل}}$. أوجِد ق (س ك^ هـ) مع ذكر السبب .

أ



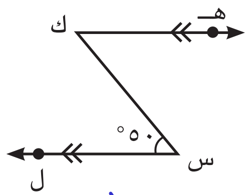
ق(س ك^ هـ) = ١٨٠ − ٦٠
= ١٢٠° بالتداخل

ب



ق(س ك^ هـ) = ١٠٠°
بالتناظر

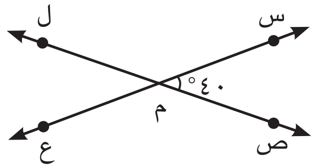
ج



ق(س ك^ هـ) = ٥٠°
بالتبادل

٢ في الشكل المقابِل ، $\overleftrightarrow{\text{س ع}} \cap \overleftrightarrow{\text{ص ل}}$ = { م } ،

ق (س م^ ص) = ٤٠° . أكمِل :



ق (ل م^ ع) = ق(س م^ ص) = ٤٠°

السبب : بالتقابل بالرأس .

ق (س م^ ل) = ١٨٠ − ٤٠ = ١٤٠°

السبب : لأن (س م^ ص) و (س م^ ل) زاويتين متكاملتين .

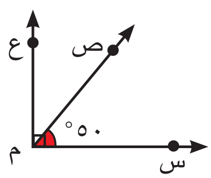
٣ إذا كانت س^ ، ص^ زاويتَين متكاملتَين ، ق (س^) = ٥٥° ، فأوجِد مع ذكر السبب .

ق (ص^) = ١٨٠ − ٥٥ = ١٢٥°

السبب : لأنه مجموع زاويتين متكاملتين يساوي ١٨٠°

٤ في الشكل المقابِل ، بحسب البيانات على الرسم ،

أكمِل :

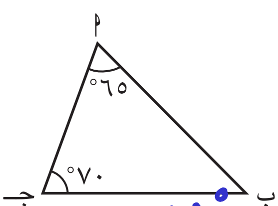


ق (ص م^ ع) = ٩٠ − ٥٠ = ٤٠°

السبب : لأن (ص م^ ع) و (س م^ ص) زاويتين متتامتين مجموعهما ٩٠

٥ في الشكل المقابِل ، بحسب البيانات على الرسم ،

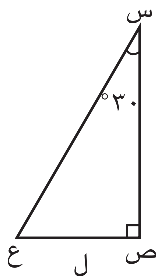
أكمِل :



ق (ب^) = ١٨٠ − (٦٥ + ٧٠) = ١٨٠ − ١٣٥ = ٤٥°

السبب : لأن مجموع قياسات المثلث يساوي ١٨٠°

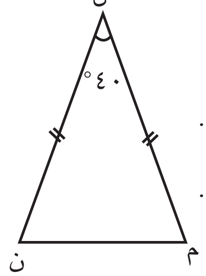
٦ في الشكل المقابِل ، أكمِل :



ق (ع^) = ٩٠ − ٣٠ = ٦٠°

السبب : لأنه الزاويتين المتتامتين مجموعها ٩٠°

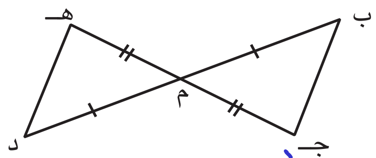
٧ في الشكل المقابِل ، أكمِل :



ق (ل م^ ن) = ½ (١٨٠ − ٤٠) = ½ × ١٤٠ = ٧٠°

السبب : لأنه زاويتي قاعدة المثلث المتطابق الساقين متساويتان

٨ في الشكل المقابِل ، أكمِل :



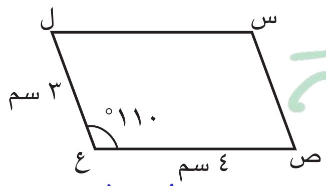
م ب ≅ م د

م جـ ≅ م هـ

ب م^ جـ ≅ د م^ هـ السبب : بالتقابل بالرأس

∴ Δ م ب جـ ≅ Δ م د هـ الحالة : (ض ـ ز ـ ض)

٩ س ص ع ل متوازي أضلاع فيه :



ع ل = ٣ سم ، ع ص = ٤ سم ، ق (ع^) = ١١٠°

أوجِد ما يلي مع ذكر السبب .

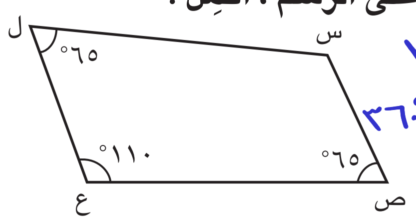
ق (س^) = ١١٠° السبب : زاويتان متقابلتان في متوازي أضلاع متساويتان

ق (ص^) = ٧٠° السبب : زاويتان متداخلتان

س ص = ل ع = ٣ سم السبب : ضلعان متقابلان في متوازي أضلاع متساويان

س ل = ص ع = ٤ سم السبب : ضلعان متقابلان في متوازي أضلاع متساويان

١٠ في الشكل المقابِل ، بحسب البيانات المدوَّنة على الرسم ، أكمِل :



ق (س^) = ٣٦٠ − (٦٥ + ٦٥ + ١١٠) = ١٢٠°

السبب : لأنه مجموع قياسات زوايا الشكل الرباعي = ٣٦٠°

١١ حُلّ كلًّا من المعادلات التالية حيث س ∈ ط :

أ) ٢ س − ٤ = ٦

٢ س = ٦ + ٤ = ١٠

∴ س = ١٠ ÷ ٢ = ٥

ب) ٥ س + ٩ = ١٤

٥ س = ١٤ − ٩ = ٥

∴ س = ٥ ÷ ٥ = ١

هل أنت مستعدّ؟

٥ - ١ الكشف عن توازي مستقيمَين
Detecting the Parallelism of Two lines

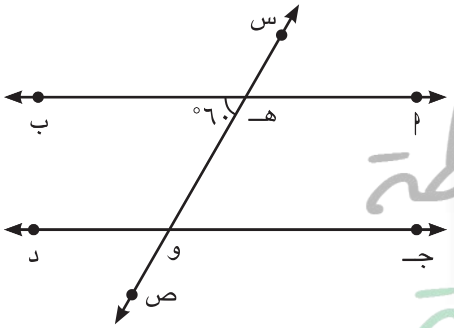
سوف تتعلّم : الكشف عن توازي مستقيمَين .

العبارات والمفردات :

يوازي	Parallel	زوايا متبادلة	Alternate Angles
زوايا متناظرة	Corresponding Angles	زوايا متحالفة	Allied Angles

إستكشِف

في الشكل المقابِل :



اللوازم :
أدوات هندسية

أوّلًا : باستخدام المنقلة ، أوجِد ق (هـ و̂ جـ) :

ق (هـ و̂ جـ) = ...٦٠°........

ثانيًا : أكمِل :

١ ق (هـ و̂ جـ) = ق (د هـ̂ و)
وهما في وضع تبادل

٢ ق (د و̂ ص) = ق (هـ و̂ جـ)
بالتقابل بالرأس
∴ ق (د و̂ ص) = ق (د هـ̂ و)
وهما في وضع تناظر

٣ ق (هـ و̂ د)
= ١٨٠° - ...٦٠... = ...١٢٠°...
بالتجاور على خطّ مستقيم واحد
مع (جـ و̂ هـ)
∴ ق (هـ و̂ د) + ق (ب هـ̂ و)
= ...١٢٠... + ...٦٠... = ١٨٠°
وهما زاويتان متحالفتان

ثالثًا : باستخدام المسطرة والمثلّث القائم ، تحقّق من صحّة توازي المستقيمَين : $\overleftrightarrow{أ ب}$ ، $\overleftrightarrow{جـ د}$.

ماذا تلاحظ ؟ ...ألاحظ أنهما متوازيين...

....

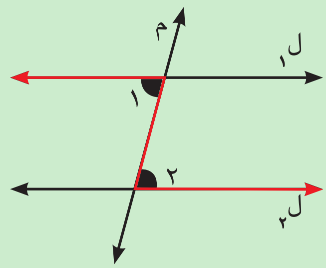
تذكّر

- الزاويتان المتكاملتان مجموع قياسهما ١٨٠°
- الزاويتان المتجاورتان على خطّ مستقيم واحد متكاملتان .
- الزاويتان المتقابلتان بالرأس متطابقتان .

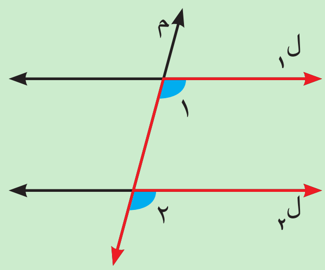
نستنتج أنّ :

إذا قطع مستقيم مستقيمَين في المستوى ، فإنّ المستقيمَين يكونان متوازيَين ، **إذا وفقط إذا** توفّر أحد الشروط التالية :

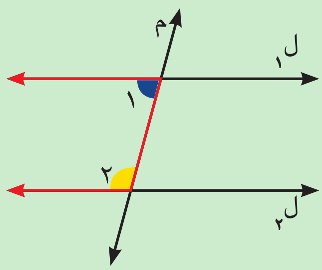
١ زاويتان متبادلتان متطابقتان



٢ زاويتان متناظرتان متطابقتان



٣ زاويتان متحالفتان متكاملتان



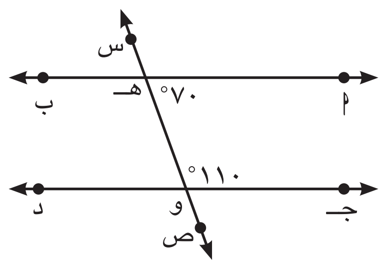
دورك الآن (١)

أيّ من الأشكال التالية يكون $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ // $\overleftrightarrow{\text{جـ د}}$ ؟ وضِّح ذلك .

لاحِظ أنّ :

«لا يوازي» يُرمز إليه بالرمز ∦

١

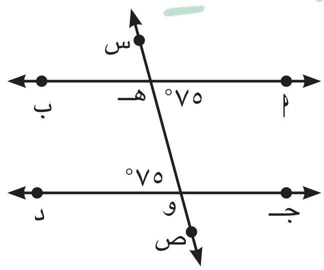


∵ ق (أ هـ̂ و) + ق (جـ و̂ هـ) = ٧٠ + ١١٠ = ١٨٠

وهما زاويتان متحالفتان

∴ $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ // $\overleftrightarrow{\text{جـ د}}$

٢

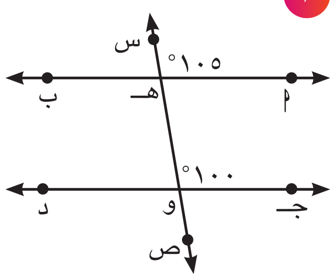


∵ ق (أ هـ̂ و) = ق (هـ و̂ د) = ٧٥°

وهما في وضع تبادل

∴ $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ // $\overleftrightarrow{\text{جـ د}}$

٣



ق (أ هـ̂ س) ≠ ق (جـ و̂ هـ)

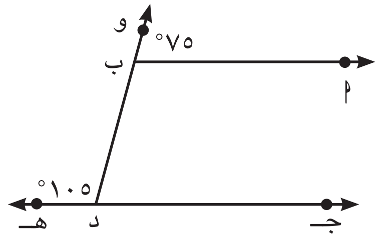
وهما في وضع تناظر

∴ $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ ∦ $\overleftrightarrow{\text{جـ د}}$

مثال (١):

في الشكل أدناه : ق (أ $\hat{ب}$ و) = ٧٥° ، ق (ب $\hat{د}$ هـ) = ١٠٥°

أثبِت أنّ $\overleftarrow{ب أ}$ // $\overleftrightarrow{هـ جـ}$.



الحلّ :

المعطيَات :

ق (ب $\hat{د}$ هـ) = ١٠٥°

ق (أ $\hat{ب}$ و) = ٧٥°

المطلوب : إثبات أنّ $\overleftarrow{ب أ}$ // $\overleftrightarrow{هـ جـ}$

البرهان : ∵ ق (ب $\hat{د}$ هـ) = ١٠٥° (معطى)

∴ ق (جـ $\hat{د}$ ب) = ١٨٠° - ١٠٥° = ٧٥° (بالتجاور على خطّ مستقيم واحد)

∵ ق (أ $\hat{ب}$ و) = ق (جـ $\hat{د}$ ب) = ٧٥° (وهما في وضع تناظر)

∴ $\overleftarrow{ب أ}$ // $\overleftrightarrow{هـ جـ}$

لاحِظ أنّ :

لحلّ تمارين هندسية ، اِتّبِع الخطوات التالية :

١ أُكتب المعطَيات

٢ أُكتب المطلوب

٣ أُكتب البرهان (خطوات الوصول إلى المطلوب)

عبِّر عن فهمك (١)

هل يمكنك حلّ مثال (١) بطرق أخرى ؟ فسِّر إجابتك .

نعم ، ∵ ق(أ ب و) = ١٨٠ - ٧٥ = ١٠٥ ، ق(أ ب د) = ق(ب د هـ) = ١٠٥ (وهما في وضع تبادل)

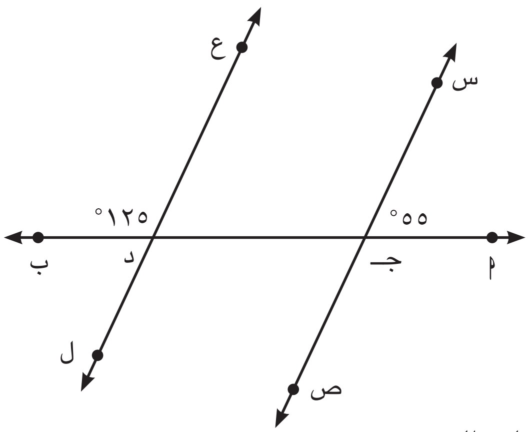
∴ ب أ // هـ جـ

دورك الآن (٢)

في الشكل المقابِل ، $\overleftrightarrow{أ ب}$ قاطع للمستقيمَين $\overleftrightarrow{س ص}$ ، $\overleftrightarrow{ع ل}$ ، في جـ ، د على الترتيب ،

ق (أ $\hat{جـ}$ س) = ٥٥° ، ق (ع $\hat{د}$ ب) = ١٢٥° ،

برهِن أنّ $\overleftrightarrow{س ص}$ // $\overleftrightarrow{ع ل}$



الحلّ :

المعطيَات : $\overleftrightarrow{أ ب}$ قاطع للمستقيمَين س ص ، ع ل في جـ ، د على الترتيب ،

ق (أ جـ س) = ٥٥° ، ق (ع $\hat{د}$ ب) = ١٢٥°

المطلوب : إثبات أنّ $\overleftrightarrow{س ص}$ // $\overleftrightarrow{ع ل}$

البرهان : ∵ ق (أ $\hat{جـ}$ س) = ٥٥° (معطى)

∴ ق (س جـ^ د) = ١٨٠° - ..٥٥.. = ..١٢٥.. (بالتجاور على خطّ مستقيم واحد)

∵ ق (ع د^ ب) = ١٢٥° (معطى)

∴ ق (س جـ^ د) = ق (ع د^ ب) = ..١٢٥.. (وهما في وضع ..تناظر........)

∴ ..سص // ع ل..

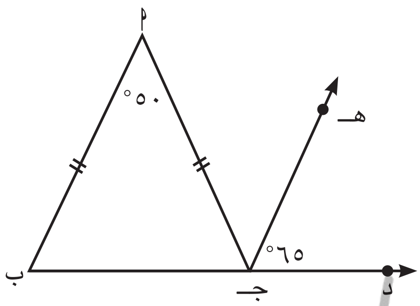
تذكَّر

في المثلّث المتطابق الضلعَين
زاويتا القاعدة متطابقتان .

مثال (٢) :

في الشكل المقابِل وحسب البيانات المحدَّدة عليه ،

أثبِت أنّ $\overleftarrow{\text{جـ هـ}}$ // $\overline{\text{ب ا}}$



الحلّ :

المعطَيات : ا ب = ا جـ ، ق (ا^) = ٥٠° ، ق (د جـ^ هـ) = ٦٥°

المطلوب : إثبات أنّ $\overleftarrow{\text{جـ هـ}}$ // $\overline{\text{ب ا}}$

البرهان : ∵ ا ب = ا جـ (معطى)

∴ Δ ا ب جـ متطابق الضلعَين

∴ ق (ا ب^ جـ) = ق (ا جـ^ ب) = $\frac{١٨٠° - ٥٠°}{٢}$ = $\frac{١٣٠°}{٢}$ = ٦٥° (مجموع قياسات زوايا المثلّث الداخلة = ١٨٠°)

∵ ق (د جـ^ هـ) = ٦٥° (معطى)

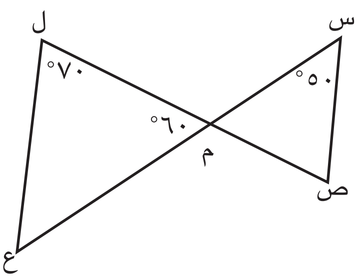
∴ ق (ا ب^ جـ) = ق (د جـ^ هـ) = ٦٥° (وهما في وضع تناظر)

∴ $\overleftarrow{\text{جـ هـ}}$ // $\overline{\text{ب ا}}$

دورك الآن (٣)

في الشكل المقابِل ، إذا كان $\overline{\text{س ع}}$ ∩ $\overline{\text{ص ل}}$ = { م } وحسب البيانات المحدَّدة عليه ،

أثبِت أنّ $\overline{\text{س ص}}$ // $\overline{\text{ع ل}}$



الحلّ :

المعطَيات : $\overline{\text{س ع}}$ ∩ $\overline{\text{ص ل}}$ = { م }

ق (س^) = ...٥٠... ، ق (ع ل^ م) = ٧٠° ،

ق (ع م^ ل) = ...٦٠...

المطلوب : إثبات أنّ $\overline{\text{س ص}}$ ..//..ع ل..........

تذكَّر

مجموع قياسات زوايا المثلّث
الداخلة يساوي ١٨٠° .

البرهان : Δ ع م ل فيه

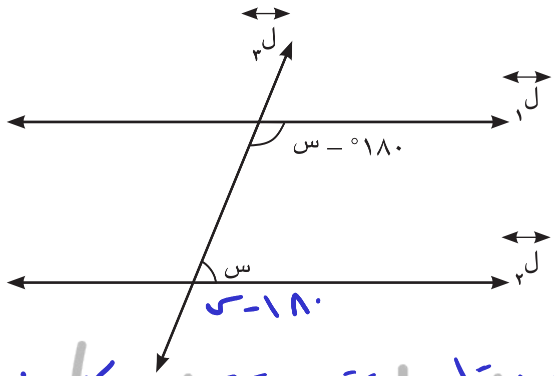
ق (ع^) = ١٨٠° - (...٦٠... + ...٧٠...) = ...٥٠... ° (مجموع قياسات زوايا المثلّث الداخلة ...١٨٠)

∴ ق (س^) = ق (...ع^...) = ...٥٠... (وهما في وضع ...تبادل...)

∴ ...س ص // ع ل...

عبِّر عن فهمك (٢)

يقول يوسف : إنّ ل١ // ل٢ ، فهل توافقه الرأي ؟ وضِّح ذلك .

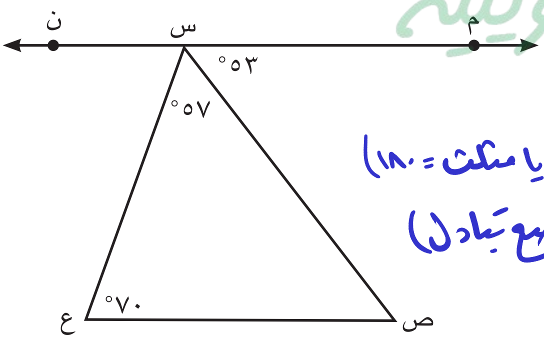


نعم أوافقه ، لأنه إذا قطع مستقيم مستقيمين وكان فيه زاويتان متحالفتان متكاملتان فإن المستقيمين متوازيين

تمارين ذاتية :

١ في الشكل المقابِل وحسب البيانات المحدَّدة عليه ،

أثبِت أنّ م ن // ص ع .



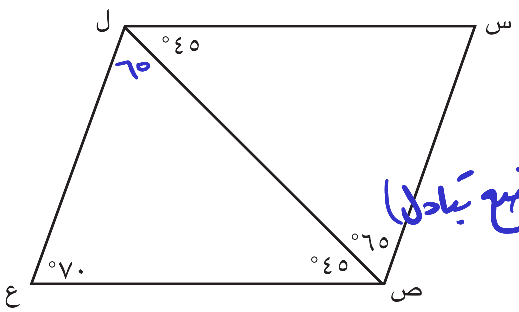
ق(ص^) = ١٨٠ - (٥٧ + ٧٠) = ٥٣° (مجموع زوايا مثلث = ١٨٠)

∴ ق(ص^) = ق(م س ص) = ٥٣° (وهما في وضع تبادل)

∴ م ن // ص ع

٢ في الشكل المقابِل وحسب البيانات المدوَّنة عليه ،

برهِن أنّ :



(أ) س ل // ص ع

∴ ق(س ل^ ص) = ق(ع ص^ ل) = ٤٥° (وهما في وضع تبادل)

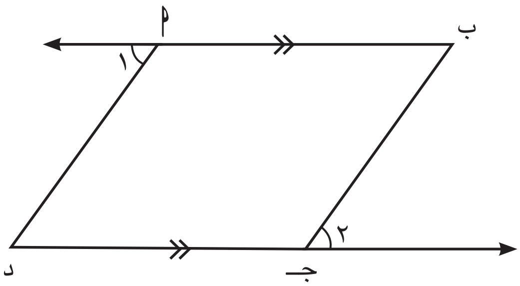
∴ س ل // ص ع

(ب) س ص // ل ع

ق(ع ل^ ص) = ١٨٠ - (٤٥ + ٧٠) = ٦٥° (مجموع زوايا مثلث = ١٨٠)

∴ ق(ع ل^ ص) = ق(س ص^ ل) = ٦٥° (وهما في وضع تبادل)

∴ س ص // ل ع



٣ في الشكل المقابِل : $\overleftarrow{\text{ب أ}}$ // $\overleftarrow{\text{د جـ}}$ ،
ق (١̂) = ق (٢̂) برهِن أنّ $\overline{\text{ب جـ}}$ // $\overline{\text{أ د}}$

∵ ب أ // د جـ

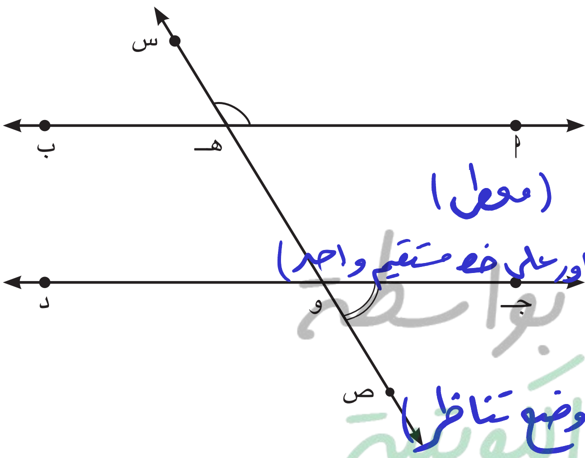
∴ ق(١) = ق(٣) (بالتبادل)

∵ ق(١) = ق(٢) (معطى)

∴ ق(٢) = ق(٣) (وهما في وضع تناظر)

∴ ب جـ // أ د

مهارات تفكير عليا :



٤ في الشكل المقابِل :
ق (أ هـ̂ س) + ق (جـ و̂ ص) = ١٨٠°
أثبِت أنّ $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ // $\overleftrightarrow{\text{جـ د}}$

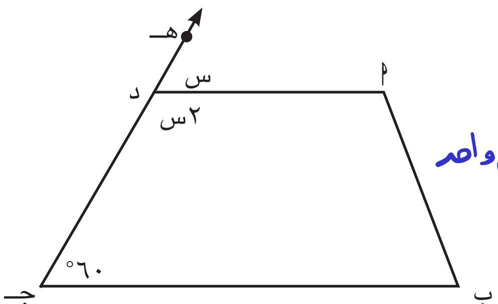
∵ ق(أ هـ̂ س) + ق(جـ و̂ ص) = ١٨٠° ← (١) (معطى)

∵ ق(جـ و̂ هـ) + ق(جـ و̂ ص) = ١٨٠ ← (٢) (بالتجاور على خط مستقيم واحد)

من (١) ، (٢) ينتج أن

ق(أ هـ̂ س) = ق(جـ و̂ هـ) (وهما في وضع تناظر)

∴ أ ب // جـ د



٥ في الشكل المقابِل وحسب البيانات المدوَّنة عليه ،
أثبِت أنّ أ ب جـ د شبه منحرِف .

∵ (أ د̂ هـ) و (أ د̂ جـ) زاويتان متجاورتان على خط مستقيم واحد

∴ ق(أ د̂ هـ) + ق(أ د̂ جـ) = ١٨٠

س + ٢س = ١٨٠ ، ٣س = ١٨٠ ∴ س = ٦٠°

∴ ق(أ د̂ هـ) = ق(جـ̂) = ٦٠° (وهما في وضع تناظر)

∴ أ د // ب جـ

∴ الشكل أ ب جـ د شبه منحرف

تذكَّر

شبه المنحرِف هو شكل رباعي فيه ضلعان فقط متقابلان متوازيان .

٥ - ٢ متوازي الأضلاع – رسم متوازي الأضلاع
Parallelogram - Drawing a Parallelogram

سوف تتعلّم : متوازي الأضلاع وخواصّه – رسم متوازي الأضلاع .

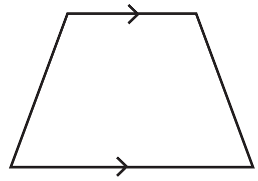
العبارات والمفردات :

متوازي الأضلاع	Parallelogram	زاويتان متتاليتان	Consecutive Angles
زاويتان متقابلتان	Opposite Angles		

يُستخدم متوازي الأضلاع في العديد من التطبيقات الحياتية والعملية وخاصّة في الهندسة ، البناء ، التصميم ، الميكانيكا وحتّى الفنّ .

حُلّ وناقِش

من الأشكال الرباعية التالية (لاحِظ علامات التوازي) ، أيّها يمثّل متوازي أضلاع ؟ ولماذا ؟

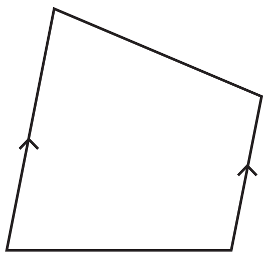


(١)

لا يمثل

(٢)

يمثل



(٣)

لا يمثل

ماذا تلاحظ ؟

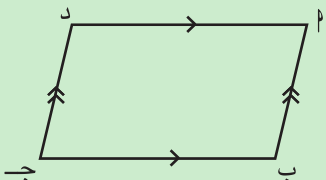
ألاحظ أن متوازي الأضلاع فيه كل ضلعين متقابلين متوازيان .

تعلّمت ممّا سبق أنّ :

متوازي الأضلاع هو شكل رباعي فيه كلّ ضلعَين متقابلَين متوازيان .

أ ب جـ د متوازي أضلاع وعلى ذلك فإنّ :

- $\overline{\text{أ ب}}$ // $\overline{\text{د جـ}}$
- $\overline{\text{أ د}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$

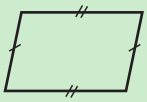


اِنتبِه

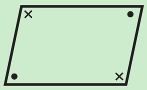
- رمز التوازي على الرسم « أو ›
- رمز التوازي في التعبير الرياضي //

كما تعلّمت خواصّ متوازي الأضلاع :

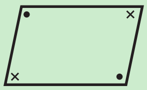
١ في متوازي الأضلاع كلّ ضلعَين متقابلَين متطابقان .



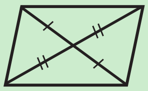
٢ في متوازي الأضلاع كلّ زاويتَين متقابلتَين متطابقتان .



٣ في متوازي الأضلاع مجموع قياس كلّ زاويتَين متتاليتَين يساوي ١٨٠° (متكاملتَين) .



٤ في متوازي الأضلاع القطران ينصّف كلّ منهما الآخر .

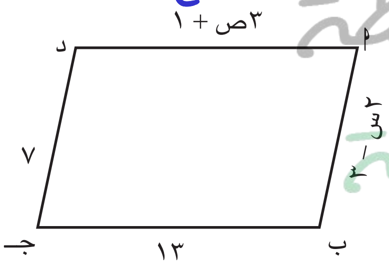


عبِّر عن فهمك

كيف يمكن استخدام مفهوم تطابق مثلّثَين في إثبات خاصّية (القطران ينصّف كلّ منهما الآخر) في متوازي الأضلاع ؟ وضِّح إجابتك .

باستخدام تطابق مثلثين مشتركان ب مركز متوازي الأضلاع ومتقابلان

مثال (٢) :



في الشكل المقابِل ٲ ب جـ د متوازي أضلاع ، وبحسب البيانات المدوَّنة على الرسم ، أوجِد بالبرهان قيمة كلّ من س ، ص .

الحلّ :

المعطَيات : ٲ ب جـ د متوازي أضلاع

ٲ ب = (٢ س − ٣) وحدة طول ، ب جـ = ١٣ وحدة طول

د جـ = ٧ وحدات طول ، ٲ د = (٣ ص + ١) وحدة طول

المطلوب : إيجاد قيمة كلّ من س ، ص

البرهان : ∵ ٲ ب جـ د متوازي أضلاع (معطى)

∴ كلّ ضلعَين متقابلَين متطابقان (من خواصّ متوازي الأضلاع)

∴ ٲ ب = د جـ ، ∴ ٲ د = ب جـ

٢ س − ٣ = ٧ ٣ ص + ١ = ١٣

٢ س − ٣ + ٣ = ٧ + ٣ ٣ ص + ١ − ١ = ١٣ − ١

$\frac{\cancel{٢}^{١}}{\cancel{٢}_{١}}$ س = $\frac{\cancel{١٠}^{٥}}{\cancel{٢}_{١}}$ $\frac{\cancel{٣}^{١}}{\cancel{٣}_{١}}$ ص = $\frac{\cancel{١٢}^{٤}}{\cancel{٣}_{١}}$

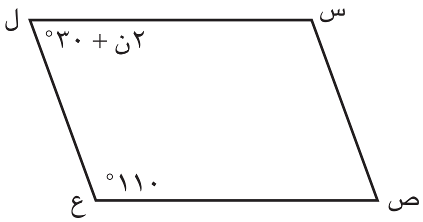
س = ٥ ص = ٤ (تحقّق من صحّة الحلّ)

اِنتبِه

لإيجاد قيمة س أو ص ، يُفضَّل حلّ المعادلة باستخدام المعكوس الجمعي ثمّ المعكوس الضربي .

دورك الآن (١)

في الشكل المقابِل ، س ص ع ل متوازي أضلاع ، وبحسب البيانات المدوَّنة على الرسم ، أكمِل ما يلي لإيجاد قيمة ن .



المعطَيات : س ص ع ل متوازي أضلاع ، ق(ع) = ١١٠°
ق(ل) = ٢ن + ٣٠°

المطلوب : إيجاد قيمة ن

البرهان : ∵ س ص ع ل متوازي أضلاع

∴ ق (ل) + ق (ع) = ١٨٠° (من خواصّ متوازي الأضلاع كلّ زاويتَين متتاليتَين متكاملتان)

٢ ن + ٣٠° + ١١٠° = ١٨٠°

٢ ن + ١٤٠° = ١٨٠°

٢ ن = ١٨٠° − ١٤٠

ن = $\frac{٤٠}{٢}$

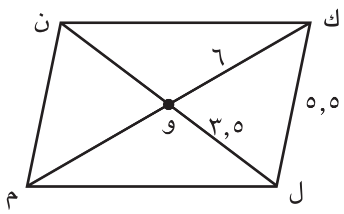
∴ ن = ٢٠°

اِنتبِه

الزاويتان المتكاملتان مجموع قياسهما ١٨٠°

مثال (٢) :

ك ل م ن متوازي أضلاع تقاطع قطرَيه في و ، ك ل = ٥,٥ وحدة طول ، ك و = ٦ وحدات طول ، ل و = ٣,٥ وحدة طول ، أوجِد محيط Δ م و ن .



الحلّ :

المعطَيات : ك ل م ن متوازي أضلاع

ك ل = ٥,٥ وحدة طول ، ك و = ٦ وحدات طول ، ل و = ٣,٥ وحدة طول

المطلوب : إيجاد محيط Δ م و ن

البرهان : ∵ ك ل م ن متوازي أضلاع (معطى)

∴ و م = و ك = ٦ وحدات طول (من خواصّ متوازي الأضلاع القطران ينصّف كلّ منهما الآخر)

، ∴ و ن = و ل = ٣,٥ وحدة طول

، ∴ م ن = ك ل = ٥,٥ وحدة طول (من خواصّ متوازي الأضلاع كلّ ضلعَين متقابلَين متطابقان)

∴ محيط Δ م و ن = و م + و ن + ن م

= ٦ + ٣,٥ + ٥,٥

= ١٥ وحدة طول

تذكَّر

محيط المثلّث يساوي مجموع أطوال أضلاعه .

رسم متوازي الأضلاع

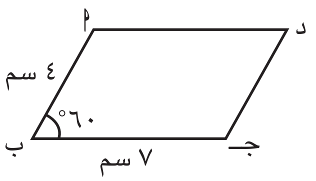
إحدى طرق رسم متوازي الأضلاع إذا عُلم فيه طولا ضلعَين متجاورَين وقياس إحدى زواياه .

اللوازم :
أدوات هندسية

مثال توضيحي :

أُرسم متوازي الأضلاع ﺃ ب جـ د الذي فيه ﺃ ب = ٤ سم ، ب جـ = ٧ سم ، ق (ﺃ بˆ جـ) = ٦٠°

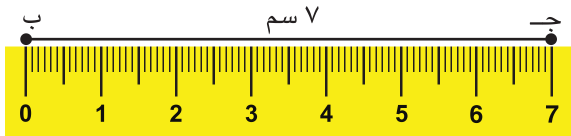
أوّلًا : أُرسم رسمًا تخطيطيًّا لوضع تصوّر لشكل متوازي الأضلاع موضِّحًا عليه المعطيات .



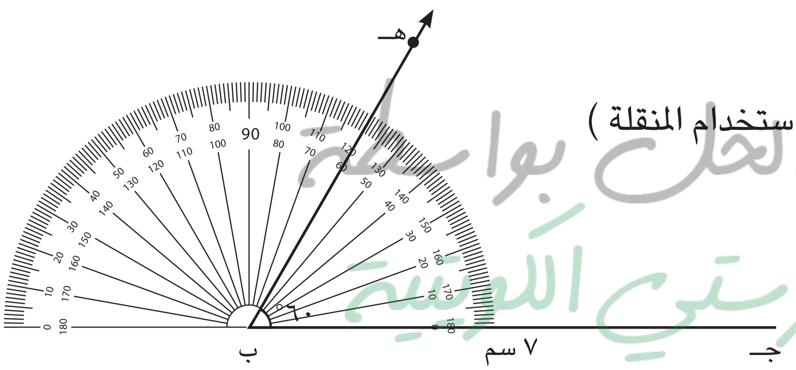
الحلّ :

ثانيًا : اِستخدِم الأدوات الهندسية ، واتّبِع خطوات العمل :

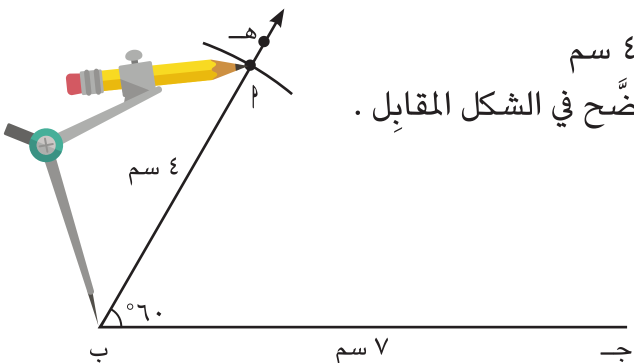
١ أُرسم ب جـ طولها ٧ سم (باستخدام المسطرة) .



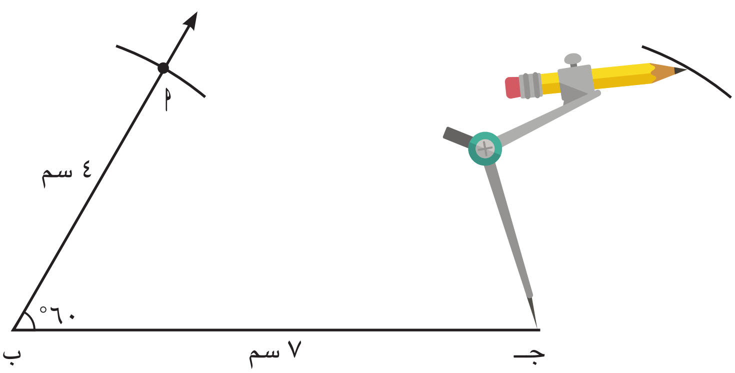
٢ أُرسم (جـ بˆ هـ) قياسها ٦٠° (باستخدام المنقلة) كما في الشكل المقابِل .



٣ ركِّز سنّ الفرجار عند النقطة ب ، وبفتحة طولها ٤ سم أُرسم قوسًا يقطع ب هـ في النقطة ﺃ ، كما هو موضَّح في الشكل المقابِل .



٤ ركِّز سنّ الفرجار في النقطة جـ ، وبفتحة طولها ٤ سم (لماذا ؟) ، أُرسم قوسًا .

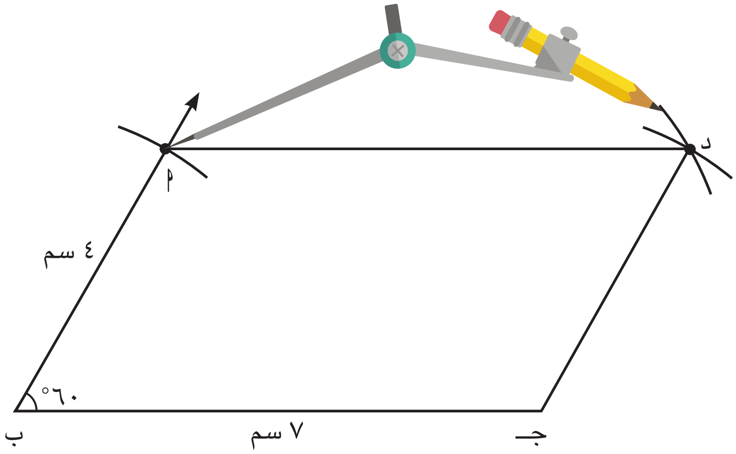


اِنتبِه

- عند استخدام المسطرة ، اِبدأ من العدد صفر .
- عند استخدام المنقلة ، اِنتبِه إلى جهة التدريج .

٥ ركِّز سنّ الفرجار في النقطة أ وبفتحة طولها ٧ سم (لماذا ؟) ، أُرسم قوسًا ليتقاطع مع القوس المرسوم من النقطة جـ في النقطة د .

٦ صِل بالمسطرة $\overline{\text{د جـ}}$ ، $\overline{\text{أ د}}$ لتحصل على متوازي أضلاع أ ب جـ د .



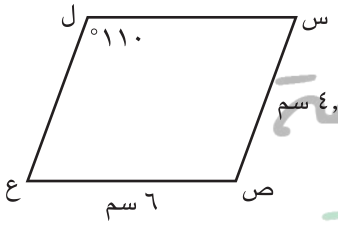
معلومة مفيدة :

يُستخدم رسم متوازي الأضلاع في تصميم الجدران والأعمدة بزاوية معيَّنة للحفاظ على التوازن والاستقرار ، كما يُستخدم في تصميم الأثاث مثل الطاولات والمكاتب بزوايا مائلة .

مثال (٣) :

أُرسم متوازي الأضلاع س ص ع ل الذي فيه

س ص = ٤,٥ سم ، ص ع = ٦ سم ، ق (س ل̂ ع) = ١١٠° .



الحلّ :

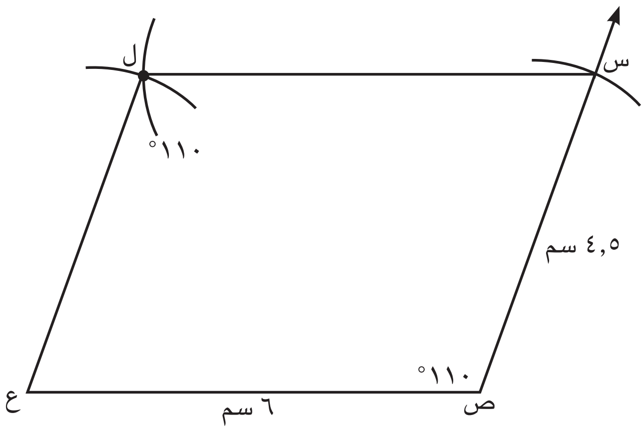
أُرسم رسمًا تخطيطيًّا للشكل موضِّحًا المعطَيات عليه .

∵ س ص ع ل متوازي أضلاع

∴ ق (س ص̂ ع) = ق (س ل̂ ع) = ١١٠°

كلّ زاويتَين متقابلتَين في متوازي الأضلاع متطابقتان

باستخدام الأدوات الهندسية واتّباع الخطوات السابقة ، أُرسم متوازي الأضلاع س ص ع ل .

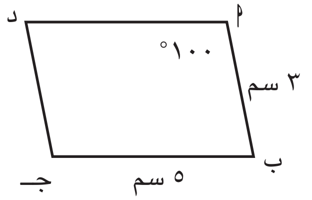


عند رسم متوازي الأضلاع بمعلومية طولَي ضلعَين متجاورَين فيه وقياس إحدى زواياه ، نوظّف خواصّ متوازي الأضلاع لإيجاد قياس الزاوية بين الضلعَين المتجاورَين .

دورك الآن (٢)

أُرسم متوازي الأضلاع ﺃ ب جـ د الذي فيه ﺃ ب = ٣ سم ، ب جـ = ٥ سم ، ق ($\hat{ﺃ}$) = ١٠٠°

الحلّ :



أُرسم رسمًا تخطيطيًّا للشكل موضّحًا عليه المعطَيات

∵ ﺃ ب جـ د ...متوازي أضلاع...

∴ ق ($\hat{ﺃ}$) + ...ق(ب)... = ...١٨٠... (من خواصّ متوازي الأضلاع كلّ زاويتَين متتاليتَين متكاملتان)

ق ($\hat{ب}$) = ...١٨٠... − ...١٠٠...

∴ ق ($\hat{ب}$) = ...٨٠°...

اِستخدِم الأدوات الهندسية

لرسم متوازي الأضلاع ﺃ ب جـ د

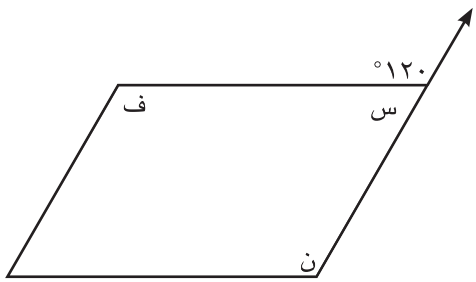
تمارين ذاتية :

١ أوجِد قيمة كلّ من س ، ف ، ن في متوازيات الأضلاع التالية مع ذكر السبب :

س = ...٨٠° لأنه كل زاويتين متقابلتين متساويتان...

ن = ...١٠٠° لأنه كل زاويتين متجاورتين متكاملتان...

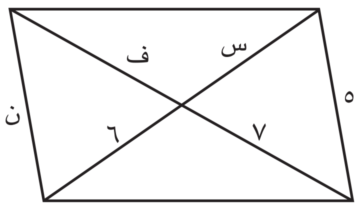
ف = ...١٠٠° لأنه كل زاويتين متقابلتين متساويتان...



س = ...٦٠° لأنه الزاويتين متجاورتان على خط مستقيم واحد...

ف = ن = ١٢٠° لأنه كل زاويتين متقابلتين متساويتان...

ن = ...١٢٠° بالتناظر...

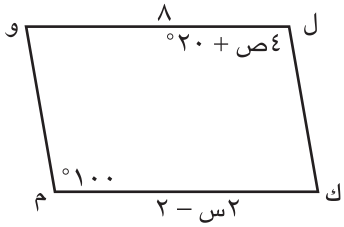


س = ...٦ لأنه قطري متوازي الأضلاع ينصف كل منهما الآخر...

ف = ...٧ لأنه قطري متوازي الأضلاع ينصف كل منهما الآخر...

ن = ...٥ لأنه كل ضلعين متقابلين متساويان...

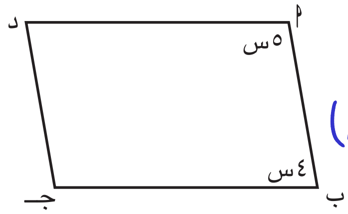
٢ في الشكل المقابِل ل ك م و متوازي أضلاع ، وبحسب البيانات المدوَّنة على الرسم ، أوجِد بالبرهان قيمة كلّ من س ، ص .



∵ ق(ل̂) = ق(م̂)
∴ ٤ص + ٢٠ = ١٠٠
٤ص = ١٠٠ − ٢٠ = ٨٠
ص = $\frac{٨٠}{٤}$ = ٢٠°

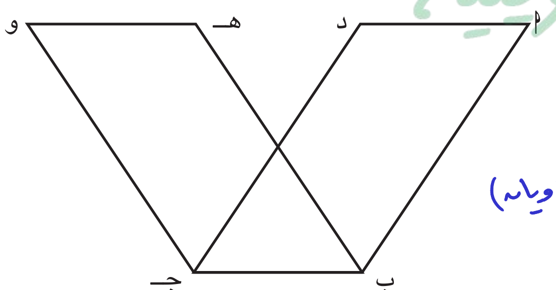
∵ ل ك = م و
∴ ٢س − ٢ = ٨
٢س = ٨ + ٢ = ١٠
∴ س = $\frac{١٠}{٢}$ = ٥

٣ في الشكل المقابِل ، ﺃ ب جـ د متوازي أضلاع ق (ﺃ̂) = ٥ س ، ق (ب̂) = ٤ س
أوجِد بالبرهان ق (ﺃ̂) ، ق (ب̂) بالدرجات .



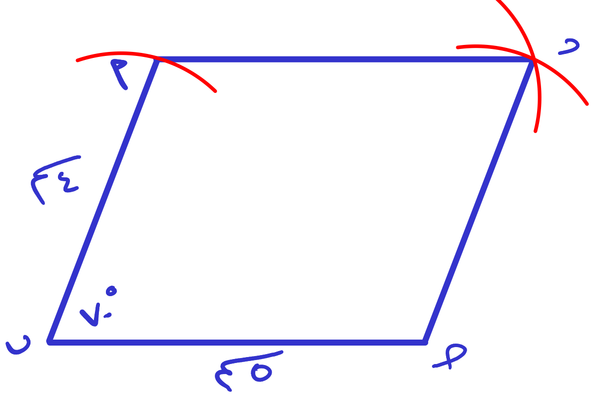
∵ ﺃ ب جـ د متوازي أضلاع
∴ ق(ﺃ̂) + ق(ب̂) = ١٨٠ (زاويتان متتاليتان متكاملتان)
∴ ٥س + ٤س = ١٨٠
٩س = ١٨٠
س = $\frac{١٨٠}{٩}$ = ٢٠
∴ ق(ﺃ̂) = ٥ × ٢٠ = ١٠٠° ، ق(ب̂) = ٤ × ٢٠ = ٨٠°

٤ ﺃ ب جـ د ، هـ ب جـ و متوازيا أضلاع ،
أثبِت أنّ : ﺃ د = هـ و .

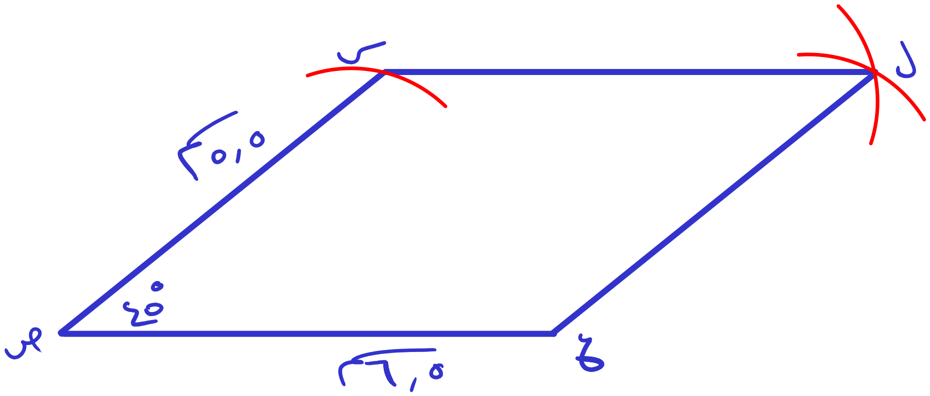


∵ ﺃ ب جـ د متوازي أضلاع
∴ ﺃ د = ب جـ ← (١) (ضلعان متقابلان متساويان)
∵ هـ ب جـ و متوازي أضلاع
∴ هـ و = ب جـ ← (٢) (ضلعان متقابلان متساويان)
من (١) ، (٢) ينتج أن ∴ ﺃ د = هـ و

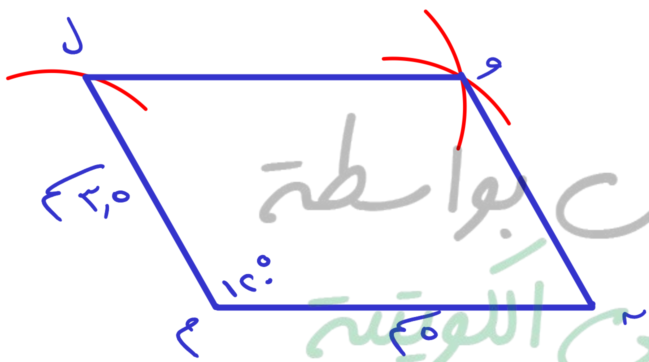
٥ أُرسم متوازي الأضلاع ﺃ ب جـ د الذي فيه ﺃ ب = ٤ سم ، ب جـ = ٥ سم ، ق (ﺃ ب̂ جـ) = ٧٠° .



٦ أُرسم متوازي الأضلاع س ص ع ل الذي فيه س ص = ٥,٥ سم ، ص ع = ٦,٥ سم ، ق (س $\hat{ل}$ ع) = ٤٥° .



٧ أُرسم متوازي الأضلاع ل م ن و الذي فيه ل م = ٣,٥ سم ، م ن = ٥ سم ، ق (م $\hat{ل}$ و) = ١٢٠° .



مهارات تفكير عليا :

٨ يُحيط بحديقة سور طوله ٦٠٠ م على شكل متوازي أضلاع ، إذا كان طول السور المقابِل للشارع (أ) ضعف طول السور المقابِل للشارع (ب) ، فأوجِد طول السور المقابِل للشارع (د) .

∵ محيط متوازي الأضلاع = مجموع أطوال أضلاعه = ٦٠٠

∴ شارع (أ) + شارع (ب) + شارع (جـ) + شارع (د) = ٦٠٠

∵ كل ضلعين متقابلين متساويان

∴ ٢ × شارع (أ) + ٢ × شارع (ب) = ٦٠٠

لكن شارع (أ) = ٢ شارع (ب) (معطى)

∴ ٢ × ٢ شارع (ب) + ٢ شارع (ب) = ٦٠٠

∴ ٦ شارع (ب) = ٦٠٠ ∴ شارع (ب) = ١٠٠ م

∴ شارع (د) = شارع (ب) = ١٠٠م

٥ - ٣ الكشف عن متوازي الأضلاع
Detecting a Parallelogram

سوف تتعلّم : الكشف عن متوازي الأضلاع .

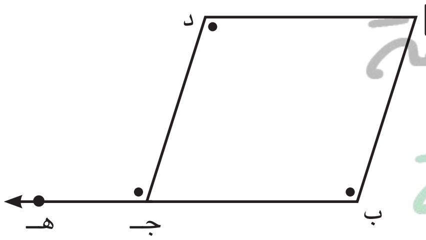
تعلّمت ممّا سبق أنّ : الشكل الرباعي الذي فيه كلّ ضلعَين متقابلَين متوازيان يُسمّى متوازي أضلاع .

ومن هذا التعريف تكون هذه هي الحالة الأولى من حالات الكشف عن متوازي الأضلاع .

الحالة الأولى (من التعريف)

يكون الشكل الرباعي متوازي أضلاع إذا كان فيه كلّ ضلعَين متقابلَين متوازيان .

دورك الآن (١)



في الشكل المقابِل أ ب جـ د شكل رباعي فيه

ق (ب̂) = ق (د̂) = ق (د جـ̂ هـ)

أكمِل ما يلي :

∵ ق (ب̂) = ق (د جـ̂ هـ) (وهما في وضع تناظر)

∴ أ ب // $\overline{\text{د جـ}}$ (١)

∵ ق (د̂) = ق (د جـ̂ هـ) (وهما في وضع تبادل)

∴ $\overline{\text{أ د}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$ (٢)

من (١) ، (٢) ينتج أنّ الشكل الرباعي أ ب جـ د هو متوازي أضلاع

لأنّ فيه كل ضلعين متقابلين متطابقان

تذكّر

إذا قطع مستقيم مستقيمَين فإنّه : يتوازى المستقيمان إذا وفقط إذا توافر أحد الشروط التالية :

١ زاويتان متبادلتان متطابقتان

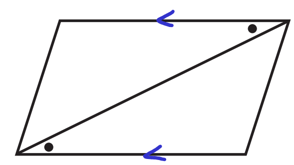
٢ زاويتان متناظرتان متطابقتان

٣ زاويتان متحالفتان متكاملتان

دورك الآن (٢)

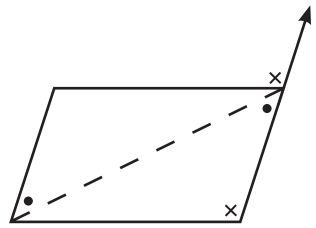
حدّد ما إذا كان الشكل الرباعي بحسب البيانات المدوَّنة عليه متوازي أضلاع أم لا .

(أ)



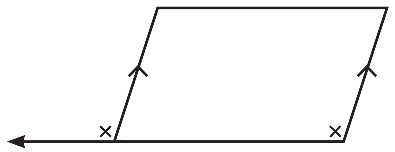
ليس متوازي أضلاع

(ب)



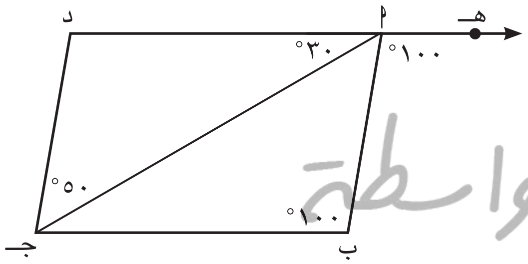
متوازي أضلاع

(ج)



ليس متوازي أضلاع

مثال (١) :



أ ب جـ د شكل رباعي فيه ،

ق (هـ أ̂ ب) = ق (ب̂) = ١٠٠°

ق (د أ̂ جـ) = ٣٠° ، ق (أ جـ̂ د) = ٥٠°

برهِن أنّ الشكل الرباعي أ ب جـ د متوازي أضلاع

الحلّ :

المعطَيات : ق (هـ أ̂ ب) = ق (ب̂) = ١٠٠°

ق (د أ̂ جـ) = ٣٠° ، ق (أ جـ̂ د) = ٥٠°

المطلوب : إثبات أنّ الشكل الرباعي أ ب جـ د متوازي أضلاع

البرهان :

∵ ق (هـ أ̂ ب) = ق (ب̂) = ١٠٠° وهما في وضع تبادل (معطى)

∴ $\overline{\text{أ د}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$ (١)

في Δ أ جـ د ، ق (د̂) = ١٨٠° - (٣٠° + ٥٠°) (مجموع قياسات زوايا المثلّث الداخلة = ١٨٠°)

= ١٨٠° - ٨٠° = ١٠٠°

∵ ق (هـ أ̂ ب) = ق (د̂) = ١٠٠° وهما في وضع تناظر

∴ $\overline{\text{أ ب}}$ // $\overline{\text{د جـ}}$ (٢)

من (١) ، (٢) نستنتج أنّ :

الشكل الرباعي أ ب جـ د هو متوازي أضلاع لأنّ فيه كلّ ضلعَين متقابلَين متوازيان .

> **اِنتبِه**
>
> لإثبات أنّ الشكل متوازي أضلاع ، تحقَّق من إثبات ما يلي :
>
> (١) $\overline{\text{أ د}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$
>
> (٢) $\overline{\text{أ ب}}$ // $\overline{\text{د جـ}}$
>
> الحالة الأولى (التعريف)

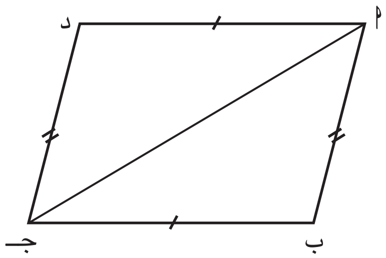
عبِّر عن فهمك (٢)

هل يمكن حلّ مثال (١) بطريقة أخرى لإثبات أنّ الشكل الرباعي ٢ ب جـ د هو متوازي أضلاع ؟
وضِّح إجابتك . نعم ، حيث ق(ب̂٢د) = ق(٢̂د٢) = ٥٠ وكذلك ق(د٢̂ج) = ق(ب٢̂ج) = ٣٠° وهما في وضع تبادل

سنتحقّق معًا بأنّ الشكل الرباعي الذي فيه كلّ ضلعَين متقابلَين متطابقَان كحدّ أدنى من المعطَيات تكفي لنقول إنّ الشكل الرباعي متوازي أضلاع .

اِستكشِف (٢)

في الشكل المقابِل ٢ ب جـ د شكل رباعي فيه



٢ب = د جـ ، ب جـ = ٢ د

أكمِل ما يلي لتبرهن أنّ الشكل ٢ ب جـ د متوازي أضلاع :

∆ ٢ ب جـ ، ∆ ٢ د جـ فيهما :

١ $\overline{٢ب} \cong$ ...د جـ... (معطى)

٢ $\overline{ب جـ} \cong$ ...٢د... (معطى)

٣ ...٢جـ ضلع مشترك... (ضلع مشترك)

∴ ∆ ٢ ب جـ ≅ ∆ ...٢ د جـ... وحالة التطابق ...(ض . ض . ض)

وينتج من التطابق :

(ب ٢̂ جـ) ≅ ...(د جـ̂ ٢)... وهما في وضع تبادل

∴ $\overline{٢ب}$ // $\overline{د جـ}$ (١)

(ب جـ̂ ٢) ≅ ...(د ٢̂ جـ)... وهما في وضع تبادل

∴ $\overline{ب جـ}$ // $\overline{٢ د}$ (٢)

من (١) ، (٢) نستنتج أنّ الشكل الرباعي ٢ ب جـ د هو ...

...متوازي أضلاع...

تذكَّر

حالات تطابق مثلّثَين

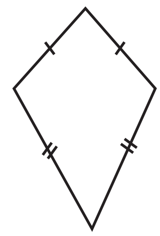
١ (ض . ض . ض)
٢ (ز . ض . ز)
٣ (ض . ز . ض)
٤ (⊿ . و . ض)

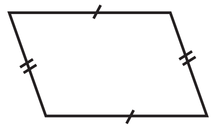
الحالة الثانية

يكون الشكل الرباعي متوازي أضلاع إذا كان فيه كلّ ضلعَين متقابلَين متطابقان .

دورك الآن (٣)

حدِّد ما إذا كان الشكل الرباعي بحسب البيانات المدوَّنة عليه متوازي أضلاع أم لا .

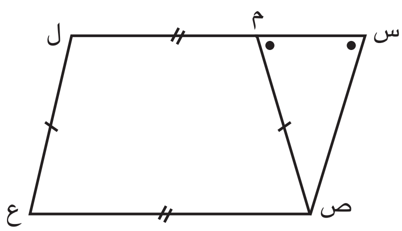
أ

ليس متوازي أضلاع

ب

متوازي أضلاع

ج

ليس متوازي أضلاع

مثال (٢) :



إذا كان س ل = ص ع ، م ص = ل ع ، ق ($\hat{س}$) = ق (س $\hat{م}$ ص)

برهِن أنّ الشكل الرباعي س ص ع ل متوازي أضلاع

الحلّ :

المعطَيات : س ل = ص ع ، م ص = ل ع ، ق ($\hat{س}$) = ق (س $\hat{م}$ ص)

المطلوب : إثبات أنّ الشكل الرباعي س ص ع ل متوازي أضلاع

البرهان :

س ل = ص ع — معطى (١)

في Δ س م ص :

∵ ق ($\hat{س}$) = ق (س $\hat{م}$ ص) — معطى

∴ س ص = م ص — من خواصّ المثلّث المتطابق الضلعَين

∵ م ص = ل ع — معطى

∴ س ص = ل ع — من خواصّ المساواة (٢)

∴ من (١) ، (٢) نستنتج أنّ :

الشكل الرباعي س ص ع ل متوازي أضلاع

لأنّ فيه كلّ ضلعَين متقابلَين متطابقان .

اِنتبِه

تحقّق من إثبات ما يلي :

(١) س ل = ص ع

(٢) س ص = ل ع

الحالة الثانية (خاصّية)

تذكّر

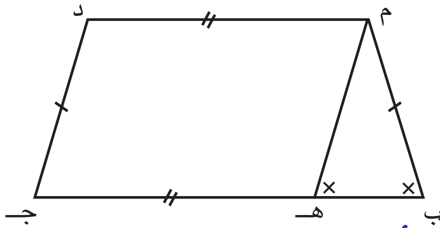
لأيّ مثلّث إذا كان فيه زاويتان متطابقتَين ، فإنّ المثلّث متطابق الضلعَين .

لاحِظ أنّ :

من خواصّ المساواة إذا كان ﺃ = ب ، ب = جـ ، فإنّ ﺃ = جـ

دورك الآن (٤)

حسب البيانات المدوَّنة ، برهِن أنّ الشكل الرباعي م هـ جـ د متوازي أضلاع .



البرهان :

∵ م د = هـ جـ (١) معطى

في Δ م ب هـ : ق (م $\hat{ب}$ هـ) = ق (م $\hat{هـ}$ ب) معطى

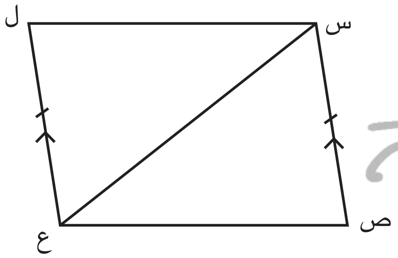
∴ م ب = م هـ السبب : لأنه مثلث متطابق الساقين

∵ م ب = د جـ معطى

∴ م هـ = د جـ (٢) من خواصّ المساواة

من (١) ، (٢) م هـ جـ د هو متوازي أضلاع لأنّ فيه كل ضلعين متقابلين متطابقان .

اِستكشِف (٢)



في الشكل المقابِل س ص ع ل شكل رباعي فيه :

$\overline{س ص} \cong \overline{ل ع}$ ، $\overline{س ص} \mathbin{//} \overline{ل ع}$

هل المعطَيات السابقة تكفي لأن يكون الشكل الرباعي س ص ع ل متوازي أضلاع ؟ (نبحث في تطابق المثلّثَين س ص ع ، ع ل س)

في Δ س ص ع ، Δ ع ل س فيهما :

$\overline{س ص} \cong$ ل ع معطى

(ص $\hat{س}$ ع) $\cong$ (ل $\hat{ع}$ س) (بالتبادل والتوازي) حيث $\overline{س ص} \mathbin{//} \overline{ل ع}$

س ع ضلع مشترَك

∴ Δ س ص ع $\cong$ Δ ع ل س وحالة التطابق (ض ، ز ، ض)

وينتج من التطابق أنّ: (ص $\hat{ع}$ س) $\cong$ (ل $\hat{س}$ ع) (وهما في وضع تبادل)

∴ $\overline{س ل} \mathbin{//} \overline{ص ع}$ (١)

$\overline{س ص} \mathbin{//} \overline{ل ع}$ معطى (٢)

من (١) ، (٢) نستنتج أنّ الشكل الرباعي س ص ع ل هو متوازي أضلاع

وعلى ذلك نقول : نعم ، المعطَيات في الشكل تكفي لأنّ يكون الشكل الرباعي س ص ع ل متوازي أضلاع .

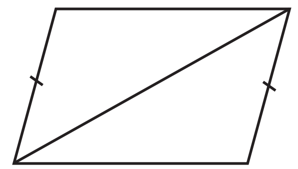
الحالة الثالثة

يكون الشكل الرباعي متوازي أضلاع إذا كان فيه ضلعان متقابلان متطابقَين ومتوازيَين .

دورك الآن (٥)

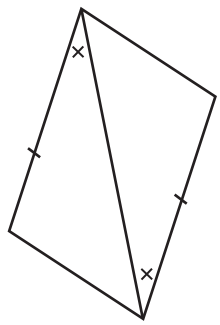
حدِّد ما إذا كان الشكل الرباعي بحسب البيانات المدوَّنة عليه متوازي أضلاع أم لا .

أ



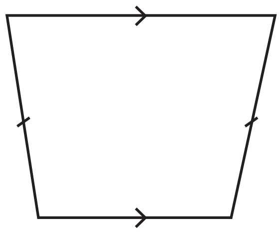
ليس متوازي أضلاع

ب



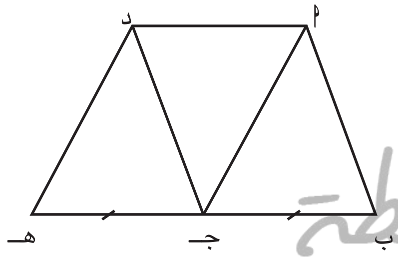
متوازي أضلاع

جـ



ليس متوازي أضلاع

مثال (٣) :



إذا كان أ ب جـ د متوازي أضلاع ،
ب جـ = جـ هـ ، ب ، جـ ، هـ على استقامة واحدة ، فبرهِن
أنّ الشكل الرباعي أ جـ هـ د متوازي أضلاع .

الحلّ :

المعطَيات : أ ب جـ د متوازي أضلاع
ب جـ = جـ هـ
ب ، جـ ، هـ على استقامة واحدة .

المطلوب : إثبات أنّ أ جـ هـ د متوازي أضلاع .

البرهان :

∵ أ ب جـ د متوازي أضلاع — معطى
∴ أ د // ب جـ — (من تعريف متوازي الأضلاع)
∵ ب ، جـ ، هـ على استقامة واحدة — معطى
∴ أ د // جـ هـ — (١)
∵ أ د = ب جـ — (من خواصّ متوازي الأضلاع)
∵ ب جـ = جـ هـ — معطى
∴ أ د = جـ هـ — من خواصّ المساواة (٢)

من (١) ، (٢) نستنتج أنّ :
الشكل الرباعي أ جـ هـ د متوازي أضلاع لأنّ فيه ضلعَين متقابلَين متطابقان ومتوازيان .

اِنتبِه

تحقَّق من إثبات ما يلي :
(١) أ د // جـ هـ
(٢) أ د = جـ هـ
الحالة الثالثة (خاصّية)

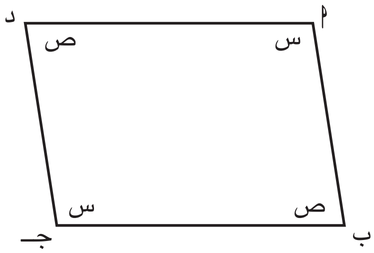
الدرس الثالث

عبِّر عن فهمك (٢)

إذا كان في الشكل الرباعي ضلعان متوازيان وضلعان آخران متطابقان ، فهل يمكننا الجزم أنّ هذا الشكل يمثّل متوازي أضلاع ؟ فسِّر إجابتك . لا ، لأنه الضلعين المتطابقين قد يكونا غير متوازيين
مثل شبه المنحرف المتطابق الساقين

اِستكشِف (٣)

في الشكل المقابِل أ ب جـ د شكل رباعي فيه :



ق (أ^) = ق (جـ^) = س

ق (ب^) = ق (د^) = ص

هل المعطَيات كافية لأن يكون الشكل الرباعي أ ب جـ د متوازي أضلاع ؟

سوف نبحث في ذلك .

تعلم أنّ :

س + ص + س + ص = ٣٦٠°

∴ ٢ س + ٢ ص = ٣٦٠° بالقسمة على العدد ٢

∴ س + ص = ١٨٠°

ق (أ^) + ق (...ب...) = ١٨٠° وهما زاويتان متحالفتان

∴ ......أد...... // ......ب جـ...... (١)

وكذلك ق (أ^) + ق (...د...) = ١٨٠° وهما زاويتان متحالفتان

∴ ......أب...... // ......د جـ...... (٢)

من (١) ، (٢) نستنتج أنّ الشكل الرباعي أ ب جـ د هو ...متوازي أضلاع...

وعلى ذلك نقول : نعم ، المعطَيات كافية لإثبات أنّ الشكل الرباعي أ ب جـ د متوازي أضلاع .

تذكَّر

مجموع قياسات زوايا الشكل الرباعي = ٣٦٠°

الحالة الرابعة

يكون الشكل الرباعي متوازي أضلاع إذا كان فيه كلّ زاويتَين متقابلتَين متطابقتان .

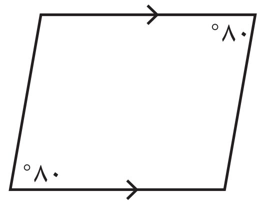
ملاحظة :

يكون الشكل الرباعي متوازي أضلاع إذا كان فيه كلّ زاويتَين متتاليتَين متكاملتان .

دورك الآن (٦)

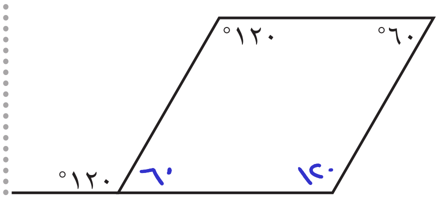
حدِّد ما إذا كان الشكل الرباعي بحسب البيانات المدوَّنة عليه متوازي أضلاع أم لا .

أ



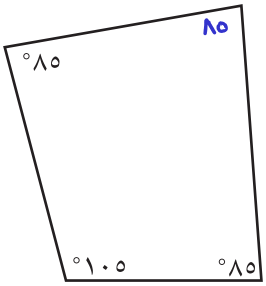
متوازي أضلاع

ب



متوازي أضلاع

ج



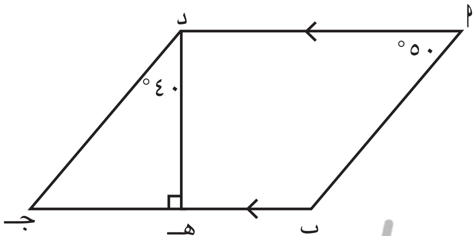
ليس متوازي أضلاع

مثال (٤):

أ ب جـ د شكل رباعي فيه : $\overline{\text{أ د}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$

ق ($\hat{\text{أ}}$) = ٥٠° ، $\overline{\text{د هـ}} \perp \overline{\text{ب جـ}}$ ، ق ($\angle$ جـ د هـ) = ٤٠°

أثبِت أنّ أ ب جـ د متوازي أضلاع .



المعطيات : $\overline{\text{أ د}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$

ق ($\hat{\text{أ}}$) = ٥٠° ، ق ($\angle$ جـ د هـ) = ٤٠°

$\overline{\text{د هـ}} \perp \overline{\text{ب جـ}}$

المطلوب : إثبات أنّ الشكل الرباعي أ ب جـ د متوازي أضلاع .

البرهان :

في Δ د جـ هـ :

ق ($\hat{\text{جـ}}$) = ١٨٠° − (٩٠° + ٤٠°)

= ١٨٠° − ١٣٠° = ٥٠° (مجموع قياسات الزوايا الداخلة للمثلّث = ١٨٠°)

$\therefore$ ق ($\hat{\text{أ}}$) = ق ($\hat{\text{جـ}}$) = ٥٠° (١)

$\because$ $\overline{\text{أ د}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$ معطى

ق ($\hat{\text{ب}}$) = ١٨٠° − ٥٠° = ١٣٠° ($\hat{\text{أ}}$ و $\hat{\text{ب}}$ زاويتان متحالفتان متكاملتان)

$\therefore$ ق ($\angle$ أ د جـ) = ٣٦٠° − (٥٠° + ١٣٠° + ٥٠°) (مجموع قياسات زوايا الشكل الرباعي = ٣٦٠°)

= ٣٦٠° − ٢٣٠° = ١٣٠°

ق ($\hat{\text{ب}}$) = ق ($\angle$ أ د جـ) = ١٣٠° (٢)

من (١) ، (٢) نستنتج أنّ الشكل الرباعي أ ب جـ د هو متوازي أضلاع لأنّ فيه كلّ زاويتَين متقابلتَين متطابقتان .

اِنتبِه

تحقَّق من إثبات ما يلي :

(١) ($\hat{\text{أ}}$) $\cong$ ($\hat{\text{جـ}}$)

(٢) ($\hat{\text{ب}}$) $\cong$ ($\angle$ أ د جـ)

الحالة الرابعة (خاصّية)

الدرس الثالث

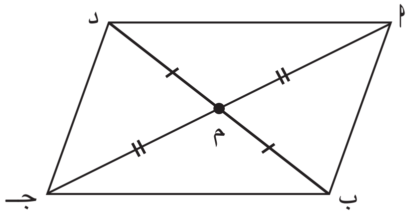
عبِّر عن فهمك (٣)

بالرجوع إلى مثال (٤) ، هل يمكنك إيجاد قياس (∠ ا د جـ) بطريقة أخرى ؟ وضِّح إجابتك .

نعم ، ∵ ا د // ب جـ ، د هـ ⊥ ب جـ ∴ ق(∠ ا د هـ) = ٩٠ ∴ ق(∠ ا د جـ) = ٩٠ + ٤٠ = ١٣٠°

سنتحقّق معًا بأنّ الشكل الرباعي الذي فيه القطران ينصّف كلّ منهما الآخر كحدّ أدنى من المعطَيات تكفي لنقول إنّ الشكل الرباعي متوازي أضلاع .

اِستكشِف (٤)



الشكل المقابِل ا ب جـ د شكل رباعي فيه :

$\overline{\text{ا جـ}} \cap \overline{\text{ب د}}$ = { م } ، ا م = م جـ

د م = م ب

من خلال معلوماتك عن مفهوم الانعكاس في نقطة

إذا كانت م مركز الانعكاس ، أكمِل ما يلي :

صورة ا بالانعكاس في م هي ....جـ..........

صورة ب بالانعكاس في م هي ....د..........

صورة $\overline{\text{ا ب}}$ بالانعكاس في م هي ....جـ د..........

∴ $\overline{\text{ا ب}}$ // ....$\overline{\text{د جـ}}$.......... (١) (من خواصّ الانعكاس في نقطة)

وبالمثل صورة $\overline{\text{ب جـ}}$ بالانعكاس في م هي ....$\overline{\text{د ا}}$..........

∴ $\overline{\text{ب جـ}}$ // ....$\overline{\text{ا د}}$.......... (٢) (من خواصّ الانعكاس في نقطة)

من (١) ، (٢) ∴ نستنتج أنّ الشكل الرباعي ا ب جـ د هو ....متوازي أضلاع..........

تذكّر

إذا كانت $\overline{\text{ا َب َ}}$ صورة $\overline{\text{ا ب}}$ بالانعكاس في نقطة فإنّ :

١ $\overline{\text{ا ب}}$ // $\overline{\text{ا َب َ}}$

٢ ا ب = ا َب َ

الحالة الخامسة

يكون الشكل الرباعي متوازي أضلاع إذا كان فيه القطران ينصّف كلّ منهما الآخر .

عبِّر عن فهمك (٤)

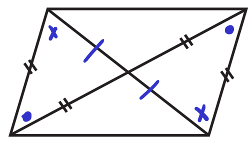
هل يمكنك إثبات الحالة الخامسة بطريقة أخرى . اِشرح طريقتك .

نعم ، ∵ القطران ينصف كل منهما الآخر ∴ ا ب جـ د متوازي أضلاع .

دورك الآن (٧)

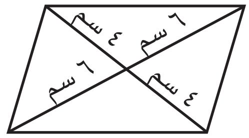
حدِّد ما إذا كان الشكل الرباعي بحسب البيانات المدوّنة عليه متوازي أضلاع أم لا .

أ



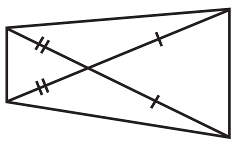
متوازي أضلاع .

ب



متوازي أضلاع

ج



ليس متوازي أضلاع .

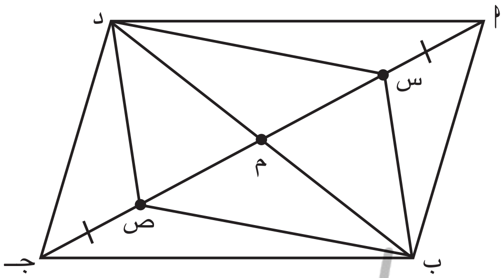
مثال (٥) :

ﺃ ب جـ د متوازي أضلاع

تقاطع قطرَيه في م ، أخذت النقطتان

س ، ص ∈ $\overline{\text{ﺃ جـ}}$ بحيث ﺃ س = جـ ص

برهِن أنّ س ب ص د متوازي أضلاع .



الحلّ :

المعطَيات : ﺃ ب جـ د متوازي أضلاع

ﺃ س = جـ ص

المطلوب : إثبات أنّ س ب ص د متوازي أضلاع .

البرهان :

∵ ﺃ ب جـ د متوازي أضلاع (معطى)

∴ ب م = م د (١) (قطرا متوازي الأضلاع ينصّف كلّ منهما الآخر)

ﺃ م = م جـ

∵ ﺃ س = جـ ص (معطى)

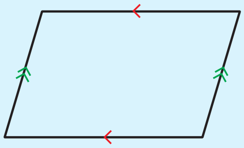
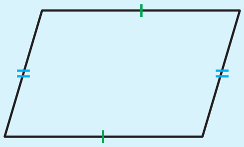
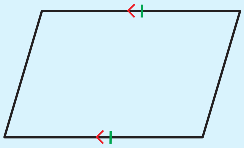
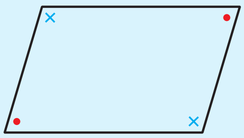
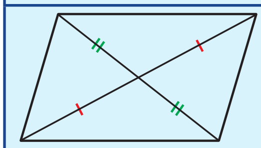
∴ ﺃ م − ﺃ س = م جـ − جـ ص (من خواصّ المساواة)

∴ م س = م ص (٢)

من (١) ، (٢) نستنتج أنّ س ب ص د متوازي أضلاع لأنّ القطرَين ينصّف كلّ منهما الآخر .

> **اِنتبِه**
>
> تحقَّق من إثبات ما يلي :
>
> (١) ب م = م د
>
> (٢) م س = م ص
>
> الحالة الخامسة (خاصّية)

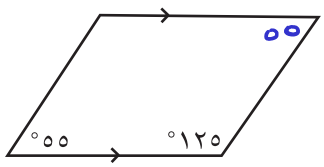
ممّا سبق نجد أنّه : يكون الشكل الرباعي متوازي أضلاع إذا توفّر أحد الشروط التالية :

١ كلّ ضلعَين متقابلَين متوازيان (من التعريف) .	
٢ كلّ ضلعَين متقابلَين متطابقان .	
٣ فيه ضلعان متقابلان متطابقان ومتوازيان .	
٤ كلّ زاويتَين متقابلتَين متطابقتان .	
٥ القطران ينصّف كلّ منهما الآخر .	

دورك الآن (٨)

ضَع علامة (✓) أسفل الشكل الذي يمثّل متوازي أضلاع مع ذكر السبب لكلّ ممّا يلي :

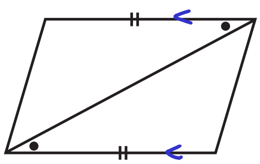
أ



☑ ✓

كل زاويتين متقابلتين متطابقتان

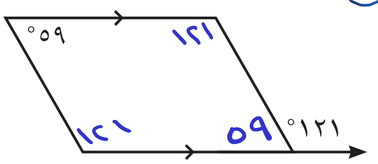
ب



☑ ✓

فيه ضلعان متطابقان ومتوازيان

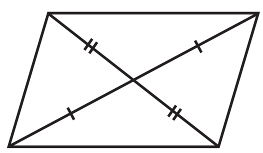
ج



☑ ✓

كل ضلعين متقابلين متوازيان

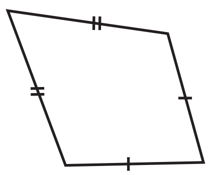
د



☑ ✓

القطران ينصف كل منهما الآخر

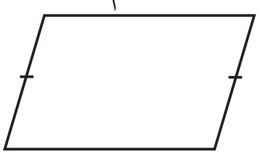
هـ



☐

....

و



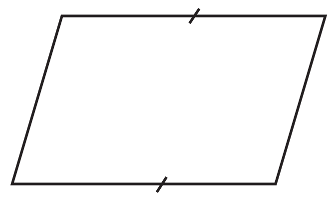
☑ ✓

كل ضلعين متقابلين متطابقان

تمارين ذاتية :

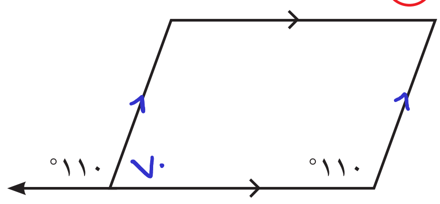
١ أمامك أشكال رباعية ، حدِّد أيًّا منها يمثّل متوازي أضلاع مع ذكر السبب :

أ



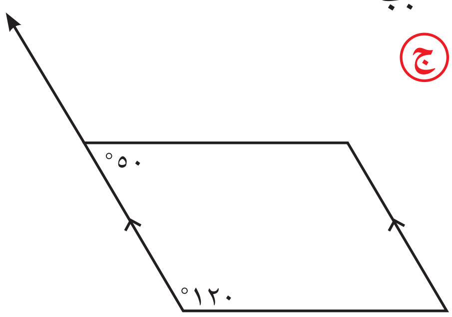
لا يمثل

ب



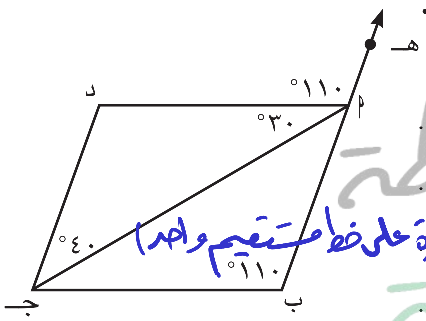
يمثل متوازي أضلاع لأنه كل ضلعين متقابلين متوازيان

ج



لا يمثل

٢ من البيانات على الشكل المقابِل ، أثبِت أنّ أ ب جـ د متوازي أضلاع .



∵ ق(∠هـ أ د) = ق(∠ب) = ١١٠° (وهما في وضع تناظر)

∴ أ د // ب جـ (١)

∵ ق(∠هـ أ د) + ق(∠د أ جـ) + ق(∠ب أ جـ) = ١٨٠° (زوايا متجاورة على خط مستقيم واحد)

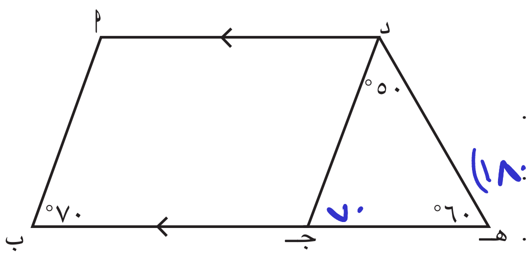
∴ ١١٠ + ٣٠ + ق(∠ب أ جـ) = ١٨٠

ق(∠ب أ جـ) = ١٨٠ − (١١٠ + ٣٠) = ١٨٠ − ١٤٠ = ٤٠

∵ ق(∠ب أ جـ) = ق(∠د جـ أ) = ٤٠ (وهما في وضع تبادل)

∴ أ ب // د جـ (٢) ، من (١)، (٢) ينتج أن أ ب جـ د متوازي أضلاع

٣ من البيانات على الشكل المقابِل ،
أثبِت أنّ أ ب جـ د متوازي أضلاع .



في Δ د هـ جـ

ق(∠هـ جـ د) = ١٨٠ − (٦٠ + ٥٠) (مجموع زوايا المثلث ١٨٠)

∴ ق(∠هـ جـ د) = ٧٠°

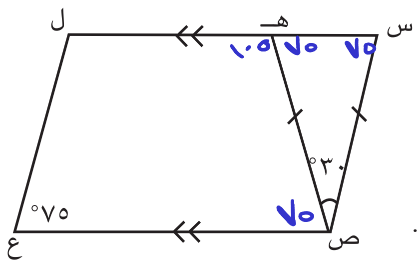
∵ ق(∠هـ جـ د) = ق(∠ب) = ٧٠° (وهما في وضع تناظر)

∴ أ ب // د جـ

∵ أ د // ب جـ (معطى)

∴ الشكل أ ب جـ د متوازي أضلاع

٤ في الشكل المقابِل $\overline{\text{س ل}}$ // $\overline{\text{ص ع}}$ ، ص س = ص هـ ،
ق ($\hat{\text{ع}}$) = ٧٥° ، ق (س $\hat{\text{ص}}$ هـ) = ٣٠° ،
برهِن أنّ الشكل الرباعي س ص ع ل متوازي أضلاع .



في Δ س ص هـ ، س ص = هـ ص (معطى)

∴ ق(س̂) = ق(س هـ ص) = $\frac{١٨٠ - ٣٠}{٢}$ = $\frac{١٥٠}{٢}$ = ٧٥°

∵ س ل // ص ع

∴ ق(س هـ ص) = ق(هـ ص̂ ع) = ٧٥ (بالتبادل)

∴ س ص = ل ع

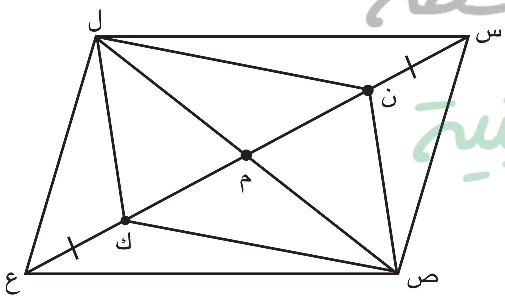
∴ س ل // ص ع

∴ ق(ل) + ق(ع) = ١٨٠ (زاويتان متحالفتان متكاملتان)

ق(ع) = ق(س) = ٧٥° (زاويتان متقابلتان متطابقتان)

∴ الشكل س ص ع ل متوازي أضلاع

٥ إذا كان ن ص ك ل متوازي أضلاع تقاطع قطرَيه في م ،
س ن = ع ك ،
فأثبِت أنّ الشكل س ص ع ل متوازي أضلاع .



∵ ن ص ك ل متوازي أضلاع (معطى)

∴ م ن = م ك ← (١)

∴ م ص = م ل

∵ س ن = ع ك ← (٢) (معطى)

بجمع (١)، (٢) ∴ س ن + م ن = م ك + ع ك

∴ م س = م ع

∵ م س = م ع ، م ص = م ل

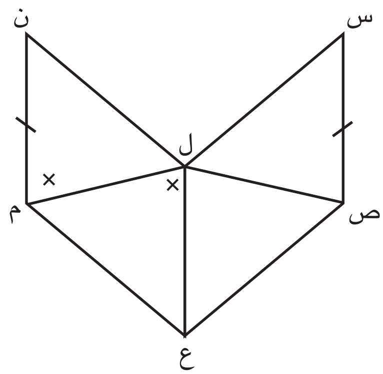
∴ القطران س ع ، ص ل ينصف كل منهما الآخر

∴ الشكل س ص ع ل متوازي

٦ في الشكل المقابِل س ص ع ل متوازي أضلاع ،

س ص = ن م ، ق (ن م̂ ل) = ق (م ل̂ ع)

أثبِت أنّ ل ع م ن متوازي أضلاع .



∵ ق(ن م̂ ل) = ق(م ل̂ ع) (وهما في وضع تبادل)

∴ م ن // ل ع

∵ س ص ع ل متوازي أضلاع

∴ س ص // ل ع ، س ص = ل ع

∵ م ن // ل ع ، س ص // ل ع ، س ص = ل ع

∴ ل ع = م ن

∵ م ن // ل ع ، م ن = ل ع (فيه ضلعان متقابلان متوازيان ومتطابقان)

∴ الشكل ل ع م ن متوازي أضلاع

مهارات تفكير عليا :

اِختر الإجابة الصحيحة .

٧ في الشكل المقابِل ، قيمة س ، ص على الترتيب التي تجعل الشكل الرباعي متوازي أضلاع هي :

أ ٦٠° ، ٨

ب ٦٠° ، ٤

ج ١٢٠° ، ٤

د ١٢٠° ، ٨

٥ - ٤ الكشف عن المستطيل
Detecting a Rectangle

سوف تتعلّم : الكشف عن المستطيل .

العبارات والمفردات :

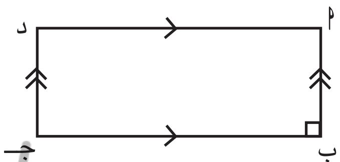
المستطيل — Rectangle

إستكشِف

تذكَّر

المستطيل هو شكل رباعي زواياه الأربع قوائم .

أوّلًا : في الشكل المرسوم :



أ ب جـ د متوازي أضلاع ، ن (ب̂) = ٩٠°

أكمِل ما يلي :

ن (د̂) = ٩٠° (كلّ زاويتَين متقابلتَين متطابقتان)

ن (أ̂) = ٩٠° (زاويتان متحالفتان متكاملتان)

ن (جـ̂) = ٩٠° (كل زاويتين متقابلتين متطابقتان)

ماذا تلاحظ ؟

الشكل أ ب جـ د هو مستطيل

∴ المستطيل هو متوازي أضلاع إحدى زواياه قائمة

تذكَّر

خواصّ متوازي الأضلاع :

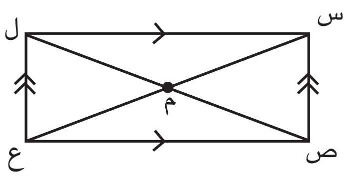
١ كلّ ضلعَين متقابلَين متطابقان .

٢ كلّ زاويتَين متقابلتَين متطابقتان .

٣ كلّ زاويتَين متتاليتَين متكاملتان .

٤ القطران ينصّف كلّ منهما الآخر .

ثانيًا : في الشكل المرسوم :



س ص ع ل متوازي أضلاع ، س ع = ص ل ،

أكمِل ما يلي :

Δ س ص ع ، Δ ل ع ص فيهما :

(١) س ص = ل ع (كلّ ضلعَين متقابلَين متطابقان)

(٢) س ع = ل ص (معطى)

(٣) ص ع (ضلع مشترَك)

∴ Δ س ص ع ≅ Δ ل ع ص بحالة (ض، ض، ض) وينتج من التطابق أنّ : ن (ص̂) = ن (ع̂)

∵ ق (ص^) + ق (ع^) = ١٨٠° (كلّ زاويتَين متتاليتَين متكاملتان)

∴ ٢ ق (ص^) = ١٨٠° ⟸ ق (ص^) = ٩٠°

∴ الشكل س ص ع ل هو مستطيل

إذًا المستطيل هو متوازي أضلاع قطراه متطابقان .

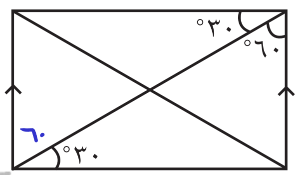
يكون متوازي الأضلاع مستطيلًا إذا توفّر فيه أحد الشروط التالية :

1. **إحدى زواياه قائمة**
2. **قطراه متطابقان**

دورك الآن (١)

اِستخدِم المعطَيات التي على الأشكال التالية لتبيّن أيًّا منها تمثّل مستطيلًا مع ذكر السبب .

أ

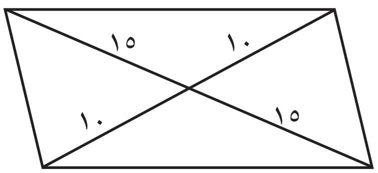


مستطيل لأنه متوازي أضلاع إحدى زواياه قائمة .

ب

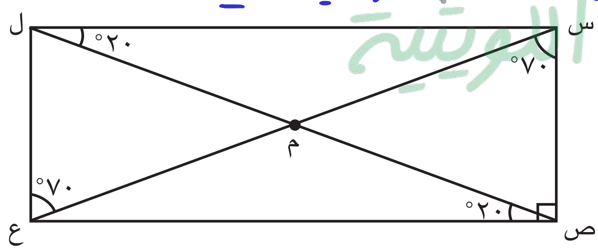
مستطيل لأنه فيه ضلعان متطابقان ومتوازيان وإحدى زواياه قائمة .

ج



ليس مستطيل لأنه إحدى زواياه ليست قائمة

مثال (١) :



في الشكل المقابِل ، ومن البيانات الموضّحة على الرسم ،

أثبِت أنّ س ص ع ل مستطيل .

الحلّ :

المعطَيات :

ق (ص س^ ع) = ق (ل ع^ س) = ٧٠° ، ق (س ل^ ص) = ق (ع ص^ ل) = ٢٠° ، ق (س ص^ ع) = ٩٠°

المطلوب : إثبات أنّ س ص ع ل مستطيل

البرهان :

∵ ق (س ل^ ص) = ق (ع ص^ ل) = ٢٠° معطى (وهما في وضع تبادل)

∴ $\overline{\text{س ل}}$ // $\overline{\text{ص ع}}$ (١)

∵ ق (ص س^ ع) = ق (ل ع^ س) = ٧٠° معطى (وهما في وضع تبادل)

∴ $\overline{\text{س ص}}$ // $\overline{\text{ل ع}}$ (٢)

من (١) ، (٢) نستنتج أن س ص ع ل متوازي أضلاع لأنّ فيه كلّ ضلعَين متقابلَين متوازيان

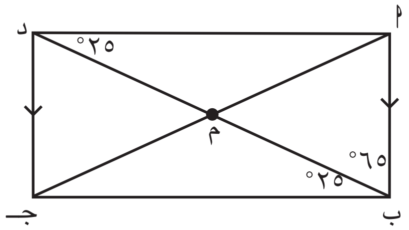
∵ ق (س ص^ ع) = ٩٠° معطى

∴ الشكل س ص ع ل مستطيل لأنّه متوازي أضلاع إحدى زواياه قائمة .

عبِّر عن فهمك

في مثال (١) السابق ، هل يمكن إثبات أنّ الشكل س ص ع ل مستطيل من خلال إثبات تطابق القطرَين ؟ وضِّح ذلك . نعم ، نطبق التشابه بين المثلثين Δ س ص ع ، Δ ل ع ص
ينتج أن س ع = ل ص

دورك الآن (٢)



أ ب جـ د شكل رباعي فيه $\overline{أب}$ // $\overline{دجـ}$

ق (أ د̂ ب) = ق (د ب̂ جـ) = ٢٥°

ق (أ ب̂ د) = ٦٥°

أثبِت أنّ الشكل الرباعي أ ب جـ د مستطيل .

البرهان :

في الشكل الرباعي أ ب جـ د

∵ $\overline{أب}$ // ...... د جـ ...... (معطى) (١)

∴ ق (أ د̂ ب) = ق (جـ ب̂ د) = ٢٥ ...... وهما في وضع ...... تبادل

∴ $\overline{أد}$ // ...... ب جـ ...... (٢)

من (١) ، (٢) ينتج أنّ الشكل أ ب جـ د ...... متوازي أضلاع (٣)

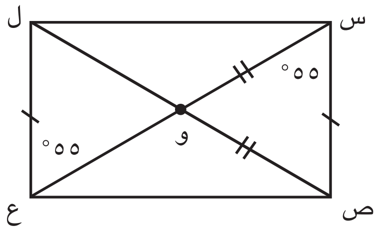
لأنّ فيه كلّ ...... ضلعين متقابلين متوازيان

∵ ق (أ ب̂ د) + ق (جـ ب̂ د) = ٦٥° + ... ٢٥ ...... = ... ٩٠ ...... (٤)

من (٣) ، (٤) نستنتج أنّ الشكل أ ب جـ د

مستطيل لأنّه ...... متوازي أضلاع ...... إحدى زواياه ...... قائمة .

مثال (٢) :



س ص ع ل شكل رباعي تقاطع قطرَيه في النقطة و

س ص = ل ع

س و = ص و

ق (ص س̂ و) = ق (ل ع̂ و) = ٥٥°

أثبِت أنّ س ص ع ل مستطيل .

الحلّ :

المعطَيات : س ص ع ل شكل رباعي حيث و نقطة تقاطع قطرَيه

س ص = ل ع ، س و = ص و

ق (ص $\hat{\text{س}}$ و) = ق (ل $\hat{\text{ع}}$ و) = ٥٥°

المطلوب : إثبات أنّ الشكل الرباعي س ص ع ل مستطيل

البرهان : ∵ $\overline{\text{س ص}} \cong \overline{\text{ل ع}}$ (معطى) (١)

ق (ص $\hat{\text{س}}$ و) = ق (ل $\hat{\text{ع}}$ و) = ٥٥° (وهما في وضع تبادل)

∴ $\overline{\text{س ص}}$ // $\overline{\text{ل ع}}$ (٢)

من (١) ، (٢) نستنتج أنّ :

الشكل الرباعي س ص ع ل متوازي أضلاع لأنّ فيه ضلعَين متقابلَين متطابقان ومتوازيان (٣)

∵ ص و = و ل ، س و = و ع (قطرا متوازي الأضلاع ينصّف كلّ منهما الآخر)

∵ س و = ص و

∴ س ع = ص ل (٤) (من خواصّ المساواة)

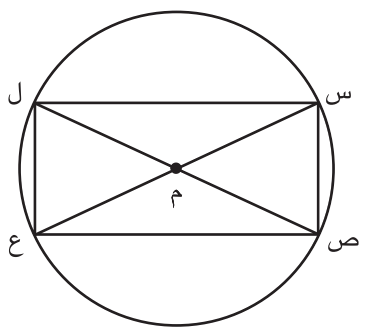
من (٣) ، (٤) نستنتج أنّ :

س ص ع ل مستطيل لأنّه متوازي أضلاع قطراه متطابقان

دورك الآن (٣)

في الشكل المقابِل ، دائرة مركزها م

أثبِت أنّ الشكل س ص ع ل مستطيل .



المعطَيات : دائرة مركزها م

المطلوب : إثبات أنّ س ص ع ل مستطيل

البرهان : ∵ م مركز الدائرة

∵ س م = ع م (نصف قطر الدائرة)

ص م = ل م (نصف قطر الدائرة)

∴ القطران ينصّف كلّ منهما الآخر

∴ الشكل س ص ع ل متوازي أضلاع لأنّ فيه القطران ينصف كل منهما الآخر

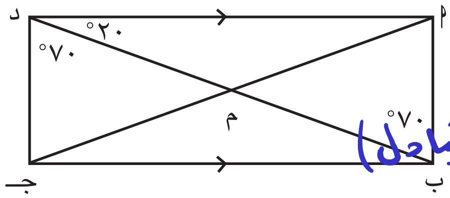
∵ س ع = ل ص (أقطار الدائرة متطابقة)

∴ س ص ع ل مستطيل لأنّه متوازي أضلاع فيه قطران متطابقان

تمارين ذاتية :

١ أ ب جـ د شكل رباعي فيه $\overline{أد}$ // $\overline{ب جـ}$ ، ق (أ $\hat{ب}$ د) = ق (ب $\hat{د}$ جـ) = ٧٠° ، ق (أ $\hat{د}$ ب) = ٢٠°

أثبِت أنّ الشكل الرباعي أ ب جـ د مستطيل .



∵ أ د // ب جـ ← (١) (معطى)

∵ ق (أ $\hat{ب}$ د) = ق (ب $\hat{د}$ جـ) = ٧٠° (وهما في وضع تبادل)

∴ أ ب // د جـ ← (٢)

من (١) ، (٢) ينتج أن الشكل أ ب جـ د متوازي أضلاع ← (٣)

∵ ق (أ $\hat{د}$ ب) + ق (ب $\hat{د}$ جـ) = ٢٠ + ٧٠ = ٩٠

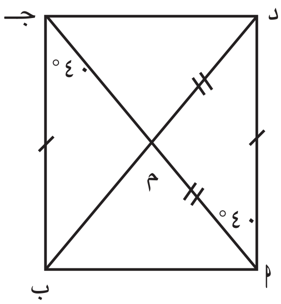
∴ ق ($\hat{د}$) = ٩٠° ← (٤)

∴ من (٣) ، (٤) ينتج أن الشكل أ ب جـ د مستطيل .

٢ أ ب جـ د شكل رباعي يتقاطع قطراه في م ،

أ د = ب جـ ، م د = م أ ، ق (د $\hat{أ}$ جـ) = ق (ب $\hat{جـ}$ أ) = ٤٠°

أثبِت أنّ الشكل أ ب جـ د مستطيل ، ثمّ أوجِد ق (ب $\hat{أ}$ جـ)



∵ ق (د أ جـ) = ق (ب جـ أ) = ٤٠ (وهما في وضع تبادل)

∴ أ د // ب جـ ، أ د = ب جـ (معطى)

∴ الشكل أ ب جـ د متوازي أضلاع (فيه ضلعان متقابلان متطابقان ومتوازيان)

∴ القطران ينصف كل منهما الآخر .

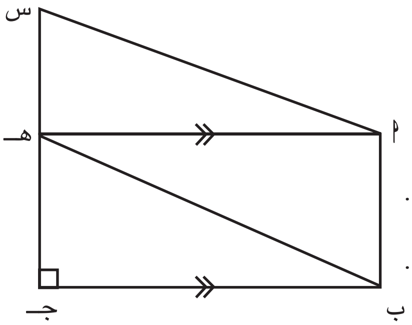
∴ م د = م ب ، م د = م أ (معطى)

∴ م د = م ب = م أ = م جـ

∴ القطران متطابقان و ينصف كل منهما الآخر .

∴ الشكل أ ب جـ د مستطيل .

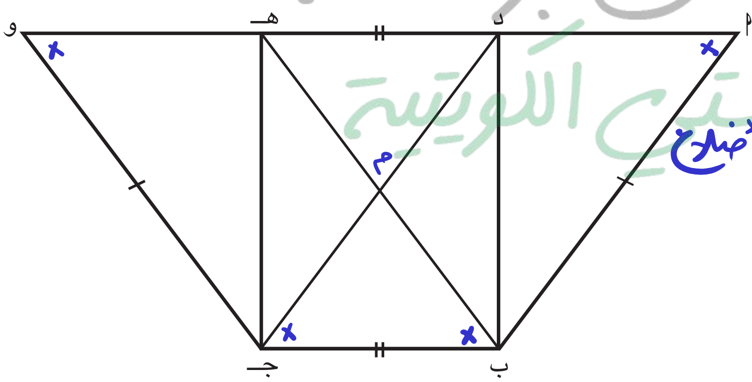
٣ ﺃ ب هـ س متوازي أضلاع ، ق ($\hat{\text{جـ}}$) = ٩٠° ،
ﺃ هـ // ب جـ ، س ، هـ ، جـ على استقامة واحدة
أثبِت أنّ ﺃ ب جـ هـ مستطيل .



∵ ﺃ ب هـ س متوازي أضلاع
∴ ﺃ ب // س هـ
∵ س ، هـ ، جـ على استقامة واحدة
∴ ﺃ ب // س جـ ∴ ﺃ ب // هـ جـ ← (١)
∵ ﺃ هـ // ب جـ ← (٢) (معطى)
∵ ق($\hat{\text{جـ}}$) = ٩٠° ← (٣) (معطى)
∴ الشكل ﺃ ب جـ هـ مستطيل .

مهارات تفكير عليا :

٤ في الشكل المقابِل ، ﺃ ب جـ د ، هـ ب جـ و متوازيا أضلاع . د ، هـ ينتميان إلى $\overline{\text{ﺃو}}$ ، ﺃ ب = و جـ ،
ب جـ = د هـ
أثبِت أنّ الشكل د ب جـ هـ مستطيل .



∵ ﺃ ب جـ د ، هـ ب جـ و متوازيا أضلاع
∴ ق(د $\hat{\text{جـ}}$ ب) = ق(جـ $\hat{\text{ب}}$ هـ)
∴ ﺃ د // ب جـ ، هـ و // ب جـ
د ، هـ ينتميان إلى ﺃ و
∴ د هـ // ب جـ ← (١)
∵ د هـ = ب جـ ← (٢) (معطى)
∴ من (١) ، (٢) ينتج أن الشكل د ب جـ هـ متوازي أضلاع ← (٣)
∵ ﺃ ب = د جـ ، هـ ب = و جـ (كل ضلعين متقابلين متطابقان)
ﺃ ب = و جـ (معطى)
∴ د جـ = ب هـ (القطران متطابقان) ← (٤)
∴ من (٣) ، (٤) ينتج أن الشكل د ب جـ هـ مستطيل .

٥ - ٥ الكشف عن المعيَّن
Detecting a Rhombus

سوف تتعلّم : الكشف عن المعيَّن .

العبارات والمفردات :

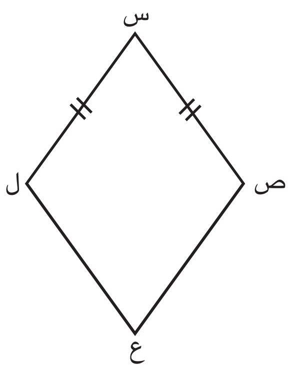
المعيَّن	Rhombus

إستكشِف

تذكَّر

- **المعيَّن** هو شكل رباعي أضلاعه الأربعة متطابقة .

أوّلًا : الشكل س ص ع ل متوازي أضلاع فيه : س ص ≅ س ل



أكمِل ما يلي :

س ص ≅ ......ع ل...... (كلّ ضلعَين متقابلَين في متوازي الأضلاع متطابقان)

س ل ≅ ......ص ع...... (كلّ ضلعَين متقابلَين في متوازي الأضلاع متطابقان)

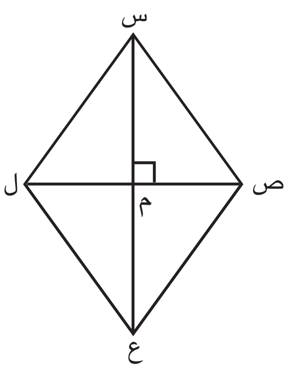
∵ س ص ≅ س ل (معطى)

∴ ......س ص...... = ...ص ع...... = ...ع ل...... = ...س ل...... (من خواصّ المساواة)

∴ الشكل س ص ع ل هو ......معين......

إذًا المعيَّن هو متوازي أضلاع فيه ضلعان متجاوران متطابقان

ثانيًا : الشكل س ص ع ل متوازي أضلاع فيه : س ع ⊥ ص ل



أكمِل ما يلي :

Δ س م ص ، Δ س م ل فيهما :

ق (س م̂ ص) = ق (س م̂ ل) = ٩٠° (بالتجاور على خطّ مستقيم)

ص م = ...ل م...... (قطرا متوازي الأضلاع ينصّف كلًّا منهما الآخر)

......س م...... (ضلع مشترَك)

∴ Δ س م ص ≅ Δ س م ل (ض . ز . ض)

وينتج من التطابق أنّ :

س ص ≅ ......س ل......

∵ س ص ع ل متوازي أضلاع

∴ س ص = ص ع = ع ل = س ل (من خواصّ المساواة)

∴ س ص ع ل هو ......معين........................

إذًا المعيَّن هو متوازي أضلاع قطراه متعامدان

ممّا سبق نلاحظ أنّ :

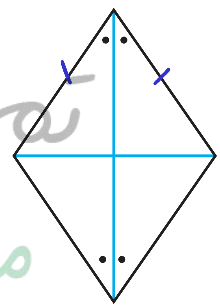
يكون متوازي الأضلاع معيَّنًا إذا توفّر فيه أحد الشرطَين التاليَين :

1. **إذا تطابق ضلعان متجاوران فيه .**
2. **إذا تعامد قطراه .**

دورك الآن (١)

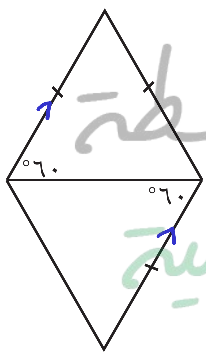
أيّ الأشكال التالية يمثّل معيَّنًا مع ذكر السبب ؟

أ



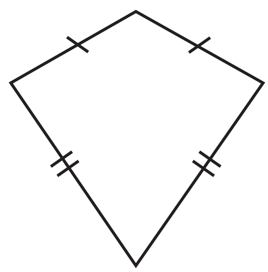
معين ، لأنه فيه ضلعان متجاوران متطابقان

ب



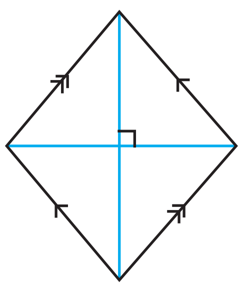
معين لأنه متوازي أضلاع فيه ضلعان متجاوران متطابقان .

ج



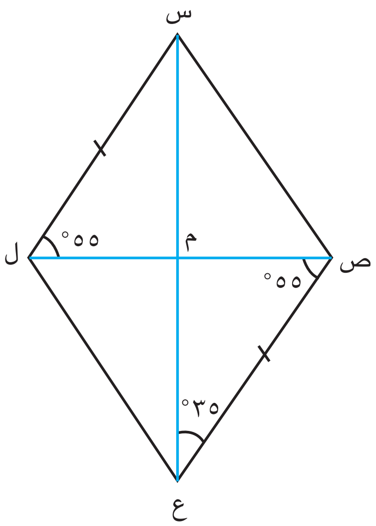
ليس معين ، لأنه ليس متوازي أضلاع

د



معين ، لأنه متوازي أضلاع قطراه متعامدان .

مثال (٢):



في الشكل المقابِل :

ق (س لَ̂ ص) = ق (ع صَ̂ ل) = ٥٥° ،

ق (ص عَ̂ س) = ٣٥° ، س ل = ص ع .

أثبِت أنّ الشكل الرباعي س ص ع ل معيَّن .

الحلّ :

المعطَيات :

س ل = ص ع

ق (س لَ̂ ص) = ق (ع صَ̂ ل) = ٥٥°

ق (ص عَ̂ س) = ٣٥°

المطلوب : إثبات أنّ الشكل س ص ع ل معيَّن .

البرهان :

∵ س ل = ص ع (١) (معطى)

∵ ق (س لَ̂ ص) = ق (ع صَ̂ ل) = ٥٥° (وهما في وضع تبادل)

∴ س ل // ص ع (٢)

∴ من (١) ، (٢) الشكل الرباعي س ص ع ل متوازي أضلاع لأنّ فيه ضلعَين متقابلَين متوازيان ومتطابقان . (٣)

في Δ ص م ع فيه :

∵ ق (ع صَ̂ م) = ٥٥° (معطى) ، ∵ ق (ص عَ̂ م) = ٣٥° (معطى)

∴ ق (ص مَ̂ ع) = ١٨٠° - (٣٥° + ٥٥°) = ٩٠° (مجموع قياسات زوايا المثلّث الداخلة يساوي ١٨٠°)

∴ س ع ⊥ ص ل (٤)

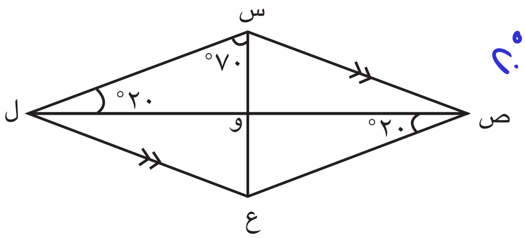
∴ من (٣) ، (٤) ∴ الشكل س ص ع ل معيَّن لأنّه متوازي أضلاع قطراه متعامدان .

تذكَّر

- الرمز ⊥ هو رمز عمودي على .
- الرمز // هو رمز موازٍ لـ .
- مجموع قياسات زوايا المثلّث الداخلة يساوي ١٨٠°

دورك الآن (٢)

في الشكل المقابِل ، ومن البيانات الموضَّحة على الرسم ، أثبِت أنّ س ص ع ل معيَّن .



المعطيات : س ص // ل ع ، ق(ع ص ل) = ق(س ل ص) = ٢٠°
ق(ع و ل) = ٧٠°

المطلوب : إثبات أن س ص ع ل معين .

البرهان :

س ص // ل ع (معطى) (١)

∵ ق (س $\hat{ل}$ ص) = ق (ع $\hat{ص}$ ل) (معطى)

وهما في وضع تبادل

∴ س ل // ص ع (٢)

من (١) ، (٢) نستنتج أنّ :

س ص ع ل متوازي أضلاع لأنّ كل ضلعين متقابلين متطابقان (٣)

في Δ س و ل :

ق (س $\hat{و}$ ل) = ١٨٠° - (٧٠ + ٢٠) = ٩٠ (مجموع قياسات زوايا المثلّث الداخلة يساوي ١٨٠°)

∴ س ع ⊥ ل ص (القطران متعامدان) (٤)

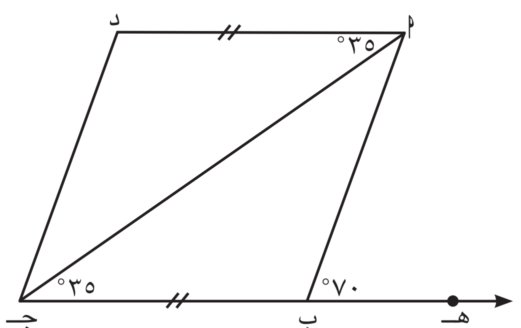
من (٣) ، (٤) ∴ الشكل س ص ع ل معين لأنّه متوازي أضلاع قطراه متعامدان .

عبِّر عن فهمك

يقول شملان إنّ كلّ متوازي أضلاع هو معيَّن . هل تتّفق معه ؟ فسِّر إجابتك .

لا ، يكون معين إذا كان متوازي أضلاع قطراه متعامدان أو فيه ضلعان متجاوران متطابقان

مثال (٢) :



في الشكل المقابِل أ ب جـ د شكل رباعي فيه :

أ د = ب جـ ، ق (جـ $\hat{أ}$ د) = ق (ب $\hat{جـ}$ أ) = ٣٥° ،

ق (أ $\hat{ب}$ هـ) = ٧٠°

أثبِت أنّ الشكل الرباعي أ ب جـ د معيَّن .

الحلّ :

المعطَيات : ٱ ب جـ د شكل رباعي ، ٱ د = ب جـ ، ق (جـ ٱ̂ د) = ق (ب جـ̂ ٱ) = ٣٥° ،
ق (ٱ ب̂ هـ) = ٧٠°

المطلوب : إثبات أنّ الشكل ٱ ب جـ د معيَّن .

البرهان :

∵ ق (جـ ٱ̂ د) = ق (ب جـ̂ ٱ) = ٣٥° (معطى)(وهما في وضع تبادل)

∴ $\overline{\text{ٱ د}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$ (١)

∵ ٱ د = ب جـ (معطى) (٢)

من (١) ، (٢) نستنتج أنّ :

الشكل ٱ ب جـ د متوازي أضلاع لأنّ فيه ضلعَين متقابلَين متطابقان ومتوازيان . (٣)

∵ (هـ ب̂ ٱ) زاوية خارجة عن المثلّث ٱ ب جـ

∴ ق (هـ ب̂ ٱ) = ق (ب ٱ̂ جـ) + ق (ب جـ̂ ٱ)

∴ ق (ب ٱ̂ جـ) = ٧٠° − ٣٥° = ٣٥°

∴ ق (ب ٱ̂ جـ) = ق (ب جـ̂ ٱ) = ٣٥°

∴ ب ٱ = ب جـ (من خواصّ المثلّث المتطابق الضلعَين) (٤)

من (٣) ، (٤)

∴ الشكل ٱ ب جـ د معيَّن لأنّه متوازي أضلاع فيه ضلعان متجاوران متطابقان .

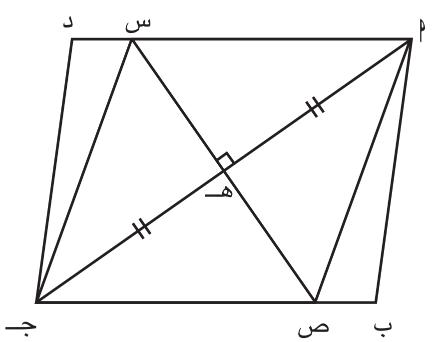
تذكَّر

قياس الزاوية الخارجة للمثلث يساوي مجموع قياسي الزاويتَين الداخلتَين ما عدا المجاورة لها .

مثال (٣) :

ٱ ب جـ د متوازي أضلاع ، $\overline{\text{س ص}}$ ⊥ $\overline{\text{ٱ جـ}}$ ،
هـ منتصف $\overline{\text{ٱ جـ}}$ ، س ∈ $\overline{\text{ٱ د}}$ ، ص ∈ $\overline{\text{ب جـ}}$.

أثبِت أنّ : الشكل ٱ ص جـ س معيَّن .



الحلّ :

المعطَيات :

ٱ ب جـ د متوازي أضلاع ، $\overline{\text{س ص}}$ ⊥ $\overline{\text{ٱ جـ}}$

هـ منتصف $\overline{\text{ٱ جـ}}$ ، س ∈ $\overline{\text{ٱ د}}$ ، ص ∈ $\overline{\text{ب جـ}}$

المطلوب : إثبات أنّ الشكل ٱ ص جـ س معيَّن .

البرهان :

Δ ٢ هـ س ، Δ جـ هـ ص فيهما :

٢ هـ = جـ هـ (معطى)

ق (٢ $\hat{هـ}$ س) = ق (جـ $\hat{هـ}$ ص) (بالتقابل بالرأس)

ق (س $\hat{٢}$ هـ) = ق (ص $\hat{جـ}$ هـ) (بالتبادل والتوازي)

∴ Δ ٢ هـ س ≅ Δ جـ هـ ص بحالة (ز . ض . ز)

وينتج من التطابق أنّ ٢ س = ص جـ (١)

∵ $\overline{٢ د}$ // $\overline{ب جـ}$ (من تعريف متوازي الأضلاع)

∵ س ∈ $\overline{٢ د}$ ، ص ∈ $\overline{ب جـ}$ (معطى)

∴ $\overline{٢ س}$ // $\overline{ص جـ}$ (٢)

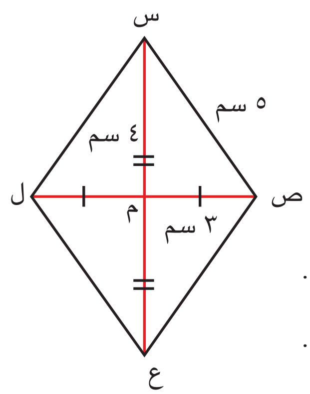
من (١) ، (٢) ∴ ٢ ص جـ س متوازي أضلاع لأنّ فيه ضلعَين متقابلَين متوازيان ومتطابقان . (٣)

∵ $\overline{س ص}$ ⊥ $\overline{٢ جـ}$ (٤) معطى

من (٣) ، (٤) ∴ ٢ ص جـ س معيَّن لأنّه متوازي أضلاع قطراه متعامدان .

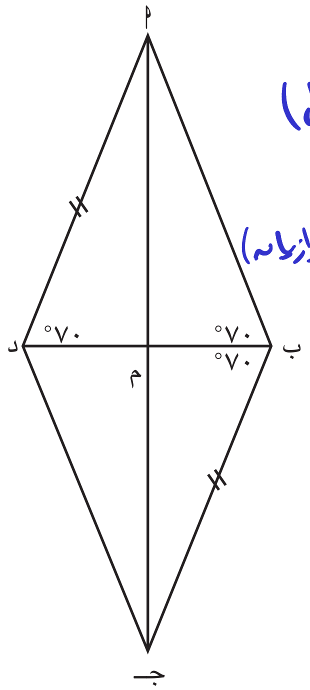
تمارين ذاتية :

١ س ص ع ل شكل رباعي فيه م نقطة تقاطع القطرَين ،
م ص = م ل ، م س = م ع ،
س ص = ٥ سم ، ص م = ٣ سم ، س م = ٤ سم
أثبِت أنّ الشكل س ص ع ل معيَّن



∵ م ص = م ل ، م س = م ع (معطى)
∴ القطران ينصف كل منهما الآخر
∴ س ص ع ل متوازي أضلاع ← (١)
في Δ س م ل
س ل = $\sqrt{(م ل)^2 + (م س)^2} = \sqrt{٣^2 + ٤^2} = \sqrt{٩ + ١٦} = \sqrt{٢٥} = ٥$ سم (فيثاغورث)
∴ س ل = س ص = ٥ سم ← (٢) (ضلعان متجاوران متطابقان)
من (١) ، (٢) ينتج أن الشكل س ص ع ل معين .

٢ في الشكل أمامك ، أثبِت أنّ أ ب جـ د معيَّن .



∵ ق(∠أ د ب) = ق(∠جـ ب د) = ٧٠ (وهما في وضع تبادل)

∴ أ د // ب جـ ، أ د = ب جـ (معطى)

∴ أ ب جـ د متوازي أضلاع ← (١) (فيه ضلعان متقابلان متطابقان ومتوازيان)

∵ ق(∠أ ب د) = ق(∠أ د ب) = ٧٠°

∴ أ ب = أ د ← (٢) (ضلعان متجاوران متطابقان)

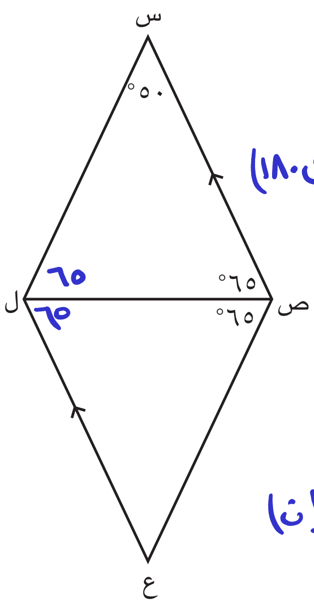
من (١) ، (٢) ينتج أن

∴ الشكل أ ب جـ د معين .

٣ س ص ع ل شكل رباعي فيه $\overline{\text{س ص}}$ // $\overline{\text{ع ل}}$ ، ق (س^) = ٥٠°

ق (س ص^ ل) = ق (ع ص^ ل) = ٦٥°

أثبِت أنّ الشكل س ص ع ل معيَّن .



∵ ق(∠س ل ص) = ١٨٠ − (٥٠ + ٦٥) (مجموع قياسات زوايا المثلث ١٨٠)

∴ ق(∠س ل ص) = ٦٥°

∵ ق(∠س ل ص) = ق(∠ع ص ل) = ٦٥ (وهما في وضع تبادل)

∴ ص ع // س ل

∵ س ص // ع ل (معطى)

∴ س ص ع ل متوازي أضلاع (كل ضلعين متقابلين متوازيان)

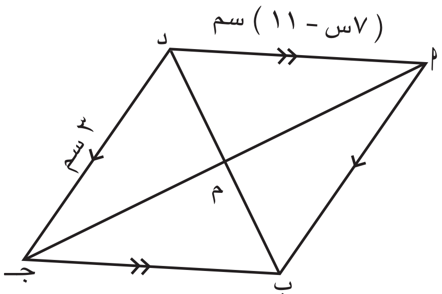
∵ ق(∠س ص ل) = ق(∠ع ص ل) = ٦٥ (معطى)

∴ س ص = ص ع ∴ الشكل س ص ع ل معين .

مهارات تفكير عليا :

اِختر الإجابة الصحيحة .

٤ في الشكل المقابِل . قيمة س التي تجعل متوازي الأضلاع أ ب جـ د ، معيَّنًا هي :



(أ) ١٤ (ب) ٢ (جـ) ١١ (د) ٣

٥ - ٦ الكشف عن المربّع
Detecting a Square

سوف تتعلّم : الكشف عن المربّع .

العبارات والمفردات :

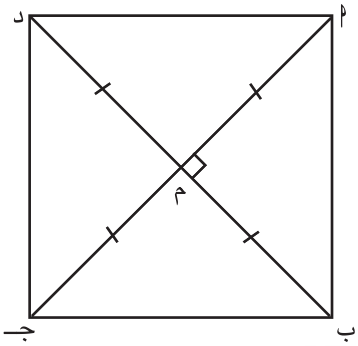
المربّع Square

اِستكشِف

في الشكل المقابِل ٲ ب جـ د متوازي أضلاع ،

$\overline{\text{ٲجـ}} \perp \overline{\text{ب د}}$ ، ٲ جـ = ب د

أثبِت أنّ ٲ ب جـ د مربّع .



أوّلًا :

∵ ٲ ب جـ د متوازي أضلاع ، ٲ جـ = ب د

أكمِل ما يلي :

ٲ جـ = ...ب د...... معطى (قطراه متطابقان)

∴ الشكل ٲ ب جـ د هو ......مستطيل...... (١)

لأنّه متوازي أضلاع قطراه ......متطابقان......

من تطابق Δ ٲ م ب ، Δ ٲ م د (ض . ز . ض)

ينتج أنّ :

ٲ ب = ...ٲ د...... (ضلعان متجاوران متطابقان) (٢)

من (١) ، (٢) ٲ ب جـ د هو مربّع

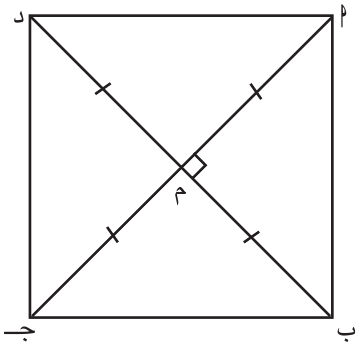
لأنّه مستطيل فيه ضلعان متجاوران متطابقان .

تذكَّر

- يكون متوازي الأضلاع مستطيلًا إذا توفّر أحد الشرطَين .
  1. تطابق قطراه .
  2. قياس إحدى زواياه يساوي ٩٠° .
- يكون متوازي الأضلاع معيَّنًا إذا توفّر أحد الشرطَين :
  1. قطراه متعامدان .
  2. فيه ضلعان متجاوران متطابقان .

ثانيًا :

∵ ٮ‍ ب جـ د متوازي أضلاع ، $\overline{\text{ٮ‍ جـ}} \perp \overline{\text{ب د}}$ ،



أكمِل ما يلي :

$\overline{\text{ٮ‍ جـ}} \perp$ ......ب د...... معطى (قطراه متعامدان)

∴ الشكل ٮ‍ ب جـ د هو ....معين (١)

لأنّه متوازي أضلاع قطراه ....متعامدان

∵ Δ ٮ‍ م ب مثلّث قائم الزاوية ومتطابق الضلعَين معطى

ٯ (م $\hat{\text{ٮ‍}}$ ب) = $\frac{١٨٠° - ٩٠°}{٢}$ = $\frac{\text{.....٩٠.....}}{\text{.....٢.....}}$ = ...٤٥......... من خواصّ المثلّث المتطابق الضلعَين

∴ ٯ (م $\hat{\text{ٮ‍}}$ د) = ...٤٥...... (قطر المعيَّن ينصّف زاويتَي الرأس الواصل بينهما)

∴ ٯ (ب $\hat{\text{ٮ‍}}$ د) = ...٩٠...... (قياس إحدى زواياه قائمة) (٢)

من (١) ، (٢) ٮ‍ ب جـ د هو مربّع .

لأنّه معيَّن قياس إحدى زواياه ٩٠°

تذكَّر

للمربّع كلّ خواصّ المستطيل وكلّ خواصّ المعيَّن .

ممّا سبق نلاحظ أنّ :

يكون متوازي الأضلاع مربّعًا إذا توفّر فيه أحد الشروط التالية :

- القطران متطابقان ومتعامدان .
- القطران متطابقان وضلعان متجاوران متطابقان .
- إحدى زواياه قائمة وضلعان متجاوران متطابقان .
- إحدى زواياه قائمة والقطران متعامدان .

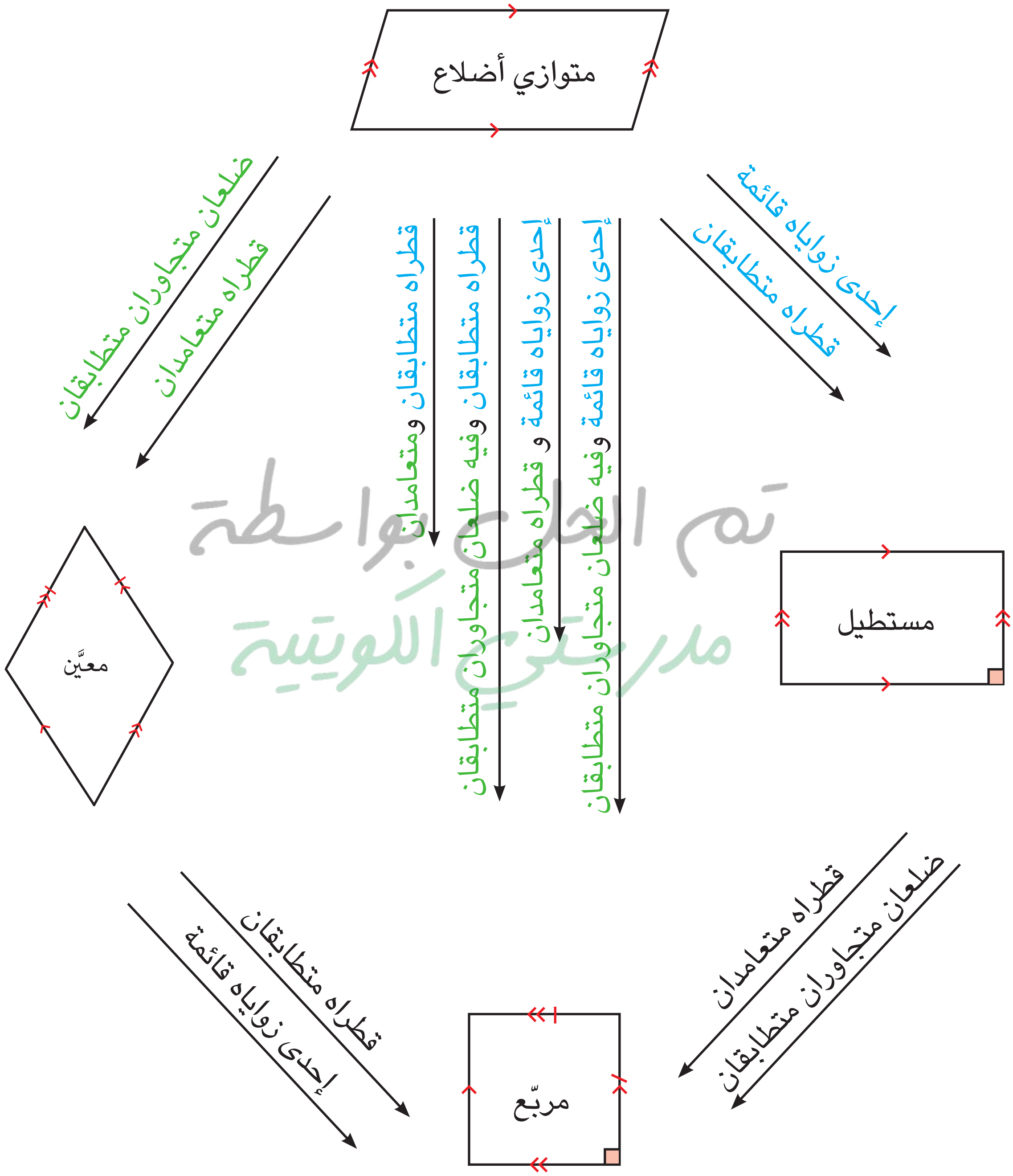
ملاحظة :

لإثبات أنّ الشكل الرباعي مربّع ، يجب أن يكون :

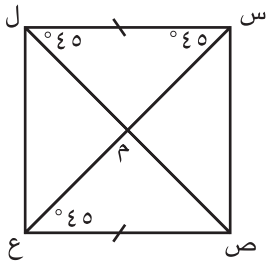
متوازي أضلاع ويحقّق أحد شرطَي المستطيل وأحد شرطَي المعيَّن .

ربط الأفكار

(اِتَّبِع أحد الأسهم لتصل إلى المطلوب)



مثال (٢) :



س ص ع ل شكل رباعي فيه :

س ل = ص ع ، ق (ل $\hat{س}$ ع) = ق (س $\hat{ل}$ ص) = ق (س $\hat{ع}$ ص) = ٤٥°

أثبِت أنّ س ص ع ل مربّع .

الحلّ :

المعطَيات : س ص ع ل شكل رباعي ، س ل = ص ع

ق (ل $\hat{س}$ ع) = ق (س $\hat{ل}$ ص) = ق (س $\hat{ع}$ ص) = ٤٥°

المطلوب : إثبات أنّ الشكل الرباعي س ص ع ل مربّع .

البرهان :

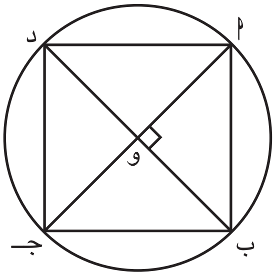
س ل = ص ع	معطى (١)
∵ ق (ل $\hat{س}$ ع) = ق (س $\hat{ع}$ ص)	وهما في وضع تبادل
∴ $\overline{\text{س ل}}$ // $\overline{\text{ص ع}}$	(٢)
من (١) ، (٢) نستنتج أنّ :	
الشكل س ص ع ل متوازي أضلاع لأنّ فيه ضلعَين متقابلَين متطابقان ومتوازيان	(٣)

في Δ س م ل :	
ق (س $\hat{م}$ ل) = ١٨٠° − (٤٥° + ٤٥°)	
= ١٨٠° − ٩٠° = ٩٠°	مجموع قياسات زوايا المثلّث الداخلة = ١٨٠°
∴ $\overline{\text{س ع}}$ ⊥ $\overline{\text{ص ل}}$	
∴ القطران متعامدان	(٤)

∵ ق (ل $\hat{س}$ م) = ق (س $\hat{ل}$ م)	معطى
∴ س م = ل م	من خواصّ المثلّث المتطابق الضلعَين
∴ س م = م ع ، ل م = م ص	من خواصّ متوازي الأضلاع
∴ س ع = ص ل	من خواصّ المساواة
∴ القطران متطابقان	(٥)

من (٣) ، (٤) ، (٥) س ص ع ل مربّع لأنّه متوازي أضلاع تعامد وتطابق قطراه .

دورك الآن (٢)



في الشكل المقابِل $\overline{\text{أ جـ}}$ ، $\overline{\text{ب د}}$ ، قطران في دائرة مركزها و ،
$\overline{\text{أ جـ}} \perp \overline{\text{ب د}}$.

أثبِت أنّ أ ب جـ د مربّع .

المعطَيات : و مركز الدائرة ، $\overline{\text{أ جـ}} \perp \overline{\text{ب د}}$

المطلوب : إثبات أنّ أ ب جـ د مربّع .

البرهان :

∵ و مركز الدائرة

∴ أ و = ...و جـ... ، ب و = ...و د... أنصاف أقطار الدائرة الواحدة متطابقة

∴ أ ب جـ د متوازي أضلاع لأنّه شكل رباعي فيه القطران ينصّف كلّ منهما الآخر (١)

∵ $\overline{\text{أ جـ}} \cong$ ...ب د... أقطار الدائرة الواحدة متطابقة (٢)

∵ $\overline{\text{أ جـ}} \perp$ ...ب د... (معطى)

∴ القطران متعامدان (٣)

∴ من (١) ، (٢) ، (٣) ∴ أ ب جـ د ...مربع... لأنّه متوازي أضلاع تطابق وتعامد قطراه .

عبِّر عن فهمك

سأل معلّم الرياضيات المتعلّمين في الفصل عن تعريف المربّع ، وكانت إجابة كلّ من يوسف وعلي كالآتي :

المربّع هو متوازي أضلاع قطراه متعامدان ومتطابقان .

يوسف

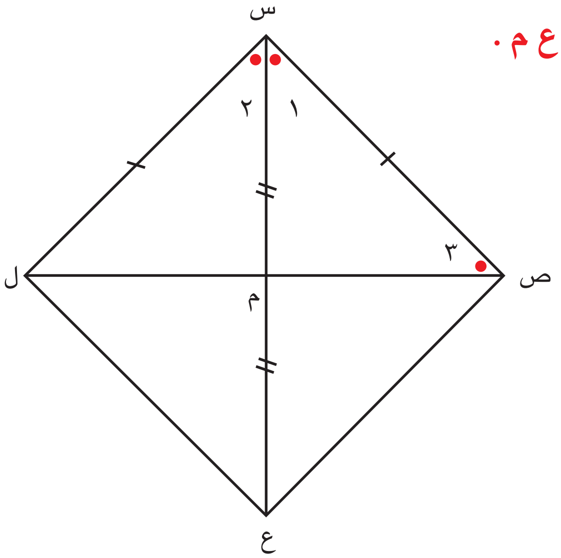
المربّع هو معيَّن قطراه متطابقان .

عليّ

في رأيك ، هل إجابة كلّ منهما صحيحة ؟ فسِّر ذلك .

نعم ، لأنه المعين هو متوازي أضلاع قطراه متعامدان .

مثال (٢) :



س ص ع ل شكل رباعي فيه : س ص = س ل ، س م = ع م .

ق ($\hat{١}$) = ق ($\hat{٢}$) = ق ($\hat{٣}$)

أثبِت أنّ س ص ع ل مربّع .

الحلّ :

المعطَيات : س ص ع ل شكل رباعي

س ص = س ل ، س م = ع م

ق ($\hat{١}$) = ق ($\hat{٢}$) = ق ($\hat{٣}$) .

المطلوب : إثبات أنّ س ص ع ل مربّع .

البرهان : المثلّثان س م ص ، س م ل فيهما :

$\overline{\text{س م}}$ (ضلع مشترَك)

$\overline{\text{س ص}} \cong \overline{\text{س ل}}$ (معطى)

ق ($\hat{١}$) = ق ($\hat{٢}$) (معطى)

∴ Δ س م ص ، Δ س م ل متطابقان (ض . ز . ض) ومن التطابق ينتج أنّ :

م ص = م ل (١)

∵ م س = م ع (٢) (معطى)

من (١) ، (٢) ∴ الشكل س ص ع ل متوازي الأضلاع لأنّ القطرَين ينصّف كلّ منهما الآخر (٣)

∵ ق ($\hat{١}$) = ق ($\hat{٣}$) (معطى)

∴ ص م = س م (من خواصّ المثلّث المتطابق الضلعَين)

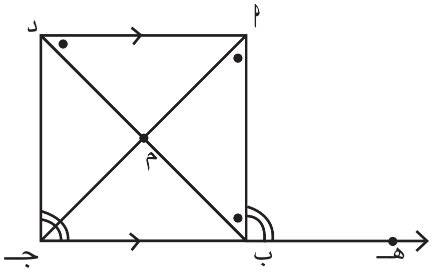
∴ ص ل = س ع (من خواصّ المساواة)

∴ القطران متطابقان (٤)

∵ س ص = س ل (٥) (معطى)

∴ فيه ضلعان متجاوران متطابقان .

من (٣) ، (٤) ، (٥) ∴ الشكل س ص ع ل مربّع لأنّه متوازي أضلاع قطراه متطابقان وفيه ضلعان متجاوران متطابقان .



ا ب جـ د شكل رباعي فيه :

$\overline{اد}$ // $\overline{ب جـ}$ ، ق (ب $\hat{ا}$ جـ) = ق (ا $\hat{ب}$ د) = ق (ا $\hat{د}$ ب)

ق (ا $\hat{ب}$ هـ) = ق (د $\hat{جـ}$ ب)

أثبِت أنّ ا ب جـ د مربّع

المعطَيات : ا د // ب جـ ، ق (ب ا جـ) = ق (ا ب د) = ق (ا د ب) ، ق (ا ب هـ) = ق (د جـ ب)

المطلوب : إثبات أن ا ب جـ د مربع

البرهان :

∵ $\overline{اد}$ // $\overline{ب جـ}$ (معطى) (١)

∵ ق (ا $\hat{ب}$ هـ) = ق (د جـ ب) (معطى) وهما في وضع تناظر

∴ $\overline{ا ب}$ // د جـ (٢)

من (١) ، (٢) نستنتج أنّ ا ب جـ د متوازي أضلاع لأنّ فيه كلّ ضلعَين متقابلَين متوازيان (٣)

في Δ ا م ب :

∵ ق (ب $\hat{ا}$ م) = ق (ا ب م) (معطى)

∴ ا م = م ب (من خواصّ المثلّث المتطابق الضلعَين)

∵ ا م = م جـ

ب م = م د

(من خواصّ متوازي الأضلاع القطران ينصّف كلّ منهما الآخر)

∴ ا جـ = ب د (من خواصّ المساواة)

∴ القطران متطابقان (٤)

في Δ ا ب د :

∵ ق (ا $\hat{ب}$ د) = ق (ا $\hat{د}$ ب) (معطى)

∴ ا ب = ا د (من خواصّ المثلّث المتطابق الضلعَين)

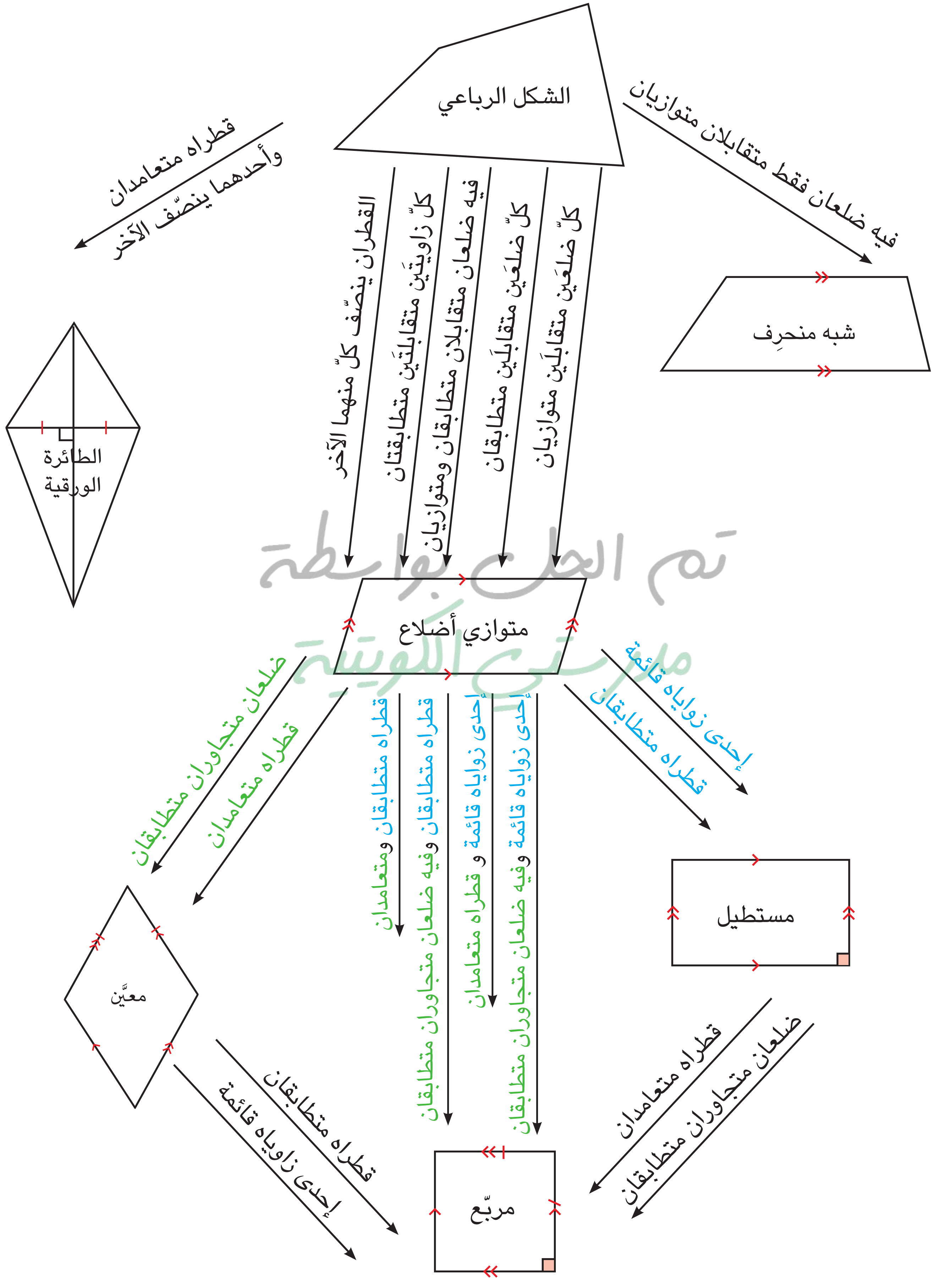
∴ فيه ضلعان متجاوران متطابقان (٥)

∴ من (٣) ، (٤) ، (٥) نستنتج أنّ : ا ب جـ د مربع لأنّ قطرَيه متطابقان

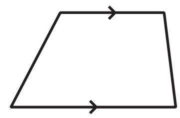
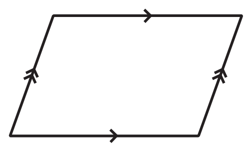
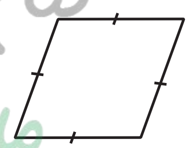
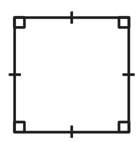
وفيه ضلعان متجاوران متطابقان

الدرس السادس

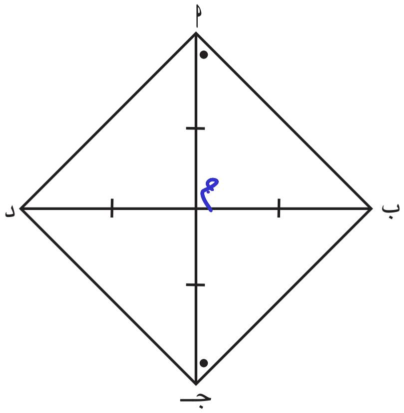
ربط الأفكار (اِتّبِع أحد الأسهم للوصول إلى المطلوب)



الأشكال الرباعية

خواصّ الشكل	تعريف الشكل	رسم الشكل	إِسم الشكل
– زوج واحد فقط من الأضلاع المتقابلة متوازٍ .	هو شكل رباعي فيه ضلعان فقط متقابلان متوازيان .		شبه المنحرِف
– الأضلاع المتقابلة متطابقة . – يتقاطع القطران في منتصفهما . – نقطة تقاطع قطرَيه هي مركز تناظر له . – كلّ زاويتَين متقابلتَين متطابقتان . – كلّ زاويتَين متتاليتَين متكاملتان .	هو شكل رباعي فيه كلّ ضلعَين متقابلَين متوازيان .		متوازي الأضلاع
– أضلاعه الأربعة متطابقة . – القطران متعامدان وينصّف كلّ منهما الآخر . – كلّ قطر ينصّف زاويتَي الرأس الواصل بينهما .	هو متوازي أضلاع فيه ضلعان متجاوران متطابقان .		المعيَّن
– زواياه الأربع قائمة . – قطراه متطابقان .	هو متوازي أضلاع إحدى زواياه قائمة .		المستطيل
– قطراه متطابقان ومتعامدان ويتقاطعان في منتصفهما . – زواياه الأربع قائمة وأضلاعه متطابقة . – قطر المربّع يصنع مع كلّ ضلع من أضلاعه زاوية قياسها ٤٥° .	– هو متوازي أضلاع فيه ضلعان متجاوران متطابقان وإحدى زواياه قائمة . – هو معيَّن إحدى زواياه قائمة . – هو مستطيل فيه ضلعان متجاوران متطابقان .		المربّع

تمارين ذاتية :



١ أ ب جـ د مستطيل فيه ق (ب أ̂ جـ) = ق (ب جـ̂ أ) ،
أثبِت أنّ الشكل أ ب جـ د مربّع .

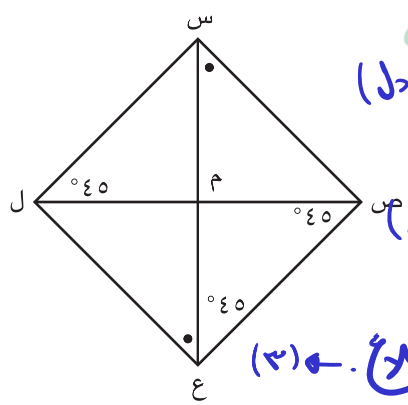
∵ أ ب جـ د مستطيل ← (١) (معطى)

∵ ق(ب أ̂ جـ) = ق(ب جـ̂ أ) (معطى)

∴ أ ب = ب جـ ← (٢)

من (١)، (٢) ينتج أن

الشكل أ ب جـ د مربع لأنه مستطيل وتطابق ضلعاه المتجاوران .



٢ باستخدام المعطيات في الرسم ، أثبِت أنّ الشكل س ص ع ل مربّع .

∵ ق(س ل̂ ص) = ق(ع ص̂ ل) = ٤٥° (وهما في وضع تبادل)

∴ س ل // ص ع ← (١)

∵ ق(ص س̂ ع) = ق(ل ع̂ س) (وهما في وضع تبادل)

∴ س ص // ل ع ← (٢)

من (١)، (٢) ينتج أن الشكل س ص ع ل متوازي الأضلاع ← (٣)

∴ القطران ينصف كل منهما الآخر

∴ م س = م ع ، م ص = م ل

في △ م ص ع ، ق(م ع̂ ص) = ق(م ص̂ ع) = ٤٥°

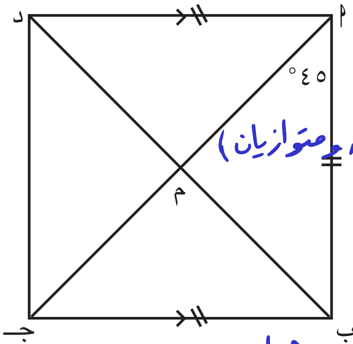
∴ م ص = م ع = م ل = م س ∴ القطران متطابقان ← (٤)

∴ ق(ص م̂ ع) = ١٨٠ − (٤٥ + ٤٥) = ٩٠° (مجموع قياسات زوايا مثلث ١٨٠)

∴ القطران متعامدان ← (٥)

∴ من (٣)، (٤)، (٥) ينتج أن الشكل س ص ع ل مربع

٣ مستعينًا بالمعطَيات على الرسم ، أثبِت أنّ الشكل أ ب جـ د مربّع .



∵ أد // ب جـ ، أد = ب جـ

∴ الشكل أ ب جـ د متوازي أضلاع (فيه ضلعان متقابلان متطابقان ومتوازيان)

∵ أ ب = ب جـ

∵ ق(ب أ̂ جـ) = ق(ب جـ̂ أ) = ٤٥

∴ ق(ب̂) = ١٨٠ − (٤٥ + ٤٥) = ٩٠ (مجموع قياسات زوايا المثلث ١٨٠)

∵ أ ب جـ د متوازي أضلاع

∵ أ ب = ب جـ (ضلعان متجاوران متطابقان)

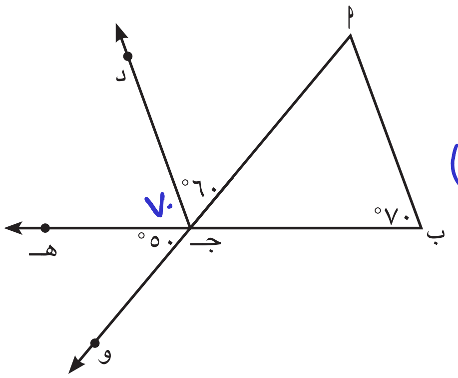
∵ ق(ب̂) = ٩٠ (إحدى زواياه قائمة)

∴ الشكل أ ب جـ د مربع

تقويم الوحدة التعليمية الخامسة
Unit Five Assessment

أوّلًا : البنود المقالية

١ في الشكل المقابِل ، أثبِت أنّ $\overline{أ ب}$ // $\overleftarrow{جـ د}$.



∵ ق(د جـ هـ) = ١٨٠° − (٦٠° + ٥٠°)

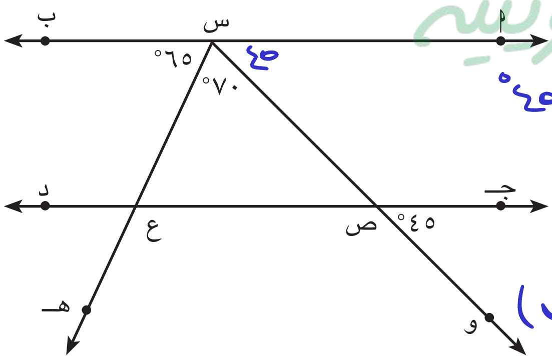
= ٧٠° (زوايا متجاورة على خط مستقيم واحد)

∵ ق(د جـ هـ) = ق(ب) = ٧٠° (وهما في وضع تناظر)

∴ أ ب // جـ د

٢ في الشكل المقابِل وحسب البيانات المدوَّنة ،

أثبِت أنّ $\overleftrightarrow{أ ب}$ // $\overleftarrow{جـ د}$



ق(أ س ص) = ١٨٠° − (٧٠ + ٦٥) = ١٨٠° − ١٣٥ = ٤٥°

(زوايا متجاورة على خط مستقيم واحد)

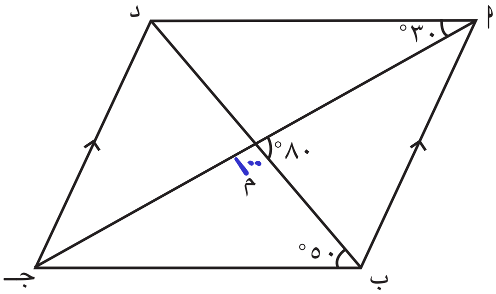
∵ ق(جـ ص و) = ق(س ص ع) = ٤٥° (بالتقابل بالرأس)

∴ ق(أ س ص) = ق(س ص ع) = ٤٥° (وهما في وضع تبادل)

∴ أ ب // جـ د

٣ في الشكل المقابِل : $\overline{أجـ} \cap \overline{ب د} = \{م\}$ ،

أثبِت أنّ أ ب جـ د متوازي أضلاع .



∵ ق(د م̂ ب) = ١٨٠ − ٨٠ = ١٠٠

(زاويتان متجاورتان على خط مستقيم واحد)

في △ ب م د

ق(ب د م) = ١٨٠ − (٥٠ + ١٠٠) = ٣٠°

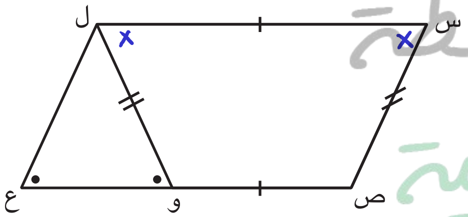
(مجموع قياسات زوايا المثلث الداخلة ١٨٠)

∵ ق(د أ̂ جـ) = ق(ب د̂ م) = ٣٠ (وهما في وضع تبادل)

∴ أ د // ب جـ ، أ ب // جـ د (معطى)

∴ الشكل أ ب جـ د متوازي أضلاع

٤ أثبِت أنّ الشكل س ص ع ل متوازي أضلاع .



∵ ق(ل و̂ ع) = ق(ع̂)

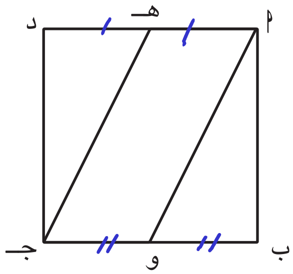
∴ ل و = ل ع ، ل و = س ص (معطى)

∴ س ص = ل ع ← (١)

س ل = ص ع ← (٢) (معطى)

من (١)، (٢) ينتج أن س ص ع ل متوازي أضلاع

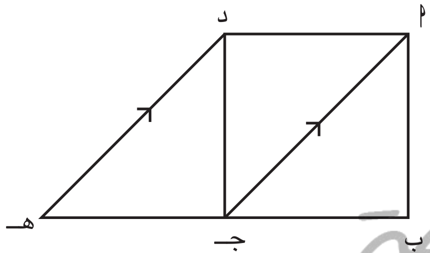
(فيه كل ضلعين متقابلين متطابقان).



٥ أ ب جـ د مربع ، هـ منتصف $\overline{\text{أ د}}$ ، و منتصف $\overline{\text{ب جـ}}$
أثبِت أنّ أ و جـ هـ متوازي أضلاع .

∵ أ ب جـ د مربع
هـ منتصف أ د ، و منتصف ب جـ
∴ أ هـ = و جـ ← (١)
∵ أ هـ // و جـ ← (٢)

∴ من (١) ، (٢) ينتج أن الشكل أ و جـ هـ متوازي أضلاع
(فيه ضلعان متقابلان متطابقان ومتوازيان).



٦ في الشكل المقابِل : أ ب جـ د مربّع ،
هـ ∈ $\overleftarrow{\text{ب جـ}}$ ، $\overline{\text{أ جـ}}$ // $\overline{\text{د هـ}}$

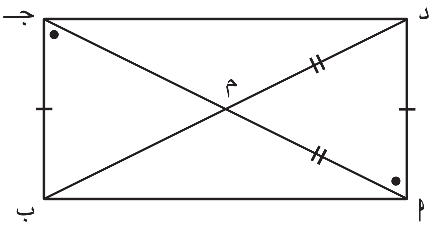
أ) أثبِت أنّ أ جـ هـ د متوازي أضلاع

∵ هـ ∈ ب جـ (معطى)
∵ الشكل أ ب جـ د مربع
∴ أ د // جـ هـ ← (١)

∵ أ جـ // د هـ (معطى) ← (٢)
من (١) ، (٢) ينتج أن الشكل أ جـ هـ د متوازي أضلاع
(كل ضلعين متقابلان متوازيان)

ب) أوجِد ق ($\hat{\text{هـ}}$)

∵ الشكل أ ب جـ د مربع
∴ ق (جـ $\hat{\text{أ}}$ د) = ٤٥
∵ الشكل أ جـ هـ د متوازي أضلاع
∴ ق ($\hat{\text{هـ}}$) = ق (جـ $\hat{\text{أ}}$ د) = ٤٥° (زاويتان متقابلتان متطابقتان)



٧ في الشكل المقابِل ، أثبِت أنّ الشكل أ ب جـ د مستطيل .

∵ ق(أ جـ̂ ب) = ق(ب أ̂ جـ) (وهما في وضع تبادل)

∴ أ د // ب جـ

أ د = ب جـ (معطى)

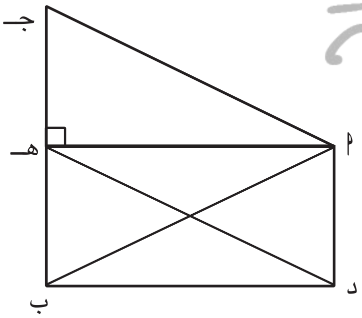
∴ أ ب جـ د متوازي أضلاع ← (١)

∵ م أ = م د (معطى)

∴ م أ = م د = م جـ = م ب

∴ القطران متطابقان ← (٢)

من (١) ، (٢) الشكل أ ب جـ د مستطيل .



٨ في الشكل أ ب جـ مثلّث متطابق الضلعَين ، فيه أ ب = أ جـ ،
أ د هـ جـ متوازي أضلاع ، أ هـ ⊥ ب جـ .
أثبِت أنّ الشكل أ د ب هـ مستطيل .

∵ أ ب جـ مثلث متطابق الضلعين

∵ أ هـ ⊥ ب جـ

∴ هـ منتصف ب جـ ، ب هـ = هـ جـ

∵ أ د هـ جـ متوازي أضلاع

∴ أ د = جـ هـ ، أ د // هـ جـ

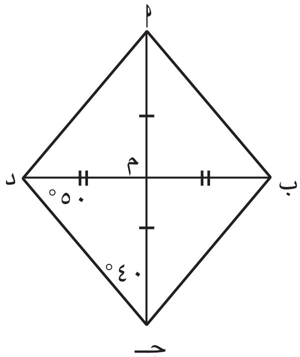
∴ أ د = ب هـ ، أ د // ب هـ

∴ أ د ب هـ متوازي أضلاع ← (١)

∵ أ هـ ⊥ ب جـ ∴ ق(أ هـ̂ ب) = ٩٠° ← (٢)

من (١) ، (٢) ينتج أن الشكل أ د ب هـ مستطيل .

٩ في الشكل المقابِل ، أثبِت أنّ الشكل ا ب جـ د معيَّن .



∵ م ب = م د ، م ا = م جـ

∴ القطران ينصف كل منهما الآخر

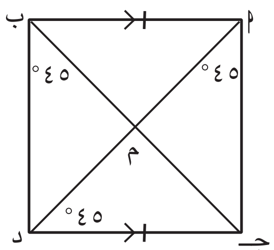
∴ ا ب جـ د متوازي أضلاع ← (١)

في Δ ا م د ، ق(∠ا م د) = ١٨٠ − (٤٠ + ٥٠) = ٩٠ (مجموع قياسات زوايا مثلث ١٨٠)

∴ القطران متعامدان ← (٢)

من (١) ، (٢) ينتج أن الشكل ا ب جـ د معين .

١٠ في الشكل المقابِل ، أثبِت أنّ الشكل ا ب د جـ مربّع .



∵ ا ب = جـ د ، ا ب // جـ د

∴ ا ب د جـ متوازي أضلاع ← (١)

∵ ا ب // جـ د

∴ ق(∠ب ا د) = ق(∠جـ د ا) = ٤٥ (بالتبادل)

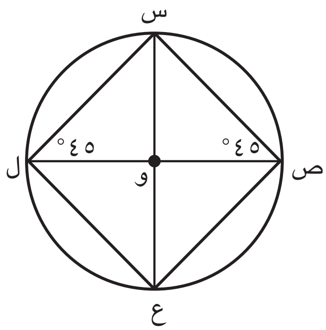
∴ ق(∠ا) = ق(∠ب ا د) + ق(∠جـ ا د) = ٤٥ + ٤٥ = ٩٠° ← (٢)

∵ ق(∠جـ د ا) = ق(∠جـ ا د) = ٤٥ (معطى)

∴ ا جـ = جـ د ← (٣)

من (١) ، (٢) ، (٣) ينتج أن الشكل ا ب د جـ مربع لأنه متوازي أضلاع وضلعاه متجاوران متطابقان و إحدى زواياه قائمة

١١ **في الشكل المقابِل : و مركز الدائرة ،**
أثبِت أنّ الشكل س ص ع ل مربّع .



∵ و مركز الدائرة

∴ وص = وس = ول = وع

∴ س ص ع ل متوازي أضلاع ← (١)

∵ ق(س ص̂ ل) = ق(س ل̂ ص) = ٤٥° (معطى)

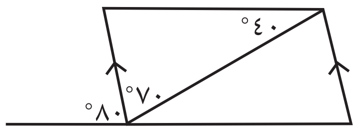
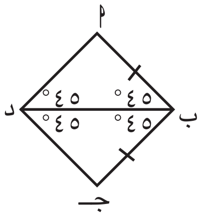
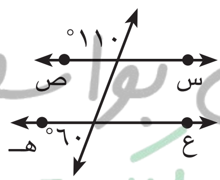
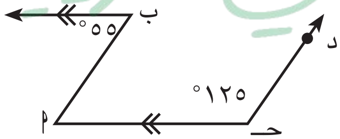
∴ س ص = س ل ← (٢)

∴ س ع = ص ل ← (٣) (قطران متطابقان)

من (١)، (٢)، (٣) ينتج أن الشكل س ص ع ل مربع

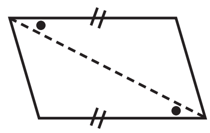
ثانيًا : البنود الموضوعية

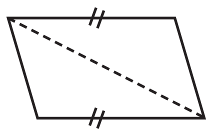
في البنود (١ - ٥) ظلِّل أ إذا كانت العبارة صحيحة ، وظلِّل ب إذا كانت العبارة غير صحيحة .

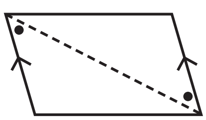
١ الشكل الرباعي المرسوم يمثّل متوازي أضلاع . 	أ	ب
٢ المستطيل هو متوازي أضلاع قطراه متطابقان .	أ	ب
٣ الشكل المقابِل يمثّل مربّعًا . 	أ	ب
٤ من الشكل المرسوم $\overleftrightarrow{\text{س ص}}$ // $\overleftrightarrow{\text{ع هـ}}$ 	أ	ب
٥ من الشكل المقابِل وحسب البيانات المدوَّنة . فإنّ $\overline{\text{م ب}}$ // $\overleftarrow{\text{جـ د}}$ 	أ	ب

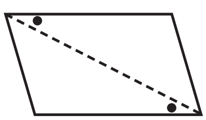
في البنود (٦ - ١٤) لكلّ بند أربعة اختيارات ، واحد فقط منها صحيح ، ظلِّل الإجابة الصحيحة .

٦ الشكل الذي يمثّل متوازي أضلاع فيما يلي هو :

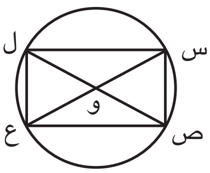
أ 

ب 

ج 

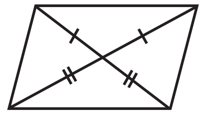
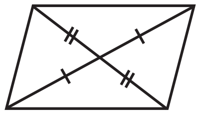
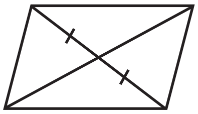
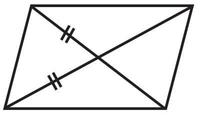
د 

٧ الشكل المقابِل يمثّل دائرة مركزها و ، فإنّ الشكل س ص ع ل هو :

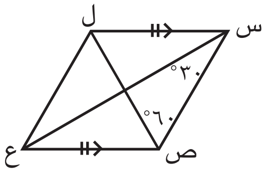


أ مربّع ب مستطيل ج معيَّن د شبه منحرِف

٨ الشكل الذي يمثّل متوازي أضلاع فيما يلي هو :

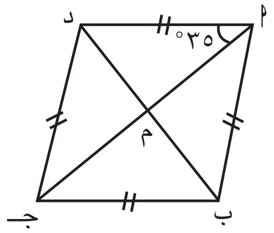
أ 
ب 
ج 
د 

٩ في الشكل المقابِل س ص ع ل يمثّل



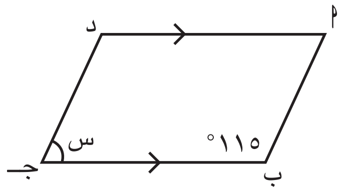
أ شبه منحرِف　　ب مربّعًا　　ج مستطيلًا　　د معيَّنًا

١٠ في الشكل المقابِل ق (جـ $\hat{ب}$ د) =



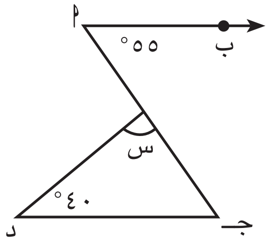
أ ٣٥°　　ب ٥٥°　　ج ٤٥°　　د ٦٥°

١١ في الشكل المقابِل قيمة س التي تجعل الشكل ا ب جـ د متوازي أضلاع هي :



أ ١١٥°　　ب ٥٥°　　ج ٧٥°　　د ٦٥°

١٢ في الشكل المقابِل قيمة س التي تجعل $\overleftarrow{ا ب}$ // $\overline{د جـ}$ تساوي :

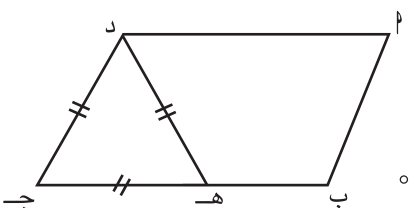


أ ٥٥°　　ب ٤٠°　　ج ٨٥°　　د ٩٥°

١٣ ا ب جـ د متوازي أضلاع فيه ق ($\hat{ا}$) = ق ($\hat{ب}$) فإنّ الشكل ا ب جـ د يكون :

أ مستطيلًا　　ب مربّعًا　　ج معيَّنًا　　د شبه منحرِف

١٤ في الشكل المقابِل ا ب جـ د متوازي أضلاع حيث د جـ = جـ هـ = د هـ ، فإنّ ق ($\hat{ب}$) يساوي :



أ ١٠٠°　　ب ٦٠°　　ج ١٢٠°　　د ١٣٠°

الوحدة التعليمية
السادسة

المقادير الجبرية

الرياضيات تشيّد الأبراج

برج الحمراء هو أطول ناطحة سحاب في دولة الكويت وواحد من أطول الأبراج في العالم .

يبلغ ارتفاعه حوالي ٤١٢ مترًا ويضمّ ٨٦ طابقًا، ممّا يجعله أطول برج مبني بالكامل من الخرسانة في العالم (من دون هيكل فولاذي رئيسي) .

وما يميّزه أنّه يدور تدريجيًّا وهو يرتفع إلى الأعلى ، فيبدو وكأنّه وشاح حجري يلتفّ حول المبنى - وهذا الشكل الرائع تمّ تصميمه باستخدام معادلات هندسية دقيقة تعتمد على كثيرات الحدود والمنحنيات الرياضية ، لتوازن بين الجمال الفنّي والاستقرار الإنشائي .

كما أنّ تصميم البرج يساعد على تقليل تأثير حرارة الشمس ، إذ تغطّي الجدران المنحنية الواجهات الأكثر تعرّضًا لأشعّة الشمس ، ممّا يقلّل من استهلاك الطاقة .

المجال	معايير المنهج	مؤشر الأداء
العدّ والجبر	تمثيل الأعداد واستخدامها ضمن أشكال متكافئة متنوّعة وإدراك أنّ مختلف أشكال الأعداد تتلاءم مع حالات مختلفة .	التعرّف – الفهم – الاستكشاف والتقصّي – التذكّر – الاستنتاج – حلّ المشكلات – القوانين – القراءة – الكتابة – التصنيف – التقويم – العمل الجَماعي – الوسائط – التحويل – النمذجة – التحليل والترتيب – معالجة بيانات – التعدّد – التّمييز
	اِختيار العمليات المناسِبة واستخدامها لحلّ المسائل وتعليل الخيارات .	
	فهم الأنماط والعلاقات والدوالّ .	
	اِستخدام إستراتيجيات متنوّعة لوصف وتحليل العلاقات والتغيّرات .	
	اِستخدام المعادلات والنماذج الرياضية لحلّ المسائل .	
	اِستخدام التمثيلات البيانية والجداول والتمثيلات الجبرية للقيام بالتوقّعات ولحلّ المسائل .	
	تمثيل وتحليل المواقف والبنى الرياضية باستخدام الرموز الجبرية .	

مخطّط تنظيمي للوحدة التعليمية السادسة

- المقادير الجبرية
  - قوانين الأسّ
  - كثيرات الحدود
    - جمع وطرح
    - ضرب
    - قسمة

هل أنت مستعدّ؟

١ أوجِد ناتج ما يلي :

أ) ‎$-٣ + ٧ =$ ٤
ب) ‎$٢ + (-١) =$ ١
ج) ‎$٣ - ٥ =$ -٢
د) ‎$-٣ \times -٥ =$ ١٥
هـ) ‎$-٤ + (-٩) =$ -١٣
و) ‎$٣ - (-٢) =$ ٥
ز) ‎$٦ \div ٢ =$ ٣
ح) ‎$(-٧) - ٣ =$ -١٠

٢ أُكتب كلًّا ممّا يلي في الصورة الأسّية .

أ) ‎$٣ \times ٣ \times ٣ \times ٤ \times ٤ = ٣^{٣} \times ٤^{٢}$
ب) ‎$٢ \times ٢ \times ٥ \times ٥ = ٢^{٢} \times ٥^{٢}$

٣ أوجِد ناتج كلّ ممّا يلي :

أ) ‎$٢^{٣} = ٢ \times ٢ \times ٢ = ٨$
ب) ‎$٣^{٤} = ٣ \times ٣ \times ٣ \times ٣ = ٨١$
ج) ‎$(٠,٣)^{٢} = ٠,٣ \times ٠,٣ = ٠,٠٩$
د) ‎$١٦^{١} = ١٦$
هـ) ‎$١^{١٥} = ١$
و) ‎$٨^{٢} = ٨ \times ٨ = ٦٤$
ز) ‎$٣^{٢} \times ٢^{٣} = ٣ \times ٣ \times ٢ \times ٢ \times ٢ = ٧٢$
ح) ‎$٤^{٢} \div ٨ = ١٦ \div ٨ = ٢$
ط) ‎$١٠^{٢} - ١٠ = ١٠ \times ١٠ - ١٠ = ٩٠$
ي) ‎$٣٠^{٢} + ١٠^{٥} = ١٠٠٩٠٠$

٤ أوجِد قيمة كلّ ممّا يلي عندما س = ٢

أ) ‎$س^{٢} + ٣ = (٢)^{٢} + ٣ = ٧$
ب) ‎$٣ س = ٣ \times ٢ = ٦$
ج) ‎$٥ - س = ٥ - ٢ = ٣$
د) ‎$٨ \div س = ٨ \div ٢ = ٤$
هـ) ‎$س^{٣} = (٢)^{٣} = ٨$
و) ‎$٢ س - ١ = ٢ \times ٢ - ١ = ٣$

٥ أوجِد المعكوس الجمعي لكلّ ممّا يلي :

أ) ٥ = -٥
ب) ص = -ص
ج) -٦ = ٦
د) -٢ ص = ٢ ص

٦ أوجِد العامل المشترَك الأكبر لكلّ ممّا يلي :

أ) ٣ ، ١٥ .... ٣
ب) ٢٥ ، ٤٥ .... ٥
ج) ٤ ، ٨ ، ١٢ .... ٤

٦ - ١ قوانين الأسس

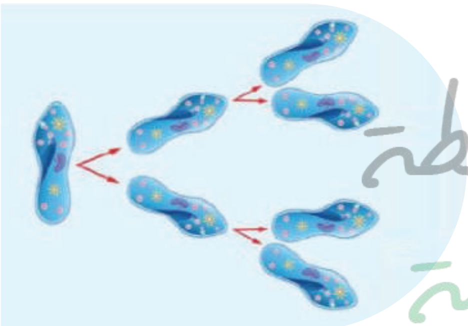
Laws of Exponents

سوف تتعلّم : قوانين الأسس .

العبارات والمفردات :

أسّ	Exponent	قوى	Power
أساس	Base		

اِستكشِف (١) :



إذا كانت خليّة يوجلينا واحدة تنقسم إلى خليّتَين جديدتَين متماثلتَين كلّ ساعة (تتضاعف كلّ ساعة) ، فكم عدد الخلايا بعد ٥ ساعات ؟

بعد ساعة واحدة : ٢ خليّة

بعد ساعتَين : ٢ × ٢ = ٤ خلايا

بعد ٣ ساعات : ٢ × ٢ × ٢ = ٨ خلايا

بعد ٤ ساعات : ٢ × ٢ × ٢ × ٢ = ١٦ خليّة

بعد ٥ ساعات : ٢ × ٢ × ٢ × ٢ × ٢ = ٣٢ خليّة

هل يمكنك كتابة هذه الأعداد بصورة أخرى ؟

$٢ = ٢^{١}$

$٢ \times ٢ = ٢^{٢}$

$٢ \times ٢ \times ٢ = ٢^{٣}$

$٢ \times ٢ \times ٢ \times ٢ = ٢^{٤}$

$٢ \times ٢ \times ٢ \times ٢ \times ٢ = ٢^{٥}$

معلومة مفيدة :

اليوجلينا كائن حي مميّز لأنّه يجمع بين صفات النبات والحيوان ، فهي تشبه النبات لأنّها تحتوي على (الكلوروفيل) وتستطيع صنع غذائها بنفسها بعملية البناء الضوئي ، وتشبه الحيوان لأنّها تتحرّك باستخدام سوط واحد وتتغذّى على الموادّ العضوية عند غياب الضوء .

$\overbrace{\text{أ} \times \text{أ} \times \text{أ} \times \dots \times \text{أ}}^{\text{أ مكرَّرة ن مرة}} = \text{أ}^{\text{ن}}$ حيث أ عدد نسبي غير صفري ، $\text{ن} \in \text{ص}_{+}$

ويُقرأ « أ أُسّ ن » أو القوّة النونية للعدد أ .

دورك الآن (١)

أكمِل الجدول التالي :

الصورة الأسّية	الأساس	الأسّ	صورة الضرب المتكرّر	الناتج
$٣^{٢}$	٣	٢	٣ × ٣	٩
$٢^{٥}$	٢	٥	٢ × ٢ × ٢ × ٢ × ٢	٣٢
$(-٣)^{٢}$	-٣	٢	(-٣) × (-٣)	٩
$(-٥)^{٣}$	-٥	٣	(-٥) × (-٥) × (-٥)	-١٢٥
$\left(\frac{١}{٢}\right)^{٤}$	$\frac{١}{٢}$	٤	$\frac{١}{٢} \times \frac{١}{٢} \times \frac{١}{٢} \times \frac{١}{٢}$	$\frac{١}{١٦}$
$\left(\frac{-٣}{٥}\right)^{٢}$	$\frac{-٣}{٥}$	٢	$\left(\frac{-٣}{٥}\right) \times \left(\frac{-٣}{٥}\right)$	$\frac{٩}{٢٥}$

تذكَّر

نسمّي الصورة $٢^{٣}$ بالصورة الأسّية حيث ٢ يُسمّى الأساس و٣ الأسّ ، وتُقرأ ٢ أسّ ٣ أو ٢ مرفوعًا إلى القوّة ٣ أو ٢ تكعيب .

ماذا تلاحظ ؟

ملاحظة :

- عندما يكون الأساس عددًا سالبًا والأسّ عددًا زوجيًا ، يكون الناتج عددًا موجبًا .
- عندما يكون الأساس عددًا سالبًا والأسّ عددًا فرديًّا ، يكون الناتج عددًا سالبًا .

اِستكشِف (٢) :

١ أكمِل .

$٧^{٢} \times ٧^{٣} = ٧ \times ٧ \times ٧ \times ٧ \times ٧ = ٧^{\boxed{٥}} = ٧^{(٢+٣)}$

$٣^{٢} \times ٣^{٤} = ٣ \times ٣ \times ٣ \times ٣ \times ٣ \times ٣ = ٣^{\boxed{٦}} = ٣^{(٢+٤)}$

ماذا تلاحظ ؟ عندما يكون الأساسات متطابقة نجمع الأسس عند الضرب

٢ أكمِل .

$\frac{٦^{٥}}{٦^{٣}} = \frac{\cancel{٦} \times \cancel{٦} \times \cancel{٦} \times ٦ \times ٦}{\cancel{٦} \times \cancel{٦} \times \cancel{٦}} = ٦^{\boxed{٢}} = ٦^{(٥-٣)}$

$\frac{٥^{٤}}{٥} = \frac{\cancel{٥} \times ٥ \times ٥ \times ٥}{\cancel{٥}} = ٥^{\boxed{٣}} = ٥^{(٤-١)}$

ماذا تلاحظ ؟ عندما يكون الأساسات متطابقة نطرح الأسس عند القسمة

لكلّ أ عدد نسبي غير صفري ، م ، ن عددان صحيحان ، يكون :

(١) $أ^{م} \times أ^{ن} = أ^{م+ن}$

(٢) $\frac{أ^{م}}{أ^{ن}} = أ^{م-ن}$

ملاحظة :

لكلّ أ عدد نسبي غير صفري ، م ، ن ، ك ، ... أعداد صحيحة ، يكون : $أ^{م} \times أ^{ن} \times أ^{ك} \times ... = أ^{م+ن+ك+...}$

انتبه

$س = س^{١}$

تذكّر

$س - ص = س + (-ص)$

مثال (٢):

بسِّط كلًّا ممّا يلي باستخدام قوانين الأسس .
(المقام أينما وجد ≠ صفر)

(أ) $٤^{٥} \times ٤^{٣}$ (ب) $س \times س^{٣} \times س^{٦}$ (ج) $\left(\frac{١}{٧}\right)^{٢} \times \left(\frac{١}{٧}\right)^{٣}$

(د) $\frac{٢^{٤}}{٢^{٢}}$ (هـ) $\frac{س^{٧}}{س^{٢}}$ (و) $\frac{س^{٥}}{س^{-٣}}$

الحلّ :

(أ) $٤^{٥} \times ٤^{٣} = ٤^{٥+٣} = ٤^{٨}$

(ب) $س \times س^{٣} \times س^{٦} = س^{١+٣+٦} = س^{١٠}$

(ج) $\left(\frac{١}{٧}\right)^{٢} \times \left(\frac{١}{٧}\right)^{٣} = \left(\frac{١}{٧}\right)^{٢+٣} = \left(\frac{١}{٧}\right)^{٥}$

(د) $\frac{٢^{٤}}{٢^{٢}} = ٢^{٤-٢} = ٢^{٢}$

(هـ) $\frac{س^{٧}}{س^{٢}} = س^{٧-٢} = س^{٥}$

(و) $\frac{س^{٥}}{س^{-٣}} = س^{٥-(-٣)} = س^{٥+٣} = س^{٨}$

دورك الآن (٢)

بسِّط كلًّا ممّا يلي باستخدام قوانين الأسس . (المقام أينما وُجد ≠ صفرًا)

(أ) $٥^{٣} \times ٥^{٤} =$ ...... $٥^{٧}$

(ب) $س^{٤} \times س^{٩} =$ ...... $س^{١٣}$

(ج) $ع^{٢} \times ع \times ع^{٥} =$ ...... $ع^{٨}$

(د) $\left(\frac{١}{٢}\right)^{٢} \times \left(\frac{١}{٢}\right)^{٤} =$ ...... $\left(\frac{١}{٢}\right)^{٦}$

(هـ) $\frac{٣^{٦}}{٣^{٢}} =$ ...... $٣^{٤}$

(و) $\frac{ص^{٥}}{ص^{٤}} =$ ...... ص

(ز) $\frac{ك^{٧}}{ك^{-٢}} =$ ...... ك

عبّر عن فهمك (١)

هل العبارات التالية صحيحة ؟ فسِّر إجابتك .

١ $٣^{٢} \times ٢^{٣} = ٦^{٥}$ ٢ $\frac{٨^{٥}}{٤^{٢}} = ٢^{٣}$

لا، لأنه الأساس غير متطابعه

اِستكشِف (٣) :

أكمِل الجدول :

الصورة الأسّية	$٢^{٣}$	$٢^{٢}$	$٢^{١}$	$٢^{\boxed{٠}}$	$٢^{\boxed{-١}}$	$٢^{\boxed{-٢}}$	$٢^{\boxed{-٣}}$
الناتج	٨	٤	٢	١	$\frac{١}{٢}$	$\frac{١}{٤}$	$\frac{١}{٨}$

÷ ٢ ÷ ٢ ÷ ٢ ÷ ٢ ÷ ٢ ÷ ٢

بملاحظة النمط في الجدول ، نجد أنّ :

$٢^{٠} = ١$ ، $٢^{-١} = \frac{١}{٢}$ ، $٢^{-٢} = \frac{١}{٤} = \frac{١}{٢^{٢}}$ ، $٢^{-٣} = \frac{١}{٨} = \frac{١}{٢^{٣}}$

لكلّ ا عدد نسبي غير صفري ، م عدد صحيح ، يكون :

١ $\text{ا}^{\text{صفر}} = ١$ ٢ $\text{ا}^{-\text{م}} = \frac{١}{\text{ا}^{\text{م}}}$

مثال (٢) :

بسِّط كلًّا ممّا يلي باستخدام قوانين الأسس . (المقام أينما وُجد ≠ صفر)

أ $٢^{-٣}$ ب $\frac{\text{ص}^{٤}}{\text{ص}^{٤}}$ ج $٧^{-٣} \times ٧$

د $\frac{٩^{-٣}}{٩^{-٢}}$ هـ $\text{س}^{٥} \times \text{س}^{-٤}$ و $\frac{\text{س}^{٤}}{\text{س}^{٧}}$

الحلّ :

أ $٢^{-٣} = \frac{١}{٢^{٣}}$

ب $\frac{\text{ص}^{٤}}{\text{ص}^{٤}} = \text{ص}^{٤ - ٤}$

$= \text{ص}^{٠} = ١$

ج $٧^{-٣} \times ٧ = ٧^{-٣ + ١} = ٧^{-٢}$

$= \frac{١}{٧^{٢}}$

د $\frac{٩^{-٣}}{٩^{-٢}} = ٩^{-٣ - (-٢)}$

$= ٩^{-٣ + ٢} = ٩^{-١} = \frac{١}{٩}$

هـ $\text{س}^{٥} \times \text{س}^{-٤} = \text{س}^{٥ + (-٤)}$

$= \text{س}^{١} = \text{س}$

و $\frac{\text{س}^{٤}}{\text{س}^{٧}} = \text{س}^{٤ - ٧}$

$= \text{س}^{٤ + (-٧)} = \text{س}^{-٣} = \frac{١}{\text{س}^{٣}}$

دورك الآن (٣)

بسِّط كلًّا ممّا يلي باستخدام قوانين الأسس (المقام أينما وُجد ≠ صفرًا) .

(أ) $٤^{-٢} = \frac{١}{٤^٢}$

(ب) $٥^{-٣} \times ٥^{٣} = ٥^{٠} = ١$

(ج) $٣^{-٢} \times ٣ = ٣^{-١} = \frac{١}{٣}$

(د) $\frac{هـ^{-٩}}{هـ^{-٢}} = هـ^{-٧} = \frac{١}{هـ^٧}$

اِستكشِف (٤) :

أوجِد ناتج ما يلي :

(أ) $(٢ \times ٣)^٢ = ٦^{\boxed{٢}}$

$= ٣٦$

(ب) $٢^٢ \times ٣^٢ = ٢ \times ٢ \times ٣ \times ٣$

$= ٤ \times ٩$

$= ٣٦$

قارِن الإجابات في (أ) ، (ب) . ماذا تلاحظ ؟ ألاحظ أن $(٢ \times ٣)^٢ = ٢^٢ \times ٣^٢$

(ج) $(٥ \times ٤)^٣ = ٢٠^{\boxed{٣}}$

$= ٢٠ \times ٢٠ \times ٢٠$

$= ٨٠٠٠$

(د) $٥^٣ \times ٤^٣ = ٥ \times ٥ \times ٥ \times ٤ \times ٤ \times ٤$

$= ١٢٥ \times ٦٤$

$= ٨٠٠٠$

قارِن الإجابات في (ج) ، (د) . ماذا تلاحظ ؟ ألاحظ أن $(٥ \times ٤)^٣ = ٥^٣ \times ٤^٣$

لكلّ أ ، ب عددان نسبيان غير صفريَّين ، م عدد صحيح ،
يكون : $(أ \times ب)^م = أ^م \times ب^م$

اِنتبِه

- $(أ + ب)^م \neq أ^م + ب^م$
- $(أ - ب)^م \neq أ^م - ب^م$

اِستكشِف (٥) :

أوجِد ناتج ما يلي :

(أ) $\left(\frac{٣}{٥}\right)^٢ = \frac{٣}{٥} \times \frac{٣}{٥} = \frac{٣^٢}{٥^٢} = \frac{٩}{٢٥}$

(ب) $\left(\frac{٢}{٣}\right)^٣ = \frac{٢}{٣} \times \frac{٢}{٣} \times \frac{٢}{٣} = \frac{٢^٣}{٣^٣} = \frac{٨}{٢٧}$

ماذا تلاحِظ ؟ ألاحظ أن $\left(\frac{٣}{٥}\right)^٢ = \frac{٣^٢}{٥^٢}$ ، $\left(\frac{٢}{٣}\right)^٣ = \frac{٢^٣}{٣^٣}$

لكلّ أ ، ب عددان نسبيان غير صفريَّين ، م عدد صحيح ، يكون : $\left(\frac{أ}{ب}\right)^م = \frac{أ^م}{ب^م}$

الدرس الأوَّل

ملاحظة :

$$\left(\frac{م}{ب}\right)^{-م} = \left(\frac{ب}{م}\right)^{م}$$

مثال (٣) :

بسِّط كلًّا ممّا يلي باستخدام قوانين الأسس . (المقام أينما وُجد ≠ صفرًا)

أ) $(٣\ س)^{٤}$ ب) $(٢\ س\ ص)^{٥}$ ج) $\frac{(٤ \times س)^{٦}}{س^{-٢}}$

د) $\left(\frac{س}{ص}\right)^{٧}$ هـ) $\left(\frac{٢}{٥}\right)^{-٢}$ و) $\frac{(٤\ س^{٢})^{٣}}{(٢\ س)^{٣}}$

الحلّ :

أ) $(٣\ س)^{٤} = ٣^{٤}\ س^{٤}$

ب) $(٢\ س\ ص)^{٥} = ٢^{٥}\ س^{٥}\ ص^{٥}$

ج) $\frac{(٤ \times س)^{٦}}{س^{-٢}} = \frac{٤^{٦} \times س^{٦}}{س^{-٢}} = ٤^{٦} \times س^{٦-(-٢)} = ٤^{٦}\ س^{٨}$

د) $\left(\frac{س}{ص}\right)^{٧} = \frac{س^{٧}}{ص^{٧}}$

هـ) $\left(\frac{٢}{٥}\right)^{-٢} = \left(\frac{٥}{٢}\right)^{٢} = \frac{٥^{٢}}{٢^{٢}}$

و) $\frac{(٤\ س^{٢})^{٣}}{(٢\ س)^{٣}} = \left(\frac{٤\ س^{٢}}{٢\ س}\right)^{٣}$

$= (٢\ س)^{٣} = ٢^{٣}\ س^{٣}$

دورك الآن (٤)

بسِّط كلًّا ممّا يلي باستخدام قوانين الأسس . (المقام أينما وُجد ≠ صفرًا)

أ) $(٣\ ب)^{٤} = ٣^{٤}\ ب^{٤}$

ب) $(٣\ ع\ ص)^{٢} = ٣^{٢}\ ع^{٢}\ ص^{٢}$

ج) $\frac{(٢ \times ص)^{٥}}{ص^{-٣}} = (٢ \times ص^{٤})^{٥} = ٢^{٥}\ ص^{٢٠}$

د) $\left(\frac{٥}{ك}\right)^{٣} = \frac{٥^{٣}}{ك^{٣}}$

هـ) $\frac{٣^{٤}}{٩^{٤}} = \left(\frac{٣}{٩}\right)^{٤} = \left(\frac{١}{٣}\right)^{٤} = \frac{١}{٣^{٤}}$

و) $\frac{(٢\ ص^{٤})^{٢}}{(٨\ ص)^{٢}} = \frac{٢^{٢}\ ص^{٨}}{٨^{٢}\ ص^{٢}} = \frac{ص^{٦}}{٤^{٢}}$

اِستكشِف (٦) :

أكمِل ما يلي :

أ) $(٢^{٢})^{٣} = ٢^{٢} \times ٢^{٢} \times ٢^{٢}$
$= ٢^{٦}$
$= ٢^{(٢ \times ٣)}$

ب) $(أ^{٣} ب^{٢})^{٢} = أ^{٣} ب^{٢} \times أ^{٣} ب^{٢}$
$= أ^{٦} \times ب^{٤}$
$= أ^{(٣ \times ٢)} ب^{(٢ \times ٢)}$

ماذا تلاحظ ؟ ألاحظ أن $(٢^{٢})^{٣} = ٢^{٢ \times ٣}$

لكلّ أ ، ب عددان نسبيان غير صفريّين ، م ، ن عددان صحيحان ، يكون : $(أ^{م})^{ن} = أ^{م ن}$

عبّر عن فهمك (٢)

يقول عبدالله أنّ : $(أ^{٣})^{٤} = أ^{٧}$ ، هل توافقه الرأي ؟ وضِّح ذلك .

لا ، لأن $(أ^{٣})^{٤} = أ^{٣ \times ٤} = أ^{١٢}$

مثال (٤) :

بسِّط كلًّا ممّا يلي باستخدام قوانين الأسس . (المقام أينما وُجد ≠ صفرًا)

أ) $(س^{٣})^{٤}$ ب) $(٥^{-٣})^{-١}$ ج) $(٤^{٢})^{-٣}$

د) $(س^{٢} ص^{٣})^{٤}$ هـ) $٧^{٦} \times (٧^{-٢})^{٣}$ و) $\dfrac{(٥ س^{-٢})^{-٣}}{٦^{-٢} س^{-٣}}$

الحلّ :

أ) $(س^{٣})^{٤} = س^{٣ \times ٤} = س^{١٢}$

ب) $(٥^{-٣})^{-١} = ٥^{-٣ \times (-١)} = ٥^{٣}$

ج) $(٤^{٢})^{-٣} = ٤^{٢ \times (-٣)} = ٤^{-٦} = \dfrac{١}{٤^{٦}}$

د) $(س^{٢} ص^{٣})^{٤} = س^{٢ \times ٤} \times ص^{٣ \times ٤}$
$= س^{٨} ص^{١٢}$

هـ) $٧^{٦} \times (٧^{-٢})^{٣} = ٧^{٦} \times ٧^{-٦} = ٧^{٦ + (-٦)} = ٧^{٠} = ١$

و) $\dfrac{(٥ س^{-٢})^{-٣}}{٦^{-٢} س^{-٣}} = \dfrac{(٥)^{-٣} \times (س^{-٢})^{-٣}}{٦^{-٢} س^{-٣}} = \dfrac{٥^{-٣} س^{٦}}{٦^{-٢} س^{-٣}}$
$= \dfrac{٦^{٢} س^{٦-(-٣)}}{٥^{٣}} = \dfrac{٦^{٢} س^{٩}}{٥^{٣}}$

دورك الآن (٥)

بسِّط كلًّا ممّا يلي باستخدام قوانين الأسس . (المقام أينما وجد ≠ صفر)

(أ) $(ل^{٢})^{٥} = ل^{٢ \times ٥} = ل^{١٠}$

(ب) $(٦^{-٢})^{-١} = ٦^{-٢ \times (-١)} = ٦^{٢}$

(ج) $(٣^{٢})^{-٥} = ٣^{٢ \times (-٥)} = ٣^{-١٠} = \frac{١}{٣^{١٠}}$

(د) $(ك^{٣} ص^{٢})^{٥} = ك^{١٥} ص^{١٠}$

(هـ) $٦^{١٢} \times (٦^{-٣})^{٤} = ٦^{١٢} \times ٦^{-١٢} = ٦^{٠} = ١$

(و) $\frac{(٣ س^{-٣})^{-٢}}{٦^{-٢} س^{-٢}} = \frac{٣^{-٢} س^{٦}}{٦^{-٢} س^{-٢}} = ٢^{٢} س^{٨}$

=

مثال (٥) :

تبلغ سعة ذاكرة هاتف من الجيل الأوّل نحو $٢^{١٠}$ ميجابايت
إذا تمّ تطوير سعة ذاكرة هاتف من الجيل الثالث بنحو
$٧,٦ \times ٢^{٣}$ مرّة من ذاكرة هاتف الجيل الأوّل .
فما هي سعة ذاكرة هاتف الجيل الثالث ؟

الحلّ :

سعة ذاكرة هاتف الجيل الثالث $= ٢^{١٠} \times ٧,٦ \times ٢^{٣}$

$= ٧,٦ \times ٢^{٣} \times ٢^{١٠}$

$= ٧,٦ \times (٢^{٣} \times ٢^{١٠})$

$= ٧,٦ \times ٢^{٣+١٠}$

$= ٧,٦ \times ٢^{١٣}$ ميجابايت

معلومة مفيدة :

الجيجابايت هي وحدة لقياس حجم البيانات أو سعة التخزين في الأجهزة الذكية مثل الهواتف ، الحواسيب ، الأجهزة اللوحية وبطاقات الذاكرة .
والجيجابايت = $٢^{١٠}$ ميجابايت

تمارين ذاتية :

١ أوجِد ناتج ما يلي :

أ) $\frac{٨^{٣}}{٢^{٣}} = \left(\frac{٨}{٢}\right)^{٣} = (٤)^{٣} = ٦٤$

ب) $٣^{-٣} = \frac{١}{٣^{٣}} = \frac{١}{٢٧}$

ج) $\left(\frac{٤}{٧}\right)^{٥} \times \left(\frac{٤}{١٤}\right)^{-٥} = \frac{٤^{٥}}{٧^{٥}} \times \frac{١٤^{٥}}{٤^{٥}} = \frac{٧^{٥} \times ٢^{٥}}{٧^{٥}} = ٢^{٥} = ٣٢$

د) $\left(\frac{١٢}{٢٣}\right)^{٠} = ١$

هـ) $٦ - (١,٢ - ٠,٢)^{٥} = ٦ - (١)^{٥} = ٦ - ١ = ٥$

٢ بسِّط كلًّا ممّا يلي باستخدام قوانين الأسس . (المقام أينما وُجِد ≠ صفرًا)

أ) $ص \times ص^{٥} = ص^{١+٥} = ص^{٦}$

ب) $(٤^{٢})^{٣} \times ٤ = ٤^{٣\times٢} \times ٤ = ٤^{٦+١} = ٤^{٧}$

ج) $(-٣)^{٣} \times (-٣)^{٥} = (-٣)^{٣+٥} = (-٣)^{٨} = ٣^{٨}$

د) $س^{١١} \times س^{٩} = س^{١١+٩} = س^{٢٠}$

هـ) $ص^{٢} \times ص \times ص^{٣} = ص^{٢+١+٣} = ص^{٦}$

و) $(ك^{٢} هـ^{-٣}) \times (ك^{-٧} هـ^{-٤}) = ك^{٢-٧} \times هـ^{-٣-٤} = ك^{-٥} \times هـ^{-٧} = \frac{١}{ك^{٥} \times هـ^{٧}}$

ز) $(أ^{-٢} ب) \times (أ^{٣} ب^{٣}) \times (أ^{٢} ب) = أ^{-٢+٣+٢} \times ب^{١+٣+١} = أ^{٣} ب^{٥}$

ح) $(س^{٣} ص)^{-٢} \times (س^{٢})^{٥} = س^{-٦} ص^{-٢} \times س^{١٠} = س^{٤} ص^{-٢} = \frac{س^{٤}}{ص^{٢}}$

ط) $(ك^{٥})^{٢} \times ك و = ك^{١٠} \times ك و = ك^{١١} \times و$

ي) $(-٣ س)^{٢} = ٣^{٢} س^{٢}$

ك) $\frac{ب^{٢} جـ}{ب جـ^{٣}} = \frac{ب}{جـ^{٢}}$

ل) $\frac{-٨ س^{٢} ص^{٢}}{٤ س^{٣} ص} = \frac{-٢ ص}{س}$

٣ يُنتج مصنع للحلوى ما يقارب ٦×١٠^{٤} قطعة من الحلوى يوميًّا . يريد صاحب المصنع أن يوزّعها بالتساوي على $١,٥ \times ١٠^{٣}$ صندوقًا صغيرًا . أوجِد عدد قطع الحلوى في كلّ صندوق .

$٦ \times ١٠^{٤} \div (١,٥ \times ١٠^{٣})$

$= \frac{\cancel{٦}^{٤} \times ١٠^{٤}}{\cancel{١,٥}_{١} \times ١٠^{٣}} = ٤ \times ١٠^{٤-٣} = ٤ \times ١٠ = ٤٠$ قطعة

مهارات تفكير عليا :

٤ أُكتب الأعداد ٢ ، ٠ ، ٢ ، ٣ في المربّعات الآتية لتحصل على أكبر قيمة ممكنة للتعبير العددي :

$\boxed{٣}^{\boxed{٢}} \times \boxed{٢}^{\boxed{٠}} = ٩ \times ١ = ٩$

٥ يوضّح الجدول التالي نمطًا للمبلغ الذي تتصدّق به غلا كلّ يوم من أيّام الأسبوع حيث مبلغ كلّ يوم هو ضعف مبلغ اليوم السابق له ، فإنّ مقدار ما تتصدّق به غلا يوم الجمعة هو :

اليوم	الأحد	الإثنين	الثلاثاء	الأربعاء	الخميس	الجمعة	السبت
المبلغ فئة مئة فلس							

(أ) $٢^{٤} \times ١٠٠$ فلس

(ب) $٢^{٦} \times ١٠٠$ فلس

(ج) $٢^{٥} \times ١٠٠$ فلس

(د) $٢^{٧} \times ١٠٠$ فلس

٦ - ٢ كثيرات الحدود (الحدوديات)
Polynomials

سوف تتعلّم : كثيرات الحدود – إيجاد قيمة كثيرات الحدود وكتابتها بالصورة العامّة .

العبارات والمفردات :

كثيرة الحدود	Polynomial	درجة	Degree
حدّ	Term	حدود متشابهة	Like Terms
وحيدة الحدّ	Monomial	حدود غير متشابهة	Non Like Terms
ثنائية الحدّ (حدّانية)	Binomial	حدود متساوية	Equivalent Terms
ثلاثية الحدّ (حدودية ثلاثية)	Trinomial	الصورة العامّة	General Form

حُلّ وناقِش

١ أُكتب كلًّا ممّا يلي في صورة تعبير رياضي :

- ضعف عدد ما : ٢ س
- عدد ما مرفوعًا إلى الأسّ ٣ : $س^٣$

مثل هذه التعابير الرياضية تُسمّى حدًّا جبريًّا حيث العدد الثابت يُسمّى « معامل » والقسم الرمزي يُسمّى « متغيّر » .

تذكَّر

المقدار الجبري هو تعبير رياضي يحتوي على أعداد ومتغيّرات مرتبطة بعمليات حسابية مثل الجمع أو الطرح .

مثلًا :

٣ س	$\frac{1}{2}$ $س^٥$	− ٤ $س^٢$ ص	□ س
معامل ← ٣ ، متغيّر ← س	معامل ← $\frac{1}{2}$ ، متغيّر ← $س^٥$	معامل ← − ٤ ، متغيّر ← $س^٢$ ص	معامل ← □ يساوي ١ ، متغيّر ← س

٢ أُكتب كلًّا ممّا يلي في صورة مقدار جبري :

- ضعف عدد ما مضافًا إليه العدد ٥ : ٢ س + ٥
- عدد ما مرفوعًا إلى الأسّ ٤ ومطروحًا منه العدد ٧ : $س^٤$ − ٧
- مربّع عدد ما مضافًا إليه ٣ أمثاله ثمّ طرح منهم العدد ٥ : $س^٢$ + ٣ س − ٥

٣ ممّ يتكوّن المقدار الجبري ؟ متغيرات وعوامل وعمليات حسابية

٤ ماذا تلاحظ على أسس المتغيّرات في المقدار الجبري ؟ تتغير من مقدار لآخر.

كثيرة الحدود (الحدودية) هي مقدار جبري يتكوّن من حدّ جبري أو أكثر يربط بينها عمليات الجمع أو الطرح وتكون أسس المتغيّرات أعدادًا صحيحة غير سالبة .

مثال (١) :

حدِّد أيّ المقادير الجبرية التالية يمثّل حدودية وأيّها لا يمثّل ذلك مع ذكر السبب في حالة النفي :

1. ٣ س^{٤} − ٧ س^{٣} + س − ١ — حدودية
2. س^{٢} − ١ — حدودية
3. س$^{-٣}$ — ليست حدودية (الأسّ عدد صحيح سالب)
4. ٣ س^{٢} − س + ٥ — حدودية
5. $\sqrt{\text{س}}$ − ٥ س — ليست حدودية (المتغيّر س تحت الجذر التربيعي)
6. ٦$^{\text{س}}$ + س^{٢} — ليست حدودية (المتغيّر في الأسّ)
7. س^{٢} + $\frac{٢}{\text{س}}$ — ليست حدودية (الأسّ عدد صحيح سالب (المتغيّر في المقام))

دورك الآن (١)

حدِّد أيّ المقادير الجبرية التالية يمثّل حدودية وأيّها لا يمثّل ذلك مع ذكر السبب في حالة النفي :

1. ٥ س^{٣} + ٢ س^{٢} − ٨ س .... حدودية
2. ٦ س^{٤} − $\sqrt{\text{س}}$ .... ليست حدودية (المتغير س تحت الجذر
3. س^{٣} − ٣ س^{٢} + س .... حدودية
4. $\frac{٧}{\text{س}}$ .... ليست حدودية (الأس عدد صحيح سالب
5. ٤ س^{٢} − س ص + ص + ص^{٢} + ص − ٩ .... حدودية
6. ٢$^{\text{س}}$ + ٥ .... ليست حدودية (المتغير في الأس
7. ٦ ع$^{-٢}$ − ٩ ن .... حدودية

عبّر عن فهمك (١)

هل ٤ تُعتبر كثيرة حدود ؟ فسِّر إجابتك .

نعم كثيرة حدود من الدرجة الصفرية .

أنواع كثيرات الحدود

كثيرة الحدود (الحدوديات)	تصنيف الحدودية (طبقًا لعدد الحدود)
− س ، ٣ $س^{٤}$ ، ٧ ص ، ٥	وحيدة الحدّ
م + ٢ ، ٨ $س^{٢}$ − س ، $ل^{٢}$ − ٣ ل	ثنائية الحدّ (حدّانية)
٣ + س + ٧ $س^{٢}$ ، $س^{٥}$ − ٦$س^{٢}$ + ٢$س^{٣}$	ثلاثية الحدّ (حدودية ثلاثية)

جميع الحدوديات في الجدول السابق تُسمّى حدوديات في متغيّر واحد ،
بينما الحدوديات −س − ٢ ص ، ٥ $س^{٢}$ − س ص + $ص^{٢}$ − ٩ تُسمّى حدوديات في متغيّرَين .

درجة الحدودية وترتيبها

- درجة كثيرة الحدود ذات متغيّر واحد هي قيمة أكبر قوّة للمتغيّر (أكبر أسّ) يظهر في أيّ حدّ .

مثلًا : $س^{٣}$ − ٢ $س^{٢}$ + ٩ حدودية من الدرجة الثالثة
ص + $ص^{٥}$ − ٣ $ص^{٢}$ حدودية من الدرجة الخامسة

- درجة كثيرة الحدود ذات أكثر من متغيّر هي قيمة أكبر مجموع لقوى المتغيّرات (مجموع أكبر أسس للمتغيّرات) التي تظهر في أيّ حدّ .

مثلًا : ٢ $س^{٢}$ $ص^{٣}$ + ٧ س ص + ٣ ص حدودية من الدرجة الخامسة
ل م $ن^{٣}$ − ٤ $ل^{٢}$ $م^{٢}$ $ن^{٥}$ + ل حدودية من الدرجة التاسعة

اِنتبِه
٦ = ٦ $س^{٠}$

دورك الآن (٢)

أكمِل الجدول الآتي :

كثيرة الحدود	تصنيف الحدودية (طبقًا لعدد الحدود)	درجة الحدودية
١ ٦	وحيدة الحد	الدرجة صفر
٢ ٢ $س^{٢}$ + ٣	حدودية ثنائية	الدرجة الثانية
٣ $ص^{٣}$ + ٥ ص − ٧	حدودية ثلاثية	الدرجة الثالثة
٤ م $ن^{٣}$ + $م^{٣}$ + ١	حدودية ثلاثية	الدرجة الرابعة
٥ س ص ع − ٢ س $ص^{٣}$ $ع^{٤}$ + س − ٩	حدودية رباعية	الدرجة الثامنة

عبّر عن فهمك (٢)

تقول حنان إنّ الحدودية ٩ $س^{٤}$ + ٤ $ص^{٢}$ هي من الدرجة السادسة .
هل توافقها الرأي ؟ فسِّر إجابتك . لا ، من الدرجة الرابعة لأنه أكبر أس فيها (٤)

ملاحظة :

- يمكن كتابة كثيرة الحدود بمتغيّر واحد بأيّ ترتيب (تصاعدي - تنازلي) حسب قوى المتغيّر .
- عند ترتيب كثيرة الحدود بمتغيّر واحد تنازليًّا حسب قوى المتغيّر يُسمّى هذا **بالصورة العامّة** .
- معامل الحدّ الذي له أكبر أسّ يُسمّى (المعامل الرئيسي) .
- (الحدّ الثابت) في كثيرة الحدود هو الحدّ الذي لا يحتوي على أيّ متغيّر ، وهو الحدّ الذي درجته صفرًا .

دورك الآن (٣)

أُكتب كثيرات الحدود التالية بالصورة العامّة وحدِّد درجتها :

الحدودية	الصورة العامّة	درجة الحدودية	المعامل الرئيسي	الحدّ الثابت
١ ٣ س − ٤ + ٥ س^{٢}	٥ س^{٢} + ٣ س − ٤	الدرجة الثانية	٥	− ٤
٢ ع^{٣} − ٠,٢ ع + ع^{٤}	ع^{٤} + ع^{٣} − ٠,٢ ع	الدرجة الرابعة	١	٠
٣ س^{٤} + ٧ س − ١ − س^{٣}	س^{٤} − س^{٣} + ٧س − ١	الدرجة الرابعة	١	−١
٤ ٣ م^{٢} − ٨ م + م^{٥} + ١٠	م^{٥} + ٣م^{٢} − ٨م + ١٠	الدرجة الخامسة	١	١٠
٥ − ٠,٣ + ٥,٢ ص + ٦ ص^{٢}	٦ص^{٢} + ٥,٢ص − ٠,٣	الدرجة الثانية	٦	−٠,٣
٦ ٢ س^{٢} − ٥ س^{٣} + $\frac{١}{٤}$ س	−٥س^{٣} + ٢س^{٢} + $\frac{١}{٤}$س	الدرجة الثالثة	−٥	٠

عبّر عن فهمك (٣)

ما هو معامل س^{٢} في كثيرة الحدود ٢ س^{٣} ـ ٧ س + ٥ ؟ فسِّر إجابتك .

معامله صفر ، حيث ٠ × س^{٢} = ٠

الحدود المتشابهة والحدود المتساوية

	الحدود المتشابهة	الحدود المتساوية
التعريف	هي الحدود التي لها المتغيّر نفسه مرفوع إلى الأسّ نفسه	هي حدود متشابهة بمعاملات متساوية
أمثلة	١ ٣ ص^{٦} ، − $\frac{٢}{٥}$ ص^{٦} ، ٠,$\overline{٣}$ ص^{٦}	١ ٤ هـ^{٣} ، ٤ هـ^{٣}
	٢ ٢ م ، −٧ م	٢ $\frac{١}{٣}$ س ، $\frac{١}{٣}$ س
	٣ ل ع^{٢} ، − ٣ ل ع^{٢}	٣ ل ع^{٢} ، ع^{٢} ل

عبّر عن فهمك (٤)

تقول فوزيه إنّ : $\frac{١}{٢}$ س ، $\frac{١}{٢}$ ص هي حدود جبرية متشابهة . هلّ تتّفق معها ؟ فسِّر إجابتك .

لا ، لأنه المتغير اختلف وغير متساوي

دورك الآن (٤)

١ أوجِد قيمة كثيرة الحدود التالية عندما س = ٥ ، ص = – ٣

$\frac{١}{٥}$ س^{٢} – ٢ ص^{٢} + ١٨

= $\frac{١}{٥}$ × (س)^{٢} – ٢ × (ص)^{٢} + ١٨

= $\frac{١}{٥}$ × ٢٥ – ٢ × ٩ + ١٨

= ٥ – ١٨ + ١٨ = ٥

تذكَّر

ترتيب العمليات الحسابية :

١ ما داخل الأقواس

٢ الأسس والجذور

٣ الضرب والقسمة

٤ الجمع والطرح

٢ إختر الإجابة الصحيحة .

أيّ المقادير الآتية يكون الناتج ١٤
عندما س = ٧ ، ص = ٧ ، ن = ٣ ؟

أ س × (ص + ن)   ب س × ص × ن

ج ن × ص – س   د (ص + ن) ÷ س

تمارين ذاتية :

١ ظلِّل (أ) إذا كانت العبارة صحيحة ، وظلِّل (ب) إذا كانت العبارة غير صحيحة .

س^{٥} – $\frac{٣}{س}$ + ٧	كثيرة الحدود	أ	ب
$\sqrt{س}$ – ص^{س} + $\frac{٢}{٥}$ س	ليست كثيرة حدود	أ	ب
– $\frac{٢}{٥}$ س ص^{٣} ، – ٠,٤ ص^{٣} س	حدّان جبريان متساويان	أ	ب
– س^{٢} – $\frac{٢}{٥}$ ص^{٣} س + س ص^{٢}	حدودية من الدرجة الرابعة	أ	ب

٢ ضَع علامة (✓) أسفل الوصف المناسِب للحدود الموضَّحة في الجدول التالي :

حدود جبرية	حدود جبرية متشابهة	حدود جبرية غير متشابهة
٣ س ، – ٥ س ، ١٢ س	✓	☐
٤ ص^{٢} ، ص^{٢}	✓	☐
٧ س^{٢} ص ، ٧ س ص^{٢}	☐	✓
٢ ل م ، ٥ م ل	✓	☐
٠,٣ أ^{٤} ب^{٢} ، $\frac{١}{٢}$ أ^{٣} ب^{٣}	☐	✓

٣ ضَع الحدوديات التالية في الصورة العامّة ، ثمّ حدِّد درجة الحدودية :

أ) ٩ س^{٢} – ٧ س^{٣} + ٢ س – ٣

-٧ س^{٣} + ٩ س^{٢} + ٢ س – ٣

الدرجة الثالثة .

ب) ٤ + ٧ ع^{٤} – ٧ ع^{٥} + ع^{٣}

-٧ ع^{٥} + ٧ ع^{٤} + ع^{٣} + ٤

الدرجة الخامسة .

ج) -٣ ل^{٣} + ٢ ل^{٦} + ٨

٢ ل^{٦} – ٣ ل^{٣} + ٨

الدرجة السادسة .

د) ٥ ك – ٣ ك^{٣} + $\frac{٣}{٢}$ ك^{٢} + $\frac{١}{٢}$

-٣ ك^{٣} + $\frac{٣}{٢}$ ك^{٢} + ٥ ك + $\frac{١}{٢}$

الدرجة الثالثة .

٤ إذا كانت أ + ٣ ب = ٥ ، جـ = ٤ ، فما قيمة أ + ٣ (ب + جـ) ؟

أ + ٣ (ب + جـ)

(أ + ٣ ب) + ٣ جـ

= ٥ + ٣ × ٤ = ٥ + ١٢ = ١٧

تذكَّر

خاصيّة توزيع الضرب على الجمع

أ (س + ص) = أ س + أ ص

٥ أوجِد قيمة كلّ من كثيرات الحدود التالية :

أ) $- ٤ س^{٣} + \frac{١}{٢} س + ٥ + ٢ س^{٢}$ ، عندما س = ٢

$- ٤ \times (٢)^{٣} + \frac{١}{٢} \times ٢ + ٥ + ٢ \times (٢)^{٢}$

$= - ٣٢ + ١ + ٥ + ٨ = - ١٨$

ب) $- س ص^{٢} + \frac{٣}{٤} ص^{٢} س^{٢} - ٩$ ، عندما س = ٤ ، ص = ١

$- ٤ \times (١)^{٢} + \frac{٣}{٤} \times (١)^{٢} \times (٤)^{٢} - ٩$

$= - ٤ + ١٢ - ٩ = - ١$

مهارات تفكير عليا :

٦ يتشكّل فريق التخضير في المدرسة من المتعلّمين عيسى وشملان وعبدالله . إذا زرع شملان عدد س من الشتلات وزرع عبدالله ضعف عدد الشتلات التي زرعها شملان أمّا عيسى فزرع ٨ شتلات فقط.
فأيّ الحدوديات تعبّر عن جميع الشتلات التي زرعها المتعلّمون الثلاثة ؟

أ) $س^{٢} + س + ٨$

ب) ٢ س − ٨

ج) ٣ س + ٨

د) ١١ س

٧ في أحد المطارات ، يتمّ الاستعانة بروبوت يُنجز عددًا من المهامّ في اليوم الواحد وفق الحدودية ٦ س + ٥ ص + ١٢
حيث س تمثّل عدد مستشعرات الوزن (sensor) ،
ص تمثّل عدد وحدات المسح الإلكتروني (QR) .
كم مهمّة يُنجز الروبوت في اليوم الواحد إذا تمّ تركيب ٢ مستشعر وزن ، و٣ وحدات مسح إلكتروني ؟

$٦ \times ٢ + ٥ \times ٣ + ١٢$

$= ١٢ + ١٥ + ١٢$

= ٣٩ مهمة.

٦ - ٣ جمع كثيرات الحدود وطرحها
Adding and Subtracting Polynomials

سوف تتعلّم : جمع كثيرات الحدود وطرحها .

العبارات والمفردات :

حدود متشابهة Like Terms تبسيط Simplifying

جمع كثيرات الحدود

حُلّ وناقِش

أكمِل ما يلي :

يقوم ربّ أسرة بجمع بعض التبرّعات من أفراد أسرته ليقدّمها كصدقة على العمّال في فصل الشتاء مثل : قبعات ، جوارب ، شالات ومبلغًا من المال فئة دينار . إذا تمّ حصر التبرّعات من أفراد الأسرة كما في الجدول التالي :

أفراد الأسرة	التبرّعات
الأب	١٠ دنانير ، ٣ قبّعات ، ٥ جوارب ، ٢ شال
الأمّ	٧ شالات ، ٦ جوارب ، ١ قبّعة ، ٨ دنانير
الإبن	٥ قبّعات ، ٦ دنانير ، ٣ جوارب ، ٣ شالات
الابنة	٣ جوارب ، ٥ دنانير ، ٦ شالات ، ٤ قبّعات

فساعِد ربّ الأسرة في جمع التبرّعات المتشابهة حتّى يسهل عليه توزيعها على العمّال ، اِستعِن بالجدول التالي ليسهل عليك جمع هذه التبرّعات .

أفراد الأسرة / النوع	المبلغ المالي	شالات	قبّعات	جوارب
الأب	١٠ دنانير	٢	٣	٥
الأمّ	٨	٧ شالات	١	٦
الإبن	٦	٣	٥	٣
الابنة	٥	٦	٤	٣ جوارب
المجموع	٢٩	١٨	١٣ قبّعة	١٧

معلومة مفيدة :

الصدقة
ليست دائمًا مالًا
فالابتسامة صدقة ، وحسن الحديث صدقة ، وصنع المعروف صدقة ، ودعوة للمسلمين بظهر الغيب صدقة .

كذلك ، عند جمع كثيرات الحدود نقوم بجمع الحدود الجبرية المتشابهة (نجمع المعاملات العددية لهذه الحدود) .

لجمع كثيرات الحدود نقوم بجمع الحدود الجبرية المتشابهة معًا .

مثال (١):

أوجِد ناتج جمع كثيرات الحدود الآتية :

٣ س^{٢} + ٤ س − ٦ مع − ٤ س^{٢} + ٢ س − ١

الحلّ :

الطريقة الرأسية :

		٣	س^{٢}	+	٤	س	−	٦
+	−	٤	س^{٢}	+	٢	س	−	١
		−	س^{٢}	+	٦	س	−	٧

الطريقة الأفقية :

(٣ س^{٢} + ٤ س − ٦) + (−٤ س^{٢} + ٢ س − ١)

= [٣ س^{٢} + (−٤) س^{٢}] + [٤ س + ٢ س] + (−٦) + (−١)

= − س^{٢} + ٦ س − ٧

لاحِظ أنّ :

خطوات الحلّ :

١ أُكتب الحدودية بالصورة العامّة .

٢ حدِّد ورتِّب الحدود المتشابهة .

٣ إجمع معاملات الحدود المتشابهة .

تذكَّر

من خواصّ عملية الجمع :

- الخاصّية الإبدالية
- الخاصّية التجميعية

دورك الآن (١)

إجمع الحدوديات الآتية :

٢ س^{٣} + ٥ س − ٢ ، − ٣ س^{٣} − ٢ س + ١٠

الحلّ :

		٢	س^{٣}	+	٥	س	−	٢
+	−	٣	س^{٣}	−	٢	س	+	١٠

− س^{٣} + ٣ س + ٨

اِنتبِه

أُنقل الحدّ بإشارته عند كتابة الحدودية في الصورة العامّة .

عبّر عن فهمك (١)

طلبت المعلّمة من متعلّمات الفصل استخدام البطاقات الخاطفة لإيجاد ناتج س + س ، وكان من ضمن الإجابات التي رأتها المعلّمة س^{٢} ، ٢ س . في رأيك ، أيّ الإجابات صحيحة ؟ فسِّر إجابتك . ٢ س لأن س + س = ٢ س وليس س × س

مثال (٢) :

اِجمع الحدوديات الآتية :

س^{٣} + ٣ س^{٤} − ٧ س ، − س^{٢} − ٩ س^{٤} ، ٥ س + ٢ س^{٢} − ٨ س^{٣}

الحلّ :

أُكتب الحدودية بالصورة العامّة ، ثمّ اجمعها بالطريقة الرأسية .

	٣ س^{٤}	+ س^{٣}		− ٧ س	
+	− ٩ س^{٤}		− س^{٢}		
		− ٨ س^{٣}	+ ٢ س^{٢}	+ ٥ س	
	− ٦ س^{٤}	− ٧ س^{٣}	+ س^{٢}	− ٢ س	

تذكَّر

إذا لم يُكتب الحدّ في الحدودية ، فهذا يعني أنّ معامله يساوي صفرًا .

اِنتبِه

أُترك فراغًا مكان الحدّ الذي معامله صفر في الحدودية .

دورك الآن (٢)

اِجمع الحدوديات الآتية :

٨ س^{٥} − ٥ س^{٣} + ٢ س^{٢} + ١ ، − ٢ س^{٤} + ٣ س^{٢} + س ، − س^{٣} + ٣

الحلّ :

	٨ س^{٥}		− ٥ س^{٣}	+ ٢ س^{٢}		+ ١
+		− ٢ س^{٤}		+ ٣ س^{٢}	+ س	
			− س^{٣}			+ ٣

٨ س^{٥} − ٢ س^{٤} − ٦ س^{٣} + ٥ س^{٢} + س + ٤

اِنتبِه

عند جمع الحدود المتشابهة ، نجمع المعاملات فقط وليس الأسس .

طرح كثيرات الحدود

دورك الآن (٣)

أُكتب المعكوس الجمعي لكلّ من كثيرات الحدود الآتية :

	كثيرة الحدود	المعكوس الجمعي
١	٣ س	−٣ س
٢	٢ س^{٥} − ٤	−٢ س^{٥} + ٤
٣	٤ س^{٢} − ٧ س − ٣	− (٤ س^{٢} − ٧ س − ٣) = − ٤ س^{٢} + ٧ س + ٣
٤	− ٩ + ١١ س^{٥} − ٨ س^{٣}	−١١ س^{٥} + ٨ س^{٣} + ٩

مثال (٣):

أوجِد ناتج ما يلي:

٧ س^{٣} – ٢ س^{٢} + ٥ – (س^{٣} – ٤ س^{٢} – ٧)

الحلّ:

الطريقة الأفقية:

٧ س^{٣} – ٢ س^{٢} + ٥ – (س^{٣} – ٤ س^{٢} – ٧)

= ٧ س^{٣} – ٢ س^{٢} + ٥ + (– س^{٣} + ٤ س^{٢} + ٧)   (إضافة المعكوس الجمعي للمطروح)

= (٧ س^{٣} + (– س^{٣})) + (– ٢ س^{٢} + ٤ س^{٢}) + (٥ + ٧)   اِجمع الحدود المتشابهة

= ٦ س^{٣} + ٢ س^{٢} + ١٢

تذكَّر

أ – ب = أ + (– ب)

عبّر عن فهمك (٢)

أوْجَدَ طارق ناتج (– ٥ س^{٢} + ٢ س – ٣) – (٣ س^{٢} – ٢ س – ٦) كما يلي:

= – ٥ س^{٢} + ٢ س – ٣ – ٣ س^{٢} – ٢ س – ٦

= – ٨ س^{٢} – ٩

وضِّح ما الخطأ الذي وقع فيه طارق؟ لم يكتب المعكوس الجمعي لجميع الحدود الجبرية بعد السالب

مثال (٤):

اِطرح ١٠ ص^{٣} + ٧ ص^{٢} – ١ من (٤ ص^{٢} – ص^{٣} + ص)

الحلّ:

٤ ص^{٢} – ص^{٣} + ص – (١٠ ص^{٣} + ٧ ص^{٢} – ١)

– ص^{٣} + ٤ ص^{٢} + ص – (١٠ ص^{٣} + ٧ ص^{٢} – ١)   ضَع الحدوديات بالصورة العامّة

إضافة المعكوس الجمعي للمطروح

الطريقة الرأسية:

	– ص^{٣}	+ ٤ ص^{٢}	+ ص	
+	– ١٠ ص^{٣}	– ٧ ص^{٢}		+ ١
	– ١١ ص^{٣}	– ٣ ص^{٢}	+ ص	+ ١

اِنتبِه

المطروح منه يأتي بعد كلمة «من» دائمًا.

اِنتبِه

لإيجاد المعكوس الجمعي لحدودية، اُكتب المعكوس الجمعي لكلّ حدّ من حدودها.

دورك الآن (٤)

من (٤ س − ٨ + س^{٤} − ٤ س^{٢}) اِطرح (٦ س + ٧ س^{٤} + ٤ س^{٢} + ٥)

الحلّ :

س^{٤} − ٤ س^{٢} + ٤ س − ٨ − (٧ س^{٤} + ٤ س^{٢} + ٦ س + ٥)

= س^{٤} − ٤ س^{٢} + ٤ س − ٨ − ٧ س^{٤} − ٤ س^{٢} − ٦ س − ٥

= − ٦ س^{٤} − ٨ س^{٢} − ٢ س − ١٣

تمارين ذاتية :

١ اِجمع كلًّا من كثيرات الحدود الآتية :

أ) ٥ س^{٣} + ٣ س^{٤} + ٤ س^{٢} ، − س^{٤} + ٤ س^{٣} + ٤

٣ س^{٤} + ٥ س^{٣} + ٤ س^{٢}

\+

− س^{٤} + ٤ س^{٣} + ٤

٢ س^{٤} + ٩ س^{٣} + ٤ س^{٢} + ٤

ب) − س^{٣} + ٢ س^{٢} − ٤ ، ٥ س^{٢} − ٨ س^{٣} − ٣ ، س^{٢} + ٩

− س^{٣} + ٢ س^{٢} − ٤

− ٨ س^{٣} + ٥ س^{٢} − ٣

\+ س^{٢} + ٩

− ٩ س^{٣} + ٨ س^{٢} + ٢

ج) ٣ س − ٢ س^{٤} + $\frac{١}{٢}$ س^{٥} ، ٢ س^{٤} + ٧ س^{٣} − س^{٢} ، ٤ س^{٢} − $\frac{١}{٦}$

$\frac{١}{٢}$ س^{٥} − ٢ س^{٤} + ٣ س

\+ ٢ س^{٤} + ٧ س^{٣} − س^{٢}

\+ ٤ س^{٢} − $\frac{١}{٦}$

$\frac{١}{٢}$ س^{٥} + ٧ س^{٣} + ٣ س^{٢} + ٣ س − $\frac{١}{٦}$

الدرس الثالث

٢ أُكتب المعكوس الجمعي لكلّ من كثيرات الحدود الآتية :

المعكوس الجمعي	كثيرة الحدود
$-(\frac{١}{٤}$ س^{٥} $-$ ٢ س^{٣} $-$ ٣$) = -\frac{١}{٤}$ س^{٥} $+$ ٢ س^{٣} $+$ ٣	$\frac{١}{٤}$ س^{٥} $-$ ٢ س^{٣} $-$ ٣
$-(-$٠,٢ س^{٤} $-$ س^{٢} $+ \frac{٢}{٣}) =$ ٠,٢ س^{٤} $+$ س^{٢} $- \frac{٢}{٣}$	$-$ ٠,٢ س^{٤} $-$ س^{٢} $+ \frac{٢}{٣}$
$-(-$س^{٢} $-$ ٥ س $+$ ٢$) =$ س^{٢} $+$ ٥ س $-$ ٢	$-$ س^{٢} $-$ ٥ س $+$ ٢
$-($س^{٣} $+$ ٣ س^{٢} $-$ ٦ س $+$ ٨$) = -$س^{٣} $-$ ٣ س^{٢} $+$ ٦ س $-$ ٨	٨ $+$ ٣ س^{٢} $-$ ٦ س $+$ س^{٣}

٣ أوجِد ناتج ما يلي :

أ) ٢ س^{٢} $-$ ٢ س $+$ ٧ $-$ (٢ س $-$ س^{٢} $+$ ١)

٢ س^{٢} $-$ ٢ س $+$ ٧ $-$ ٢ س $+$ س^{٢} $-$ ١

$=$ ٣ س^{٢} $-$ ٤ س $+$ ٦

ب) ٦ س^{٣} $-$ ٢ س^{٢} $+$ ٤ $-$ (٨ س^{٣} $-$ ٤ س^{٢} $-$ ٢٠)

٦ س^{٣} $-$ ٢ س^{٢} $+$ ٤ $-$ ٨ س^{٣} $+$ ٤ س^{٢} $+$ ٢٠

$= -$ ٢ س^{٣} $+$ ٢ س^{٢} $+$ ٢٤

٤ اِطرح (٥ س^{٢} $+$ ٦ س^{٤} $-$ ١) من (٤ س^{٤} $-$ ١٤ س^{٢} $+$ س)

(٤ س^{٤} $-$ ١٤ س^{٢} $+$ س) $-$ (٦ س^{٤} $+$ ٥ س^{٢} $-$ ١)

$=$ ٤ س^{٤} $-$ ١٤ س^{٢} $+$ س $-$ ٦ س^{٤} $-$ ٥ س^{٢} $+$ ١

$= -$ ٢ س^{٤} $-$ ١٩ س^{٢} $+$ س $+$ ١

٥ من (٢ س $-$ ٩ $+$ س^{٣} $-$ ٤ س^{٢}) اِطرح (٥ س $+$ ٨ س^{٣} $+$ ٤ س^{٢} $+$ ١)

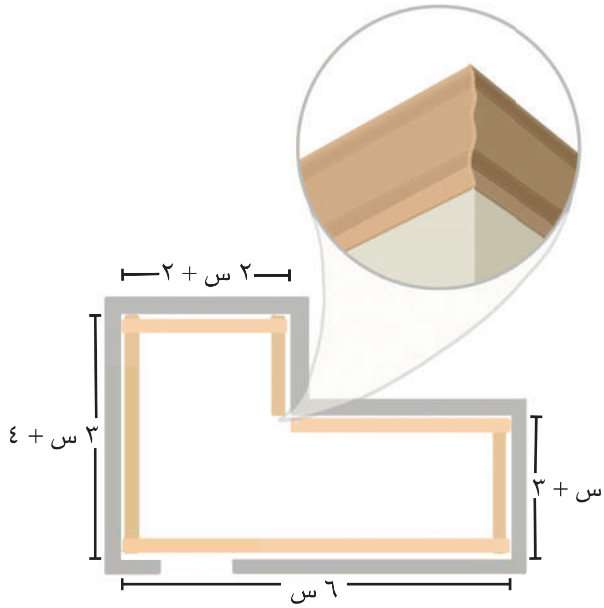
(س^{٣} $-$ ٤ س^{٢} $+$ ٢ س $-$ ٩) $-$ (٨ س^{٣} $+$ ٤ س^{٢} $+$ ٥ س $+$ ١)

$=$ س^{٣} $-$ ٤ س^{٢} $+$ ٢ س $-$ ٩ $-$ ٨ س^{٣} $-$ ٤ س^{٢} $-$ ٥ س $-$ ١

$= -$ ٧ س^{٣} $-$ ٨ س^{٢} $-$ ٣ س $-$ ١٠

مهارات تفكير عليا :

٦ تمّ تركيب قوالب خشبية حول حوافّ الغرفة ، إذا كانت أبعاد الغرفة من الداخل موضَّحة في الشكل المقابِل ، فأوجِد محيط هذه الغرفة بدلالة س .



س + ٣

٦ س

٣ س + ٤

٢ س + ٢

١٢ س + ٩

تم الحل بواسطة

مدرستي الكويتية

الدرس الثالث

٦ - ٤ ضرب كثيرات الحدود
Multiplying Polynomials

سوف تتعلّم : ضرب كثيرات الحدود .

نستخدم كثيرات الحدود في الحياة اليومية في مجالات متعدّدة كالعلوم والهندسة والاقتصاد ، وذلك من خلال استخدامها مثلًا في حساب المساحات والأحجام ، وتصميم الهياكل مثل الجسور وإنشاء رسومات الحاسوب ، ونمذجة سلوك الأسواق المالية .

اِستكشِف (١)

من خلال معلوماتك من درس قوانين الأسس ، أوجِد ناتج ما يلي :

١ ٣ س × ٤ س^{٢} = (٣ × ٤) × (س × س^{٢}) = ١٢ س^{٣}

٢ − ٥ ص^{٤} × (− ٢ ص^{٣}) = (−٥ × −٢) × (ص^{٤} × ص^{٣}) = ١٠ ص^{٧}

تذكَّر

أ^{م} × أ^{ن} = أ$^{م + ن}$

حيث أ ≠ ٠ ،

م ، ن ∈ ص

نلاحظ أن :

عند ضرب حدّ جبري في حدّ جبري آخر ، نضرب المعاملات ببعضها ونجمع أسس المتغيّرات المتشابهة إن وُجدت .

دورك الآن (١)

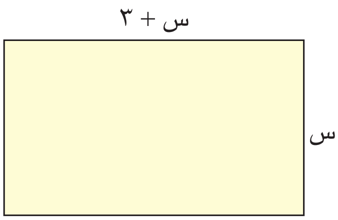
أوجِد ناتج ما يلي :

١ ٦ س^{٢} × ٤ س^{٣} = ٢٤ س^{٥}

٢ − ٣ س^{٥} × ٢ س = −٦ س^{٦}

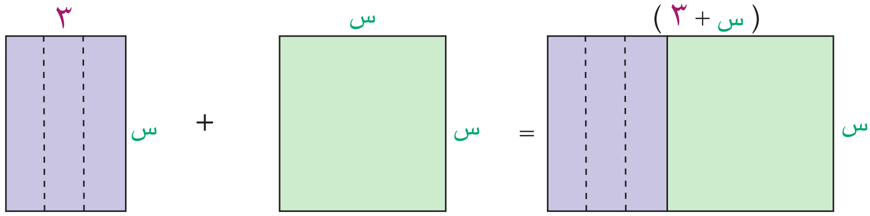
اِستكشِف (٢)

في الشكل المقابِل مستطيل بعداه س وحدة طول ، (س + ٣) وحدة طول
أوجِد مساحة المنطقة المستطيلة .



نقسّم المستطيل إلى جزءَين ، ثمّ نكتب النمذجة التي حصلنا عليها كالآتي :

مساحة المنطقة المستطيلة = مجموع مساحات المناطق التالية



س × (س + ٣) = س^{٢} + ٣ س

وكذلك تساعدنا خاصّية التوزيع في إيجاد ناتج ضرب حدّ في كثيرة حدود كالتالي :

س × (س + ٣) = (س × س) + (س × ٣)

= س^{٢} + ٣ س

إذًا مساحة المنطقة المستطيلة = (س^{٢} + ٣ س) وحدة مربّعة

مثال (١) :

أوجِد ناتج ما يلي :

(أ) ٢ س^{٢} × (٨ س^{٣} + ٥ س^{٤})

(ب) ٣ س × (٢ س^{٢} − س + ٤)

الحلّ :

(أ) ٢ س^{٢} × (٨ س^{٣} + ٥ س^{٤})

= (٢ س^{٢} × ٨ س^{٣}) + (٢ س^{٢} × ٥ س^{٤})

= ١٦ س^{٥} + ١٠ س^{٦}

(ب) ٣ س × (٢ س^{٢} − س + ٤)

= (٣ س × ٢ س^{٢}) − (٣ س × س) + (٣ س × ٤)

= ٦ س^{٣} − ٣ س^{٢} + ١٢ س

تذكَّر

الخاصّية التوزيعية للضرب على الجمع

أ × (س + ص) =

(أ × س) + (أ × ص)

اِنتبِه

عند استخدام خاصّية توزيع الضرب على الجمع ، يجب مراعاة إشارات الحدود .

دورك الآن (٢)

أوجِد ناتج ما يلي :

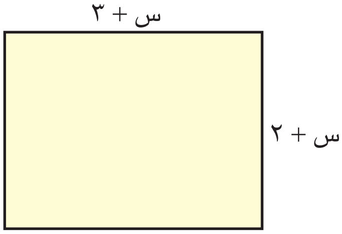
١) ٤ س × (٢ س^{٢} + ٣ س^{٤}) = ٤ س × ٢ س^{٢} + ٤ س × ٣ س^{٤}

= ٦ س^{٣} + ١٢ س^{٥}

٢) س^{٢} × (٥ س^{٣} − ٧ س − ١) = س^{٢} × ٥ س^{٣} − س^{٢} × ٧ س − س^{٢} × ١

= ٥ س^{٥} − ٧ س^{٣} − س^{٢}

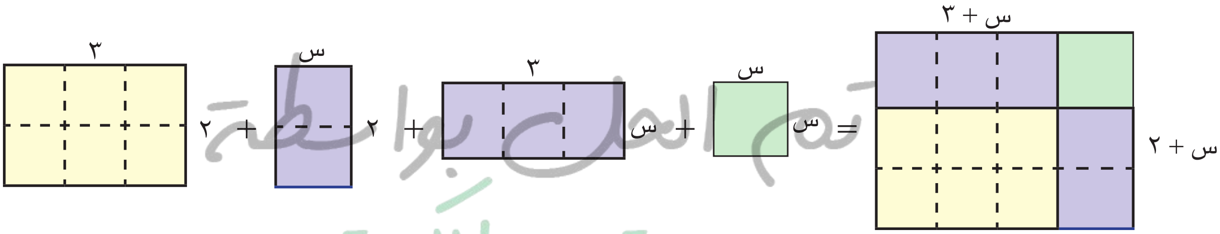
اِستكشِف (٣)



في الشكل المقابِل مستطيل مستطيل بعداه (س + ٣) وحدة طول ، (س + ٢) وحدة طول ، أوجِد مساحة المنطقة المستطيلة .

نقسّم المستطيل إلى أربعة أجزاء كما في الشكل المقابِل ، ثمّ نكتب النمذجة التي حصلنا عليها كالآتي :

مساحة المنطقة المستطيلة = مجموع مساحات المناطق التالية



(س + ٣) × (س + ٢) = س^{٢} + ٣ س + ٢ س + ٦

= س^{٢} + ٥ س + ٦

كذلك ، يمكننا استخدام الخاصّية التوزيعية لإيجاد ناتج الضرب كما يلي :

(س + ٣) (س + ٢)

= س (س + ٢) + ٣ (س + ٢) خاصية توزيع الضرب على الجمع

= (س × س) + (س × ٢) + (٣ × س) + (٣ × ٢)

= س^{٢} + ٢ س + ٣ س + ٦ نجمع الحدود المتشابهة

= س^{٢} + ٥ س + ٦

إذًا مساحة المنطقة المستطيلة = (س^{٢} + ٥ س + ٦) وحدة مربّعة

دورك الآن (٣)

أوجِد ناتج ما يلي :

(س + ٦) (س + ٢) = س (س + ٢) + ٦ (س + ٢)

= س^{٢} + ٢ س + ٦ س + ١٢

= س^{٢} + ٨ س + ١٢

مثال (٢) :

أوجِد ناتج ما يلي :

أ) (س + ٣) (س − ٣)

ب) (س − ٤) (٢ س^{٢} − ٥ س + ٣)

الحلّ :

أ) (س + ٣) (س − ٣)

= س (س − ٣) + ٣ (س − ٣)

= س^{٢} − ٣ س + ٣ س − ٩ نجمع الحدود المتشابهة

= س^{٢} − ٩

ب) (س − ٤) (٢ س^{٢} − ٥ س + ٣)

الطريقة الأفقية :

(س − ٤) (٢ س^{٢} − ٥ س + ٣)

= س (٢ س^{٢} − ٥ س + ٣) − ٤ (٢ س^{٢} − ٥ س + ٣)

= ٢ س^{٣} − ٥ س^{٢} + ٣ س − ٨ س^{٢} + ٢٠ س − ١٢ نجمع الحدود المتشابهة

= ٢ س^{٣} − ١٣ س^{٢} + ٢٣ س − ١٢

الطريقة الرأسية :

	٢ س^{٢}	−	٥ س	+	٣			
×	س	−	٤					
	٢ س^{٣}	−	٥ س^{٢}	+	٣ س			نضرب الحدّ (س) في الحدودية (٢ س^{٢} − ٥ س + ٣)
+		−	٨ س^{٢}	+	٢٠ س	−	١٢	نضرب الحدّ (−٤) في الحدودية (٢ س^{٢} − ٥ س + ٣)
	٢ س^{٣}	−	١٣ س^{٢}	+	٢٣ س	−	١٢	نجمع الحدود المتشابهة

اِنتبِه

ناتج جمع كلّ حدّ ومعكوسه الجمعي يساوي صفرًا

− ٣ س + ٣ س = صفرًا

اِنتبِه

- ناتج ضرب حدَّين متّفقَين في الإشارة هو حدّ موجَب .
- ناتج ضرب حدَّين مختلفَين في الإشارة هو حدّ سالب .

مثال (٣) :

أوجِد مربّع (س + ٥)

الحلّ :

مربّع (س + ٥) هو (س + ٥)^{٢}

(س + ٥)^{٢} = (س + ٥)(س + ٥)

= س^{٢} + ٥ س + ٥ س + ٢٥ اِجمع الحدود المتشابهة

= س^{٢} + ١٠ س + ٢٥

اِنتبِه

- مربّع س هو س^{٢}
- ضعف س هو ٢ س

لاحِظ أنّ :

$(\text{س} + ٥)^{٢}$ هي مربّع الحدّانية $(\text{س} + ٥)$ حيث :

س هي الحدّ الأوّل ، ٥ الحدّ الثاني

ناتجها $\text{س}^{٢} + ١٠\,\text{س} + ٢٥$ حدودية ثلاثية على صورة مربّع كامل

مربّع الحدّ الأوّل ، ٢ × الحدّ الأوّل × الحدّ الثاني ، مربّع الحدّ الثاني

عمومًا

$(\text{س} \pm \text{ص})^{٢} = \text{س}^{٢} \pm ٢\,\text{س}\,\text{ص} + \text{ص}^{٢}$

= مربّع الحدّ الأوّل ± ٢ × الحدّ الأوّل × الحدّ الثاني + مربّع الحدّ الثاني

عبّر عن فهمك

ما التشابه والاختلاف بين ناتج $(\text{س} - ٨)^{٢}$ ، $(\text{س} + ٨)^{٢}$ ؟

في إشارة الحد الأوسط مختلفة

مثال (٤) :

أوجِد ناتج ما يلي :

أ) $(\text{س} - ٦)^{٢}$

الحلّ :

$(\text{س} - ٦)^{٢} = (\text{س})^{٢} - ٢ \times \text{س} \times ٦ + (٦)^{٢}$

$= \text{س}^{٢} - ١٢\,\text{س} + ٣٦$

ب) $(\text{م}^{٢} + ٤\,\text{ل})^{٢}$

الحلّ :

$(\text{م}^{٢} + ٤\,\text{ل})^{٢} = (\text{م}^{٢})^{٢} + ٢ \times \text{م}^{٢} \times ٤\,\text{ل} + (٤\,\text{ل})^{٢}$

$= \text{م}^{٤} + ٨\,\text{م}^{٢}\,\text{ل} + ١٦\,\text{ل}^{٢}$

دورك الآن (٤)

أوجِد ناتج $(\text{ص} - ٤)^{٢}$

$(\text{ص} - ٤)^{٢} = \text{ص}^{٢} - ٢ \times \text{ص} \times ٤ + (٤)^{٢}$

$= \text{ص}^{٢} - ٨\,\text{ص} + ١٦$

تمارين ذاتية :

١ أوجِد ناتج كلّ ممّا يلي :

أ) $٣ س \times ٤ س^{٣}$

$= ١٢ س^{٤}$

ب) $\frac{١}{٣} ص \times \left(\frac{٢}{٣} ص^{٢} - ٩ ص + \frac{٣}{٢} \right)$

$= \frac{٢}{٩} ص^{٣} - ٣ ص^{٢} + \frac{١}{٢}$

ج) $(٣ س^{٣} + س - ٤) \times (- ٢ س)$

$= - ٦ س^{٤} - ٢ س^{٢} + ٨ س$

د) $(س - ص) (س + ص)$

$= س^{٢} + س ص - س ص - ص^{٢}$

$= س^{٢} - ص^{٢}$

هـ) $(س + ٢) (س - ٧)$

$= س^{٢} - ٧ س + ٢ س - ١٤$

$= س^{٢} - ٥ س - ١٤$

و) $(٣ س + ٢ ص)^{٢}$

$= (٣ س)^{٢} + ٢ \times ٣ س \times ٢ ص + (٢ ص)^{٢}$

$= ٩ س^{٢} + ١٢ س ص + ٤ ص^{٢}$

ز) $(ع^{٢} - ١) (٢ ع^{٣} - ٣ ع^{٢} + ١)$

$= ٢ ع^{٥} - ٣ ع^{٤} + ع^{٢} - ٢ ع^{٣} + ٣ ع^{٢} - ١$

$= ٢ ع^{٥} - ٣ ع^{٤} - ٢ ع^{٣} + ٤ ع^{٢} - ١$

ح) $(ص^{٢} - ٢ ص - ٥) (٢ ص - ١)$

$= ٢ ص^{٣} - ص^{٢} - ٤ ص^{٢} + ٢ ص - ١٠ ص + ٥$

$= ٢ ص^{٣} - ٥ ص^{٢} - ٨ ص + ٥$

٢ أوجِد مربّع كلّ حدّانية في ما يلي :

أ) $س - ٣$

$= (س - ٣)^{٢}$

$= س^{٢} - ٦ س + ٩$

ب) $٢ ص + ٣ س^{٢}$

$(٢ ص + ٣ س^{٢})^{٢}$

$= ٤ ص^{٢} + ١٢ ص س^{٢} + ٩ س^{٤}$

٣ أوجِد ناتج ما يلي :

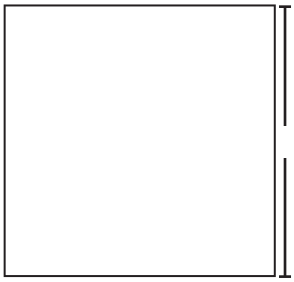
أ) $(٣ هـ - ٢ م)^{٢}$

$= ٩ هـ^{٢} - ١٢ هـ م + ٤ م^{٢}$

ب) $(٩ - ك)^{٢}$

$= ٨١ - ١٨ ك + ك^{٢}$

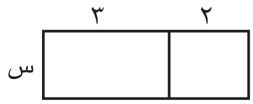
في البنود (٤ - ٦) ، اِختر الإجابة الصحيحة .



٤ مساحة المربّع المقابِل بالوحدات المربّعة هي :

أ ٢ س + ٢
ب س^{٢} + ٢ س + ١
ج س^{٢} + س + ١
د س^{٢} + ١

٥ المقدار الجبري الذي يمثّل مساحة الشكل أدناه بالوحدات المربّعة هو :



أ ٢ + ٣ س
ب ٢س + ٣
ج ٥ + س
د ٥ س

٦ المقدار ٥ (س - ص) - (٥ س - ٥ ص) يساوي :

أ ١٠ س - ١٠ ص
ب صفر
ج ١٠ س
د - ١٠ ص

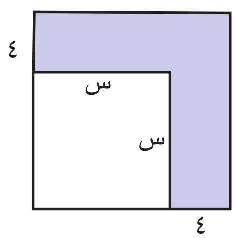
مهارات تفكير عليا :

في البنود (٧ ، ٨) ، اِختر الإجابة الصحيحة .

٧ إذا كانت أ^{٢} = ١٦ ، ب^{٢} = ٩ ، فإنّ أكبر قيمة للمقدار (أ - ب)^{٢} =

أ ١
ب ٢٥
ج ٤٩
د ٧

٨ في الشكل المقابِل ، مربّع طول ضلعه س وحدة طول ،
تمّت زيادة طول كلّ ضلع من أضلاعه
بمقدار ٤ وحدات كما هو موضّح في الشكل .
أوجِد مساحة المنطقة المظلّلة بدلالة س .



مساحة المنطقة المظللة = مساحة المربع الأكبر ـ مساحة المربع الأصغر.
= (س + ٤)^{٢} ـ س^{٢}
= س^{٢} + ٨ س + ١٦ ـ س^{٢}
= ٨ س + ١٦ وحدة مربعة .

٦ - ٥ قسمة كثيرة حدود على حدّ جبري
Dividing Plynomials by Algebraic Terms

سوف تتعلّم : قسمة حدّ جبري على حدّ جبري آخر ، وقسمة كثيرة حدود على حدّ جبري .

اِستكشِف

شاركت إدارة المدرسة متعلّميها فرحة الاحتفال باليوم الوطني ويوم التحرير ، بوضع شاشة عرض مستطيلة الشكل أمام مدخل الإدارة .

إذا كانت مساحة الشاشة هي (١٠ س^{٢} + ٤ س) وحدة مربّعة وعرضها هو ٢س وحدة طول ، فأوجِد طول الشاشة .

مساحة المنطقة المستطيلة = الطول × العرض

باستخدام قسمة الأعداد النسبية وما تعلّمته من قوانين الأسس ، أكمل ما يلي :

طول الشاشة = $\frac{\text{مساحة الشاشة}}{\text{عرض الشاشة}}$

= $\frac{\text{١٠ س}^{٢}\text{ + ٤ س}}{\text{٢ س}}$ = $\frac{\text{١٠ س}^{٢}}{\text{٢ س}}$ + $\frac{\text{٤ س}}{\text{٢ س}}$

= ٥ س + ٢ وحدة طول

تذكَّر

$\frac{أ^{م}}{أ^{ن}} = أ^{م - ن}$

حيث أ ≠ ٠ ، م ، ن ∈ ص

ماذا تلاحظ ؟

عند قسمة كثيرة حدود على حدّ جبري ، نقسم كلّ حدّ من حدود كثيرة الحدود على هذا الحدّ الجبري .

ملاحظة : المقام أينما وُجد لا يساوي صفرًا .

مثال (١) :

أوجِد ناتج ما يلي :

① $\frac{\text{٤ س}^{٥}\text{ص}^{٣}}{\text{٢ ص}^{٣}\text{س}^{٢}}$ = ٢ س^{٣}

② $\frac{\text{١٢ س}^{٢}\text{ص}^{٣}\text{ + ٦ س ص}}{\text{٣ س ص}}$

= $\frac{\text{١٢ س}^{٢}\text{ص}^{٣}}{\text{٣ س ص}}$ + $\frac{\text{٦ س ص}}{\text{٣ س ص}}$ اِقسم كلّ حدّ على المقسوم عليه

= ٤ س ص^{٢} + ٢ بسِّط

دورك الآن (١)

أوجِد ناتج ما يلي :

١) $\frac{\text{٣ م}^{٢}\text{ ل}^{٦}}{\text{٢٧ م}^{٨}\text{ ل}} = \frac{\text{ل}^{٥}}{\text{٩ م}^{٦}}$

٢) $\frac{\text{٢٠ م ن}^{٣}\text{ – ٤ م ن}}{\text{٤ م ن}}$

$= \frac{\text{٢٠ م ن}^{٣}}{\text{٤ م ن}} - \frac{\text{٤ م ن}}{\text{٤ م ن}}$

$= \text{٥ ن}^{٢} - ١$

مثال (٢):

اِقسم (٨ س^{٣} + ٢ س^{٢} – ١٢ س) على ٢ س

الحلّ :

$\frac{\text{٨ س}^{٣}\text{ + ٢ س}^{٢}\text{ – ١٢ س}}{\text{٢ س}} = \frac{\text{٨ س}^{٣}}{\text{٢ س}} + \frac{\text{٢ س}^{٢}}{\text{٢ س}} - \frac{\text{١٢ س}}{\text{٢ س}}$ اِقسم كلّ حدّ على المقسوم عليه

$= \text{٤ س}^{٢}\text{ + س – ٦}$ بسِّط

دورك الآن (٢)

اِقسم (٧ س^{٥} – ٩ س^{٣} + ٢ س^{٢}) على س^{٢}

$= \frac{\text{٧ س}^{٥}}{\text{س}^{٢}} - \frac{\text{٩ س}^{٣}}{\text{س}^{٢}} + \frac{\text{٢ س}^{٢}}{\text{س}^{٢}}$

$= \text{٧ س}^{٣}\text{ – ٩ س + ٢}$

عبّر عن فهمك

هل ناتج $\frac{\text{١٥ س}^{٢}\text{ + ١٠ س – ٥}}{\text{٥ س}}$ يمثّل حدودية ؟ فسِّر إجابتك .

لا، لأنه يحتوي على $\frac{١}{\text{س}}$ (المتغير مرفوع لأس سالب)

تمارين ذاتية :

١) بسِّط كلًّا ممّا يلي : (حيث المقام لا يساوي صفرًا أينما وُجد) .

أ) $\frac{\text{س}^{٦}}{\text{س}^{٤}} = \text{س}^{٢}$

ب) $\frac{\text{١٠ س}^{٤}}{\text{٥ س}^{٢}} = \text{٢ س}^{٢}$

ج) $\frac{\text{– ٣ ص}^{٣}}{\text{٣ ص}^{٣}} = -١$

د) $\frac{\text{٢٨ ص}^{٥}}{\text{٧ ص}^{٢}} = \text{٤ ص}^{٣}$

٢ اِقسم ٨ س^{٢} ص^{٤} + ١٦ س^{٤} ص^{٥} − ٣٦ ص^{٤} على ٢ س^{٢} ص^{٣}

$= \frac{\text{٨ س}^{٢}\text{ص}^{٤} + \text{١٦ س}^{٤}\text{ص}^{٥} - \text{٣٦ ص}^{٤}}{\text{٢ س}^{٢}\text{ص}^{٣}}$

$= \frac{\text{٨ س}^{٢}\text{ص}^{٤}}{\text{٢ س}^{٢}\text{ص}^{٣}} + \frac{\text{١٦ س}^{٤}\text{ص}^{٥}}{\text{٢ س}^{٢}\text{ص}^{٣}} - \frac{\text{٣٦ ص}^{٤}}{\text{٢ س}^{٢}\text{ص}^{٣}}$

$= \text{٤ ص} + \text{٨ س}^{٢}\text{ص}^{٢} - \text{١٨}\frac{\text{ص}}{\text{س}^{٢}}$

٣ اِقسم ٩ هـ^{٣} و^{٥} − ٢٧ هـ^{٢} و^{٤} + ٥٤ هـ^{٤} و^{٢} على ٣ هـ^{٣} و^{٥}

$= \frac{\text{٩ هـ}^{٣}\text{و}^{٥}}{\text{٣ هـ}^{٣}\text{و}^{٥}} - \frac{\text{٢٧ هـ}^{٢}\text{و}^{٤}}{\text{٣ هـ}^{٣}\text{و}^{٥}} + \frac{\text{٥٤ هـ}^{٤}\text{و}^{٢}}{\text{٣ هـ}^{٣}\text{و}^{٥}}$

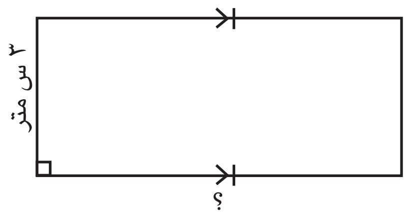
$= \text{٣} - \frac{\text{٩}}{\text{هـ و}} + \frac{\text{١٨ هـ}}{\text{و}^{٣}}$

٤ أوجِد ناتج ما يلي في أبسط صورة : (حيث س ≠ صفرًا)

$\frac{\text{٥ س}^{٣}\text{ص}^{٤} + \text{٣ س}^{٦}\text{ص}^{٧} - \text{١٥ س}}{\text{١٥ س}} = \frac{\text{٥ س}^{٣}\text{ص}^{٤}}{\text{١٥ س}} + \frac{\text{٣ س}^{٦}\text{ص}^{٧}}{\text{١٥ س}} - \frac{\text{١٥ س}}{\text{١٥ س}}$

$= \frac{\text{١}}{\text{٣}}\text{س}^{٢}\text{ص}^{٤} + \frac{\text{١}}{\text{٥}}\text{س}^{٥}\text{ص}^{٧} - \text{١}$

٥ مساحة المنطقة المستطيلة في الشكل المرسوم هي (٩ س^{٢} + ٣ س) مترًا مربّعًا ، إذا كان عرض هذا المستطيل هو ٣ س مترًا ، فأوجِد طول هذا المستطيل .



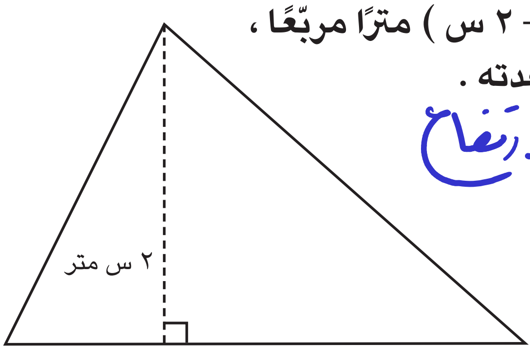
(٩ س^{٢} + ٣ س) ÷ ٣ س

$= \frac{\text{٩ س}^{٢}}{\text{٣ س}} + \frac{\text{٣ س}}{\text{٣ س}}$

= ٣ س + ١

مهارات تفكير عليا :

٦ في الشكل المقابِل مساحة المنطقة المثلّثة هي (٤ س^{٢} + ٢ س) مترًا مربّعًا ، إذا كان ارتفاع هذا المثلّث ٢ س مترًا ، فأوجِد طول قاعدته .



مساحة المثلث = $\frac{\text{١}}{\text{٢}}$ × القاعدة × الارتفاع

∴ (٤ س^{٢} + ٢ س) ÷ ٢ س

$= \frac{\text{٤ س}^{٢}}{\text{٢ س}} + \frac{\text{٢ س}}{\text{٢ س}}$ = ٢ س + ١

∴ نصف طول القاعدة = ٢ س + ١

∴ طول القاعدة = ٢(٢ س + ١) = ٤ س + ٢

تقويم الوحدة التعليمية السادسة
Unit Six Assessment

أوّلًا : البنود المقالية

١ بسِّط كلًّا ممّا يلي : (المقام أينما وُجد ≠ صفرًا)

(أ) $(- ٣ \text{ س ص}) \left(\text{س}^{٢} \text{ ص}^{٣} \right)^{٤} =$

$= (-٣ \text{ س ص})(\text{س}^{٨} \text{ ص}^{١٢})$

$= -٣ \text{ س}^{٩} \text{ ص}^{١٣}$

(ب) $\frac{\text{ع}^{٩}}{\text{ع}^{٢}} = \text{ع}^{٧}$

(ج) $\frac{-٣٦ \text{ س}^{٢} \text{ ص}^{٢}}{٩ \text{ س}^{٣} \text{ ع}} = - \frac{٤ \text{ ص}^{٢}}{\text{س ع}}$

(د) $\left(\frac{-٢ \text{ م}^{٢}}{٣ \text{ ب}} \right)^{٥} = \frac{-٣٢ \text{ م}^{١٠}}{٢٤٣ \text{ ب}^{٥}}$

٢ أُحسب قيمة كلّ من كثيرات الحدود التالية عندما س = - ٢

(أ) $٣ \text{ س}^{٣} - ٢ \text{ س} + ٤ = ٣ \times (-٢) - ٢ \times (-٢) + ٤ = -٦ + ٤ + ٤ = ٢$

(ب) $٢ \text{ س}^{٢} - \text{س} + ٧ = ٢ \times (-٢)^{٢} - (-٢) + ٧ = ٨ + ٢ + ٧ = ١٧$

(ج) $\frac{١}{٨} \text{ س}^{٤} + \frac{٣}{٢} \text{ س} = \frac{١}{٨}(-٢)^{٤} + \frac{٣}{٢}(-٢) = ٢ - ٣ = -١$

٣ اِجمع كثيرات الحدود الآتية :

(أ) $\text{س}^{٢} + ٦ \text{ س} - ٤$ ، $٥ \text{ س} - \text{س}^{٢} - ٤$

$\text{س}^{٢} + ٦ \text{ س} - ٤$

$- \text{س}^{٢} + ٥ \text{ س} - ٤$

$= ١١ \text{ س} - ٨$

(ب) $٢ \text{ ع}^{٣} - ٤ \text{ ع}^{٢} + ٩$ ، $\text{ع}^{٣} + ٣ \text{ ع}^{٢} - ٩$ ، $٥ \text{ ع}^{٣} - \text{ع}^{٢}$

$٢ \text{ ع}^{٣} - ٤ \text{ ع}^{٢} + ٩$

$\text{ع}^{٣} + ٣ \text{ ع}^{٢} - ٩$

$٥ \text{ ع}^{٣} - \text{ع}^{٢}$

$٨ \text{ ع}^{٣} - ٢ \text{ ع}^{٢}$

٤ اِطرح (٢ ص^{٥} - ٣ ص^{٤} + ٢ ص^{٢} - ٢) من (-٣ ص^{٤} + ٣ ص^{٥} - ٣)

$(٣ \text{ ص}^{٥} - ٣ \text{ ص}^{٤} - ٣) - (٢ \text{ ص}^{٥} - ٣ \text{ ص}^{٤} + ٢ \text{ ص}^{٢} - ٢)$

$= ٣ \text{ ص}^{٥} - ٣ \text{ ص}^{٤} - ٣ - ٢ \text{ ص}^{٥} + ٣ \text{ ص}^{٤} - ٢ \text{ ص}^{٢} + ٢$

$= \text{ص}^{٥} - ٢ \text{ ص}^{٢} - ١$

٥ اِطرح (س^{٣} ص + س ص^{٢} + ٧) من (٤ س ص^{٢} + ٣ س^{٣} ص + ٧)

(٤ س ص^{٢} + ٣ س^{٣} ص + ٧) − (س^{٣} ص + س ص^{٢} + ٧)

= ٤ س ص^{٢} + ٣ س^{٣} ص + ٧ − س^{٣} ص − س ص^{٢} − ٧

= ٣ س ص^{٢} + ٢ س^{٣} ص

٦ أوجِد ناتج كلّ ممّا يلي :

أ (س + ٣) (س − ٩) = س^{٢} − ٩ س + ٣ س − ٢٧ = س^{٢} − ٦ س − ٢٧

ب مربّع (ص^{٢} + ١) = (ص^{٢})^{٢} + ٢ × ص^{٢} × ١ + (١)^{٢} = ص^{٤} + ٢ ص^{٢} + ١

ج (٢ س + ٣) (٥ س^{٢} − ٤ س − ٧) = ١٠ س^{٣} − ٨ س^{٢} − ١٤ س + ١٥ س^{٢} − ١٢ س − ٢١

= ١٠ س^{٣} + ٧ س^{٢} − ٢٦ س − ٢١

٧ اِقسم ٤ س^{٢} ص^{٣} + ١٢ س^{٥} ص^{٤} + ٥٤ س^{٣} ص^{٤} على ٣ س^{٢} ص^{٣} .

= $\frac{\text{٤ س}^{٢}\text{ ص}^{٣}}{\text{٣ س}^{٢}\text{ ص}^{٣}}$ + $\frac{\text{١٢ س}^{٥}\text{ ص}^{٤}}{\text{٣ س}^{٢}\text{ ص}^{٣}}$ + $\frac{\text{٥٤ س}^{٣}\text{ ص}^{٤}}{\text{٣ س}^{٢}\text{ ص}^{٣}}$

= $\frac{٤}{٣}$ + ٤ س^{٣} ص + ١٨ س ص

٨ اِقسم ١٥ هـ^{٢} ل^{٣} − ١٢ هـ^{٣} ل + ٩ هـ^{٤} ل^{٤} على ٦ هـ^{٢} ل .

= $\frac{\text{١٥ هـ}^{٢}\text{ ل}^{٣}}{\text{٦ هـ}^{٢}\text{ ل}}$ − $\frac{\text{١٢ هـ}^{٣}\text{ ل}}{\text{٦ هـ}^{٢}\text{ ل}}$ + $\frac{\text{٩ هـ}^{٤}\text{ ل}^{٤}}{\text{٦ هـ}^{٢}\text{ ل}}$

= $\frac{٥}{٢}$ ل^{٢} − ٢ هـ + $\frac{٣}{٢}$ هـ^{٢} ل^{٣}

٩ منطقة مستطيلة مساحتها (٤ س^{٤} + ٦ س^{٢} − ٤ س) وحدة مربّعة ، وعرضها ٢ س وحدة طول .
أوجِد طولها .

(٤ س^{٤} + ٦ س^{٢} − ٤ س) ÷ ٢ س

= $\frac{\text{٤ س}^{٤}}{\text{٢ س}}$ + $\frac{\text{٦ س}^{٢}}{\text{٢ س}}$ − $\frac{\text{٤ س}}{\text{٢ س}}$

= ٢ س^{٣} + ٣ س − ٢

ثانيًا : البنود الموضوعية

في البنود (١ - ٨) ظلِّل [أ] إذا كانت العبارة صحيحة ، وظلِّل [ب] إذا كانت العبارة غير صحيحة .

١ ناتج $\left(\frac{٣\,س^{٤}}{٦\,س^{٤}}\right)^{٠} = ١$ ، حيث س $\neq$ ٠	أ	ب
٢ ٤ س - $\frac{١}{س}$ + ٥ $س^{٣}$ هي كثيرة حدود	أ	ب
٣ ناتج جمع ٦ $ص^{٣}$ ، ٢ $ص^{٤}$ هو ٨ $ص^{٧}$	أ	ب
٤ - ١٢ $ل^{٢}$ $ع^{٩}$ ، $\frac{١}{٥}$ $ل^{-٢}$ $ع^{٩}$ ، $ل^{٢}$ $ع^{-٩}$ هي حدود متشابهة	أ	ب
٥ ٠,٢٥ $س^{٣}$ ، $\frac{١}{٤}$ $س^{٣}$ هما حدّان متساويان	أ	ب
٦ ناتج طرح ٥ $س^{٢}$ من $س^{٢}$ هو ٤ $س^{٢}$	أ	ب
٧ س × س = ٢ س	أ	ب
٨ $٥^{-٢} \times ٥ = \frac{١}{٥}$	أ	ب

في البنود (٩- ٢١) لكلّ بند أربعة اختيارات ، واحد فقط منها صحيح ، ظلِّل الإجابة الصحيحة :

٩ المعكوس الجمعي لكثيرة الحدود ٤ $ص^{٤}$ - ٢ $ص^{٢}$ + ٥ هو :

أ ٤ $ص^{٤}$ + ٢ $ص^{٢}$ + ٥   ب - ٤ $ص^{٤}$ - ٢ $ص^{٢}$ - ٥

ج -٤ $ص^{٤}$ + ٢ $ص^{٢}$ - ٥   د ٤ $ص^{٤}$ - ٢ $ص^{٢}$ + ٥

---

١٠ ٢ س (٣ س + ٤) =

أ ٦ $س^{٢}$ + ٤   ب ٦ س + ٨   ج ٦ $س^{٢}$ + ٨ س   د ٦ س + ٨ س

---

١١ $\frac{٨\,س^{٣} + ٤\,س}{٤\,س}$ = ، (حيث س $\neq$ صفر)

أ ٢ $س^{٢}$ + ١   ب ٢ $س^{٢}$

ج ٢ $س^{٢}$ + س   د $\frac{١}{٢\,س^{٢}}$

١٢ ناتج جمع ٣ س^{٤} + ٤ س^{٣} − ٣ س + ٢ ، ٢ س^{٢} + س^{٣} − ٤ س − ١ يساوي :

أ ٥ س^{٣} + ٤ س^{٢} − س + ٢

ب ٣ س^{٤} + ٥ س^{٣} − ٧ س + ١

ج ٣ س^{٤} + ٣ س^{٣} − ٧ س + ١

د ٣ س^{٤} + ٥ س^{٣} + ٢ س^{٢} − ٧ س + ١

١٣ ناتج طرح (٣ س − ٤ ص) من (٣ س + ٤ ص) :

أ ٦ س − ٨ ص

ب ٦ س + ٨ ص

ج ٨ ص

د ٦ س

١٤ إذا كان $\left(\frac{س^{٦}}{٢ س^{٢}}\right)^{م}$ = ١ ، فإنّ م = ، (حيث س ≠ صفر)

أ صفر

ب ١

ج $\frac{س^{٤}}{٢}$

د −١

١٥ مربّع الحدّانية س + ٢ هو :

أ س^{٢} + ٤

ب س^{٢} + ٤ س + ٤

ج س^{٢} + ٢ س + ٤

د س^{٢} − ٤ س + ٤

١٦ ناتج جمع ٣ س^{٢} − ٥ س + ١ ، ٥ س^{٢} − ٣ س يساوي :

أ ٨ س^{٢} − ٨ س + ١

ب ٦ س^{٢} − ١٠ س + ١

ج ٨ س^{٢} − ٨ س

د ١

١٧ $\frac{٥ س^{٣} ص^{٢}}{١٥ س}$ = ، (حيث س ≠ صفر)

أ ٣ س^{٢} ص^{٢}

ب ٣ س^{٢} ص

ج ٥ س^{٢} ص

د $\frac{١}{٣}$ س^{٢} ص^{٢}

١٨ عدد الحدود في كثيرة الحدود الناتجة من ضرب (س + ٣) (س + ٤) هو :

أ ١ ب ٢ **ج ٣** د ٤

١٩ ناتج $(١٠^{٣})^{٢} \times ١٠^{-٤}$ هو :

أ $١٠^{-١}$ **ب** $١٠^{٢}$ ج ١٠ د $١٠^{١٠}$

٢٠ ناتج $٨,٢ \times ١٠^{٩} \div ٤,١ \times ١٠^{٦}$ هو :

أ ٢×١٠^{٩} **ب** ٢×١٠^{٣} ج ٢×١٠^{٢} د ٢×١٠^{١٥}

٢١ غرفة طعام مستطيلة الشكل قرّر ربّ الأسرة زيادة عرضها ، اِفترِض أنّ عرض الغرفة زاد بمقدار ٨ أمتار ، إذا كانت الأبعاد كما هي موضَّحة في المخطط ، فإنّ المساحة الكلّية لغرفة الطعام الجديدة بالمتر المربّع تساوي :

أ ٨ + س

ب ٨ ص + س ص

ج ٨ س ص

د ٨ ص + س

ص

س ٨