هل أنت مستعدّ؟

١ إذا كانت س = { ٢ ، ٣ ، ٤ }

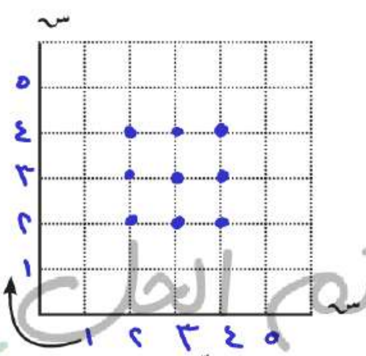
(أ) أوجِد عدد عناصر س × س .

٣ × ٣ = ٩

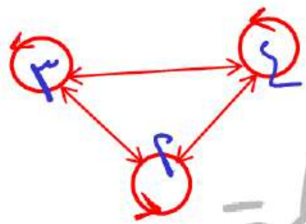
(ب) أُكتب س × س بذكر العناصر .

س × س = { (٢،٢) ، (٢،٣) ، (٢،٤) ، (٣،٢) ، (٣،٣) ، (٣،٤) ، (٤،٢) ، (٤،٣) ، (٤،٤) }

(ج) مثّل س × س بمخطّط بياني وآخر سهمي .



مخطّط بياني



مخطّط سهمي

٢ فيما يلي مجموعة من العلاقات المعرَّفة على س = { ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ }
أُكتب كلّ علاقة بذكر عناصرها :

(أ) $ع_1$ = { (أ ، ب) : أ ، ب ∈ س ، أ + ب = ٨ }

$ع_1$ = { (٢،٦) ، (٣،٥) ، (٦،٢) ، (٥،٣) }

(ب) $ع_2$ = { (أ ، ب) : أ ، ب ∈ س ، أ = ب }

$ع_2$ = { (٢،٢) ، (٣،٣) ، (٤،٤) ، (٥،٥) ، (٦،٦) }

(ج) $ع_3$ = { (أ ، ب) : أ ، ب ∈ س ، أ = ٢ ب }

$ع_3$ = { (٤،٢) ، (٦،٣) }

(د) $ع_4$ = { (أ ، ب) : أ ، ب ∈ س ، أ = $\sqrt{ب}$ }

$ع_4$ = { (٢،٤) }

(هـ) $ع_5$ = { (أ ، ب) : أ ، ب ∈ س ، أ > ب }

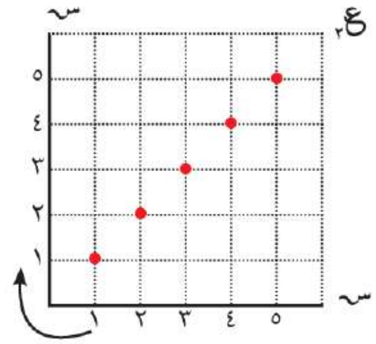
$ع_5$ = { (٣،٢) ، (٤،٢) ، (٤،٣) ، (٥،٢) ، (٥،٣) ، (٥،٤) ، (٦،٥) ، (٦،٢) ، (٦،٣) ، (٦،٤) }

٣ أُكتب العلاقات $ع_1$ ، $ع_2$ على سـ التي يمثّلهما كلّ من المخطّطَين السهمي والبياني الآتيَين ، بذكر العناصر ثمّ بذكر الصفة المميِّزة . حيث سـ = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ }

$ع_1$

مخطّط سهمي

$ع_2$



مخطّط بياني

$ع_1$ = {(١،٢)، (٢،٣)، (٣،٤)، (٤،٥)} ← $ع_1$ = {(أ،ب) : أ،ب ∈ سـ ، أ = ب - ١}

$ع_2$ = {(١،١)، (٢،٢)، (٣،٣)، (٤،٤)، (٥،٥)} ← $ع_2$ = {(أ،ب) : أ،ب ∈ سـ ، أ = ب}

٤ أوجِد قيمة ٦س + ٤ إذا كانت س = ١١

٦×١١ + ٤ = ٦٦ + ٤ = ٧٠

٥ أوجِد قيمة ٢س^{٢} - ١ إذا كانت س = -٣

٢×(-٣)^{٢} - ١ = ٢×٩ - ١

= ١٨ - ١ = ١٧

٦ أوجِد قيمة ١ - ٢س إذا كانت س = -٤

١ - ٢×(-٤) = ١ + ٨ = ٩

٧ مثِّل كلّ نقطة ممّا يلي في المستوى الإحداثي :

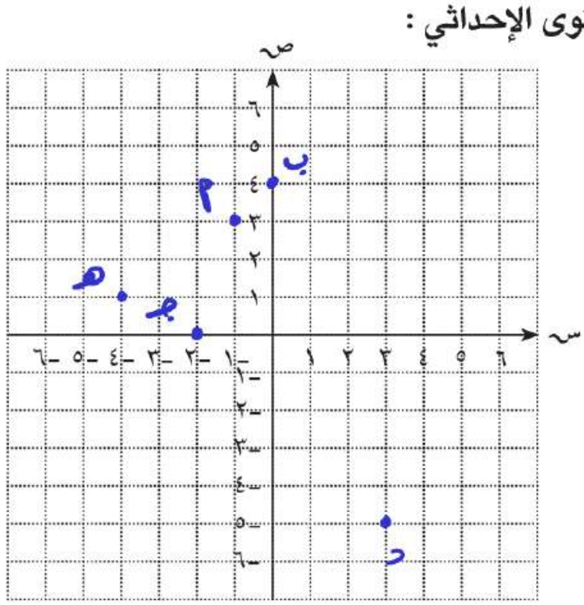
أ (-١ ، ٣)

ب (٠ ، ٤)

جـ (-٢ ، ٠)

د (٣ ، -٥)

هـ (-٤ ، ١)



٥ - ١ العلاقة وخواصّها
The Relation and its Properties

سوف تتعلّم : خواصّ العلاقة على مجموعة .

العبارات والمفردات :

علاقة انعكاسية	Reflexive Relation	علاقة متعدّية	Transitive Relation
علاقة متناظرة	Symmetric Relation	علاقة تكافؤ	Equivalence Relation

تعلّمت سابقًا أنّ : العلاقة ع على المجموعة سـ هي مجموعة جزئية من حاصل الضرب الديكارتي سـ × سـ ، أي أنّ : ع ⊆ سـ × سـ .

كما تمتلك بعض هذه العلاقات مجموعة من الخواصّ التي يعتمد عليها في التصنيف والتحليل وهي الانعكاسية ، المتناظرة ، المتعدّية والتكافؤ .

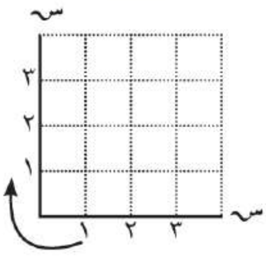
أوّلًا : خاصّية الانعكاس

تظهر العلاقة الانعكاسية بشكل طبيعي في حياتنا اليومية والأنظمة من حولنا .
ومن استخدامات العلاقة الانعكاسية في الحياة الواقعية :

في التعليم وتقييم الذات : عندما يقيّم المتعلّم نفسه (تقييم ذاتي) ، فالعلاقة هنا بين الشخص ونفسه .

كُلّ وناقِش (١)

لتكن سـ = { ١ ، ٢ ، ٣ }



١ **مثِّل الحاصل الديكارتي سـ × سـ بمخطّط بياني .**

٢ **أُكتب ع١ علاقة « يساوي » على سـ بذكر العناصر .**

ع١ = {(١،١)، (١،٢)، (١،٣)، (٢،١)، (٢،٢)، (٢،٣)، (٣،١)، (٣،٢)، (٣،٣)}

٣ **أُكتب ع٢ = { (أ ، ب) : أ ، ب ∈ سـ ، أ عامل من عوامل ب } بذكر العناصر .**

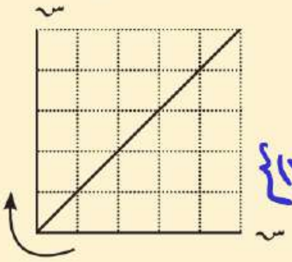
ع٢ = {(١،١)، (١،٢)، (٢،٢)، (١،٣)، (٣،٣)}

تذكَّر

- الحاصل الديكارتي على المجموعة سـ هو سـ × سـ = { (أ ، ب) : أ ، ب ∈ سـ }

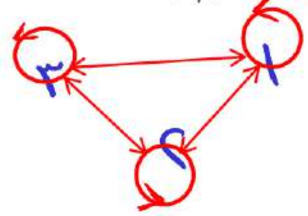
لاحِظ أنّ

في المخطّط البياني (Graph) الذي يمثّل العلاقة بين عناصر مجموعة ، يُسمّى « القطر » الذي يربط كلّ عنصر بنفسه بـ : « **القطر الرئيسي** » .

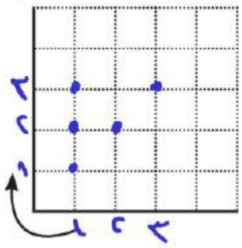


بشرط أن يكون ترتيب العناصر على المحورَين هو نفسه .

٤ مثّل $ع_١$ بمخطّط سهمي .



٥ مثّل $ع_٢$ بمخطّط بياني .



لاحِظ أنّ :

١ ∈ سـ ، (١ ، ١) ∈ $ع_١$

٢ ∈ سـ ، (٢ ، ٢) ∈ $ع_١$

٣ ∈ سـ ، (٣ ، ٣) ∈ $ع_١$

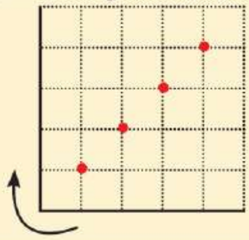
وبالمثل في العلاقة $ع_٢$.

إذًا ، **كلّ** عنصر من عناصر المجموعة سـ **ارتبط بنفسه** في العلاقة ع .

نسمّي مثل هذه العلاقة علاقة « **انعكاسية** » .

لاحِظ أنّ

تكون العلاقة انعكاسية إذا شمل المخطّط البياني الذي يمثّلها جميع العناصر الواقعة على القطر الرئيسي.



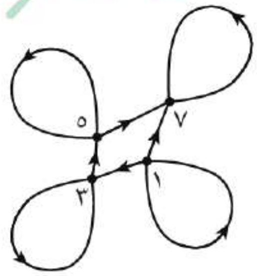
لاحِظ أنّ

تكون العلاقة انعكاسية إذا كان كلّ عنصر من عناصر سـ في المخطّط السهمي يخرج منه سهم ويعود إلى نفسه مكوِّنًا ما يُسمّى « عقدة » .

تُسمّى العلاقة ع المعرَّفة على المجموعة سـ علاقة انعكاسية
إذا وفقط إذا كان لكلّ ا ∈ سـ ، يكون (ا ، ا) ∈ ع .

مثال (٢) :

المخطّطات السهمية الآتية ، تمثّل علاقات على سـ حيث سـ = { ١ ، ٣ ، ٥ ، ٧ }
اِختبِر ما إذا كانت كلّ من $ع_١$ ، $ع_٢$ علاقات انعكاسية أم لا ، مع ذكر السبب في كلّ حالة ، ممّا يلي :



المخطّط السهمي للعلاقة $ع_١$

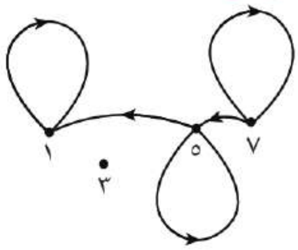
الحلّ :

$ع_١$ = { (١ ، ١) ، (١ ، ٣) ، (١ ، ٧) ، (٣ ، ٣) ،
(٣ ، ٥) ، (٥ ، ٥) ، (٥ ، ٧) ، (٧ ، ٧) }

∵ ١ ∈ سـ ، (١ ، ١) ∈ $ع_١$ ،
٣ ∈ سـ ، (٣ ، ٣) ∈ $ع_١$ ،
٥ ∈ سـ ، (٥ ، ٥) ∈ $ع_١$ ،
٧ ∈ سـ ، (٧ ، ٧) ∈ $ع_١$

∴ $ع_١$ علاقة انعكاسية

لأنّ لكلّ ا ∈ سـ ، يكون (ا ، ا) ∈ $ع_١$



المخطّط السهمي للعلاقة $ع_٢$

الحلّ :

$ع_٢$ = { (١ ، ١) ، (٥ ، ٥) ، (٧ ، ٧) ،
(٧ ، ٥) ، (٥ ، ١) }

$ع_٢$ علاقة ليست انعكاسية

لأنّ ٣ ∈ سـ ، ولكن (٣ ، ٣) ∉ $ع_٢$

ملاحظة :

- **للحكم على أنّ العلاقة انعكاسية ، يلزم التحقّق من أنّ كلّ عنصر من عناصر المجموعة يرتبط بنفسه في العلاقة .**
- **للحكم على أنّ العلاقة ليست انعكاسية يكفي وجود عنصر واحد من عناصر المجموعة لم يرتبط بنفسه في العلاقة .**

مثال (٢) :

إذا عُلم أنّ س = { ١ ، -١ ، ٢ ، -٢ ، ٤ ، -٤ } .

أ) أُكتب العلاقة ع المعرَّفة على س بذكر العناصر حيث ع = { (ا ، ب) : ا ، ب ∈ س ، ا = ب٢ }

ب) إختبِر ما إذا كانت ع علاقة انعكاسية أم لا .

ج) أرسم المخطّط البياني الذي يمثّلها .

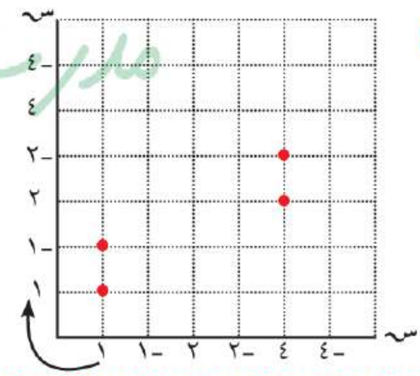
الحلّ :

أ) ع = { (١ ، ١) ، (١ ، -١) ، (٤ ، ٢) ، (٤ ، -٢) }

ب) ∵ -١ ∈ س ولكن (-١ ، -١) ∉ ع

∴ ع علاقة ليست انعكاسية

ج)



اِنتبِه

١ = (-١)٢

١ = (١)٢

٤ = (-٢)٢

٤ = (٢)٢

نلاحظ أنّ المخطّط البياني لم يشمل جميع عناصر القطر الرئيسي .

دورك الآن (١)

العلاقات الآتية معرَّفة على المجموعة س = { -١ ، ٠ ، ١ } . حدِّد أيًّا منها يمثّل علاقة انعكاسية مع ذكر السبب ، ثمّ مثّل ع١ بمخطّط بياني وع٢ بمخطّط سهمي :

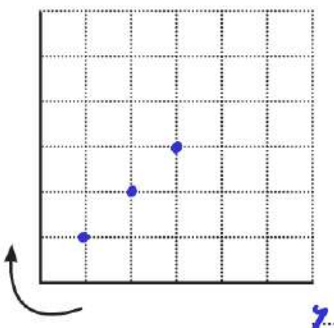
١) ع١ = { (-١ ، -١) ، (٠ ، ٠) ، (١ ، ١) ، (١ ، -١) }

∵ -١ ∈ س ، (-١ ، -١) ∈ ع١ ،

١ ∈ س ، (١ ، ١) ∈ ع١ ،

٠ ∈ س ، (٠ ، ٠) ∈ ع١

∴ ع١ علاقة انعكاسية لأنّ لكلّ ا ∈ س ، يكون (ا ، ا) ∈ ع١



٢ ع٢ = { (٠ ، ٠) ، (-١ ، ٠) ، (٠ ، -١) ، (١ ، ١) }

∵ -١ ∈ س ولكن (-١ ، -١) ∉ ع٢

∴ ع٢ علاقة ليست انعكاسية .

عبِّر عن فهمك (١)

لتكن س = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ } ، ع = { (أ ، ب) : أ ، ب ∈ س ، ب مضاعَف من مضاعَفات أ } ،
هل ع علاقة انعكاسية ؟ فسِّر إجابتك .

نعم ، لأنه أصغر مضاعف للعدد هو العدد نفسه

ثانيًا : خاصّية التناظر

تسكن نور في مدينة الأحمدي ، وذهبت يومًا لزيارة صديقتها في مدينة الكويت ثمّ عادت إلى منزلها بعد انتهاء الزيارة .
نلاحظ في هذا المثال أنّ الذهاب يلزمه عودة ، كما هو موضَّح في الشكل المقابِل ، مثل هذه العلاقات تُسمّى «علاقة متناظرة» .

حُلّ وناقِش (٢)

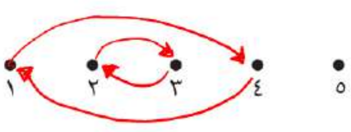
إذا كانت س = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ } ،
ع = { (أ ، ب) : أ ، ب ∈ س ، أ + ب = ٥ }

أ) أُكتب ع بذكر العناصر .

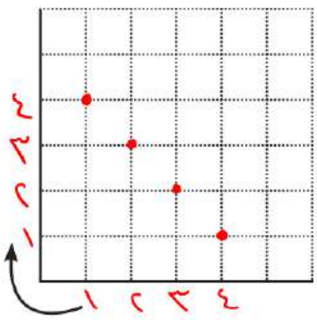
ع = { (٢ ، ٣) ، (٣ ، ٢) ، (١ ، ٤) ، (٤ ، ١) }

ب) مثِّل ع بمخطّط سهمي وآخر بياني .

مخطّط سهمي



مخطّط بياني



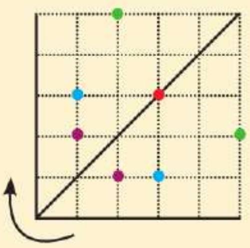
لاحِظ أنّ :

(١ ، ٤) ∈ ع ، (٤ ، ١) ∈ ع
(٢ ، ٣) ∈ ع ، (٣ ، ٢) ∈ ع
نسمّي مثل هذه العلاقة علاقة « **متناظرة** » .

لاحِظ أنّ

في المخطّط السهمي : تكون العلاقة متناظرة إذا وُجد سهم موجَّه من أ إلى ب ، فإنّه يلزم وجود سهم موجَّه من ب إلى أ .

لاحِظ أنّ



في المخطّط البياني : تكون العلاقة متناظرة إذا كان القطر الرئيسي هو محور التناظر بالنسبة إلى النقاط التي تمثّل العلاقة في المخطّط البياني .

تُسمّى العلاقة ع المعرَّفة على المجموعة س علاقة **متناظرة** إذا وفقط إذا كان

لكلّ (أ ، ب) ∈ ع ، فإنّ (ب ، أ) ∈ ع

مثال (٣) :

إذا كانت س = { -١ ، ٢ ، ٣ } ، فأيّ العلاقات التالية متناظرة على س مع ذكر السبب ؟

(أ) ع$_1$ = { (-١ ، ٢) ، (٢ ، ٣) ، (٢ ، -١) ، (٣ ، ٢) }

(ب) ع$_2$ = { (٣ ، ٣) }

(ج) ع$_3$ = { (-١ ، ٣) ، (٣ ، -١) ، (٢ ، ٣) } ، مثِّل ع$_3$ بمخطّط سهمي .

الحلّ :

(أ) العلاقة ع$_1$: (-١ ، ٢) ∈ ع$_1$ وأيضًا (٢ ، -١) ∈ ع$_1$

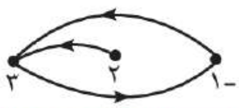
(٢ ، ٣) ∈ ع$_1$ وأيضًا (٣ ، ٢) ∈ ع$_1$

∴ ع$_1$ علاقة متناظرة لأنّ لكلّ (أ ، ب) ∈ ع$_1$ ، فإنّ (ب ، أ) ∈ ع$_1$

(ب) العلاقة ع$_2$: (٣ ، ٣) ∈ ع$_2$ وأيضًا (٣ ، ٣) ∈ ع$_2$

∴ ع$_2$ علاقة متناظرة لأنّ لكلّ (أ ، ب) ∈ ع$_2$ ، فإنّ (ب ، أ) ∈ ع$_2$

(ج) العلاقة ع$_3$ ليست متناظرة لأنّ (٢ ، ٣) ∈ ع$_3$ ولكن (٣ ، ٢) ∉ ع$_3$



عبِّر عن فهمك (٢)

هل كلّ علاقة انعكاسية على س هي علاقة متناظرة على س ؟ فسِّر إجابتك .

نعم ، لأنّ ∀ (أ ، ب) : أ ، ب ∈ س ، يوجد (أ ، أ) و (ب ، ب) ∈ ع

ملاحظة :

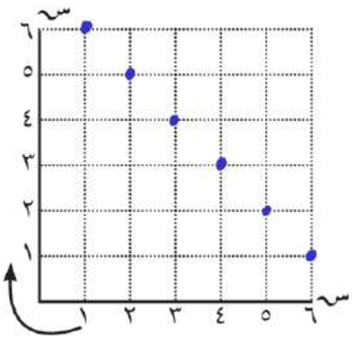
تكون العلاقة ع ليست متناظرة إذا وُجد (أ ، ب) ∈ ع ولكن (ب ، أ) ∉ ع (عنصر واحد على الأقلّ) .

دورك الآن (٢)

إذا كانت $س = \{١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦\}$ ، $ع_١$ ، $ع_٢$ علاقات معرَّفة على س :

$ع_١ = \{(أ ، ب) : أ ، ب \in س ، أ + ب = ٧\}$ ،

$ع_٢ = \{(أ ، ب) : أ ، ب \in س ، أ = \frac{١}{٢} ب\}$



(أ) أُكتب $ع_١$ بذكر العناصر ومثِّلها بمخطّط بياني ، ثمّ ابحث فيما إذا كانت $ع_١$ علاقة متناظرة أم لا مع ذكر السبب .

$ع_١ = \{(١ ، ٦) ، (٢ ، ٥) ، (٣ ، ٤) ،$
$(٤ ، ٣) ، (٥ ، ٢) ، (٦ ، ١)\}$

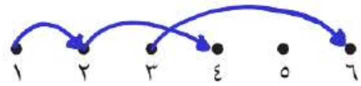
العلاقة $ع_١$: $(١ ، ٦) \in ع_١$ ، $(٦ ، ١) \in ع_١$ ،
$(٢ ، ٥) \in ع_١$ ، $(٥ ، ٢) \in ع_١$ ،
$(٣ ، ٤) \in ع_١$ ، $(٤ ، ٣) \in ع_١$

$\therefore$ $ع_١$ علاقة متناظرة لأنّ لكلّ $(أ ، ب) \in ع_١$ ، فإنّ $(ب ، أ) \in ع_١$

(ب) أُكتب $ع_٢$ بذكر العناصر ومثِّلها بمخطّط سهمي ، ثمّ ابحث فيما إذا كانت $ع_٢$ علاقة متناظرة أم لا مع ذكر السبب .

$ع_٢ = \{(١ ، ٢) ، (٢ ، ٤) ، (٣ ، ٦)\}$

$ع_٢$ علاقة ليست متناظرة لأنّ $(١ ، ٢) \in ع_٢$ ولكن $(٢ ، ١) \notin ع_٢$



عبِّر عن فهمك (٣)

يقول فايز : إذا كانت ع علاقة متناظرة ، فإنّ عدد عناصر العلاقة لا بدّ أن يكون عددًا زوجيًّا .

هل توافقه الرأي ؟ فسِّر إجابتك .

لا ، ممكن أن يكون عنصر وحيد مثل (١،١) وبالتالي تكون عدد فردي

ثالثًا : خاصّية التعدّي

إذا كانت منارة المسجد الحرام أطول من منارة المسجد النبوي ، ومنارة المسجد النبوي أطول من منارة المسجد الأقصى ، فإنّ منارة المسجد الحرام أطول من منارة المسجد الأقصى .

مثل هذه العلاقة تُسمّى علاقة « متعدّية » .

معلومة مفيدة :

عن أبي هريرة رضي الله عنه أنّ النبي ﷺ قال :

« لا تُشدّ الرحال إلّا إلى ثلاثة مساجد : المسجد الحرام ، ومسجدي هذا ، والمسجد الأقصى »

- رواه البخاري ومسلم .

ملاحظة :

- وجود العنصر (أ ، أ) في ع ، لا يؤثّر على خاصّية التعدّي .
- لبحث علاقة التعدّي ، نختبر كلّ الأزواج المرتَّبة المختلفة المساقط .
- إذا وُجد العنصر (أ ، ب) في ع ، ولم يوجد العنصر (ب ، جـ) في ع ، فلا يوجد ما ينفي شرط التعدّي .

مثال (٦) :

إذا كانت سـ = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ } ، ع علاقة معرَّفة على سـ حيث
ع = { (١ ، ٢) ، (٢ ، ٣) ، (١ ، ٣) ، (٣ ، ٤) ، (٤ ، ١) } ، فهل ع علاقة متعدّية ؟ ولماذا ؟

الحلّ :

(٢ ، ٣) ∈ ع و (٣ ، ٤) ∈ ع ، ولكن (٢ ، ٤) ∉ ع

∴ العلاقة ع ليست متعدّية .

ملاحظة :

تكون العلاقة ع ليست متعدّية إذا وُجد (أ ، ب) ∈ ع و (ب ، جـ) ∈ ع ، ولكن (أ ، جـ) ∉ ع .

عبِّر عن فهمك (٤)

إذا كانت سـ = { ١ ، ٣ ، ٥ ، ٦ } ، ع علاقة معرَّفة على سـ حيث ع = { (١ ، ٣) ، (٥ ، ٦) } .
ترى مريم أنّ العلاقة ع هي علاقة ليست متعدّية ، بينما ترى نورا أنّ ع علاقة متعدّية ،
أيّ منهما على صواب ؟ فسِّر إجابتك . نورا على صواب
لأنه عدم وجود (أ، ب) ∈ ع و (ب، جـ) ∈ ع هذا لا ينفي أنها علاقة متعدية

دورك الآن (٣)

إذا كانت سـ = { ٠ ، ٢ ، ٤ } ، ع علاقة معرَّفة على سـ حيث ع = { (٠ ، ٢) ، (٢ ، ٤) ، (٠ ، ٤) } .
هل ع علاقة متعدّية ؟ ولماذا ؟

∵ (٠ ، ٢) ∈ ع و (٢ ، ٤) ∈ ع ، (٠ ، ٤) ∈ ع

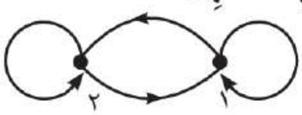
∴ ع علاقة متعدية

لأنّ لكلّ (أ ، ب) ∈ ع و (ب ، جـ) ∈ ع ، فإنّ (أ ، جـ) ∈ ع .

رابعًا : خاصّية التكافؤ

حُلّ وناقِش (٤)

لتكن سـ = { ١ ، ٢ } ، ع علاقة معرَّفة على سـ موضَّحة في المخطّط السهمي المقابِل :



أجِب عن الأسئلة الآتية : ع = {(١،١)، (٢،٢)، (٢،١)، (١،٢)}

(أ) هل ع علاقة انعكاسية ؟ ولماذا ؟

انعكاسية لأنه {(أ،ب) : أ، ب ∈ سـ، (أ،أ) ∈ ع

(ب) هل ع علاقة متناظرة ؟ ولماذا ؟

نعم، لأنه لكل (أ،ب) ∈ ع، فإن (ب،أ) ∈ ع

(ج) هل ع علاقة متعدّية ؟ ولماذا ؟

نعم، لأنه لكل (أ،ب) ∈ ع و (ب،جـ) ∈ ع، فإن (أ،جـ) ∈ ع

∴ العلاقة ع تُسمّى « **علاقة تكافؤ** » .

تكون العلاقة ع المعرَّفة على مجموعة سـ علاقة تكافؤ إذا كانت انعكاسية ومتناظرة ومتعدّية .

مثال (٧) :

إذا كانت سـ = { ١ ، ٢ ، ٣ } ، ع علاقة معرَّفة على سـ حيث

ع = { (أ ، ب) : أ ، ب ∈ سـ ، أ + ب = عددًا زوجيًّا }

(أ) أُكتب ع بذكر العناصر .

(ب) اِختبِر العلاقة ع من حيث كونها انعكاسية ، متناظرة ، متعدّية ، تكافؤ .

الحلّ :

(أ) ع = { (١ ، ١) ، (١ ، ٣) ، (٢ ، ٢) ، (٣ ، ١) ، (٣ ، ٣) }

(ب) ∵ ١ ∈ سـ ، (١ ، ١) ∈ ع

٢ ∈ سـ ، (٢ ، ٢) ∈ ع

٣ ∈ سـ ، (٣ ، ٣) ∈ ع

∴ ع علاقة انعكاسية ، لأنّ لكلّ أ ∈ سـ يكون (أ ، أ) ∈ ع

∵ (١ ، ٣) ∈ ع ، (٣ ، ١) ∈ ع

∴ ع علاقة متناظرة ، لأنّ لكلّ (أ ، ب) ∈ ع فإنّ (ب ، أ) ∈ ع

∵ (١ ، ٣) ∈ ع و (٣ ، ١) ∈ ع ، (١ ، ١) ∈ ع

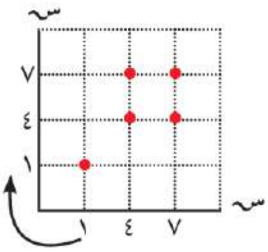
(٣ ، ١) ∈ ع و (١ ، ٣) ∈ ع ، (٣ ، ٣) ∈ ع

∴ ع علاقة متعدّية لأنّ لكلّ (أ ، ب) ∈ ع و (ب ، جـ) ∈ ع فإنّ (أ ، جـ) ∈ ع .

∴ ع علاقة تكافؤ لأنّها علاقة انعكاسية ومتناظرة ومتعدّية .

دورك الآن (٤)

إذا كانت س = {١ ، ٤ ، ٧} ، ع علاقة معرَّفة على س كما هو موضَّح في المخطّط البياني المقابِل ، فاختبِر ما إذا كانت ع علاقة تكافؤ .



ع = {(١ ، ١) ، (٤ ، ٤) ، (٤ ، ٧) ، (٧ ، ٤) ، (٧ ، ٧)}

∵ ١ ∈ س ، (١ ، ١) ∈ ع

٤ ∈ س ، (٤ ، ٤) ∈ ع

٧ ∈ س ، (٧ ، ٧) ∈ ع

∴ ع علاقة انعكاسية لأنه لكل أ ∈ س ، فإنه (أ ، أ) ∈ ع

∵ (٤ ، ٧) ∈ ع ، (٧ ، ٤) ∈ ع

∴ ع علاقة متناظرة لأنه لكل (أ ، ب) ∈ ع ، فإنه (ب ، أ) ∈ ع

∵ (٤ ، ٧) ∈ ع و (٧ ، ٤) ∈ ع فإنه (٤ ، ٤) ∈ ع

∴ ع علاقة متعدية لأنه لكل (أ ، ب) ∈ ع و (ب ، جـ) ∈ ع ، فإنه (أ ، جـ) ∈ ع

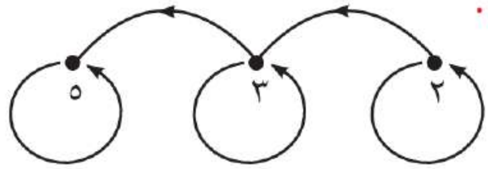
∴ ع علاقة تكافؤ لأنها علاقة انعكاسية ومتناظرة ومتعدية .

ملاحظة :

تكون العلاقة ع ليست تكافؤًا إذا لم تكن ع (انعكاسية أو متناظرة أو متعدّية) .

مثال (٨) :

في الشكل المقابِل : سـ = { ٢ ، ٣ ، ٥ } ، ع علاقة معرَّفة على سـ .
اِختبِر ع من حيث كونها انعكاسية ، متناظرة ، متعدّية ، تكافؤ مع ذكر السبب .



الحلّ :

ع = { (٢ ، ٢) ، (٢ ، ٣) ، (٣ ، ٣) ، (٣ ، ٥) ، (٥ ، ٥) }

∵ ٢ ∈ سـ ، (٢ ، ٢) ∈ ع
٣ ∈ سـ ، (٣ ، ٣) ∈ ع
٥ ∈ سـ ، (٥ ، ٥) ∈ ع

∴ ع علاقة انعكاسية ، لأنّ لكلّ أ ∈ سـ يكون (أ ، أ) ∈ ع .

ع علاقة ليست متناظرة لأنّ (٢ ، ٣) ∈ ع ولكن (٣ ، ٢) ∉ ع .

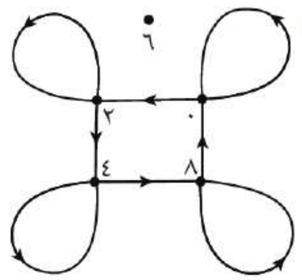
ع علاقة ليست متعدّية لأنّ (٢ ، ٣) ∈ ع و (٣ ، ٥) ∈ ع ولكن (٢ ، ٥) ∉ ع .

∴ ع علاقة ليست تكافؤًا لأنّ ع ليست متناظرة (أو لأنّها ليست متعدّية) .

تمارين ذاتية :

١ فيما يلي مجموعة من المخطّطات السهمية لعدّة علاقات على سـ = { ٠ ، ٢ ، ٤ ، ٦ ، ٨ } .
اُكتب كلّ علاقة بذكر العناصر ، ثمّ اختبِر إذا كانت العلاقة انعكاسية أم لا مع ذكر السبب .

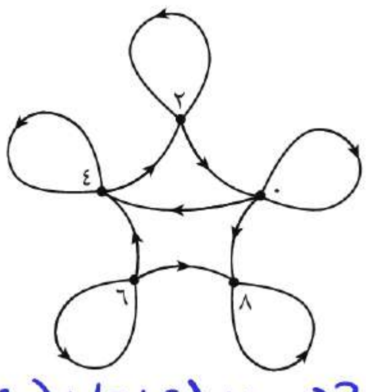
أ



ع = { (٠ ، ٠) ، (٢ ، ٢) ، (٤ ، ٤) ، (٨ ، ٨) ، (٠ ، ٢) ، (٢ ، ٤) ، (٤ ، ٨) ، (٨ ، ٠) }

∴ ع علاقة ليست انعكاسية
لأنه ٦ ∈ سـ و (٦ ، ٦) ∉ ع

ب



ع = { (٠ ، ٠) ، (٢ ، ٢) ، (٤ ، ٤) ، (٦ ، ٦) ، (٨ ، ٨) ، (٠ ، ٤) ، (٠ ، ٨) ، (٢ ، ٠) ، (٢ ، ٤) ، (٤ ، ٢) ، (٦ ، ٤) ، (٦ ، ٨) }

∴ ع علاقة انعكاسية لأنه
لكل أ ∈ سـ ، يوجد (أ ، أ) ∈ ع

٢ إذا كانت س = { ٢ ، ٣ ، ٥ ، ٦ } ، وكانت ع = { (أ ، ب) : أ ، ب ∈ س ، أ عامل من عوامل ب } .

(أ) أكتب ع بذكر العناصر . ع = {(٢،٢)، (٣،٣)، (٥،٥)، (٦،٦)، (٢،٦)، (٣،٦)}

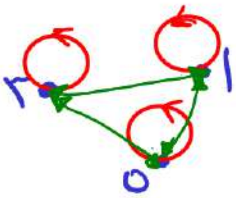
(ب) تحقّق من أنّ العلاقة ع انعكاسية .

ع علاقة انعكاسية لأنه لكل أ ∈ س، فإن (أ، أ) ∈ ع

٣ أُكتب كلّ علاقة ممّا يأتي بذكر العناصر ، ومثّلها بمخطّط سهمي ، ثمّ اختبِر الخاصّية الانعكاسية .

(أ) س = { ١ ، ٣ ، ٥ }

ع = { (أ ، ب) : أ ، ب ∈ س ، أ + ب = عددًا زوجيًّا }



ع = {(١،٣)، (١،٥)، (١،١)، (٣،١)، (٣،٣)، (٣،٥)، (٥،١)، (٥،٣)، (٥،٥)}

∴ ع علاقة انعكاسية لأنه لكل أ ∈ س فإن (أ، أ) ∈ ع

(ب) ل = { -٢ ، ١ ، -١ }

ع = { (أ ، ب) : أ ، ب ∈ ل ، أ^{٢} = ب^{٢} }

ع = {(١،١)، (١،-١)، (-١،١)، (-١،-٢)}

∴ ع علاقة ليست انعكاسية لأن (-٢) ∈ س و (-٢،-٢) ∉ ع

(ج) م = { -١ ، ٠ ، ٣ }

ع = { (أ ، ب) : أ ، ب ∈ م ، أ ≤ ب }

ع = {(٣،٣)، (٣،٠)، (٣،-١)، (٠،٠)، (٠،-١)، (-١،-١)}

ع علاقة انعكاسية لأنه لكل أ ∈ س، فإن (أ، أ) ∈ ع

٤ أُكتب كلّ علاقة ممّا يأتي بذكر العناصر ، ثمّ اختبِر من حيث كونها متناظرة أم لا مع ذكر السبب .

(أ) العلاقة ع معرّفة على س = { ٣ ، ٤ ، ٥ }

حيث ع = { (أ ، ب) : أ ، ب ∈ س ، أ + ب = ٨ }

ع = {(٣،٥)، (٥،٣)}

∵ (٣،٥) ∈ ع ، (٥،٣) ∈ ع

∴ ع علاقة متناظرة لأنه لكل (أ،ب) ∈ ع ، فإن (ب،أ) ∈ ع .

(ب) ع علاقة « ≥ » معرَّفة على سـ = { ٢ ، ٤ ، ٦ }

ع = {(٢،٢)، (٢،٤)، (٢،٦)، (٤،٤)، (٤،٦)، (٦،٦)}

∴ ع علاقة متناظرة لأنه لكل (أ،ب) ∈ ع ، فإنه (ب،أ) ∈ ع .

(ج) ع علاقة « ضعف » معرَّفة على سـ = { ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ }

ع = {(٢،١)}

∴ ع علاقة ليست متناظرة لأنه (٢،١) ∈ ع و (١،٢) ∉ ع

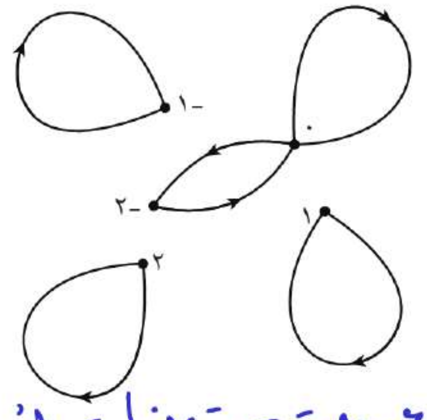
(د) العلاقة ع معرَّفة على سـ = { -٢ ، -١ ، ٠ ، ١ ، ٢ }
حيث ع = { (أ ، ب) : أ ، ب ∈ سـ ، أ + ب = صفرًا }

ع = {(-٢،٢)، (-١،١)، (٠،٠)، (١،-١)، (٢،-٢)}

∴ ع علاقة متناظرة لأنه لكل (أ،ب) ∈ ع ، فإنه (ب،أ) ∈ ع .

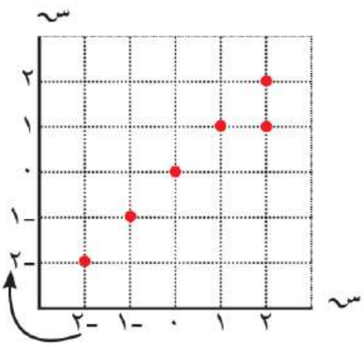
٥ فيما يلي مخطّطات سهمية وبيانية لعلاقات معرَّفة على سـ = { -٢ ، -١ ، ٠ ، ١ ، ٢ } .
اِختبِر خاصّية التناظر لكلّ شكل ممّا يلي :

(أ)



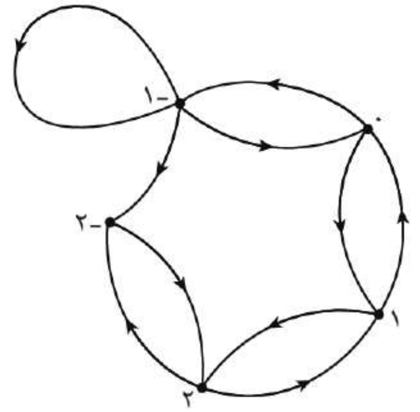
∴ ع علاقة متناظرة لأنه
(٠،-٢) ∈ ع و (-٢،٠) ∈ ع

(ب)



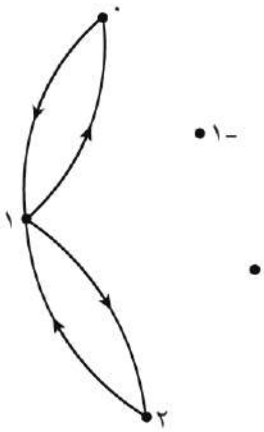
ع ليست متناظرة لأنه
(٢،١) ∈ ع و (١،٢) ∉ ع

(ج)



ع علاقة ليست متناظرة لأنه (-١،-٢) ∈ ع و (-٢،-١) ∉ ع

(د)



ع علاقة متناظرة لأنه لكل (أ،ب) ∈ ع، فإنه (ب،أ) ∈ ع

٦ **العلاقات الآتية معرَّفة على المجموعة سـ = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ } . أيّ منها هو علاقة متعدّية ؟ وأيّها غير متعدّية ؟ مع ذكر السبب .**

$ع_1$ = { (١ ، ٢) ، (٢ ، ٣) ، (١ ، ٣) }

∴ ع علاقة متعدية لأنه (١،٢) ∈ ع و (٢،٣) ∈ ع فإنه (١،٣) ∈ ع

$ع_2$ = { (١ ، ١) ، (٢ ، ٢) ، (٣ ، ٣) ، (٤ ، ٤) }

ع علاقة متعدية لأنه وجود (أ،ب) ∈ ع و (ب،جـ) ∉ ع ليس كافيًا لإثبات أنها غير متعدية .

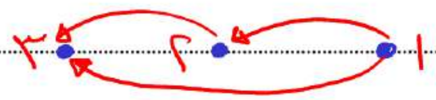
$ع_3$ = { (١ ، ٢) ، (٢ ، ١) ، (٢ ، ٣) ، (٣ ، ٤) ، (٢ ، ٤) ، (١ ، ١) }

∴ ع علاقة متعدية لأنه لكل (أ،ب) ∈ ع و (ب،جـ) ∈ ع فإن (أ،جـ) ∈ ع .

٧ **اِعتبِر** سـ = { ١ ، ٢ ، ٣ } ، ع = { (أ ، ب) : أ ، ب ∈ سـ ، أ < ب }

(أ) **أُكتب ع بذكر العناصر ، ثمّ مثّلها بمخطّط سهمي .**

ع = { (١،٢) ، (١،٣) ، (٢،٣) }



ب اِختبِر ع من حيث كونها متعدّية أم لا مع ذكر السبب .

نعم ، ع علاقة متعدية لأنه

(١ ، ٢) ∈ ع و (٢ ، ٣) ∈ ع ، فإنه (١ ، ٣) ∈ ع

٨ إذا كانت س = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ } ، وكانت ع = { (س ، ص) : س ، ص ∈ س ، س ≠ ص } ،
أُكتب ع بذكر العناصر ، ثمّ ادرس خواصّ العلاقة ع من حيث كونها انعكاسية ، متناظرة ، متعدّية ، تكافؤ .

ع = { (١ ، ٢) ، (١ ، ٣) ، (١ ، ٤) ، (١ ، ٥) ، (٢ ، ١) ، (٢ ، ٣) ، (٢ ، ٤) ، (٢ ، ٥) ،
(٣ ، ١) ، (٣ ، ٢) ، (٣ ، ٤) ، (٣ ، ٥) ، (٤ ، ١) ، (٤ ، ٢) ، (٤ ، ٣) ، (٤ ، ٥)
(٥ ، ١) ، (٥ ، ٢) ، (٥ ، ٣) ، (٥ ، ٤) }

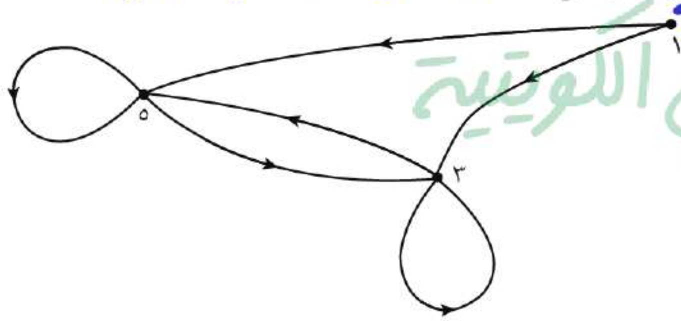
∴ ع علاقة ليست انعكاسية لأنه لكل أ ∈ س ، فإنه (أ ، أ) ∉ ع

∴ ع علاقة متناظرة لأنه لكل (أ ، ب) ∈ ع فإنه (ب ، أ) ∈ ع

∴ ع علاقة غير متعدية لأنه (١ ، ٢) ∈ ع و (٢ ، ١) ∈ ع ، (١ ، ١) ∉ ع

∴ ع علاقة ليست تكافؤاً لأنها غير انعكاسية

٩ في المخطّط السهمي المقابل



ع علاقة معرَّفة على س = { ١ ، ٣ ، ٥ } .

ع = { (١ ، ٣) ، (١ ، ٥) ، (٣ ، ٣) ، (٣ ، ٥)
، (٥ ، ٣) ، (٥ ، ٥) }

أُدرس خواصّ العلاقة ع من حيث كونها انعكاسية ، متناظرة ، متعدّية ، تكافؤ .

∴ ع ليست انعكاسية لأنه ١ ∈ س و (١ ، ١) ∉ ع

∴ ع علاقة غير متناظرة لأنه لكل (أ ، ب) ∈ ع فإنه (ب ، أ) ∉ ع

∴ ع علاقة متعدية لأنه لكل (أ ، ب) ∈ ع و (ب ، جـ) ∈ ع فإنه (أ ، جـ) ∈ ع

∴ ع علاقة ليست تكافؤاً لأنها علاقة غير متناظرة .

مهارات تفكير عليا :

١٠ إذا كانت ع علاقة معرَّفة على ط ، حيث ط هي مجموعة الأعداد الكلّية ،
وكانت ع = { (س ، ص) : س ، ص ∈ ط ، س = ٦ - ص } ،
فاختبِر كون العلاقة ع انعكاسية ، متناظرة ، متعدّية ، تكافؤ .

ط = { ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، .... }

∴ ع = { (٠ ، ٦) ، (١ ، ٥) ، (٢ ، ٤) ، (٣ ، ٣) ، (٤ ، ٢) ، (٥ ، ١) ، (٦ ، ٠) }

∴ ع علاقة ليست انعكاسية لأنه كل س ∈ ط ، فإنه (س ، س) ∉ ع

∴ ع علاقة متناظرة لأنه لكل (س ، ص) ∈ ع ، فإنه (ص ، س) ∈ ع

∴ ع علاقة غير متعدية لأنه (٦ ، ٠) ∈ ع و (٠ ، ٦) ∈ ع ولكن (٦ ، ٦) ∉ ع

∴ ع علاقة ليست تكافؤًا لأنها علاقة غير متعدية .

٥ - ٢ التطبيق (الدالّة) Function

سوف تتعلّم : التطبيق ومكوِّناته (المجال ، المجال المقابِل ، قاعدة الاقتران) .

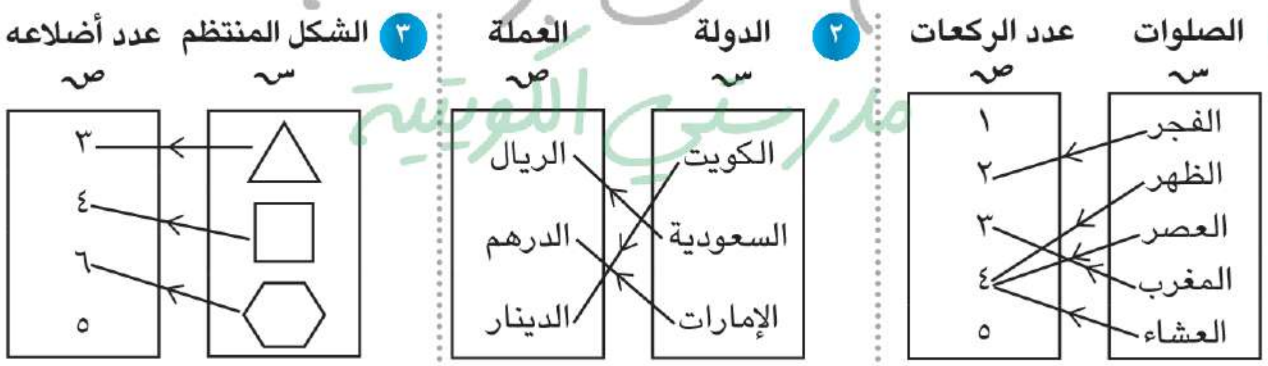
العبارات والمفردات :

التطبيق (الدالّة)	Function	المجال المقابِل	Codomain
المجال	Domain	المدى	Range

تعلّمت سابقًا أنّ ع علاقة من س إلى ص عندما تكون ع مجموعة جزئية من الحاصل الديكارتي س × ص ، أي أنّ ع $\subseteq$ س × ص

حُلّ وناقِش (١)

توضّح المخطّطات السهمية التالية علاقات من س إلى ص ، من خلال هذه العلاقات أجِب عمّا يلي :



أ) هل جميع عناصر س مرتبطة بعناصر من ص ؟

نعم

ب) بكم عنصرًا من ص ارتبط كلّ عنصر من عناصر س ؟

عنصر واحد فقط

من العلاقات ١ ، ٢ ، ٣ نلاحظ أنّ :

كلّ عنصر من عناصر المجموعة الأولى س يرتبط بعنصر واحد فقط من عناصر المجموعة الثانية ص .

معلومة مفيدة :

في يوم ٢٦ فبراير من عام ١٧٩٧ م ، أُصدرت أوّل عملة ورقية حديثة الشكل في العالم وكانت من فئة الجنيه والجنيهَين ، وقد أحدث ظهور العملات الورقية آنذاك ردّة فعل ضخمة ، ظهرت العملة الورقية ، لتلافي المشكلات المتعلّقة بتخزين النقود المعدنية التي كانت تُصنع من الذهب والفضّة والنحاس .

التطبيق (الدالّة) : هو علاقة من س إلى ص بحيث يرتبط **كلّ** عنصر من عناصر س بعنصر **واحد** **وواحد فقط** من عناصر ص .

نرمز إلى التطبيق (الدالّة) بأحد الرموز : ت ، د ، هـ ، ى ، ...

إذا كانت ت تطبيق من س إلى ص ، نرمز إلى ذلك ت : س ⟵ ص

ملاحظة :

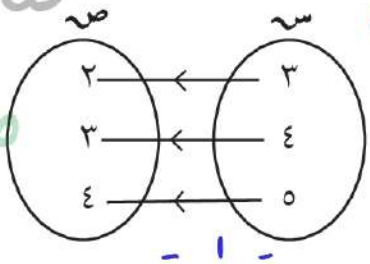
مكوّنات التطبيق (الدالّة) ت : س ⟵ ص هي :

1. س تُسمّى مجال التطبيق (الدالّة) .
2. ص تُسمّى المجال المقابِل للتطبيق ت .
3. ت هي قاعدة الاقتران .

دورك الآن (١)

. تمثّل المخطّطات السهمية التالية علاقات من س إلى ص ، أيّ منها يمثّل تطبيقًا وأيّها لا يمثّل تطبيقًا مع ذكر السبب ؟

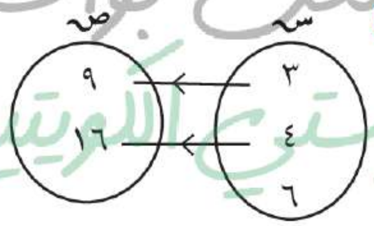
(أ)



العلاقة : تطبيق

السبب : لأنه كل عنصر من عناصر س ارتبط بعنصر واحد فقط من عناصر ص

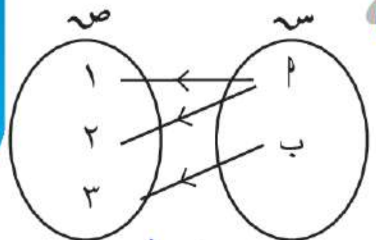
(ب)



العلاقة : لا يمثل تطبيق

السبب : لأنه عنصر من عناصر س لم يرتبط بعنصر من عناصر ص

(ج)



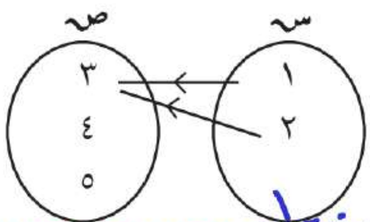
العلاقة : لا يمثل تطبيق

السبب : لأنه عنصر من عناصر س خرج منه سهمان إلى أحد عناصر ص

في المخطّط السهمي الذي يمثّل تطبيقًا : كلّ عنصر من عناصر س يخرج منه سهم واحد فقط إلى أحد عناصر ص .

عبِّر عن فهمك

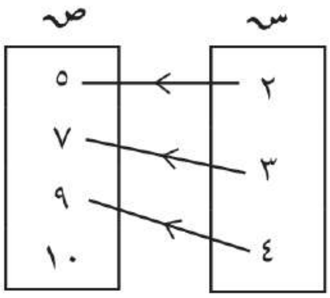
هل تمثّل العلاقة الآتية تطبيقًا من س إلى ص ؟
وضِّح إجابتك .



نعم لأنه كل عنصر من عناصر س ارتبط بعنصر واحد فقط من عناصر ص حتى وإن كان ارتبط بنفس العنصر .

حُلّ وناقِش (٢)

لتكن ت : سـ إلى صـ تطبيق مخطّطه السهمي مبيَّن في الشكل المقابِل .



أكمِل :

المجال = { ٢ ، ٣ ، ٤ }

المجال المقابِل = { ٥ ، ٧ ، ٩ ، ١٠ }

مجموعة صور عناصر المجال = { ٥ ، ٧ ، ٩ }

تُسمّى مجموعة صور عناصر المجال بمدى التطبيق .

مدى التطبيق هو مجموعة صور عناصر مجال التطبيق .

نلاحظ أنّ : { ٥ ، ٧ ، ٩ } ⊆ { ٥ ، ٧ ، ٩ ، ١٠ }

ملاحظة :

مدى التطبيق مجموعة جزئية من المجال المقابِل .

إذا كان أ ∈ سـ والعنصر الذي يرتبط به من صـ هو ب ، فإنّنا نعبّر عن ذلك بالصورة ت (أ) = ب وهي قيمة التطبيق (الدالّة) ت عند أ .

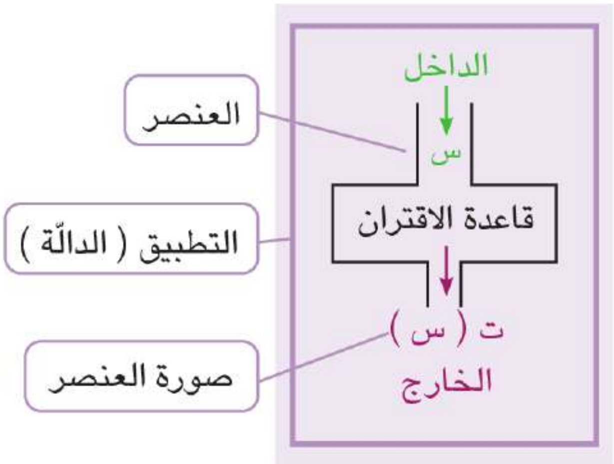
من المخطّط السهمي في « حُلّ وناقِش (٢) » ، أكمِل ما يلي للوصول إلى قاعدة الاقتران للتطبيق ت .

ت (٢) = ٢ × (٢) + ١ = ٥

ت (٣) = ٢ × (٣) + ١ = ٧

ت (٤) = ٢ × (٤) + ١ = ٩

∴ قاعدة الاقتران هي : ت (س) = ٢س + ١

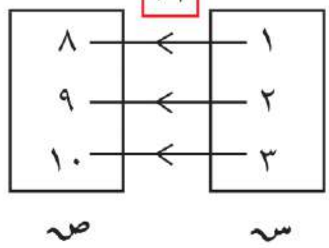


قاعدة الاقتران للتطبيق هي التعبير الرياضي الذي يربط كلّ عنصر في المجال بعنصر واحد فقط في المجال المقابِل .

دورك الآن (٢)

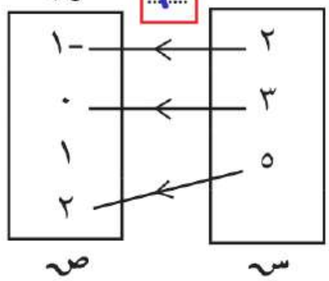
يمثّل كلّ ممّا يلي تطبيقًا من سـ إلى صـ . أُكتب قاعدة الاقتران لكلّ منها .

(أ) مدخَلات $\boxed{+٧}$ مخرَجات



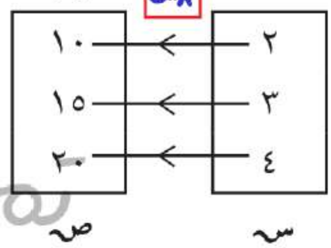
ن (س) = س + ٧

(ب) مدخَلات $\boxed{-٣}$ مخرَجات



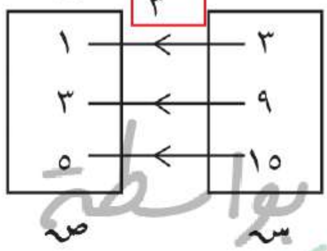
ت (س) = س - ٣

(ج) مدخَلات $\boxed{×٥}$ مخرَجات



د (س) = ٥ س

(د) مدخَلات $\boxed{\times \frac{١}{٣}}$ مخرَجات



هـ (س) = $\frac{١}{٣}$ س

مثال (١) :

أُكتب كلًّا من العلاقات التالية بذكر العناصر ، ثمّ حدِّد ما إذا كانت كلّ منها تمثّل تطبيقًا أم لا ، مع ذكر السبب ، ثمّ مثِّل كلًّا منها بمخطّط سهمي .

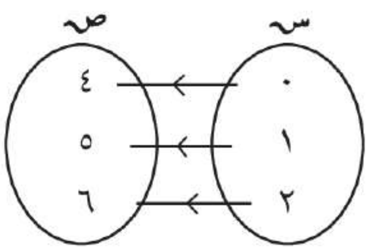
(أ) $ع_١$ = { (أ ، ب) : أ ∈ سـ ، ب ∈ صـ ، ب = أ + ٤ } ،
سـ = { ٠ ، ١ ، ٢ } ، صـ = { ٤ ، ٥ ، ٦ }

الحلّ :

$ع_١$ = { (٠ ، ٤) ، (١ ، ٥) ، (٢ ، ٦) }

∵ كلّ عنصر من عناصر سـ ارتبط بعنصر واحد فقط من عناصر صـ .

∴ العلاقة $ع_١$ تمثّل تطبيقًا .



ب) $ع_2$ = { (أ ، ب) : أ ∈ س ، ب ∈ ص ، الجذر التربيعي لـ أ = ب } ،
س = { ٤ ، ٩ } ، ص = { ٢- ، ٠ ، ٢ ، ٣ }

انتبِه

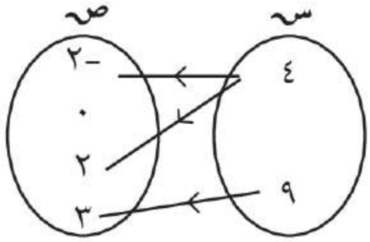
الجذر التربيعي للعدد الموجَب أ هو العدد الذي مربّعه يساوي أ .

الحلّ :

$ع_2$ = { (٤ ، ٢) ، (٤ ، ٢-) ، (٩ ، ٣) }

∵ العنصر ٤ من المجال ارتبط بعنصرَين مختلفَين من المجال المقابِل .

∴ العلاقة $ع_2$ لا تمثّل تطبيقًا .



في العلاقة التي تمثّل تطبيقًا : كلّ عنصر من عناصر المجال يظهر مرّة واحدة فقط كمسقط أوّل في أحد الأزواج المرتَّبة التي تنتمي إلى العلاقة .

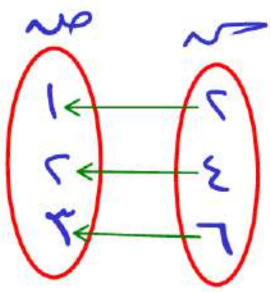
دورك الآن (٣)

ليكن ع علاقة من س إلى ص ، أُكتب ع بذكر العناصر ، وحدِّد ما إذا كانت تمثّل تطبيقًا أم لا ، مع ذكر السبب ، ثمّ مثّلها بمخطّط سهمي :

ع = { (أ ، ب) : أ ∈ س ، ب ∈ ص ، أ = ٢ ب }

س = { ٢ ، ٤ ، ٦ }

ص = { ١ ، ٢ ، ٣ }



ع = { (٢ ، ١) ، (٤ ، ٢) ، (٦ ، ٣) }

∴ ع تمثل تطبيقاً لأنه كل عنصر من عناصر س ارتبط بعنصر واحد فقط من عناصر ص

مثال (٢) :

إذا كانت سـ = { -٢ ، -١ ، ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ }

وكانت ت : سـ ← ح (مجموعة الأعداد الحقيقية) ، حيث ت (س) = ٣س + ١

أ) أكمِل الجدول التالي :

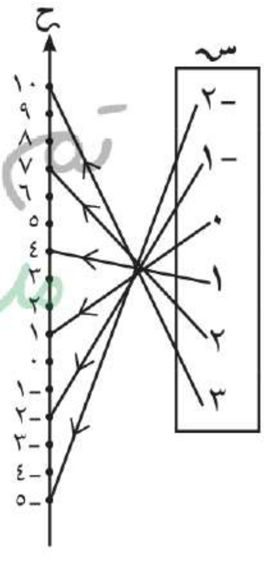
س	-٢	-١	٠	١	٢	٣
٣ س + ١	(٣ × -٢) + ١	(٣ × -١) + ١	(٣ × ٠) + ١	(٣ × ١) + ١	(٣ × ٢) + ١	(٣ × ٣) + ١
ت (س)	-٥	-٢	١	٤	٧	١٠

ب) مدى ت = { -٥ ، -٢ ، ١ ، ٤ ، ٧ ، ١٠ }

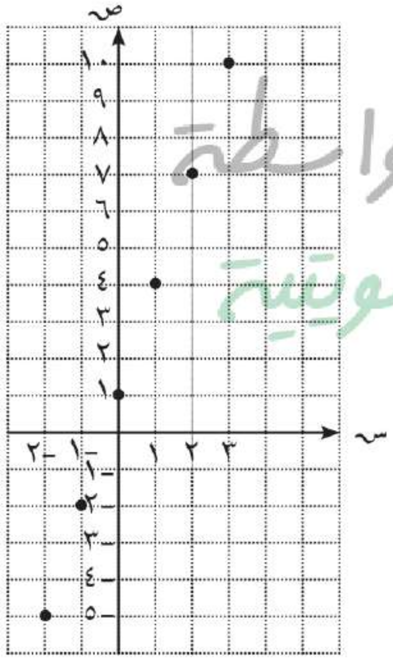
ج) أُكتب ت كمجموعة من الأزواج المرتَّبة .

ت = { (-٢ ، -٥) ، (-١ ، -٢) ، (٠ ، ١) ، (١ ، ٤) ، (٢ ، ٧) ، (٣ ، ١٠) }

د) أرسم مخطّطًا سهميًّا وآخر بيانيًّا في المستوى الإحداثي .



مخطّط سهمي



مخطّط بياني

في المخطّط البياني الذي يمثّل تطبيقًا : كلّ خطّ رأسي يمرّ بنقطة واحدة على الأكثر من نقاط التطبيق .

دورك الآن (٤)

إذا كانت س = { −١ ، ٠ ، ١ ، ٢ } ، ح هي مجموعة الأعداد الحقيقية .
ت : س ⟵ ح حيث ت (س) = س^{٢} + ٢

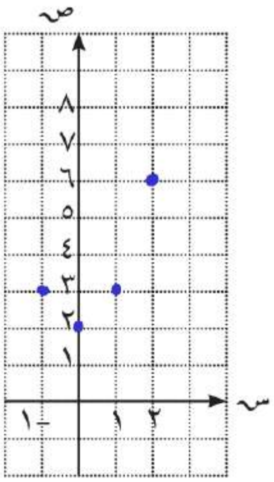
(أ) أكمِل الجدول التالي ، ثمّ أوجِد مدى التطبيق ت :

س	−١	٠	١	٢
س^{٢} + ٢	(−١)^{٢} + ٢	(٠)^{٢}+٢	(١)^{٢}+٢	(٢)^{٢}+٢
ت (س)	٣	٢	٣	٦

مدى التطبيق = { ٢ ، ٣ ، ٦ }

(ب) أُكتب ت كأزواج مرتّبة .
ت = { (−١ ، ٣) ، (٠ ، ٢) ، (١ ، ٣) ، (٢ ، ٦) }

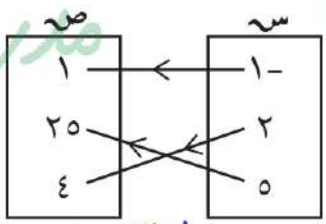
(ج) أُرسم مخطّطًا بيانيًّا في المستوى الإحداثي .



تمارين ذاتية :

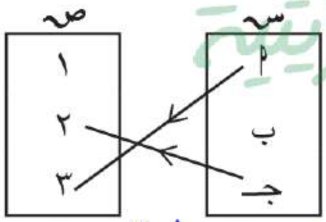
١ بيّن أيًّا من المخطّطات السهمية التالية يمثّل تطبيقًا من س ⟵ ص وأيّها لا يمثّل تطبيقًا ، مع ذكر السبب . إذا كان المخطّط يمثّل تطبيقًا فاذكر المجال والمدى .

(أ)



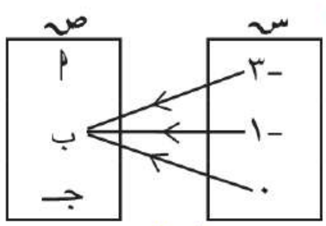
نعم يمثل تطبيقًا لأنه كل عنصر من عناصر س ارتبط بعنصر واحد فقط من عناصر ص
∴ المجال = {−١ ، ٢ ، ٥} ، المدى = {١ ، ٤ ، ٢٥}

(ب)



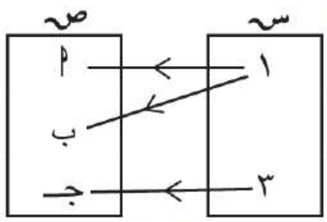
لا يمثل تطبيقًا لأنه لم يرتبط جميع عناصر س بعناصر ص

(ج)



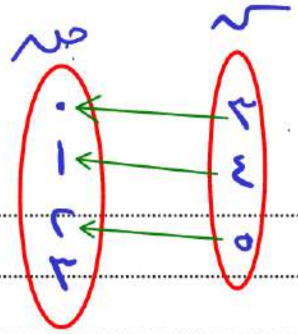
نعم يمثل تطبيقًا لأنه كل عنصر من عناصر س ارتبط بعنصر واحد فقط من عناصر ص
المجال = {٠ ، −١ ، −٣} ، المدى = {ب}

(د)



لا يمثل تطبيقًا لأنه عنصر من عناصر س ارتبط بأكثر من عنصر من عناصر ص

٢ حدِّد ما إذا كانت العلاقات أدناه تمثّل تطبيقًا من س ← ص أم لا ، مع ذكر السبب ، ثمّ مثّلها بمخطّط سهمي .

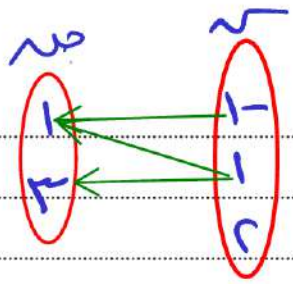


(أ) $ع_1$ = { (أ ، ب) : أ ∈ س ، ب ∈ ص ، ب = أ - ٣ }

حيث س = { ٣ ، ٤ ، ٥ } ، ص = { ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ }

ع = { (٣ ، ٠) ، (٤ ، ١) ، (٥ ، ٢) }

ع تمثل تطبيقًا من س ← ص لأن كل عنصر من عناصر س ارتبط بعنصر واحد من عناصر ص



(ب) $ع_2$ = { (-١ ، ١) ، (١ ، ١) ، (١ ، ٣) }

حيث س = { -١ ، ١ ، ٢ } ، ص = { ١ ، ٣ }

ع لا تمثل تطبيقًا لأن عنصر من عناصر س خرج منه سهمان إلى أحد عناصر ص

٣ إذا كانت س = { -١ ، ٠ ، ١ } ، ص = { -٣ ، -١ ، ٠ ، ١ } ، وكانت ت تطبيقًا من س ← ص

حيث ت (س) = ٢س - ١

(أ) أكمِل الجدول المقابِل :

س	-١	٠	١
٢س - ١	٢×(-١)-١	٢×٠ -١	٢×١ -١
ت (س)	-٣	-١	١

(ب) مدى ت = { -٣ ، -١ ، ١ }

(ج) أكتب ت كمجموعة من الأزواج المرتَّبة .

ت = { (-١ ، -٣) ، (٠ ، -١) ، (١ ، ١) }

(د) أرسم مخطّطًا سهميًا .

٤ إذا كانت س = { -١ ، ١ ، ٢ } ، ح هي مجموعة الأعداد الحقيقية ، هـ هي تطبيق معرَّف كما يلي :

هـ : س ← ح حيث هـ (س) = $س^٣$

(أ) أكمِل الجدول التالي :

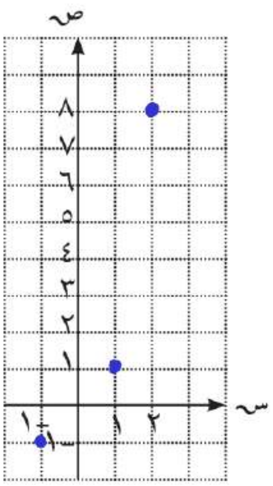
س	-١	١	٢
$س^٣$	$(-١)^٣$	$(١)^٣$	$(٢)^٣$
هـ (س)	-١	١	٨

(ب) مدى هـ = { -١ ، ١ ، ٨ }

(ج) أكتب هـ كمجموعة من الأزواج المرتَّبة .

هـ = { (-١ ، -١) ، (١ ، ١) ، (٢ ، ٨) }

(د) أرسم مخطّطًا بيانيًا في المستوى الإحداثي .



٥ - ٣ أنواع التطبيق

Types of Functions

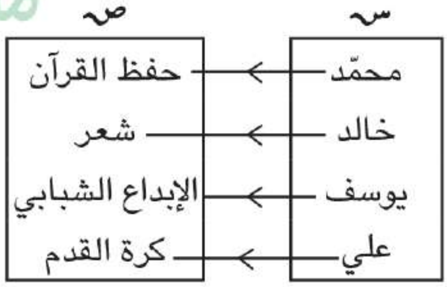
سوف تتعلّم : أنواع التطبيق (الدالّة) .

العبارات والمفردات :

تطبيق شامل	Surjective Function (Onto Function)
تطبيق متباين	Injective Function (One-to-One Function)
تطبيق تقابل	Bijective Function

حُلّ وناقِش

تُقام عدّة مسابقات على مستوى المدارس في دولة الكويت التابعة لوزارة التربية ، منها مسابقات حفظ القرآن والشعر والإبداع الشبابي للرياضيات وكرة القدم . تمثّل المخطّطات السهمية التالية المسابقات التي اشترك فيها المتعلّمون ، حيث س تمثّل أسماء المتعلّمين وص تمثّل نوع المسابقة التي اشترك فيها .



ت : س ← ص

أكمِل كلًّا ممّا يلي :

في التطبيق ت : س ← ص

المجال = { محمد ، خالد ، يوسف ، علي }

المجال المقابِل = { حفظ القرآن ، شعر ، الإبداع الشبابي ، كرة القدم }

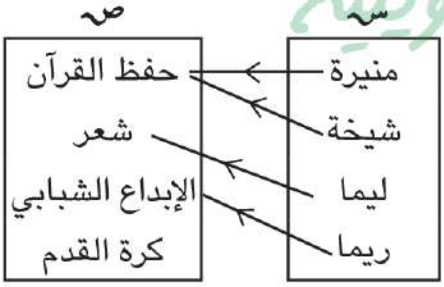
المدى = { حفظ القرآن ، شعر ، الابداع الشبابي ، كرة القدم }

١ هل المدى يساوي المجال المقابِل ؟

نعم

٢ هل اشترك متعلّمان أو أكثر في المسابقة نفسها ؟

لا



ه : س ← ص

أكمِل كلًّا ممّا يلي :

في التطبيق ه : س ← ص

المجال = { شيخة ، منيرة ، ليما ، ريما }

المجال المقابِل = { حفظ القرآن ، شعر ، الابداع الشبابي ، كرة القدم }

المدى = { حفظ القرآن ، شعر ، الابداع الشبابي }

١ هل المدى يساوي المجال المقابِل ؟

لا

٢ هل اشتركت متعلّمتان أو أكثر في المسابقة نفسها ؟

نعم

نسمّي التطبيق الذي يكون فيه جميع عناصر المدى هي نفسها عناصر المجال المقابِل (تطبيق شامل) .

من (١) ، إذًا ت تطبيق شامل ، ט تطبيق ليس شاملًا .

التطبيق الذي يتساوى فيه المدى والمجال المقابِل يُسمى « تطبيق شامل » .

نسمّي التطبيق الذي لا يرتبط فيه أيّ عنصرَين من عناصر المجال بالعنصر نفسه في المجال المقابِل (تطبيق متباين) .

من (٢) ، إذًا ت تطبيق متباين ، ט تطبيق ليس متباينًا .

التطبيق الذي لا يرتبط فيه عنصران أو أكثر من المجال بالعنصر نفسه من المجال المقابِل يُسمّى « تطبيق متباين » .

نلاحظ أنّ التطبيق ت شامل ومتباين . لذلك نُطلق عليه اسم تطبيق تقابل ، بينما ט تطبيق ليس تقابلًا لأنّه ليس شاملًا أو لأنّه ليس متباينًا . (عدم تحقّق أحدهما يكفي ليكون التطبيق ليس تقابلًا)

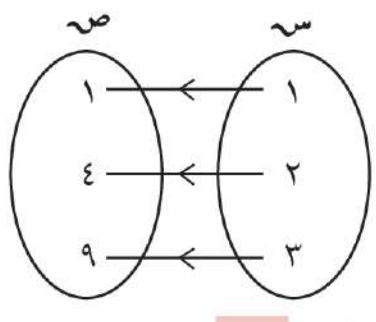
من (١) ، (٢) ، إذًا ت تطبيق تقابل ، ט تطبيق ليس تقابلًا .

التطبيق الشامل والمتباين يُسمّى « تطبيق تقابل » .

مثال (١) :

بيِّن نوع التطبيقات التالية فيما إذا كانت تطبيقًا شاملًا ، متباينًا ، تقابلًا ، مع ذكر السبب .

(أ) ت : س ← ص



ت تطبيق شامل

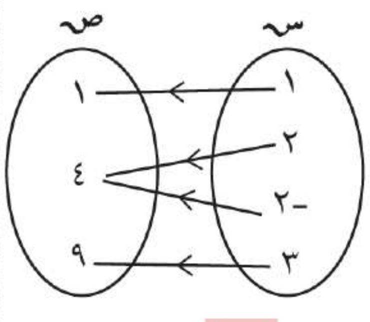
لأنّ المدى = المجال المقابِل

ت تطبيق متباين

لأنّ ت (١) ≠ ت (٢) ≠ ت (٣)

∴ ت تطبيق تقابل لأنّه تطبيق شامل ومتباين .

(ب) ט : س ← ص



ט تطبيق شامل

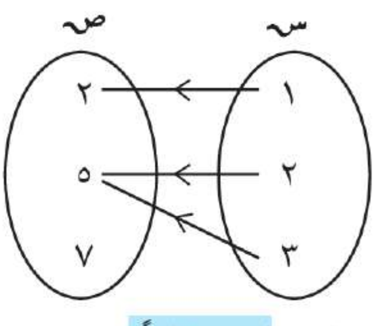
لأنّ المدى = المجال المقابِل

ט تطبيق ليس متباينًا

لأنّ ט (٢) = ט (-٢)

∴ ט تطبيق ليس تقابلًا لأنه تطبيق ليس متباينًا .

(ج) هـ : س ← ص



هـ تطبيق ليس شاملًا

لأنّ المدى ≠ المجال المقابِل

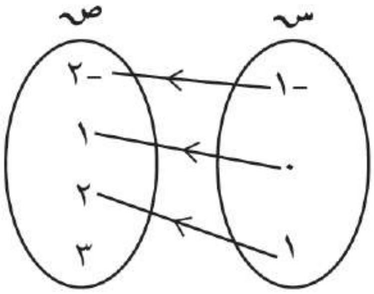
هـ تطبيق ليس متباينًا

لأنّ هـ (٢) = هـ (٣)

∴ هـ تطبيق ليس تقابلًا لأنّه تطبيق ليس شاملًا أو (لأنّه ليس متباينًا) .

دورك الآن (١)

من المخطّط السهمي المقابِل ، بيِّن نوع التطبيق ت : س ⟵ ص فيما إذا كان تطبيقًا شاملًا ، متباينًا ، تقابلًا ، مع ذكر السبب .



المجال = {-١ ، ٠ ، ١}

المجال المقابِل = {-٢ ، ١ ، ٢ ، ٣}

المدى = {-٢ ، ١ ، ٢}

ت تطبيق متباين

السبب : لأنه ت(-١) ≠ ت(٠) ≠ ت(١)

ت تطبيق ليس شاملاً

السبب : لأنه المدى ≠ المجال

ت تطبيق ليس تقابلاً

السبب : لأنه ليس شاملاً .

مثال (٢) :

إذا كانت س = { ١ ، ٠ ، ٢ } ، ص = { ٣ ، -١ ، ٧ }

التطبيق د : س ⟵ ص ، حيث د (س) = ٤س - ١

(أ) أوجِد مدى التطبيق د .

(ب) أُكتب التطبيق د كمجموعة من الأزواج المرتَّبة .

(ج) بيِّن نوع التطبيق د ما إذا كان تطبيقًا شاملًا ، متباينًا ، تقابلًا ، مع ذكر السبب .

(د) مثِّل التطبيق بمخطّط سهمي .

(هـ) مثِّل التطبيق بمخطّط بياني في المستوى الإحداثي .

الحلّ :

(أ) د (س) = ٤س - ١

د (١) = ٤ × ١ - ١ = ٤ - ١ = ٣

د (٠) = ٤ × ٠ - ١ = ٠ - ١ = -١

د (٢) = ٤ × ٢ - ١ = ٨ - ١ = ٧

مدى التطبيق = { ٣ ، -١ ، ٧ }

اِنتبِه

يجب مراعاة ترتيب العمليات الحسابية ، فالضرب والقسمة يسبقان الجمع والطرح .

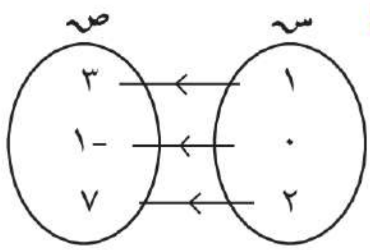
(ب) د = { (١ ، ٣) ، (٠ ، -١) ، (٢ ، ٧) }

(ج) د تطبيق شامل ، لأنّ المدى = المجال المقابِل .

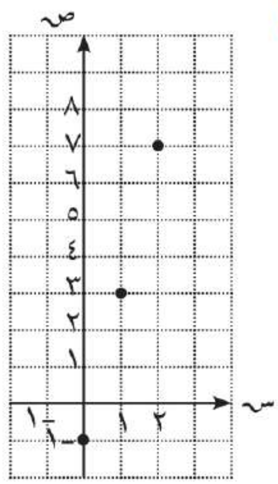
د تطبيق متباين ، لأنّ د (١) ≠ د (٠) ≠ د (٢)

د تطبيق تقابل ، لأنّه شامل ومتباين .

(د)



(هـ)



دورك الآن (٢)

إذا كانت س = { -٢ ، ٠ ، ٢ } ، ص = { -٥ ، ١ ، ٧ }

التطبيق ت : س ⟵ ص ، حيث ت (س) = ٣س + ١

(أ) أوجِد مدى التطبيق ت .

ت (س) = ٣س + ١

ت (-٢) = ٣×(-٢)+١ = -٥

ت (٠) = ٣×٠+١ = ١

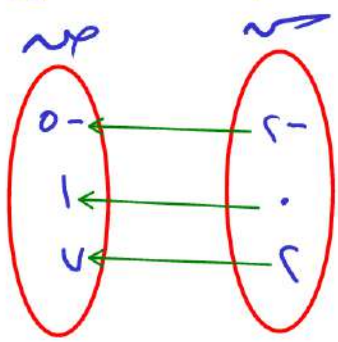
ت (٢) = ٣×٢+١ = ٧

المدى = {-٥، ١، ٧}

(ب) أُكتب التطبيق ت كمجموعة من الأزواج المرتَّبة .

ت = {(-٢، -٥)، (٠، ١)، (٢، ٧)}

(ج) مثِّل التطبيق ت بمخطّط سهمي .



(د) بيِّن نوع التطبيق ه من حيث كونه شاملًا ، متباينًا ، تقابلًا ، مع ذكر السبب .

ه تطبيق ..... شامل ..... لأنّ : المدى = المجال المقابل .....

ه تطبيق ..... متباين ..... لأنّ : ه(-٢) ≠ ه(١) ≠ ه(٢) .....

ه تطبيق ..... تقابل ..... لأنّه : شامل و متباين .....

مثال (٣) :

إذا كانت س = { -٢ ، -١ ، ٠ ، ٢ } ، ص = { ٠ ، ٣ ، -١ }

التطبيق ت : س ⟵ ص ، حيث ت (س) = س^{٢} - ١

(أ) أوجِد مدى التطبيق ت .

(ب) مثِّل التطبيق ت بمخطّط بياني في المستوى الإحداثي .

(ج) بيِّن نوع التطبيق ت من حيث كونه شاملًا ، متباينًا ، تقابلًا ، مع ذكر السبب .

الحلّ :

(أ) ت (س) = س^{٢} - ١

ت (-٢) = (-٢)^{٢} - ١ = ٣

ت (-١) = (-١)^{٢} - ١ = ٠

ت (٠) = (٠)^{٢} - ١ = -١

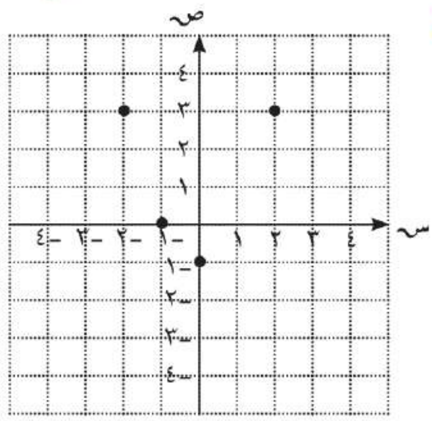
ت (٢) = (٢)^{٢} - ١ = ٣

المدى = { ٠ ، ٣ ، -١ }

تذكّر

(أ)^{٢} = (-أ)^{٢}

(ب)



(ج) ت تطبيق شامل ، لأنّ المدى = المجال المقابِل .

ت تطبيق ليس متباينًا ، لأنّ ت (-٢) = ت (٢)

∴ ت تطبيق ليس تقابلًا ، لأنّه ليس متباينًا .

عبِّر عن فهمك (٢)

إذا كان التطبيق $ع$: ط ← ط ، حيث ط هي مجموعة الأعداد الكلّية ،

$ع$ (س) = س^{٢} ، هل التطبيق $ع$ تطبيق متباين ؟ فسِّر إجابتك .

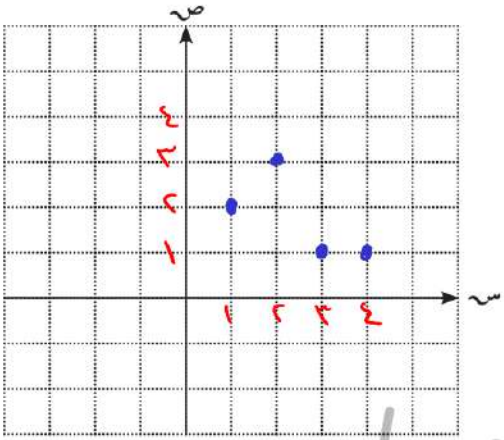
نعم متباين لأن ع(٠) ≠ ع(١) ≠ ع(٢)

دورك الآن (٣)

إذا كانت س = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ } ، التطبيق د : س ← س ،

حيث د = { (١ ، ٢) ، (٢ ، ٣) ، (٣ ، ١) ، (٤ ، ١) }

(أ) مثِّل التطبيق د بمخطّط بياني في المستوى الإحداثي .



(ب) أُكتب مدى التطبيق .

المدى = { ١ ، ٢ ، ٣ }

(ج) هل التطبيق د تطبيق تقابل ؟ لماذا ؟

∵ التطبيق د ليس شاملاً لأنه المدى ≠ المجال المقابل

و ليس متبايناً لأنه د(٣) = د(٤)

∴ د تطبيق ليس تقابلاً

مثال (٤) :

إذا كانت س = { ٠ ، ١ ، ٢ } ، ص = { ٠ ، ١ ، ٨ } ،

التطبيق د : س ← ص ، حيث د (س) = س^{٣}

(أ) أوجِد مدى التطبيق د .

د (٠) = (٠)^{٣} = ٠

د (١) = (١)^{٣} = ١

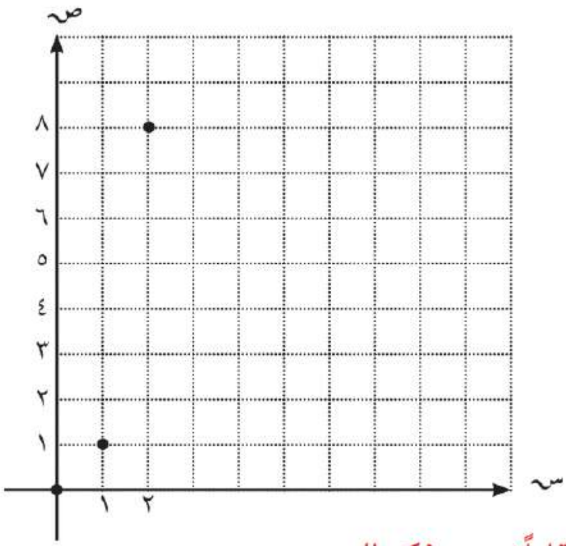
د (٢) = (٢)^{٣} = ٨

مدى التطبيق = { ٠ ، ١ ، ٨ }

(ب) أُكتب التطبيق د كمجموعة من الأزواج المرتَّبة .

د = { (٠ ، ٠) ، (١ ، ١) ، (٢ ، ٨) }

ج) مثّل التطبيق د بمخطّط بياني في المستوى الإحداثي .



د) بيِّن نوع التطبيق د من حيث كونه شاملًا ، متباينًا ، تقابلًا ، مع ذكر السبب .

د : تطبيق شامل ، لأنّ المدى = المجال المقابِل .

د : تطبيق متباين ، لأنّ د (٠) ≠ د (١) ≠ د (٢)

∴ د تطبيق تقابل ، لأنّه شامل ومتباين .

مثال (٥) :

إذا كانت س = { ١ ، ٤ } ، ص = { -٢ ، ١ ، ٢ ، ٣ } ،

التطبيق ت : س ⟵ ص ، حيث ت (س) = √س

أ) أوجِد مدى التطبيق ت .

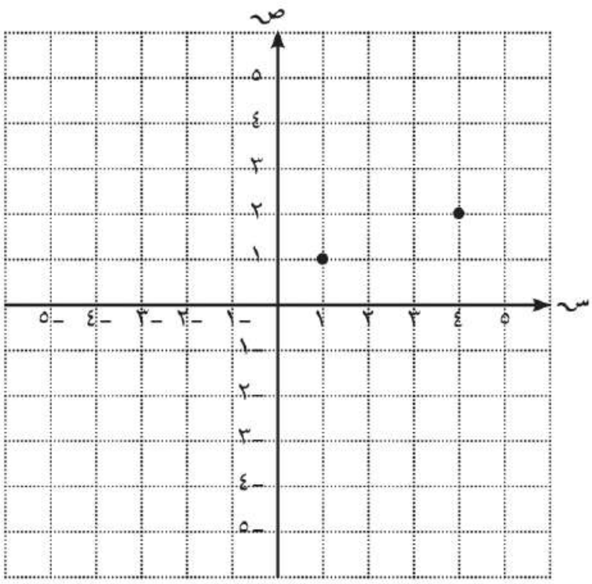
ت (س) = √س

ت (١) = ١

ت (٤) = ٢

المدى = { ١ ، ٢ }

ب) مثّل التطبيق ت بمخطّط بياني في المستوى الإحداثي.



ج) بيِّن نوع التطبيق ت من حيث كونه شاملًا ، متباينًا ، تقابلًا ، مع ذكر السبب .

ت : تطبيق ليس شاملًا ،

لأنّ المدى ≠ المجال المقابِل .

ت : تطبيق متباين ، لأنّ

ت (١) ≠ ت (٤)

∴ ت تطبيق ليس تقابلًا لأنه ليس شاملًا .

اِنتبِه

- √٤ = ٢
- الجذر التربيعي للعدد ٤ هو ± ٢

عبِّر عن فهمك (٢)

ليكن التطبيق ت : ص ← ص (ص هي مجموعة الأعداد الصحيحة) ،
حيث ت (س) = ٢س ، هل التطبيق ت تطبيق تقابل ؟

نعم

تمارين ذاتية :

١ إذا كانت س = { -١ ، ٠ ، ١ ، ٢ } ، ص = { -٣ ، ١ ، ٥ ، ٩ }
التطبيق ه : س ← ص ، حيث ه (س) = ٤س + ١

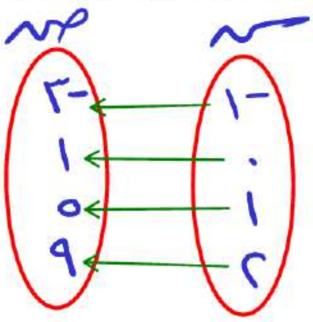
(أ) أوجِد مدى التطبيق ه .

ه(-١) = ٤ × (-١) + ١ = -٤ + ١ = -٣
ه(٠) = ٤ × ٠ + ١ = ٠ + ١ = ١
ه(١) = ٤ × ١ + ١ = ٤ + ١ = ٥
ه(٢) = ٤ × ٢ + ١ = ٨ + ١ = ٩
∴ المدى = { -٣ ، ١ ، ٥ ، ٩ }

(ب) أكتب التطبيق ه كمجموعة من الأزواج المرتَّبة .

ه = { (-١ ، -٣) ، (٠ ، ١) ، (١ ، ٥) ، (٢ ، ٩) }

(ج) مثِّل التطبيق ه بمخطّط سهمي .



(د) بيِّن نوع التطبيق ه من حيث كونه شاملًا ، متباينًا ، تقابلًا ، مع ذكر السبب .

ه تطبيق شامل لأنه المدى = المجال المقابل

ه تطبيق متباين لأنه ه(-١) ≠ ه(٠) ≠ ه(١) ≠ ه(٢)
ه تطبيق تقابل لأنه شامل ومتباين .

٢ إذا كانت ل = { ١ ، ٢ ، -٢ } ، هـ = { ٢ ، ٤ ، ٥ }
التطبيق ك : ل ⟵ هـ ، حيث ك (س) = س^{٢} + ١

(أ) أوجِد مدى التطبيق ك .

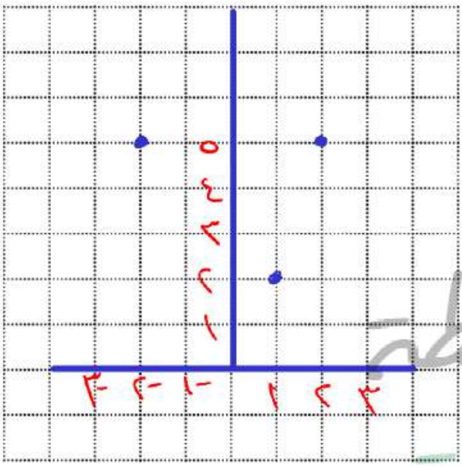
ك(١) = (١)^{٢} + ١ = ٢ ، ك(٢) = (٢)^{٢} + ١ = ٥ ، ك(-٢) = (-٢)^{٢} + ١ = ٥

∴ المدى = { ٢ ، ٥ }

(ب) أُكتب التطبيق ك كمجموعة من الأزواج المرتَّبة .

ك = { (١ ، ٢) ، (٢ ، ٥) ، (-٢ ، ٥) }

(ج) مثِّل التطبيق ك بمخطَّط بياني في المستوى الإحداثي .



(د) بيِّن نوع التطبيق ك من حيث كونه شاملًا ، متباينًا ، تقابلًا ، مع ذكر السبب .

ك تطبيق ليس شاملاً لأنه المدى ≠ المجال المقابل

ك تطبيق ليس متباينًا لأنه ك(٢) = ك(-٢)

∴ ك تطبيق ليس تقابلاً لأنه ليس شاملاً ومتباينًا

٣ إذا كانت س = { -٢ ، ٠ ، ١ } ، ص = { -٩ ، -١ ، ٠ ، ١ } ،
التطبيق هـ : س ⟵ ص ، حيث هـ (س) = س^{٣} - ١

(أ) أوجِد مدى التطبيق هـ .

هـ(-٢) = (-٢)^{٣} - ١ = -٨ - ١ = -٩ ، هـ(٠) = (٠)^{٣} - ١ = -١

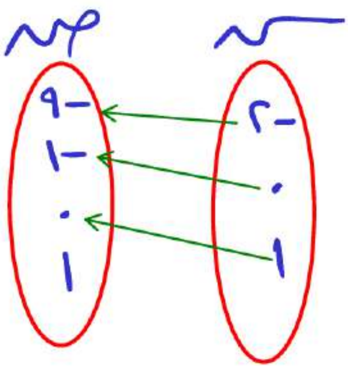
هـ(١) = (١)^{٣} - ١ = ١ - ١ = ٠

∴ المدى = { -٩ ، -١ ، ٠ }

(ب) أُكتب التطبيق هـ كمجموعة من الأزواج المرتَّبة .

هـ = { (-٢ ، -٩) ، (٠ ، -١) ، (١ ، ٠) }

(ج) مثِّل التطبيق هـ بمخطّط سهمي .



(د) بيِّن نوع التطبيق هـ من حيث كونه شاملًا ، متباينًا ، تقابلًا ، مع ذكر السبب .

هـ تطبيق ليس "شاملاً" لأنه المدى ≠ المجال المقابل

هـ تطبيق متباين لأنه هـ(-٢) ≠ هـ(٠) ≠ هـ(١)

هـ تطبيق ليس "تقابلاً" لأنه ليس "شاملاً" .

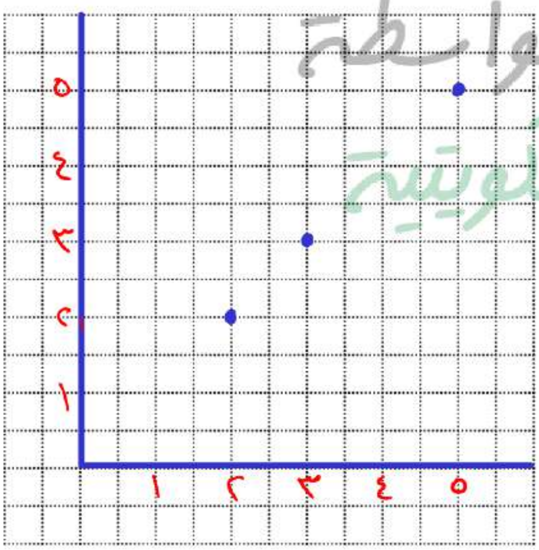
٤ إذا كانت ع = { ٢ ، ٣ ، ٥ }

التطبيق هـ : ع ⟵ ع ، حيث هـ = { (٢ ، ٢) ، (٣ ، ٣) ، (٥ ، ٥) }

(أ) أوجِد مدى التطبيق هـ .

المدى = { ٢ ، ٣ ، ٥ }

(ب) مثِّل التطبيق هـ بمخطّط بياني في المستوى الإحداثي .



(ج) بيِّن أنّ التطبيق هـ هو تطبيق تقابل .

هـ تطبيق شامل لأنه المدى = المجال المقابل

هـ تطبيق متباين لأنه هـ(٢) ≠ هـ(٣) ≠ هـ(٥)

هـ تطبيق تقابل لأنه شامل ومتباين .

٥ إذا كان التطبيق د : س ← ص ، حيث س = { ١ ، ٤ ، ١٦ } ،
ص = { ٢ ، ٥ ، ١١ } ، د (س) = ٣ $\sqrt{\text{س}}$ − ١ ، فبيّن أنّ د تطبيق تقابل .

د(١) = ٣ $\sqrt{١}$ − ١ = ٣ − ١ = ٢
د(٤) = ٣ $\sqrt{٤}$ − ١ = ٣ × ٢ − ١ = ٥
د(١٦) = ٣ $\sqrt{١٦}$ − ١ = ٣ × ٤ − ١ = ١١
∴ المدى = { ٢ ، ٥ ، ١١ }

∴ د تطبيق شامل لأنه المدى = المجال المقابل
د تطبيق متباين لأنه د(١) ≠ د(٤) ≠ د(١٦)

∴ د تطبيق تقابل لأنه شامل و متباين .

مهارات تفكير عليا :

اِختر الإجابة الصحيحة :

٦ ليكن ت تطبيقًا حيث ت : ط ← ط ، ت (س) = ٣
التطبيق ت هو :

أ شامل وليس متباينًا　　ب متباين وليس شاملًا

ج ليس شاملًا وليس متباينًا　　د تقابل

٧ إذا كان التطبيق ت : س ← ص ، تطبيق تقابل وكان عدد عناصر س يساوي ٥ ،
فإنّ عدد عناصر ص يساوي :

أ ٤　　ب ٥　　ج ٦　　د ٧

٥ - ٤ الدالّة الخطّية Linear Function

سوف تتعلّم : الدالّة الخطّية وخطوات رسم بيانها .

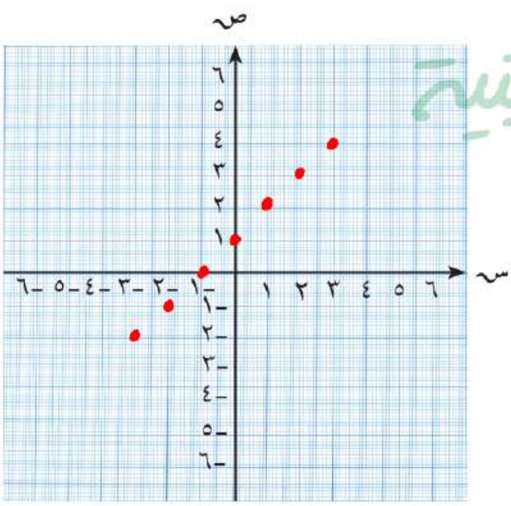
العبارات والمفردات :

متغيّر تابع	Dependent Variable	دالّة خطّية	Linear Function
متغيّر مستقلّ	Independent Variable		

حُلّ وناقِش

اللوازم

ورقة رسم بياني ، مسطرة .



ليكن ن : ص ⟵ ح ، ن (س) = س + ١

١ أكمِل الجدول التالي :

س	٣	٢	١	٠	١-	٢-	٣-
ن (س)	٤	٣	٢	١	٠	١-	٢-

٢ أُرسم المخطّط البياني للتطبيق ن في المستوى الإحداثي .

٣ هل تقع جميع هذه النقاط على استقامة واحدة ؟
(تأكَّد باستخدام حافّة مستقيمة) ......نعم......

٤ ليكن ن : ح ⟵ ح ، ن (س) = س + ١

اِختر ثلاثة أعداد حقيقية مختلفة تقع بين العددَين صفر ، ١ ثمّ أكمِل الجدول التالي ومثِّل النقاط بيانيًّا في المستوى الإحداثي .

س	١	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	٠
ن (س)	٢	$1\frac{1}{2}$	$1\frac{1}{3}$	$1\frac{1}{4}$	١

٥ نلاحظ أنّ مجموعة النقاط المكوِّنة للمخطّط البياني تزداد كلّما كبر المجال ، وتظلّ أيضًا على استقامة واحدة ويمكن تمثيلها بخطّ مستقيم .

٦ أُرسم بيان الدالّة ن : ح ⟵ ح ، ن (س) = س + ١

تذكَّر

- كلّ عدد حقيقي يُمثَّل بنقطة على خطّ الأعداد ، وكلّ نقطة على خطّ الأعداد تمثّل عددًا حقيقيًّا .
- كلّ عددَين حقيقيَّين يوجد بينهما عدد حقيقي .

- الدالّة (التطبيق) التي مجالها ومجالها المقابِل مجموعة الأعداد الحقيقية أو مجموعة جزئية منها تُسمّى « **دالّة حقيقية** » .
- الدالّة الحقيقية ν : ح ⟵ ح ، ν (س) = ا س + ب ، حيث ا ، ب ∈ ح ، ا ≠ ٠ تُسمّى « **دالّة خطّية** » (تطبيقًا خطّيًا) .

ملاحظة :

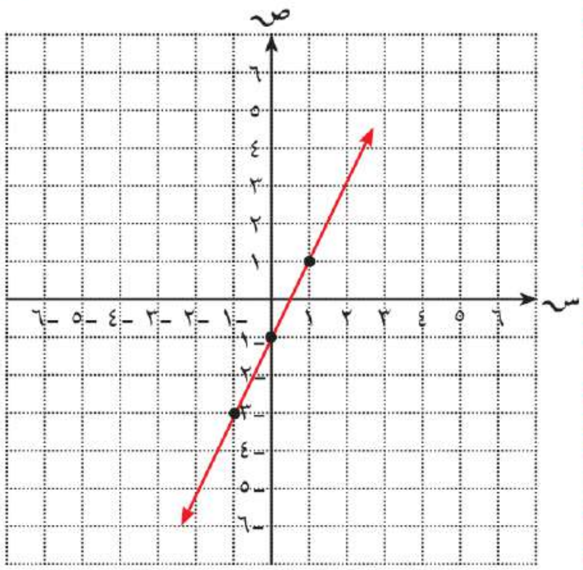
- ν (س) = ا س + ب تُسمّى قاعدة الاقتران ويمكن كتابتها على الصورة : **ص = ا س + ب** ويكون بيانها خطًّا مستقيمًا يقطع محور السينات حيث ا ≠ ٠ .
- يُسمّى س **المتغيّر المستقلّ** ، وهو المتغيّر الذي يحدّد قِيَم مخرَجات الدالّة .
- يُسمّى ص **المتغيّر التابع** ، وهو المتغيّر الذي تعتمد قيمته على قِيَم المتغيّر المستقلّ .

مثال (١) :

أُرسم بيان الدالّة الخطّية : ص = ٢س - ١

الحلّ :

ص = ٢س - ١			
س	١	٠	١-
ص	١	١-	٣-



لاحِظ أنّ

خطوات رسم بيان الدالّة الخطّية

١ نضع الدالّة على الصورة ص = ا س + ب

٢ نختار بعض القِيَم للمتغيّر المستقلّ (س) .

٣ نوجِد قِيَم المتغيّر التابع (ص) المناظِرة .

٤ نمثّل النقاط في مستوى الإحداثيات .

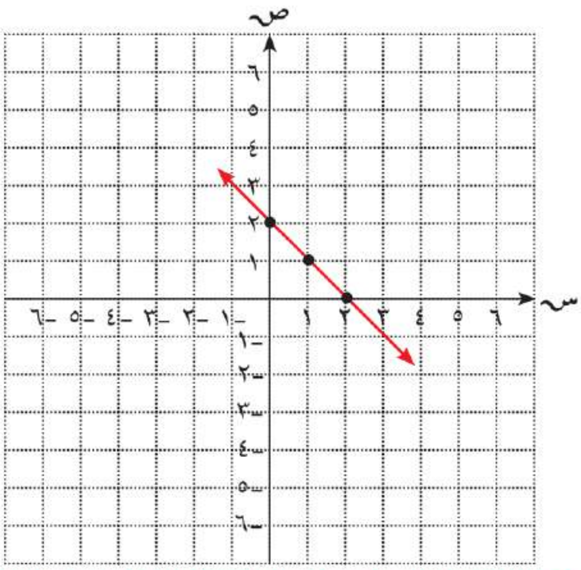
٥ نصل بين هذه النقاط بخطّ مستقيم باستخدام المسطرة .

مثال (٢) :

أُرسم بيان الدالّة الخطّية : ص + س = ٢

الحلّ :

ص = - س + ٢			
س	٢	١	٠
ص	٠	١	٢



عبِّر عن فهمك (٢)

هل س = ٤ تمثّل دالّة ؟ فسِّر إجابتك .

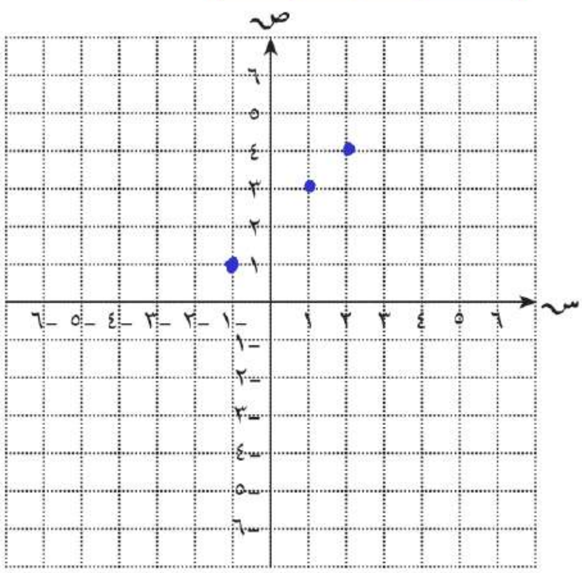
نعم تمثل دالة ثابتة توازي محور الصادات

تمارين ذاتية :

١ أُرسم بيانيًّا كلًّا من الدوالّ الخطّية التالية :

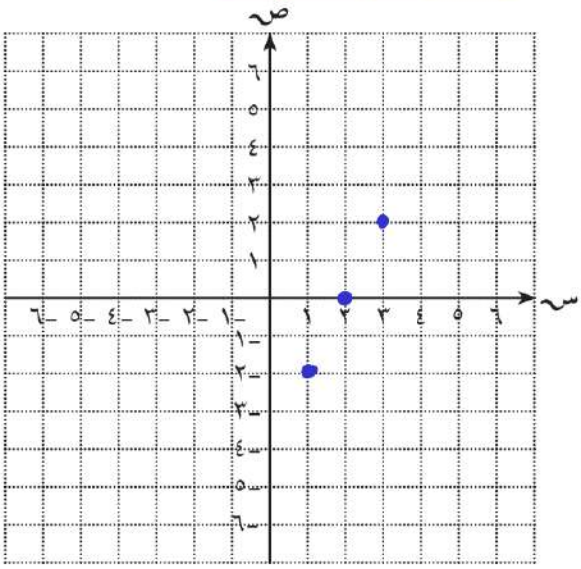
(أ) ص = س + ٢

ص = س + ٢			
س	١	٢	-١
ص	٣	٤	١



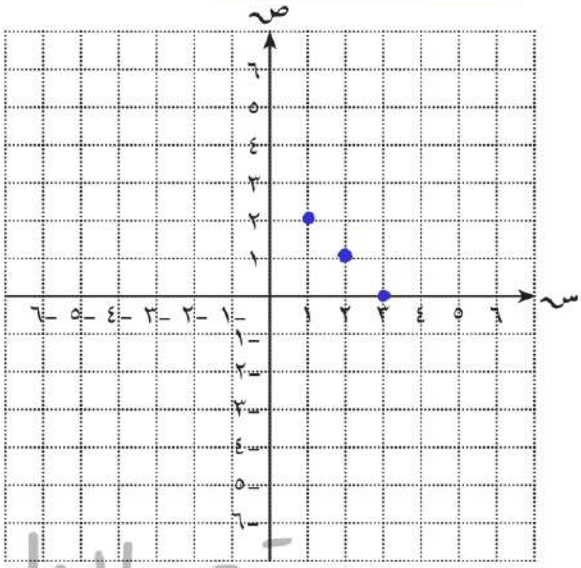
(ب) ص = ٢س - ٤

ص = ٢س - ٤			
س	١	٢	٣
ص	-٢	٠	٢



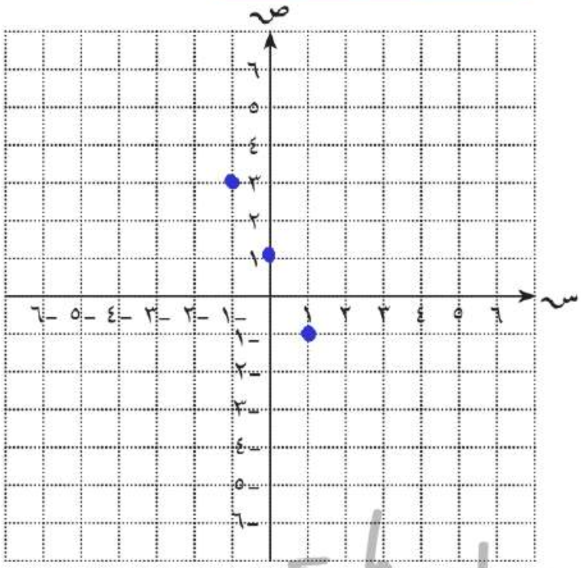
(ج) ص + س = ٣

ص = - س + ٣			
س	١	٢	٣
ص	٢	١	٠



(د) ص = ١ - ٢س

ص = ١ - ٢س			
س	-١	٠	١
ص	٣	١	-١



مهارات تفكير عليا :

اِختر الإجابة الصحيحة :

٢ إذا كان بيان الدالّة الخطّية : ص = ٣س + ب يمرّ بالنقطة (٣ ، ٧) ، فإنّ قيمة ب تساوي :

أ -٢   ب ٢   ج -١٩   د ١٩

٣ إذا كانت النقطة (٢ ، ٢) تقع على بيان الدالّة الخطّية : ص = ٣س - ١ ، فإنّ ٢ يساوي :

أ ١   ب ٤   ج ٥   د ٣

٥ - ٥ الدالّة التربيعية

Quadratic Function

سوف تتعلّم : الدوالّ التربيعية وتمثيلها بيانيًّا .

العبارات والمفردات :

دالّة تربيعية Quadratic Function قطع مكافِئ Parabola

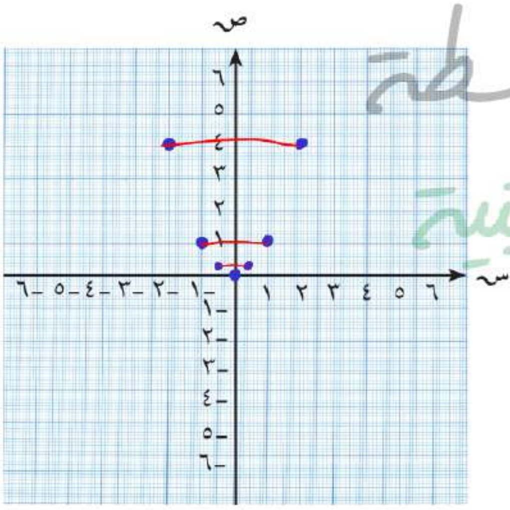
عند رمي كرة السلّة يعتمد اللاعبون على تقدير المسافة وتخيّل شكل مسار الكرة ، فهم يدركون تمامًا أنّ مسار الكرة لن يكون خطًّا مستقيمًا وإنّما منحنى .

اِستكشِف

لتكن الدالّة $ق : ح \longrightarrow ح$ ، $ق(س) = س^2$

١ أكمِل الجدول التالي :

س	٣	٢	١	٠٫٥	٠	٠٫٥-	١-	٢-	٣-
ص	٩	٤	١	٠٫٢٥	٠	٠٫٢٥-	١	٤	٩



٢ عيِّن النقاط السابقة في المستوى الإحداثي المقابِل .

٣ ماذا تلاحظ ؟ هل النقاط تقع على استقامة واحدة ؟

لا

٤ دون استخدام المسطرة ، صِل بين النقاط السابقة .

٥ نلاحظ من الرسم أنّ (٠ ، ٠) هو رأس المنحنى للدالّة $س^2$.

الدالّة الحقيقية التي فيها القوّة الأعلى للمتغيّر المستقلّ تساوي ٢ تُسمّى « **دالّة تربيعية** » .

ويكون الرسم البياني للدالّة التربيعية منحنى على شكل $\vee$ أو $\wedge$ ويُسمّى « **قطع مكافِئ** » .

الصورة العامّة للدالّة التربيعية هي :

$ص = \underbrace{أ س^2}_{\text{حدّ من الدرجة الثانية}} + \underbrace{ب س}_{\text{حدّ من الدرجة الأولى}} + \underbrace{جـ}_{\text{حدّ ثابت}}$ حيث أ ، ب ، جـ أعداد حقيقية ، $أ \neq ٠$

حيث أنّ كلًّا من المجال والمجال المقابِل للدالّة التربيعية هو مجموعة الأعداد الحقيقية .

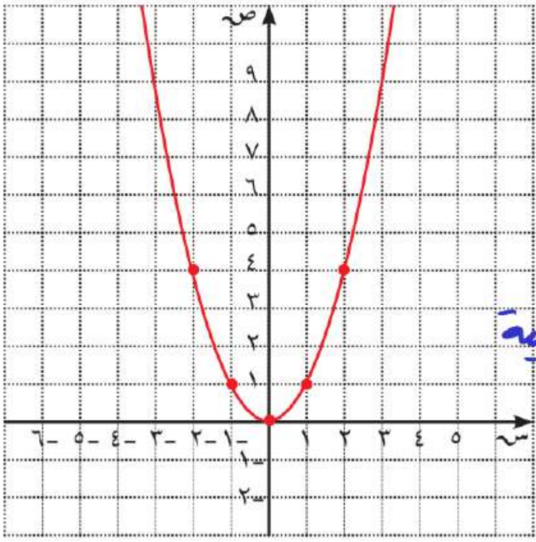
تذكَّر

$(١)^2 = ١$ $(-١)^2 = ١$

$(٢)^2 = ٤$ $(-٢)^2 = ٤$

حُلّ وناقِش

١ يمثّل الشكل المجاوِر بيان الدالّة : ص = س^{٢}
مثِّل في المستوى الإحداثي نفسه بيان كلّ ممّا يلي :



أ) الدالّة : ص = س^{٢} + ٣

س	٢	١	٠	١-	٢-
ص	٧	٤	٣	٤	٧

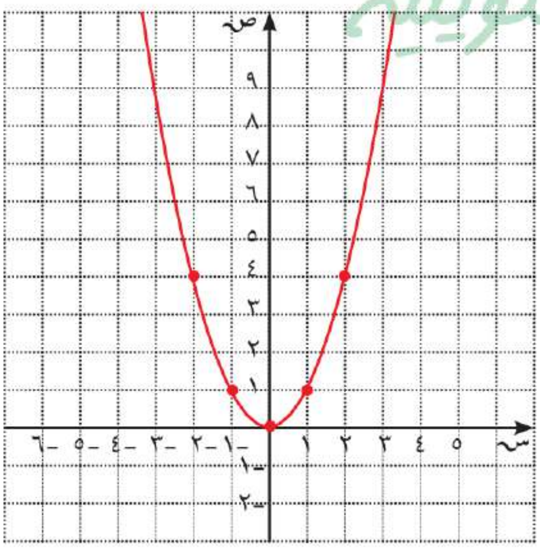
ماذا تلاحظ ؟ بيان الدالّة ص = س^{٢} + ٣ هو إزاحة رأسية
لبيان الدالّة ص = س^{٢} ثلاث وحدات إلى الأعلى
رأس المنحنى هو (٠ ، ٣)

ب) الدالّة : ص = س^{٢} - ٢

س	٢	١	٠	١-	٢-
ص	٢	١-	٢-	١-	٢

ماذا تلاحظ ؟ بيان الدالّة ص = س^{٢} - ٢ هو إزاحة رأسية
لبيان الدالّة ص = س^{٢} وحدتين إلى الأسفل
رأس المنحنى هو (٠ ، ٢-)

٢ يمثّل الشكل المجاوِر بيان الدالّة : ص = س^{٢}
مثِّل في المستوى الإحداثي نفسه بيان كلّ ممّا يلي :



أ) الدالّة : ص = (س - ١)^{٢}

س	٣	٢	١	٠	١-
ص	٤	١	٠	١	٤

ماذا تلاحظ ؟ بيان الدالّة ص = (س - ١)^{٢} هو
إزاحة أفقية
لبيان الدالّة ص = س^{٢} وحدة إلى اليمين
رأس المنحنى هو (١ ، ٠)

ب) الدالّة : ص = (س + ١)^{٢}

س	١	٠	١-	٢-	٣-
ص	٤	١	٠	١	٤

ماذا تلاحظ ؟ بيان الدالّة ص = (س + ١)^{٢} هو إزاحة أفقية

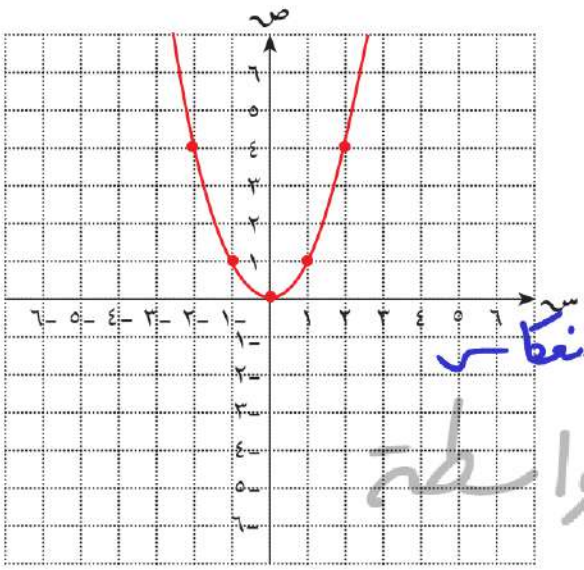
لبيان الدالّة ص = س^{٢} وحدة إلى اليسار

رأس المنحنى هو (١- ، ٠)

٣ **يمثّل الشكل المجاوِر بيان الدالّة : ص = س^{٢}**

مثِّل في المستوى الإحداثي نفسه بيان الدالّة :

ص = ـ س^{٢}



س	٢	١	٠	١-	٢-
ص	٤-	١-	٠	١-	٤-

ماذا تلاحظ ؟ بيان الدالّة ص = ـ س^{٢} هو صورة انعكاس

لبيان الدالّة ص = س^{٢}

في محور س

رأس المنحنى هو (٠ ، ٠)

ملاحظة :

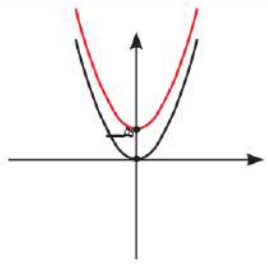
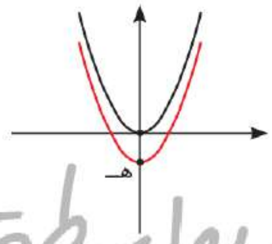
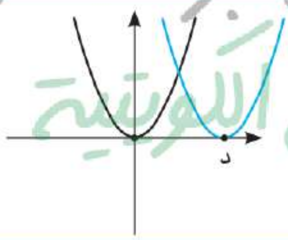
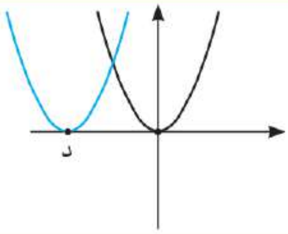
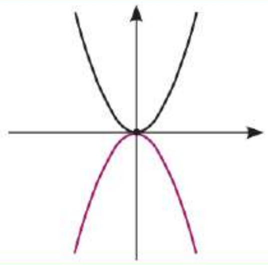
- **الصورة القياسية للدالّة التربيعية :**
  ص = أ (س - د)^{٢} + هـ ؛ أ ، د ، هـ ∈ ح ، أ ≠ ٠
- **تقتصر دراستنا في حالة أ = ١ أي على الصورة ص = (س - د)^{٢} + هـ**
- **رأس منحنى الدالّة ص = (س - د)^{٢} + هـ هو النقطة (د ، هـ) .**

عبِّر عن فهمك (١)

يقول نشمي : بيان الدالّة ص = (س - ١)^{٢} + ٣

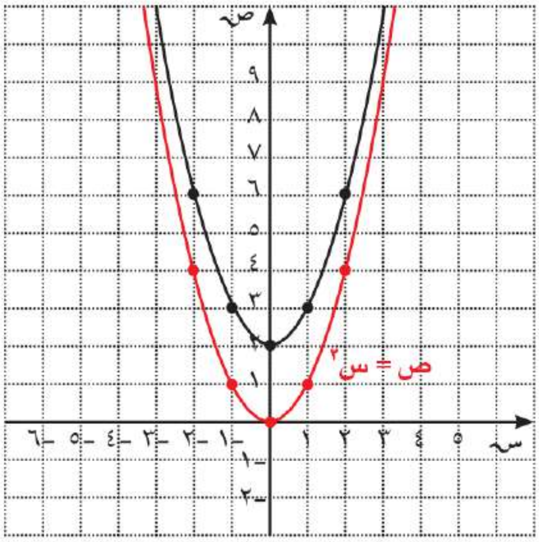
هو إزاحة أفقية لبيان الدالّة ص = س^{٢} وحدة واحدة إلى اليمين وإزاحة رأسية ٣ وحدات إلى الأعلى . هل توافقه الرأي ؟ نعم

ربط الأفكار

الدالّة التربيعية	التحويلات الهندسية المطبَّقة على التمثيل البياني للدالّة التربيعية ص = س^{٢}	التمثيل البياني	مثال
ص = س^{٢} + هـ	إزاحة رأسية بمقدار | هـ | وحدة إلى الأعلى إذا كانت هـ موجَبة .		ص = س^{٢} + ١
	إزاحة رأسية بمقدار | هـ | وحدة إلى الأسفل إذا كانت هـ سالبة .		ص = س^{٢} ـ ١
ص = (س - د)^{٢}	إزاحة أفقية بمقدار | د | وحدة إلى اليمين إذا كانت د موجَبة .		ص = (س - ١)^{٢}
	إزاحة أفقية بمقدار | د | وحدة إلى اليسار إذا كانت د سالبة .		ص = (س - (-١))^{٢} ص = (س + ١)^{٢}
ص = - س^{٢}	اِنعكاس في محور السينات .		ص = ـ س^{٢}

مثال (١) :

مثّل بيانيًّا الدالّة ص = س^{٢} + ٢ مستخدِمًا التمثيل البياني للدالّة التربيعية ص = س^{٢}



الحلّ :

نرسم بيان الدالّة : ص = س^{٢}

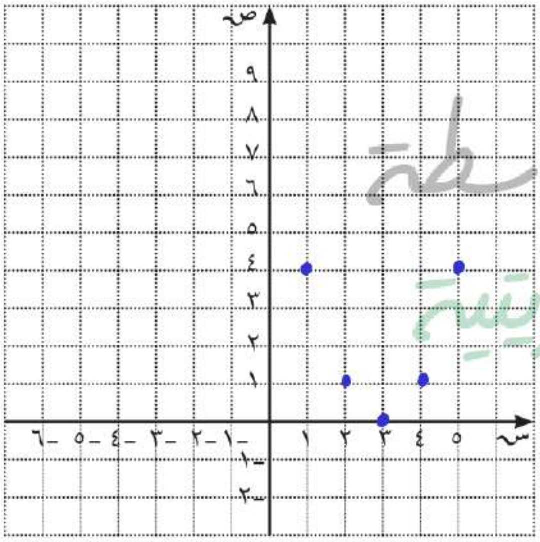
بيان الدالّة ص = س^{٢} + ٢

هو إزاحة رأسية لبيان الدالّة : ص = س^{٢}

وحدتان إلى الأعلى وتُمثَّل كما في الشكل المقابِل .

دورك الآن (١)

مثّل بيانيًّا الدالّة ص = (س - ٣)^{٢} مستخدِمًا التمثيل البياني للدالّة التربيعية ص = س^{٢} .



(أ) أرسم بيان الدالّة : ص = س^{٢}

(ب) بيان الدالّة ص = (س - ٣)^{٢}

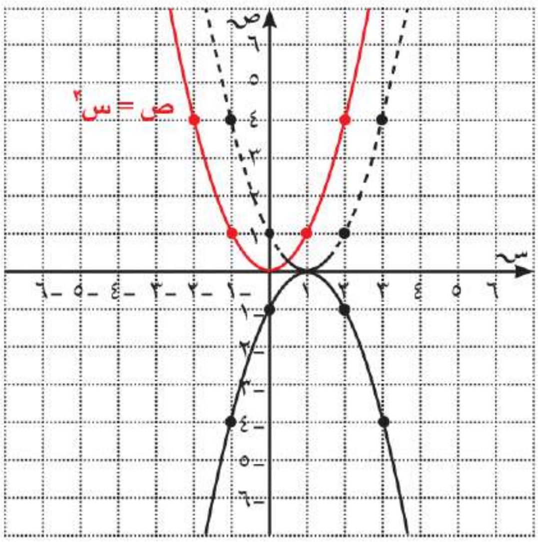
هو إزاحة أفقية لبيان الدالّة : ص = س^{٢}

ثلاثة وحدات الى اليمين .

(ج) أرسم بيان الدالّة : ص = (س - ٣)^{٢}

مثال (٢) :

مثّل بيانيًّا الدالّة ص = - (س - ١)^{٢} مستخدِمًا التمثيل البياني للدالّة التربيعية ص = س^{٢} .



الحلّ :

نرسم بيان الدالّة : ص = س^{٢}

بيان الدالّة ص = - (س - ١)^{٢}

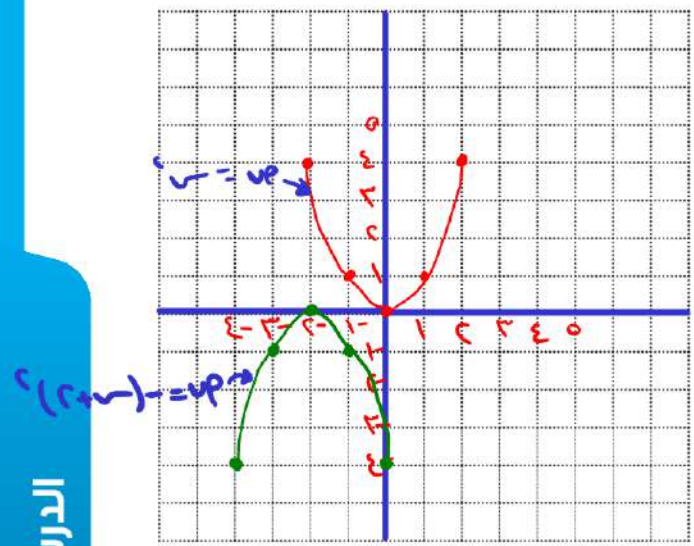
هو إزاحة أفقية لبيان الدالّة : ص = س^{٢}

وحدة واحدة إلى اليمين ، ثمّ الانعكاس في محور السينات .

دورك الآن (٢)

مثِّل بيانيًّا الدالّة ص = - (س + ٢)^{٢} مستخدِمًا التمثيل البياني للدالّة التربيعية ص = س^{٢} .

ص = -(س+٢)^{٢}					
س	-١	٠	-٢	-٣	-٤
ص	-١	-٤	٠	-١	-٤



عبِّر عن فهمك (٢)

وصف كلّ من محمّد وبادي بيان الدالّة ص = - (س - ٣)^{٢}

أيّهما على صواب ؟ ولماذا ؟

يقول محمّد :

بيان الدالّة ص = - (س - ٣)^{٢} هو انعكاس في محور السينات لبيان الدالّة ص = س^{٢} ، ثمّ إزاحة أفقية ٣ وحدات إلى اليمين .

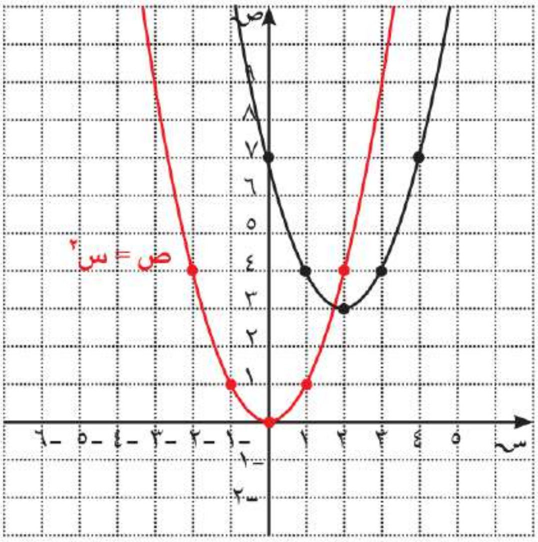
يقول بادي :

بيان الدالّة ص = - (س - ٣)^{٢} هو إزاحة أفقية لبيان الدالّة ص = س^{٢} ، ٣ وحدات إلى اليمين ثمّ انعكاس في محور السينات .

بادي على صواب

مثال (٣) :

مثّل بيانيًّا الدالّة ص = (س - ٢)^{٢} + ٣ مستخدِمًا التمثيل البياني للدالّة التربيعية ص = س^{٢}



الحلّ :

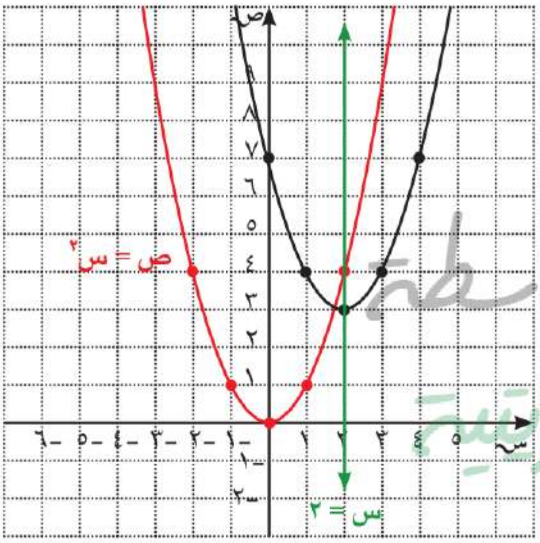
نرسم بيان الدالّة : ص = س^{٢}

بيان الدالّة ص = (س - ٢)^{٢} + ٣

هو إزاحة أفقية لبيان الدالّة : ص = س^{٢}

وحدتان إلى اليمين ، ثمّ إزاحة رأسية ٣ وحدات إلى الأعلى .

من « **مثال (٣)** » ، **نلاحظ أنّ :**



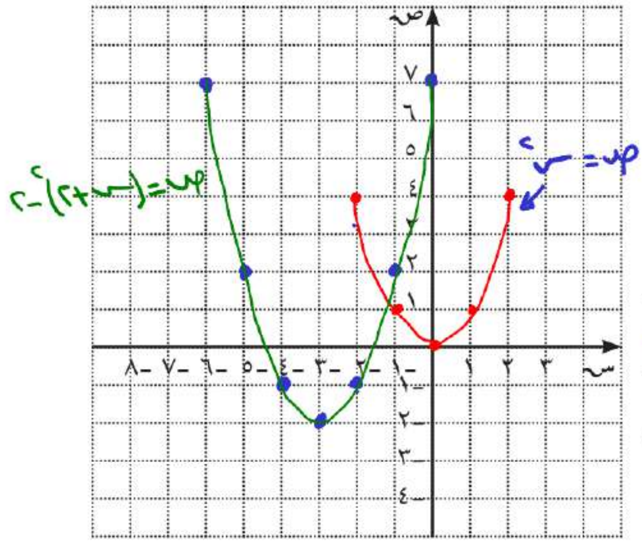
- المستقيم الذي معادلته س = ٢ هو خطّ التماثل للدالّة التربيعية :
  ص = (س - ٢)^{٢} + ٣
- خطّ التماثل هو مستقيم رأسي يوازي محور الصادات .
- خطّ التماثل يمرّ بنقطة رأس المنحنى (٢ ، ٣) .
- خطّ تماثل الدالّة ص = س^{٢} هو محور الصادات .

ملاحظة :

- **خطّ تماثل بيان الدالّة ص = (س - د)^{٢} + هـ هو المستقيم الذي معادلته س = د**

دورك الآن (٣)

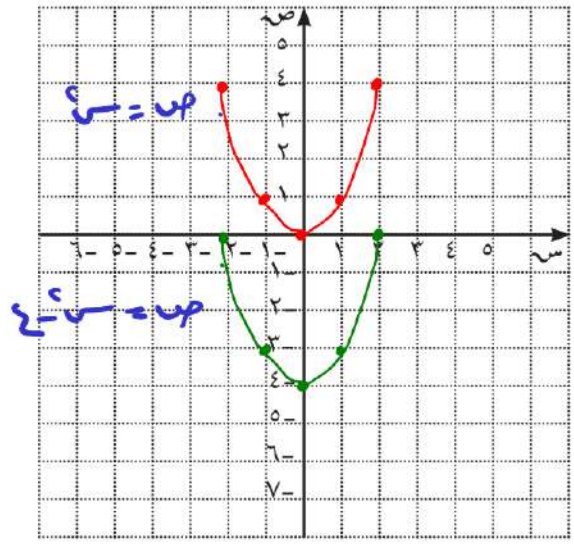
مثّل بيانيًّا الدالّة ص = (س + ٣)^{٢} - ٢ مستخدِمًا التمثيل البياني للدالّة التربيعية ص = س^{٢} .



بيان الدالة ص = (س + ٣)^{٢} - ٢
هو إزاحة أفقية لبيان الدالة ص = س^{٢}
ثلاثة وحدات إلى اليسار ، ثم إزاحة رأسية
وحدتين إلى الأسفل .

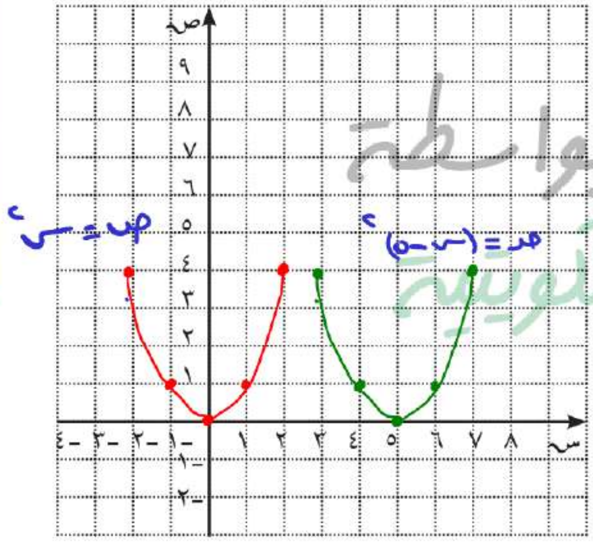
تمارين ذاتية :

مستخدِمًا التمثيل البياني للدالّة التربيعية ص = س^{٢} ، مثِّل بيانيًّا كلًّا من الدوالّ التالية :



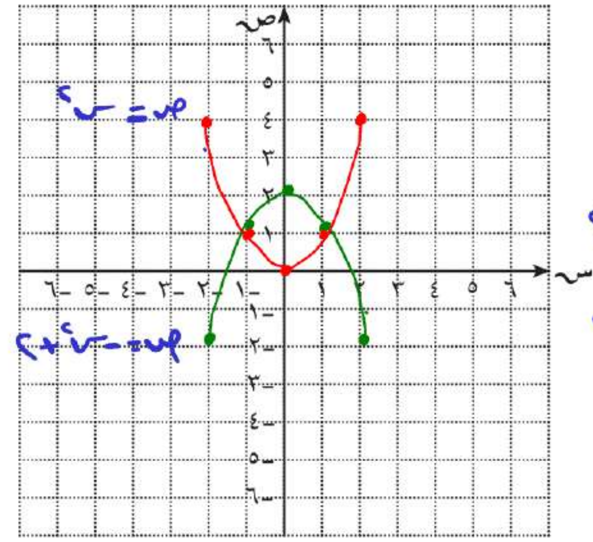
١ ص = س^{٢} - ٤

بيان الدالة ص = س^{٢} - ٤ هو إزاحة
رأسية لبيان الدالة ص = س^{٢}
أربعة وحدات إلى الأسفل



٢ ص = (س - ٥)^{٢}

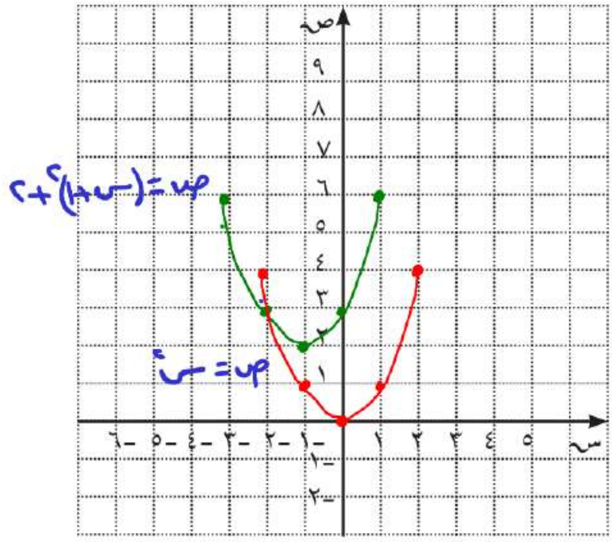
بيان الدالة ص = (س - ٥)^{٢} هو
إزاحة أفقية لبيان الدالة ص = س^{٢}
خمسة وحدات إلى اليمين



٣ ص = - س^{٢} + ٢

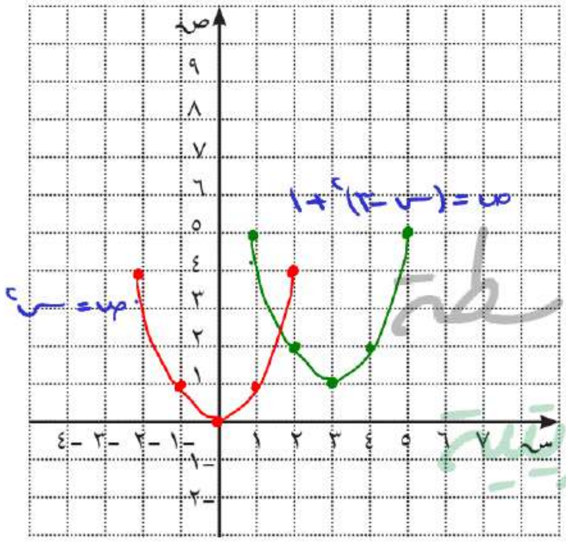
بيان الدالة ص = - س^{٢} + ٢
هو انعكاس لبيان الدالة ص = س^{٢}
ثم إزاحة رأسية وحدتين إلى الأعلى

٤ ص = (س + ١)^{٢} + ٢



بيان الدالة ص = (س + ١)^{٢} + ٢
هو إزاحة أفقية لبيان الدالة ص = س^{٢}
وحدة إلى اليسار، ثم إزاحة رأسية
وحدتين إلى الأعلى

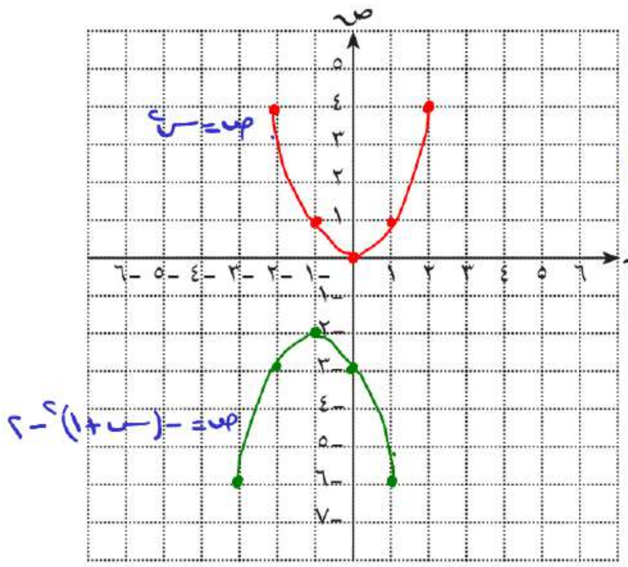
٥ ص = (س - ٣)^{٢} + ١



بيان الدالة ص = (س − ٣)^{٢} + ١
هو إزاحة أفقية لبيان الدالة
ص = س^{٢} ثلاثة وحدات إلى اليمين
ثم إزاحة رأسية وحدة إلى الأعلى

مهارات تفكير عليا :

٦ ص = - (س + ١)^{٢} - ٢

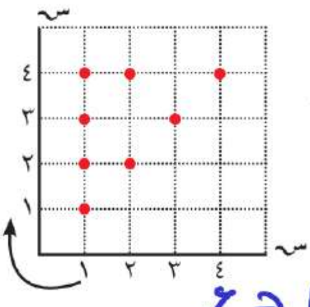


بيان الدالة ص = −(س + ١)^{٢} − ٢ هو
صورة انعكاس لبيان الدالة ص = س^{٢}
ثم إزاحة أفقية وحدة إلى اليسار
ثم إزاحة رأسية وحدتين إلى الأسفل

تقويم الوحدة التعليمية الخامسة
Unit Five Assessment

أوّلًا : البنود المقالية

١ يوضّح المخطّط البياني المقابِل العلاقة ع المعرَّفة على المجموعة س = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ }



أ) أُكتب العلاقة ع بذكر العناصر .

ع = {(١،١)، (١،٢)، (١،٣)، (١،٤)، (٢،٢)، (٢،٤)،
(٣،٣)، (٤،٤)}

ب) اِختبِر العلاقة ع من حيث كونها انعكاسية ، متناظرة ، متعدّية ، تكافؤ .

ع علاقة انعكاسية لأنه كل أ ∈ س فإنه (أ،أ) ∈ ع

ع علاقة ليست متناظرة لأنه (١،٢) ∈ ع و (٢،١) ∉ ع

ع علاقة متعدية لأنه لكل (أ،ب) ∈ ع و (ب،ج) ∈ ع فإنه (أ،ج) ∈ ع

∴ ع علاقة ليست تكافؤاً لأنها ليست متناظرة.

٢ إذا كانت ع علاقة معرَّفة على س = { ٣ ، ٥ ، ٧ ، ٩ } ،

ع = { (٣ ، ٣) ، (٥ ، ٥) ، (٣ ، ٥) ، (٧ ، ٧) ، (٥ ، ٩) ، (٩ ، ٩) ، (٣ ، ٩) }

فاختبِر العلاقة ع من حيث كونها انعكاسية ، متناظرة ، متعدّية ، تكافؤ .

ع علاقة انعكاسية لأنه كل أ ∈ س فإنه (أ،أ) ∈ ع

ع علاقة ليست متناظرة لأنه (٣،٥) ∈ ع و (٥،٣) ∉ ع

ع علاقة متعدية لأنه لكل (أ،ب) ∈ ع و (ب،ج) ∈ ع فإنه (أ،ج) ∈ ع

∴ ع علاقة ليست تكافؤاً لأنها ليست متناظرة.

٣ إذا كانت س = { ١ ، ٢ ، ٣ } ، ص = { ٠ ، ٣ ، ٦ }
وكانت ت تطبيق من س إلى ص حيث ت (س) = ٣س - ٣

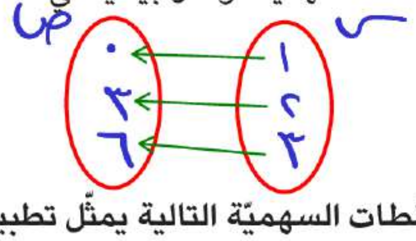
(أ) أكمِل الجدول المقابِل :

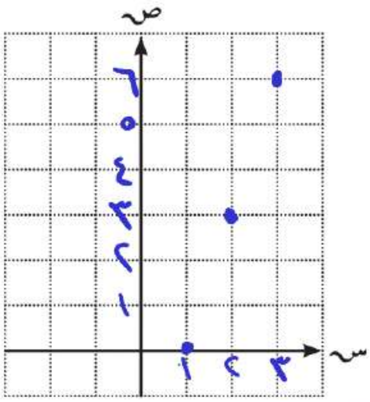
س	١	٢	٣
٣س - ٣	٣×١-٣	٣×٢-٣	٣×٣-٣
ت (س)	٠	٣	٦

(ب) مدى ت = {٠ ، ٣ ، ٦}

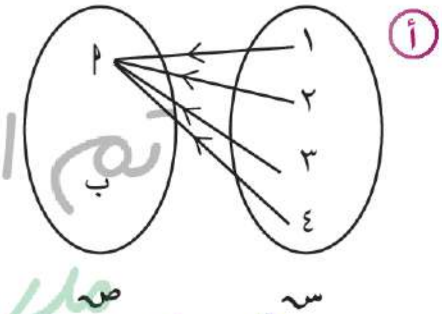
(ج) أُكتب ت كمجموعة من الأزواج المرتَّبة :
ت = {(١ ، ٠) ، (٢ ، ٣) ، (٣ ، ٦)}

(د) أُرسم مخطّطًا سهميًّا ، وآخر بيانيًّا في المستوى الإحداثي .

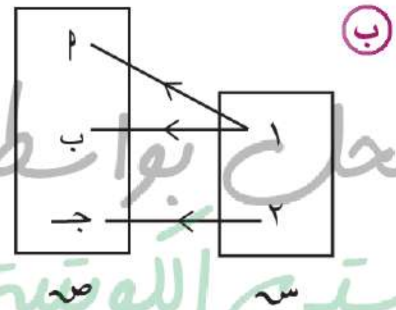




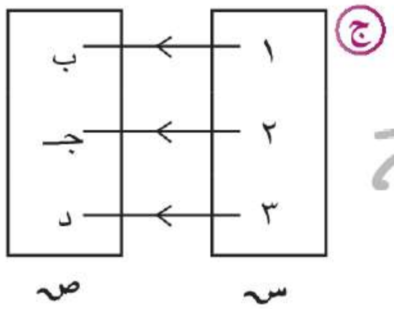
٤ أيّ من المخطّطات السهميّة التالية يمثّل تطبيقًا ؟ ولماذا ؟



يمثل تطبيقًا لأنه كل عنصر من عناصر س ارتبط بعنصر واحد من عناصر ص



لا يمثل تطبيقًا لأنه عنصر من عناصر س خرج منه سهمان إلى أحد عناصر ص



يمثل تطبيقًا لأنه كل عنصر من عناصر س ارتبط بعنصر واحد فقط من عناصر ص

٥ إذا كان التطبيق د : س ⟵ ص ، حيث س = { ٠ ، ١ ، ٢ } ، ص = { -٤ ، ٠ ، ٤ } ،
د (س) = ٤س - ٤

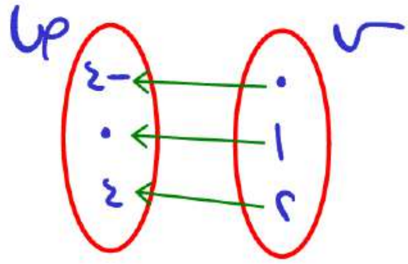
(أ) أوجِد مدى التطبيق د .

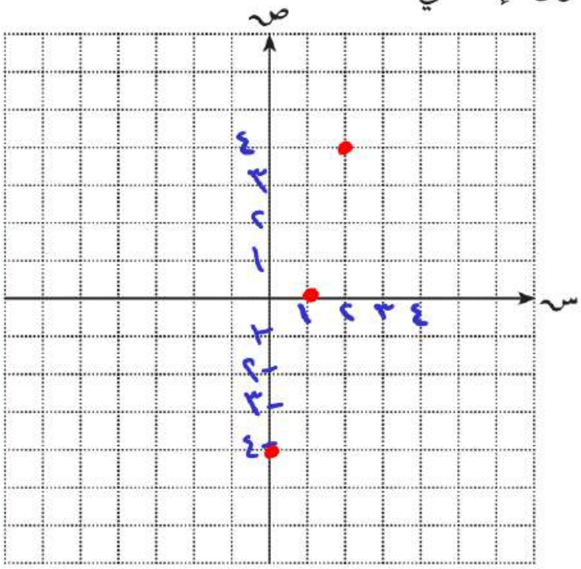
د(٠) = ٤×٠ - ٤ = -٤
د(١) = ٤×١ - ٤ = ٠
د(٢) = ٤×٢ - ٤ = ٤
∴ المدى = {-٤ ، ٠ ، ٤}

(ب) أُكتب د كمجموعة من الأزواج المرتَّبة .

د = {(٠ ، -٤) ، (١ ، ٠) ، (٢ ، ٤)}

(ج) مثّل التطبيق د بمخطّط سهمي وآخر بياني في المستوى الإحداثي .





(د) بيّن نوع التطبيق د من حيث كونه شاملًا ، متباينًا ، تقابلًا ، مع ذكر السبب .

د التطبيق شامل لأنه المدى = المجال المقابل

د التطبيق متباين لأنه د(٠) ≠ د(١) ≠ د(٢)

∴ د التطبيق تقابل لأنه شامل ومتباين .

٦ **إذا كان التطبيق ت : س ← ص ، حيث س = { -١ ، ٠ ، ١ } ، ص = { ١ ، ٢ } ،**
ت (س) = ٢ - س^{٢} ، فبيّن نوع التطبيق ت من حيث كونه شامل ، متباين ، تقابل مع ذكر السبب .

ه(-١) = ٢ - (-١)^{٢} = ١

ه(٠) = ٢ - (٠)^{٢} = ٢

ه(١) = ٢ - (١)^{٢} = ١

∴ المدى = {١ ، ٢}

∴ ه التطبيق شامل لأنه المدى = المجال المقابل

ه التطبيق ليس متباينًا لأنه ه(-١) = ه(١)

ه التطبيق ليس تقابلاً لأنه ليس متباينًا .

٧ إذا كانت س = { ١ ، ٩ } ، ص = { ٢ ، ٣ ، ٤ } ، والتطبيق ت : س ⟵ ص ، حيث
ت (س) = √س + ١

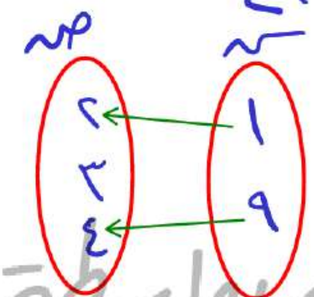
(أ) أوجِد مدى التطبيق ت .

ت(١) = √١ + ١ = ١ + ١ = ٢
ت(٩) = √٩ + ١ = ٣ + ١ = ٤
∴ المدى = { ٢ ، ٤ }

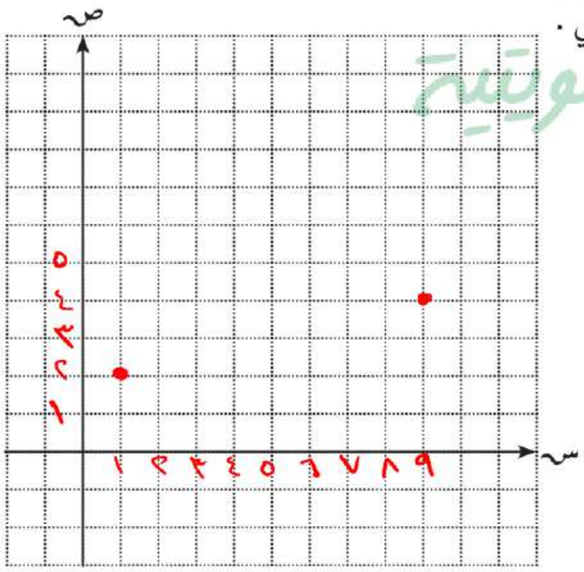
(ب) اُكتب التطبيق ت كمجموعة من الأزواج المرتَّبة .

ت = { (١ ، ٢) ، (٩ ، ٤) }

(ج) مثِّل التطبيق ت بمخطّط سهمي .



(د) مثِّل التطبيق ت بمخطّط بياني في المستوى الإحداثي .

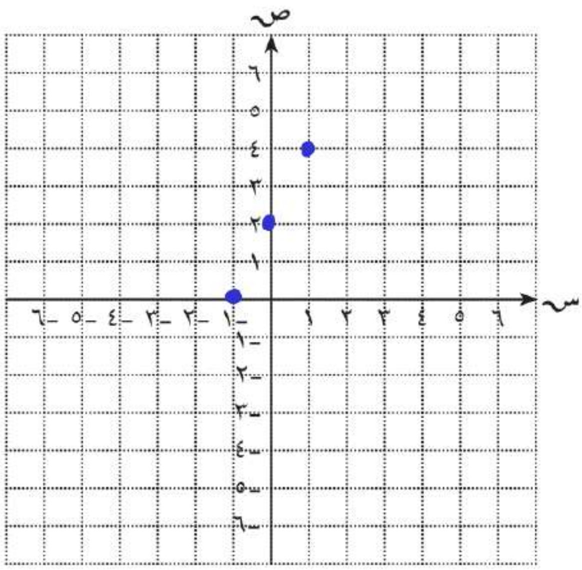


(هـ) بيِّن نوع التطبيق ت من حيث كونه شاملًا ، متباينًا ، تقابلًا ، مع ذكر السبب .

ت التطبيق ليس شاملاً لأنه المدى ≠ المجال المقابل
ت التطبيق متباين لأنه ت(١) ≠ ت(٩)
ت التطبيق ليس تقابلاً لأنه ليس شاملاً

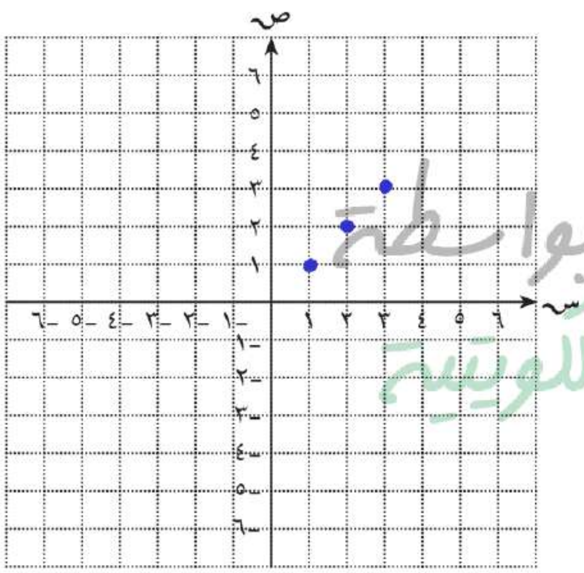
٨ أُرسم بيان الدالّة الخطّية : ص - ٢س = ٢

ص = ٢س + ٢			
س	١-	٠	١
ص	٠	٢	٤

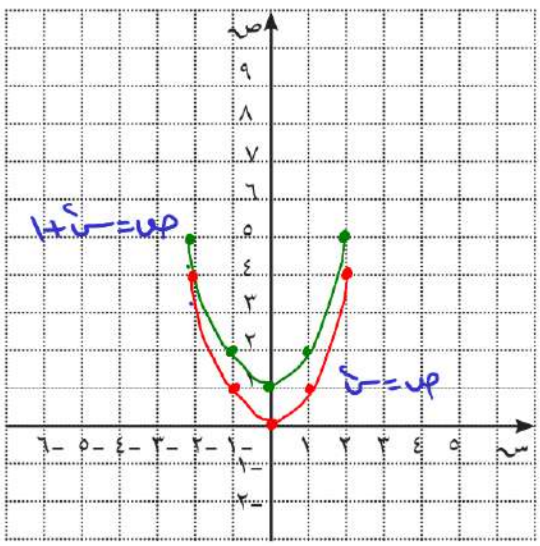


٩ أُرسم بيان الدالّة الخطّية : ص = س

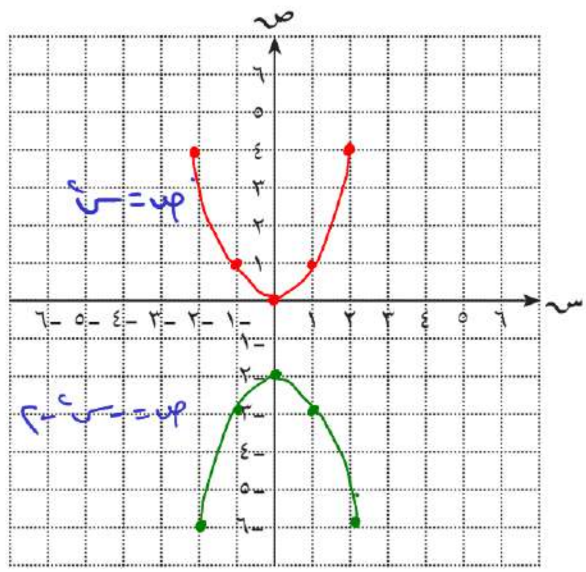
ص = س			
س	١	٢	٣
ص	١	٢	٣



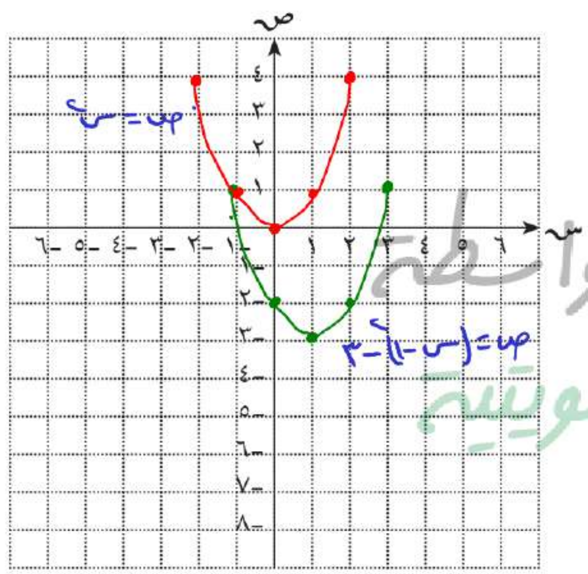
١٠ مثِّل بيانيًّا : ص = $س^٢$ + ١ مستخدِمًا التمثيل البياني للدالّة التربيعية ص = $س^٢$



(١١) مثّل بيانيًّا : ص = - س^{٢} - ٢ مستخدِمًا التمثيل البياني للدالّة التربيعية ص = س^{٢}



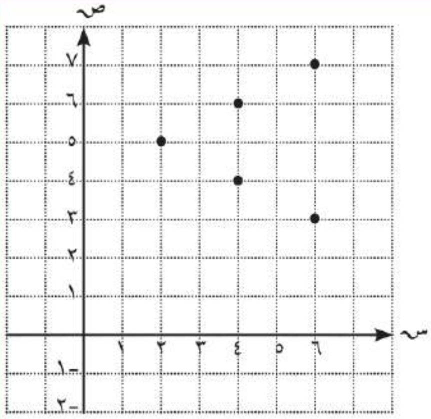
(١٢) مثّل بيانيًّا : ص =(س - ١)^{٢} - ٣ مستخدِمًا التمثيل البياني للدالّة التربيعية ص = س^{٢}



ثانيًا : البنود الموضوعية

في البنود (١ - ٨) ، ظلِّل [أ] إذا كانت العبارة صحيحة ، وظلِّل [ب] إذا كانت العبارة غير صحيحة .

(١) إذا كانت ع علاقة تكافؤ على سـ = { ٣ ، ٥ ، ٦ } ، ع = { (٣ ، ٣) ، (س ، ص) ، (٥ ، ٥) ، (٥ ، ٦) ، (٦ ، ٦) } فإنّ (س ، ص) = (٦ ، ٥)	أ	ب
(٢) علاقة أكبر من أو يساوي على مجموعة أعداد هي علاقة متناظرة .	أ	ب
(٣) علاقة التطابق على مجموعة مثلّثات هي علاقة تكافؤ .	أ	ب

٤ لتكن ع : { ٢ ، ٤ ، ٦ } ⟵ { ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ } فإنّ العلاقة ع الممثَّلة في المستوى الإحداثي المقابِل تمثّل تطبيقًا . 	أ	ب
٥ لتكن س = { -١ ، ٠ ، ١ } ، ص = { -١ ، ٠ ، ١ ، ٢ } التطبيق ت : س ⟵ ص ، حيث ت (س) = س^{٣} ، فإنّ ت تطبيق شامل وليس متباينًا .	أ	ب
٦ إذا كانت النقطة (٣ ، ٢) هي رأس منحنى الدالّة التربيعية ، فإنّ معادلة خطّ التماثل للدالّة هي س = ٣ .	أ	ب
٧ لتكن س = { ٥ ، ٦ ، ٧ } ، إذا كان التطبيق ت : س ⟵ ص ، (ص هي مجموعة الأعداد الصحيحة) ، حيث ت (س) = س ، فإنّ ت تطبيق ليس تقابلًا .	أ	ب
٨ النقطة (١ ، ١) تنتمي إلى بيان الدالّة ص = -٢س + ٣	أ	ب

في البنود (٩ - ٢٣) ، لكلّ بند أربعة اختيارات ، واحد فقط منها صحيح ، ظلِّل الإجابة الصحيحة .

٩ إذا كانت ع علاقة معرَّفة على س = { ٣ ، ٤ ، ٥ } ، ع = { (٤ ، ٤) } ، فإنّ ع تكون :

أ اِنعكاسية　　ب متناظرة وليست متعدّية

ج متناظرة ومتعدّية　　د علاقة تكافؤ

١٠ إذا كانت ع علاقة معرَّفة على س = { ا ، ب } ، ع = { (ا ، ب) ، (ب ، ا) } ، فإنّ :

أ ع علاقة متناظرة فقط　　ب ع علاقة متناظرة ومتعدّية

ج ع علاقة انعكاسية فقط　　د ع علاقة تكافؤ

١١ علاقة التوازي على مجموعة مستقيمات هي :

أ علاقة انعكاسية فقط　　ب علاقة متناظرة فقط

ج علاقة انعكاسية ومتعدّية　　د علاقة تكافؤ

١٢ لتكن سـ = { ١ ، ٤ ، ٢٥ } ، إذا كان التطبيق ت : سـ ⟵ صـ ،
(صـ هي مجموعة الأعداد الصحيحة) ، حيث ت (س) = $\sqrt{\text{س}}$ ، فإنّ ت تطبيق :

أ شامل ومتباين
ب ليس شاملًا وليس متباينًا
ج شامل وليس متباينًا
د متباين وليس شاملًا

١٣ لتكن سـ = { ١ ، ٠ ، -١ } ، التطبيق ه : سـ ⟵ سـ ، حيث ه (س) = س^2 - ١، فإنّ ه تطبيق :

أ متباين وليس شاملًا
ب شامل ومتباين
ج ليس شاملًا وليس متباينًا
د شامل وليس متباينًا

١٤ إذا كانت سـ = { ١ ، ٢ } ، ت : سـ ⟵ سـ ، فإنّ التطبيق التقابل فيما يلي هو :

أ { (١ ، ١) ، (٢ ، ١) }
ب { (١ ، ١) ، (٢ ، ٢) }
ج { (١ ، ٢) ، (٢ ، ٢) }
د ليس أيّ ممّا سبق صحيحًا .

١٥ إذا كان التطبيق ه : صـ ⟵ { ٣ } ، حيث (صـ هي مجموعة الأعداد الصحيحة) ،
ه (س) = ٣ ، فإنّ ه تطبيق :

أ شامل ومتباين
ب ليس شاملًا وليس متباينًا
ج شامل وليس متباينًا
د متباين وليس شاملًا

١٦ إذا كان التطبيق ه : ط ⟵ ط ، حيث (ط هي مجموعة الأعداد الكلّية) ،
ت (س) = ٢س ، فإنّ ت تطبيق :

أ ليس شاملًا وليس متباينًا
ب متباين وليس شاملًا
ج شامل وليس متباينًا
د تقابل

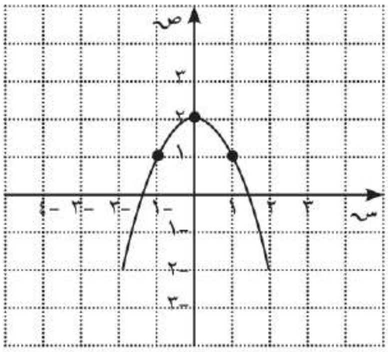
١٧ ليكن التطبيق ت : ح ⟵ ح ، حيث ت (س) = ٢ + ٥س . إذا كان ت (أ) = ٢ ، فإنّ أ تساوي :

أ ٥
ب صفر
ج ٧
د ٣

١٨ إذا كانت النقطة (-٢ ، ١) تنتمي إلى بيان الدالّة : ص = أس + ٣ ، فإنّ أ تساوي :

أ ١
ب -١
ج ٢
د -٢

١٩ يمثّل الشكل المقابِل بيان الدالّة :



أ ص = س^{٢} + ٢

ب ص = ـ س^{٢} + ٢

ج ص = ـ (س^{٢} + ٢)

د ص = س^{٢} ـ ٢

٢٠ بيان الدالّة ص = (س ـ ٢)^{٢} ـ ٤ ، يمثّل بيان الدالّة ص = س^{٢} تحت تأثير :

أ إزاحة أفقية بمقدار ٢ وحدة إلى اليسار ، وإزاحة رأسية بمقدار ٤ وحدات إلى الأسفل .

ب إزاحة أفقية بمقدار ٢ وحدة إلى اليمين ، وإزاحة رأسية بمقدار ٤ وحدات إلى الأسفل .

ج إزاحة أفقية بمقدار ٤ وحدات إلى اليسار ، وإزاحة رأسية بمقدار ٢ وحدة إلى الأعلى .

د إزاحة أفقية بمقدار ٢ وحدة إلى اليمين ، وإزاحة رأسية بمقدار ٤ وحدات إلى الأعلى .

٢١ معادلة خطّ التماثل لمنحنى الدالّة د : د (س) = س^{٢} هي ....

أ س = ١ ب س = ٠ ج ص = ١ د ص = ٠

٢٢ معادلة خطّ التماثل لمنحنى الدالّة د : د (س) = (س ـ ٢)^{٢} هي ....

أ س = ٠ ب س = ٢ ج س = ـ٢ د س = ـ٤

٢٣ نقطة رأس منحنى الدالّة : ص = ـ (س ـ ٣)^{٢} + ٤ هي ....

أ (ـ٣ ، ٤) ب (٣ ، ـ٤) ج (٣ ، ٤) د (ـ٣ ، ـ٤)

في البنود (٢٤ ـ ٢٥) ، اِختر من القائمة (٢) ما يناسب كلّ بند من القائمة (١) لتحصل على عبارة صحيحة .

القائمة (١)	القائمة (٢)
٢٤ إذا كان التطبيق ت : ص ← ص (مجموعة الأعداد الصحيحة) ، ع ت (س) = س^{٢} ، فإنّ ت	أ شامل وليس متباينًا .
	ب متباين وليس شاملًا .
	ج ليس شاملًا وليس متباينًا .
٢٥ إذا كان التطبيق ى : { ـ٢ ، ٠ ، ٢ } ← { ـ١ ، ٠ ، ١ } حيث ى (س) = $\frac{١}{٢}$ س ، فإنّ ى د	د تطبيق تقابل .

الوحدة التعليمية
السادسة

المعادلات الخطّية والمتباينات الخطّية

المنحدرات « هندسة مدن الكويت ... رياضيات على أرض الواقع ! »

عند تخطيط المدن الجديدة في الكويت مثل مدينة المطلاع ومدينة صباح الأحمد ، يراعي المهندسون أن تكون الطرق ليست مستوية تمامًا ، بل فيها ميل بسيط يسمح بانسياب مياه الأمطار نحو المصارف بدلًا من تجمّعها في الشوارع .

كما تُصمَّم الطرق الصاعدة والنازلة عند الجسور أو الأنفاق بدرجات ميل محدَّدة حتّى تكون القيادة فيها مريحة وآمنة .

وتُرسم الشوارع بشكل منظَّم ومتوازٍ ، بحيث تلتقي بطرق أخرى بزوايا متعامدة لتسهيل حركة السير وتنظيم المرور .

المجال	معايير المنهج	مؤشر الأداء
العدّ والجبر	إِستخدام إستراتيجيات متنوّعة لوصف وتحليل العلاقات والتغيّرات .	التذكّر - التعرّف - الفهم - التمثيل - التعاون - العمل الجَماعي - الاستكشاف والتقصّي - الوسائط - المقارنة والتمييز - التعليل - الاستدلال - الاستنتاج - القوانين - حلّ المشكلات - العلاقات - التحليل والتركيب
	إِستخدام المعادلات والنماذج الرياضية لحلّ المسائل .	
	تمثيل وتحليل المواقف والبنى الرياضية باستخدام الرموز الجبرية .	

مخطّط تنظيمي للوحدة التعليمية السادسة

المعادلات الخطّية والمتباينات الخطّية

- الميل
  - المستقيمات المتوازية والمستقيمات المتعامدة
- حلّ معادلتَين خطّيتَين آنيًّا
- المتباينات الخطّية

هل أنت مستعدّ ؟

١ أوجِد ناتج ما يلي :

أ) -١٢ + ٤ = -٨

ب) -٢ - ٣ = -٥

ج) ٧ - ٨ = -١

د) ٠ - (-٧) = ٧

هـ) -٤ - (-٥) = ١

و) ٠ + (-٨) = -٨

٢ ضَع كلًّا من المعادلات التالية في صورة ص = أس + ب ، ثمّ حدِّد أ ، ب في كلّ منها :

أ) ص + س = ٥

ص = -س + ٥

أ = -١ ، ب = ٥

ب) س - ص = -٤

-ص = -س - ٤

ص = س + ٤

أ = ١ ، ب = ٤

ج) ٢ س - ٤ ص - ٧ = ٠

ص = $\frac{١}{٢}$ س - $\frac{٧}{٤}$

أ = $\frac{١}{٢}$ ، ب = -$\frac{٧}{٤}$

د) ٤ ص - ٣ س = ٩

ص = $\frac{٣}{٤}$ س + $\frac{٩}{٤}$

أ = $\frac{٣}{٤}$ ، ب = $\frac{٩}{٤}$

هـ) ص + ٢ س = ٠

ص = -٢ س

أ = -٢ ، ب = ٠

و) -ص + ٣ س = ٠

ص = ٣ س

أ = ٣ ، ب = ٠

٣ أوجِد قيمة ص في الحالات التالية :

أ) ص = ٣ س - ٥
عندما س = ١

ص = ٣ × ١ - ٥

ص = -٢

ب) ص = س - ٣
عندما س = ٠

ص = ٠ - ٣

ص = -٣

ج) ٤ س - ص = ٤
عندما س = ٠

٤ × ٠ - ص = ٤

-ص = ٤

ص = -٤

د) س - ٤ ص = ٦
عندما س = ٢

٢ - ٤ ص = ٦

-٤ ص = ٤

ص = -١

٤ أجِب بنعم أم لا في كلّ ممّا يلي :

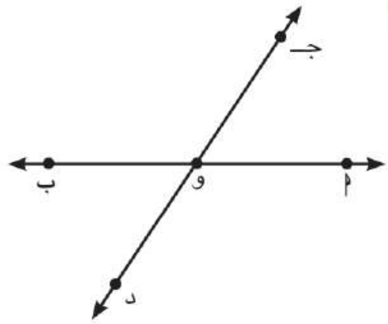
(أ) هل النقطة (٠ ، ٢) هي حلّ للمعادلة : ص = ٣ س + ٢ ؟ .... نعم

(ب) هل النقطة (٢ ، ٤) هي حلّ للمعادلة : ص = ٢ س + ١ ؟ .... لا

(ج) هل النقطة (١ ، -١) هي حلّ للمعادلة : ص = - ٣ س + ١ ؟ .... لا

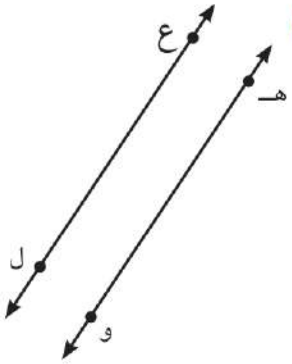
٥ أكمِل ما يلي :

(أ)



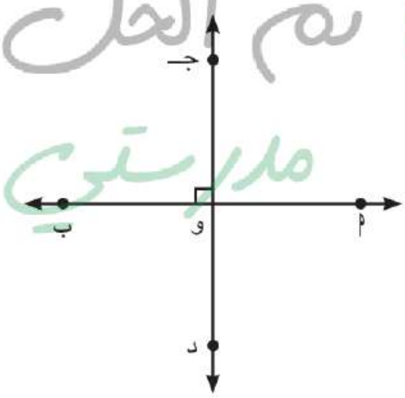
$\overleftrightarrow{\text{أ ب}} \cap \overleftrightarrow{\text{جـ د}}$ = ... و

(ب)



$\overleftrightarrow{\text{هـ و}} \cap \overleftrightarrow{\text{ع ل}}$ = ... ϕ

(ج)



$\overleftrightarrow{\text{أ ب}} \cap \overleftrightarrow{\text{جـ د}}$ = ... و

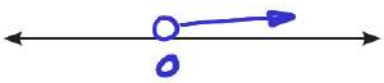
ق (أ و̂ جـ) = ... ٩٠

٦ حُلّ كلًّا من المتباينات التالية في ح ، ومثّل مجموعة الحلّ على خطّ الأعداد .

(أ) س + ٢ > ٧

س > ٧ - ٢

س > ٥



(ب) س - ٣ ≤ ٠

س ≤ ٣

٦ - ١ الميل Slope

سوف تتعلّم : كيفية إيجاد ميل خطّ مستقيم .

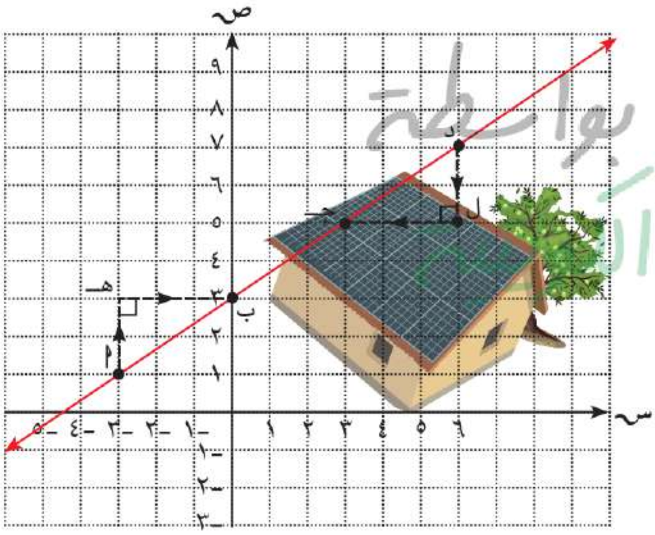
العبارات والمفردات :

الميل	Slope	ميل موجَب	Positive Slope
التغيّر الأفقي	Horizontal Change	ميل سالب	Negative Slope
التغيّر الرأسي	Vertical Change		

اِستكشِف (١)

أراد أحمد وهو مهندس كهربائي تصميم سقف لبيت في مزرعته يتميّز بدرجة انحدار مناسِبة لتركيب ألواح شمسية تهدف إلى توفير الطاقة الكهربائية المستهلَكة داخل مزرعته .

هيّا نساعد أحمد في حساب الانحدار المناسِب للسقف .



١ أكمِل ما يلي :

(أ) لحساب الانحدار المناسِب للمستقيم المارّ بالنقطتَين د ، جـ ، يمكن التحرّك من النقطة د إلى النقطة ل رأسيًا إلى الأسفل ، ثمّ من النقطة ل إلى النقطة جـ أفقيًا إلى اليسار .

التغيّر الرأسي من د إلى ل = ٥ - ٧ = - ٢ (وحدتان إلى الأسفل)

التغيّر الأفقي من ل إلى جـ = ٣ - ٦ = ٣ (٣ وحدات إلى اليسار)

$\therefore \dfrac{\text{التغيّر الرأسي}}{\text{التغيّر الأفقي}} = \dfrac{٢}{٣}$

معلومة مفيدة :

تتكوّن الألواح الشمسية من مجموعة من الخلايا الشمسية التي تحوّل ضوء الشمس إلى كهرباء .
تكون زاوية الميل المثالية للألواح الشمسية في الكويت من ٢٥° إلى ٣٥° تقريبًا نحو الجنوب وتتغيّر من فصل إلى آخر .

(ب) وبالمثل يمكن حساب الانحدار المناسِب بأخذ أيّ نقطتَين مثل أ ، ب لحساب الانحدار المناسِب للمستقيم المارّ بالنقطتَين أ ، ب يمكن التحرّك من النقطة أ إلى النقطة هـ رأسيًّا إلى الأعلى ، ثمّ من النقطة هـ إلى النقطة ب أفقيًّا إلى اليمين .

التغيّر الرأسي من أ إلى هـ = ٣ - ١ = ٢ (وحدتان إلى الأعلى)

التغيّر الأفقي من هـ إلى ب = ٠ - (......-٣......) = ...٣...... (٣ وحدات إلى اليمين)

∴ $\frac{\text{التغيّر الرأسي}}{\text{التغيّر الأفقي}} = \frac{\text{......٢......}}{\text{......٣......}}$

• ماذا تلاحظ ؟ ......التغير الرأسي على التغير الأفقي متطابقة في (أ) ، (ب)......

نسمّي $\frac{\text{التغيّر الرأسي}}{\text{التغيّر الأفقي}}$ بميل $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ ، وبالتالي يحدّد درجة الانحدار المطلوبة للسقف .

∴ الميل = $\frac{\text{التغيّر الرأسي}}{\text{التغيّر الأفقي}}$

لاحِظ أنّ : التغيّر الرأسي هو التغيّر في الإحداثي الصادي $ص_٢ - ص_١$

التغيّر الأفقي هو التغيّر في الإحداثي السيني $س_٢ - س_١$

٢ أكمِل ما يلي :

(أ) د (٦ ، ٧) ، جـ (٣ ، ٥)

$\frac{\text{التغيّر في الإحداثي الصادي}}{\text{التغيّر في الإحداثي السيني}} = \frac{\text{......٧...... - ......٥......}}{\text{......٦...... - ......٣......}} = \frac{\text{......٢......}}{\text{......٣......}} = \frac{\text{......٢......}}{\text{......٣......}}$

(ب) أ (-٣ ، ١) ، ب (٠ ، ٣)

$\frac{\text{التغيّر في الإحداثي الصادي}}{\text{التغيّر في الإحداثي السيني}} = \frac{\text{......٣...... - ......١......}}{\text{......٠...... - ......(-٣)......}} = \frac{\text{......٢......}}{\text{......٣......}}$

• قارِن بين الناتجَين في (أ) ، (ب) (ماذا تلاحظ ؟) ....

نلاحظ أنّ : ميل المستقيم ثابت لأيّ نقطتَين عليه .

إذا كانت أ ($س_١$ ، $ص_١$) ، ب ($س_٢$ ، $ص_٢$) نقطتَين مختلفتَين في المستوى الإحداثي ، فإنّ :

ميل $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ = $\frac{\text{التغيّر الرأسي}}{\text{التغيّر الأفقي}} = \frac{\text{التغيّر في الإحداثي الصادي}}{\text{التغيّر في الإحداثي السيني}}$

م = $\frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$ حيث $س_٢ \neq س_١$

اِنتبِه

إذا كان أ ∈ ح - { ٠ } ، فإنّ

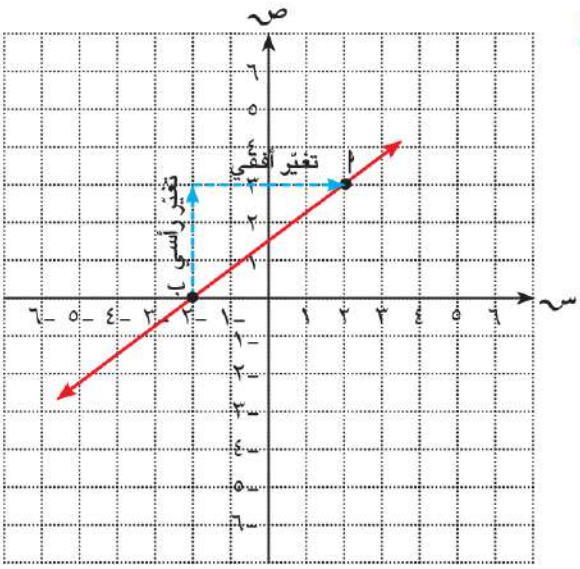
• $\frac{٠}{أ} = ٠$

• $\frac{أ}{٠}$ كمّية غير معرَّفة

الدرس الأوّل

لاحِظ أنّ :

أ

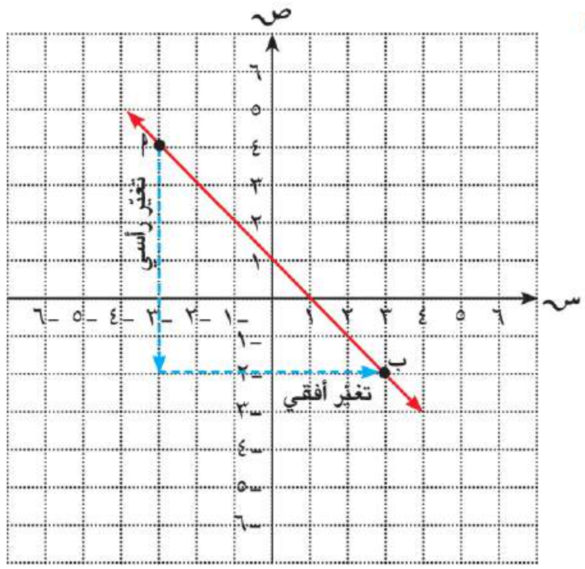


ميل $\overleftrightarrow{أب}$ = ...

نلاحظ (ص تزداد بزيادة س)

∴ ميل المستقيم موجَب

ب

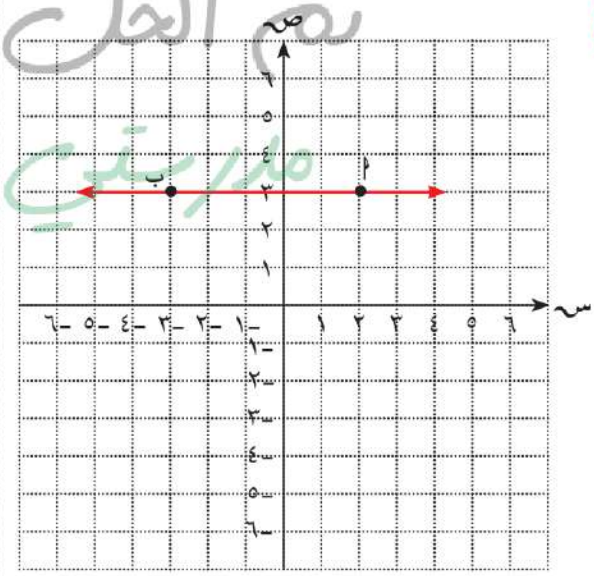


ميل $\overleftrightarrow{أب}$ = ...

نلاحظ (ص تقلّ بزيادة س)

∴ ميل المستقيم سالب

ج



ميل $\overleftrightarrow{أب}$ = ... = ...

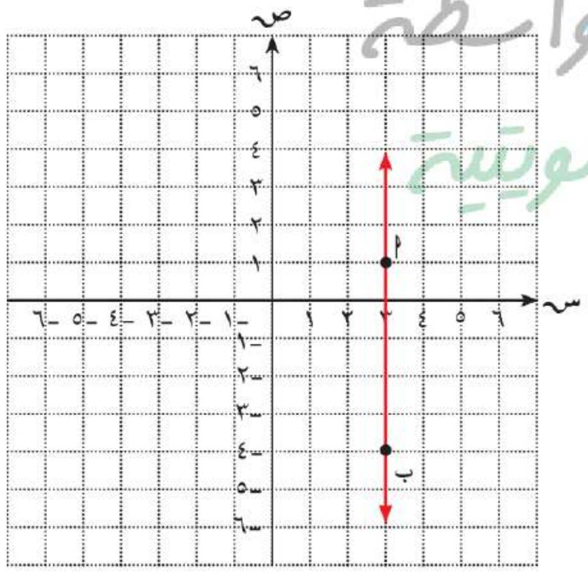
نلاحظ (المستقيم أفقي فيه ص ثابتة)

المستقيم $\overleftrightarrow{أب}$ // محور ....

∴ ميل المستقيم الأفقي يساوي صفرًا .

بيان ص = ٣ هو خطّ مستقيم أفقي يوازي محور السينات .

د



لا نستطيع حساب الميل لأنّ تعريف الميل يشترط وجود تغيّر في الإحداثي السيني .

نلاحظ (المستقيم رأسي فيه س ثابتة)

المستقيم $\overleftrightarrow{أب}$ // محور ....

∴ المستقيم الرأسي ليس له ميل .

بيان س = ٣ هو خطّ مستقيم رأسي يوازي محور الصادات .

مثال (١):

أوجِد ميل المستقيم الذي يمرّ بالنقطتَين أ (-٣ ، ١) ، ب (٤ ، ٦)

الحلّ :

$$\text{ميل } \overleftrightarrow{\text{أ ب}} = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$$

$$= \frac{٦ - ١}{٤ - (-٣)}$$

$$= \frac{٥}{٤ + ٣} = \frac{٥}{٧}$$

لاحِظ أنّ

$$م = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{ص_١ - ص_٢}{س_١ - س_٢}$$

حيث $س_٢ \neq س_١$

دورك الآن (١)

أوجِد ميل $\overleftrightarrow{\text{هـ ك}}$ حيث هـ (٥ ، ٢) ، ك (-٢ ، ٣) .

$$\text{ميل هـ ك} = \frac{٣ - ٢}{-٢ - ٥} = \frac{١}{-٧} = \frac{-١}{٧}$$

عبِّر عن فهمك (١)

أوْجَدَ عامر ميل المستقيم المارّ بالنقطتَين (-٢ ، ٣) ، (٥ ، ٧)

كما يلي : $\frac{٧ - ٣}{(-٢) - ٥} = \frac{٤}{-٧} = -\frac{٤}{٧}$

$$\frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{٧ - ٣}{٥ - (-٢)} = \frac{٤}{٧}$$

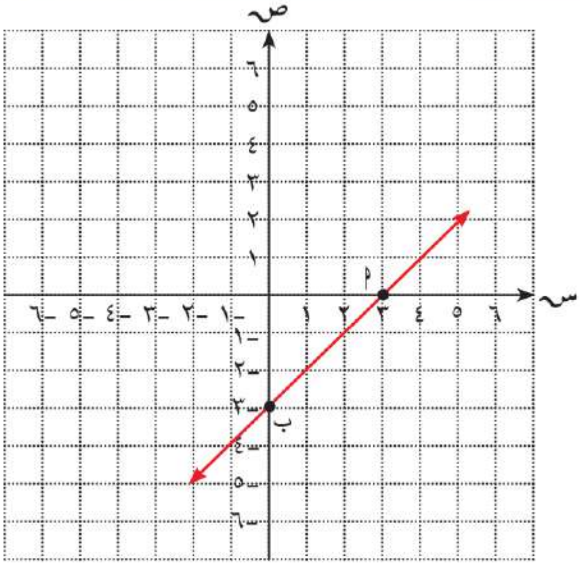
هل عامر على صواب ؟ وضِّح إجابتك .

لا ، لأنه يجب الترتيب إما $\frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$ أو $\frac{ص_١ - ص_٢}{س_١ - س_٢}$

دورك الآن (٢)

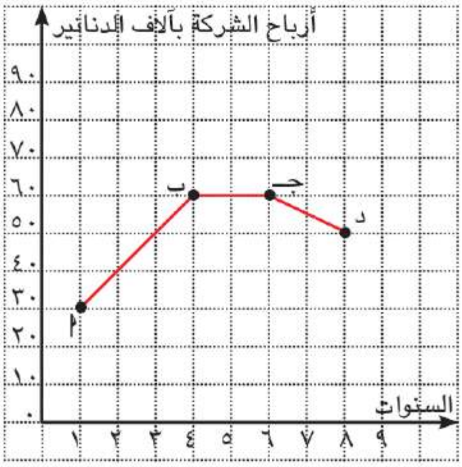
في الشكل المقابِل :

أوجِد ميل $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$.



أ(٣ ، ٠) ، ب(٠ ، -٣)

$$\frac{-٣ - ٠}{٠ - ٣} = \frac{-٣}{-٣} = ١$$



مثال (٢) :

يوضّح الشكل المقابِل تغيّر أرباح شركة خلال ٨ سنوات بآلاف الدنانير . أوجِد ميل كلّ من $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{جـ د}}$. ما دلالة كلّ منها ؟

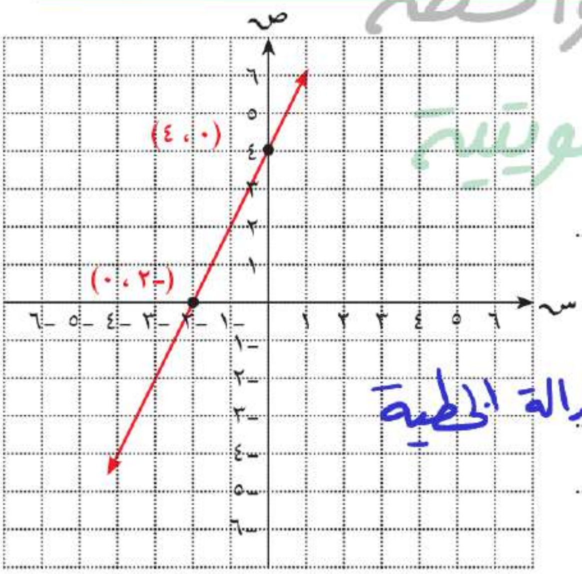
الحلّ :

ميل $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ = $\frac{٦٠ - ٣٠}{٤ - ١}$ = $\frac{\cancel{٣٠}^{١٠}}{\cancel{٣}_{١}}$ = ١٠ وهو يعبّر عن تزايد أرباح الشركة خلال السنوات الأربع الأولى بمعدَّل ١٠ آلاف دينار .

ميل $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$ = $\frac{٦٠ - ٦٠}{٦ - ٤}$ = $\frac{\text{صفر}}{٢}$ = صفر وهو يعني أنّ أرباح الشركة كانت ثابتة خلال السنتَين الخامسة والسادسة .

ميل $\overleftrightarrow{\text{جـ د}}$ = $\frac{٥٠ - ٦٠}{٨ - ٦}$ = $\frac{-\cancel{١٠}^{٥}}{\cancel{٢}_{١}}$ = −٥ وهو يعبّر عن تناقص أرباح الشركة خلال السنتَين الأخيرتَين بمعدَّل ٥ آلاف دينار .

اِستكشِف (٢)



يمثّل الشكل المقابِل بيان الدالّة الخطّية :

ص = ٢ س + ٤

من الرسم ، أكمِل ما يلي :

١ (أ) ميل المستقيم = $\frac{٤ - ٠}{٠ - (-٢)}$ = $\frac{٤}{٢}$ = ٢

(ب) ما العلاقة بين ميل المستقيم ومعامل س في الدالّة الخطّية ؟

ميل المستقيم هو معامل س في الدالة الخطية

٢ (أ) الجزء المقطوع من محور الصادات هو ٤

وهو الإحداثي الصادي لنقطة تقاطع المستقيم مع محور الصادات ، أي عندما يساوي الإحداثي السيني صفرًا .

ما العلاقة بين الحدّ الثابت في الدالّة الخطّية والجزء المقطوع من محور الصادات ؟

الحد الثابت في الدالة الخطية = الجزء المقطوع من محور الصادات

(ب) الجزء المقطوع من محور السينات هو -٢

وهو الإحداثي السيني لنقطة تقاطع المستقيم مع محور السينات ، أي عندما يساوي الإحداثي الصادي صفرًا .

المستقيم الذي ميله م والجزء المقطوع من محور الصادات ب تكون معادلته على الصورة :
ص = م س + ب (تُسمّى الصورة القياسية لمعادلة المستقيم)

أمّا الصورة العامّة لمعادلة مستقيم فهي : أ س + ب ص + جـ = ٠ حيث أ ، ب ، جـ ∈ ح ؛
أ ، ب لا يساويان الصفر معًا .

ملاحظة :

إذا كانت معادلة المستقيم على الصورة : ص = م س + ب
فإنّ :

- **ميل المستقيم = م (معامل س)**
- **الجزء المقطوع من محور الصادات = ب (الحدّ الثابت)**
- **لإيجاد الجزء المقطوع من محور السينات ، نضع ص = ٠ ، ونوجد قيمة س**

مثال (٣) :

أوجِد الميل والجزء المقطوع من محور الصادات والجزء المقطوع من محور السينات للمستقيم الذي معادلته : ص = ٢ س - ٥

الحلّ :

ص = ٢ س - ٥

المعادلة على الصورة : ص = م س + ب

∴ الميل (م) = ٢

الجزء المقطوع من محور الصادات (ب) = -٥

لإيجاد الجزء المقطوع من محور السينات نضع ص = ٠ في المعادلة ص = ٢ س - ٥

∴ ٢ س - ٥ = ٠ نحلّ المعادلة

٢ س - ٥ + ٥ = ٠ + ٥

$\cancel{٢}$ س × $\frac{١}{\cancel{٢}}$ = ٥ × $\frac{١}{٢}$

س = $\frac{٥}{٢}$

إذًا الجزء المقطوع من محور السينات = $\frac{٥}{٢}$

مثال (٤) :

أوجِد الميل والجزء المقطوع من محور الصادات للمستقيم الذي معادلته : ٤ س + ٢ ص = ٦

الحلّ :

نضع المعادلة على الصورة : ص = م س + ب

٢ ص = − ٤ س + ٦

ص = − ٢ س + ٣

∴ الميل (م) = − ٢

الجزء المقطوع من محور الصادات (ب) = ٣

اِنتبِه

لإيجاد الميل (م) والجزء المقطوع من محور الصادات (ب) ،
ضَع معادلة المستقيم على الصورة القياسية : ص = م س + ب

مثال (٥) :

أوجِد الميل والجزء المقطوع من محور الصادات للمستقيم الذي معادلته :
ص = ٢

الحلّ :

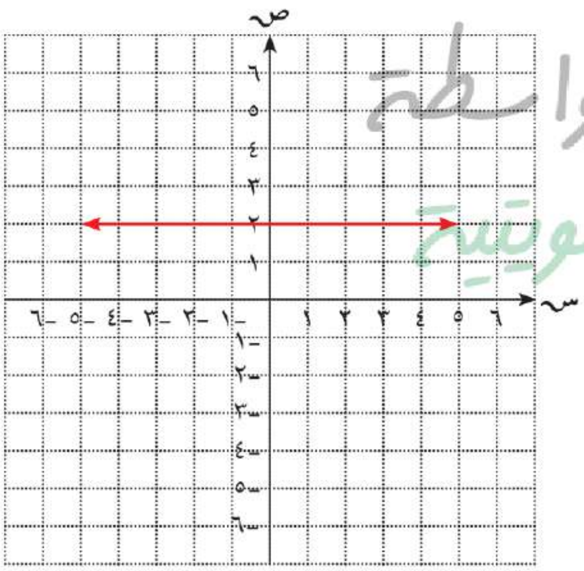
المعادلة : ص = ٢

على الصورة : ص = م س + ب

∴ الميل (م) = ٠ (يوازي محور السينات)

الجزء المقطوع من محور الصادات (ب) = ٢

للتحقّق بيانيًا



عبِّر عن فهمك (٢)

هل المستقيم الذي معادلته س = ٥ يقطع محور الصادات ؟

فسِّر إجابتك . لا يقطع محور الصادات لأنه يوازيه .

لاحِظ أنّ

- س = ٠
  هي معادلة محور الصادات .
- ص = ٠
  هي معادلة محور السينات .

ملاحظة :

إذا كان أ ، ب ∈ ح ، فإنّ :

- **المستقيم س = أ هو مستقيم رأسي (ليس له ميل) ويوازي محور الصادات .**
- **المستقيم ص = ب هو مستقيم أفقي (ميله يساوي صفرًا) ويوازي محور السينات .**

دورك الآن (٣)

أوجِد الميل والجزء المقطوع من محور الصادات والجزء المقطوع من محور السينات للمستقيم الذي معادلته :

(أ) ص = ٥ س + ٣

الميل = ٥

الجزء المقطوع من محور الصادات = ٥

الجزء المقطوع من محور السينات = $\frac{-٣}{٥}$

(ب) ص = ٢ - ٣ س

الميل = -٣

الجزء المقطوع من محور الصادات = ٢

الجزء المقطوع من محور السينات = $\frac{٢}{٣}$

(ج) ٤ ص = - ٧ س

الميل = $\frac{-٧}{٤}$

الجزء المقطوع من محور الصادات = ٠

الجزء المقطوع من محور السينات = ٠

(د) ٣ س + ص = ٦

الميل = -٣

الجزء المقطوع من محور الصادات = ٦

الجزء المقطوع من محور السينات = ٢

عبِّر عن فهمك (٣)

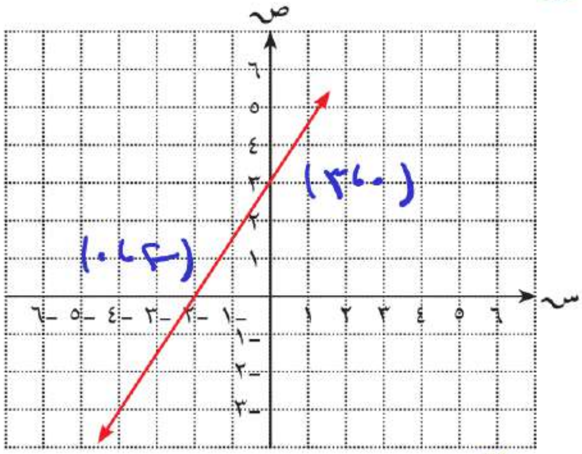
أعطِ مثالًا لمعادلة مستقيم يكون فيه الجزء المقطوع من محور الصادات يساوي صفرًا .

ص = ٢ س

تمارين ذاتية :

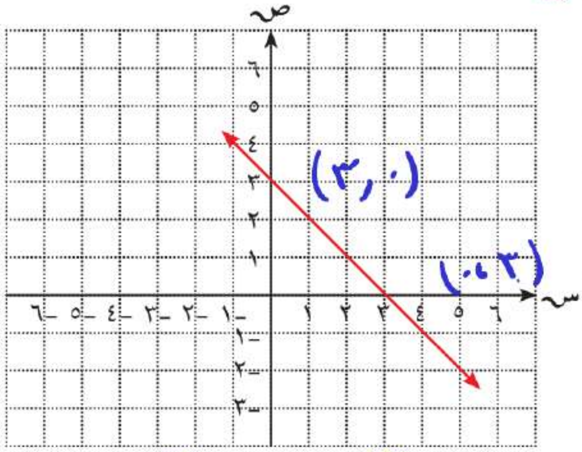
١ أوجِد ميل كلّ من المستقيمات التالية إن أمكن ذلك :

(أ)



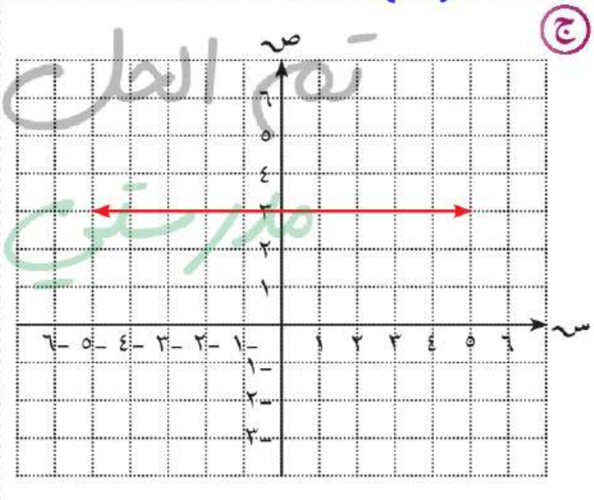
$\frac{٣ - ٠}{٠ - (-٢)} = \frac{٣}{٢}$

(ب)



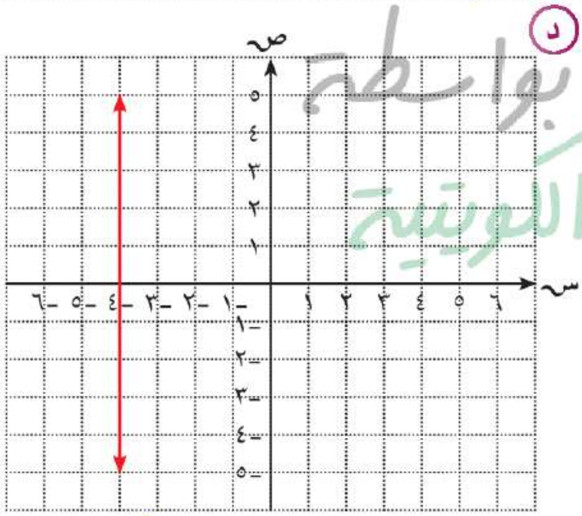
$\frac{٠ - ٣}{٣ - ٠} = \frac{-٣}{٣} = -١$

(ج)



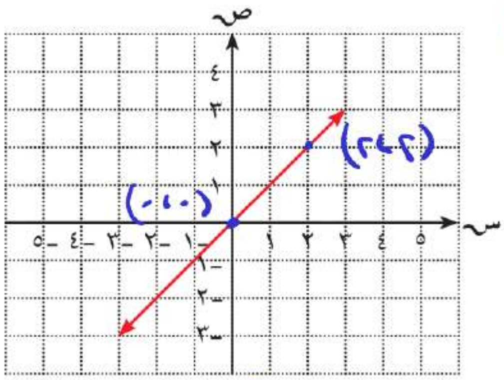
ص = ٣

(د)



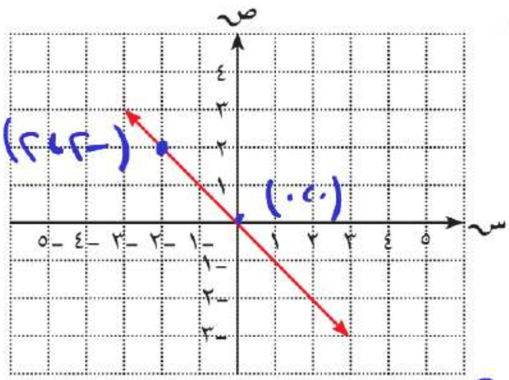
س = -٤

(هـ)



$\frac{٢ - ٠}{٢ - ٠} = \frac{٢}{٢} = ١$

(و)



$\frac{٢ - ٠}{-٢ - ٠} = \frac{٢}{-٢} = -١$

٢ أوجِد ميل المستقيم المارّ بالنقطتَين في كلّ ممّا يلي :

(أ) أ (٢ ، ١) ، ب (٣ ، ٥)

$= \frac{٥ - ١}{٣ - ٢} = \frac{٤}{١} = ٤$

(ب) س (−١ ، ٧) ، ص (٣ ، ٤)

$= \frac{٧ - ٤}{-١ - ٣} = \frac{٣}{-٤} = \frac{-٣}{٤}$

(ج) ع (−٥ ، ٠) ، ل (٠ ، ٤)

$= \frac{٤ - ٠}{٠ - (-٥)} = \frac{٤}{٥}$

(د) هـ (٢ ، ٤) ، ل (−٥ ، ٤)

$= \frac{٤ - ٤}{٢ - (-٥)} =$ صفر

يوازي محور الصادات

٣ أوجِد الميل والجزء المقطوع من محور الصادات والجزء المقطوع من محور السينات للمستقيم الذي معادلته :

(أ) ص = ٤ س + ٥

الميل = ٤

الجزء المقطوع من محور الصادات = ٥

الجزء المقطوع من محور السينات = $\frac{-٥}{٤}$

(ب) ص = ٢ − ٥ س

الميل = −٥

الجزء المقطوع من محور الصادات = ٢

الجزء المقطوع من محور السينات = $\frac{٢}{٥}$

٤ أوجِد الميل والجزء المقطوع من محور الصادات للمستقيم الذي معادلته :

(أ) ص = ٢ س

الميل = ٢

الجزء المقطوع من محور الصادات = ٠

(ب) ٣ س + ص = ٧

الميل = −٣

الجزء المقطوع من محور الصادات = ٧

(ج) ٢ ص − ٥ س + ٣ = ٠

ص = $\frac{٥}{٢}$ س − $\frac{٣}{٢}$

الميل = $\frac{٥}{٢}$

الجزء المقطوع من محور الصادات = $\frac{-٣}{٢}$

(د) ٣ ص = ٣ س + ٦

ص = س + ٢

الميل = ١

الجزء المقطوع من محور الصادات = ٢

(هـ) −ص + س + ٨ = ٠

ص = س + ٨

الميل = ١

الجزء المقطوع من محور الصادات = ٨

(و) ص = ٤

يوازي محور السينات

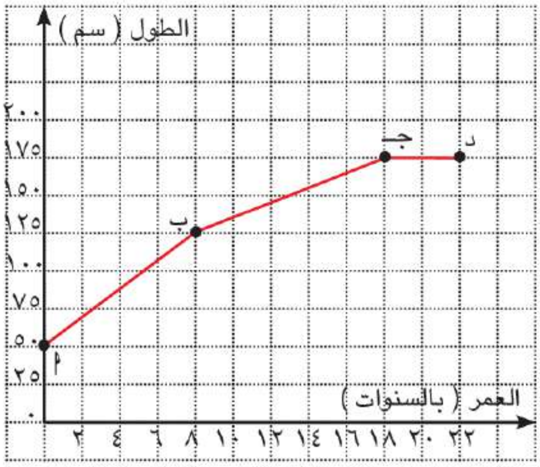
الميل = صفر

الجزء المقطوع من محور الصادات = ٤

5 يوضّح الشكل المقابِل العلاقة بين طول شخص (بالسنتيمتر) وعمره بالسنوات .

أوجِد ميل كلّ من $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{جـ د}}$.

ما دلالة كلّ منها ؟



ميل أب = $\frac{١٢٥ - ٥٠}{٨ - ٠} = \frac{٧٥}{٨} = ٩\frac{٣}{٨}$

وهو يعبر عن تزايد طول الأشخاص بمعدل $٩\frac{٣}{٨}$ خلال هذه السنوات

ميل ب جـ = $\frac{١٧٥ - ١٢٥}{١٨ - ٨} = \frac{٥٠}{١٠} = ٥$

وهو يعبر عن تزايد طول الاشخاص بمعدل ٥ خلال الأعمار من ٨ إلى ١٨ سنة

ميل جـ د = $\frac{١٧٥ - ١٧٥}{٢٢ - ١٨} = \frac{٠}{٤} = ٠$ وهو يعبر عن أن طول الاعمار يكون ثابتاً خلال الاعمار من ١٨ إلى ٢٢

مهارات تفكير عليا :

6 هل المستقيم المارّ بالنقطتَين (٢ ، ٤) ، (٤ ، ٥) أكثر انحدارًا من المستقيم المارّ بالنقطتَين (١ ، ٤) ، (٤ ، ٥) ؟ وضِّح إجابتك .

أولاً ميل المستقيم المار بالنقطتين (٢ ، ٤) ، (٤ ، ٥)

الميل = $\frac{٥ - ٤}{٤ - ٢} = \frac{١}{٢}$ ← (١)

ثانياً ميل المستقيم المار بالنقطتين (١ ، ٤) ، (٤ ، ٥)

الميل = $\frac{٥ - ٤}{٤ - ١} = \frac{١}{٣}$ ← (٢)

∴ من (١) ، (٢) يتضح أن المستقيم الأول أكثر انحداراً من المستقيم الثاني.

7 إذا كان ميل المستقيم الذي يمرّ بالنقطتَين (- ٣ ، ٤) ، (١ ، ك) هو ٢ ، فأوجِد قيمة ك .

ميل = ٢ ∴ $\frac{ك - ٤}{١ - (-٣)} = ٢$

$\frac{ك - ٤}{١ + ٣} = ٢$ ، $\frac{ك - ٤}{٤} = ٢$ ، ك − ٤ = ٨

∴ ك = ١٢

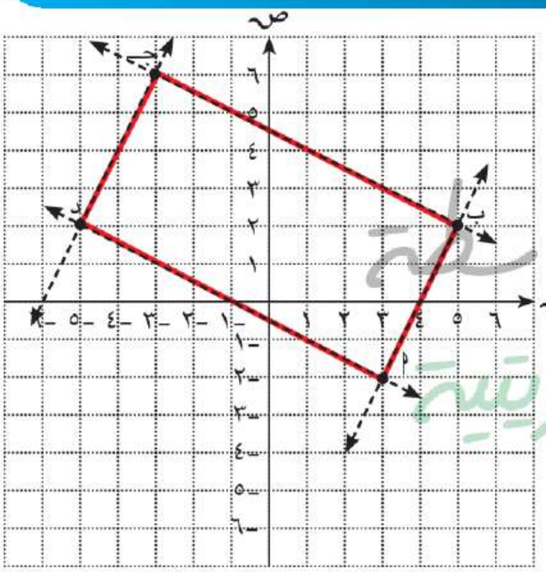
٦ - ٢ المستقيمات المتوازية والمستقيمات المتعامدة
Parallel Lines and Perpendicular Lines

سوف تتعلّم : المستقيمات المتوازية والمستقيمات المتعامدة والعلاقة بينها .

العبارات والمفردات :

المستقيمات المتوازية **Parallel Lines** — المستقيمات المتعامدة **Perpendicular Lines**

اِستكشِف



في الشكل المقابِل : أ ب جـ د مستطيل .

∴ أ د // ب جـ ، أ ب // د جـ ،

د جـ ⊥ ب جـ ، أ د ⊥ أ ب

أوجِد ميل كلّ من المستقيمات التالية :

ميل أ د = $\frac{٢ - (-٢)}{-٥ - ٣} = \frac{٤}{-٨} = -\frac{١}{٢}$

ميل ب جـ = $\frac{٦ - ٢}{-٣ - ٥} = \frac{٤}{-٨} = -\frac{١}{٢}$

ميل د جـ = $\frac{٦ - ٢}{-٣ + ٥} = \frac{٤}{٢} = ٢$

ميل أ ب = $\frac{٢ + ٢}{٥ - ٣} = \frac{٤}{٢} = ٢$

تذكَّر

المستطيل هو متوازي أضلاع إحدى زواياه قائمة .

أكمِل ما يلي :

(١) أ د // ب جـ

ميل أ د = ميل ب جـ

(٢) أ ب // د جـ

ميل أ ب = ميل د جـ

ماذا تلاحظ ؟ المستقيم الأول يوازي المستقيم الثاني إذا كان ميل الأول = ميل الثاني .

(٣) ب جـ ⊥ د جـ

ميل ب جـ × ميل د جـ

= $-\frac{١}{٢}$ × ٢ = -١

(٤) أ د ⊥ أ ب

ميل أ د × ميل أ ب

= $-\frac{١}{٢}$ × ٢ = -١

ماذا تلاحظ ؟ المستقيم الأول عمودي على المستقيم الثاني إذا كان ميل الأول × ميل الثاني = -١

ليكن $م_{١}$ هو ميل $\overleftrightarrow{ل_{١}}$ ، $م_{٢}$ هو ميل $\overleftrightarrow{ل_{٢}}$:

- $م_{١} = م_{٢} \Leftarrow \overleftrightarrow{ل_{١}} \parallel \overleftrightarrow{ل_{٢}}$ (والعكس صحيح $\overleftrightarrow{ل_{١}} \parallel \overleftrightarrow{ل_{٢}} \Leftarrow م_{١} = م_{٢}$ ما لم يوازِ أحدهما محور الصادات)
- $م_{١} \times م_{٢} = -١ \Leftarrow \overleftrightarrow{ل_{١}} \perp \overleftrightarrow{ل_{٢}}$ (والعكس صحيح $\overleftrightarrow{ل_{١}} \perp \overleftrightarrow{ل_{٢}} \Leftarrow م_{١} \times م_{٢} = -١$ ما لم يوازِ أحدهما أيًّا من المحورَين)

دورك الآن (١)

أكمِل الجدول الآتي :

ميل $\overleftrightarrow{ل}$	ميل المستقيم الموازي له	ميل المستقيم العمودي عليه
٣	٣	$-\frac{١}{٣}$
$-\frac{١}{٢}$	$-\frac{١}{٢}$	٢
$\frac{١}{٤}$	$\frac{١}{٤}$	-٤
$\frac{٢}{٥}$	$\frac{٢}{٥}$	$-\frac{٥}{٢}$
٠	٠	ليس له ميل .

مثال (١) :

إذا كان $\overleftrightarrow{ل}$ يمرّ بالنقطتَين أ (-٤ ، ٣) ، ب (-٣ ، ٥)

وكان $\overleftrightarrow{م}$ يمرّ بالنقطتَين ع (٨ ، ٥) ، ك (٩ ، ٧)

فأثبِت أنّ $\overleftrightarrow{ل} \parallel \overleftrightarrow{م}$

الحلّ :

$\because$ $\overleftrightarrow{ل}$ يمرّ بالنقطتَين أ (-٤ ، ٣) ، ب (-٣ ، ٥)

$\therefore$ ميل $\overleftrightarrow{ل} = \frac{ص_{٢} - ص_{١}}{س_{٢} - س_{١}}$

$$= \frac{٥ - ٣}{-٣ - (-٤)} = \frac{٢}{١} = ٢$$

اِنتبِه

إذا بدأت الطرح في البسط بالإحداثي الصادي للنقطة ب ، يجب أن تبدأ في المقام بالإحداثي السيني للنقطة ب أيضًا .

∵ $\overleftrightarrow{م}$ يمرّ بالنقطتَين ع (٨ ، ٥) ، ك (٩ ، ٧)

∴ ميل $\overleftrightarrow{م}$ = $\frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$ = $\frac{٧ - ٥}{٩ - ٨}$ = $\frac{٢}{١}$ = ٢

∵ ميل $\overleftrightarrow{ل}$ = ميل $\overleftrightarrow{م}$

∴ $\overleftrightarrow{ل}$ // $\overleftrightarrow{م}$

دورك الآن (٢)

إذا كان ميل $\overleftrightarrow{أب}$ هو ٣ ، $\overleftrightarrow{جـد}$ يمرّ بالنقطتَين جـ (٣ ، - ١) ، د (١ ، - ٧) .

فأثبِت أنّ $\overleftrightarrow{أب}$ ، $\overleftrightarrow{جـد}$ متوازيان .

ميل جـد = $\frac{-١ + ٧}{٣ - ١}$ = $\frac{٦}{٢}$ = ٣

∵ ميل أب = ميل جـد = ٣ ∴ أب // جـد

مثال (٢) :

إذا كان $\overleftrightarrow{هـ}$ يمرّ بالنقطتَين أ (٣ ، ٤) ، ب (٩ ، ٧)

وكانت معادلة $\overleftrightarrow{ك}$: ص = $\frac{١}{٢}$ س + ٥

فأثبِت أنّ $\overleftrightarrow{هـ}$ // $\overleftrightarrow{ك}$

الحلّ :

∵ $\overleftrightarrow{هـ}$ يمرّ بالنقطتَين أ (٣ ، ٤) ، ب (٩ ، ٧)

∴ ميل $\overleftrightarrow{هـ}$ = $\frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$ = $\frac{٧ - ٤}{٩ - ٣}$ = $\frac{\cancel{٣}}{\cancel{٦}}$ = $\frac{١}{٢}$

∵ معادلة $\overleftrightarrow{ك}$: ص = $\frac{١}{٢}$ س + ٥ المعادلة على الصورة ص = م س + ب

∴ ميل $\overleftrightarrow{ك}$ = $\frac{١}{٢}$

∵ ميل $\overleftrightarrow{هـ}$ = ميل $\overleftrightarrow{ك}$

∴ $\overleftrightarrow{هـ}$ // $\overleftrightarrow{ك}$

دورك الآن (٣)

إذا كان ميل أ ب هو -٥ ، وكان ل ع معادلته :

٥ س + ص = ٢ ، فأثبِت أنّ أ ب // ل ع .

ص = ٢ - ٥ س

∴ ميل ل ع = -٥

∴ ميل أ ب = ميل ل ع = -٥

∴ أ ب // ل ع

اِنتبِه

ضَع المعادلة على الصورة القياسية
ص = م س + ب قبل إيجاد الميل .

عبِّر عن فهمك (١)

هل المستقيم الذي معادلته س = ٣ والمستقيم الذي معادلته س = - ٢ متوازيان ؟ فسِّر إجابتك .

نعم ، لأنه كليهما يوازيا محور الصادات

مثال (٣) :

إذا كان ك يمرّ بالنقطتَين جـ (٣ ، ٤) ، د (٥ ، ٧)

وكانت معادلة ل : ٣ ص + ٢ س - ٣ = ٠ ،

فأثبِت أنّ ك ⊥ ل

الحلّ :

∵ ك يمرّ بالنقطتَين جـ (٣ ، ٤) ، د (٥ ، ٧)

∴ ميل ك = $\frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{٧ - ٤}{٥ - ٣} = \frac{٣}{٢}$

معادلة ل : ٣ ص + ٢ س - ٣ = ٠ ،

∴ معادلة ل : ص = $\frac{-٢}{٣}$ س + ١ المعادلة على الصورة ص = م س + ب

∴ ميل ل = $\frac{-٢}{٣}$

∵ ميل ك × ميل ل = $\frac{٣}{٢} \times \frac{-٢}{٣} = -١$

∴ ك ⊥ ل

دورك الآن (٤)

(أ) إذا كان ميل $\overleftrightarrow{أب}$ هو $\frac{١}{٤}$ ، $\overleftrightarrow{جـد}$ يمرّ بالنقطتَين جـ (٥ ، ٦) ، د (٤ ، ١٠) ،

فأثبِت أنّ $\overleftrightarrow{أب} \perp \overleftrightarrow{جـد}$.

ميل جـد = $\frac{١٠ - ٦}{٤ - ٥}$ = -٤

∴ ميل أب × ميل جـد = $\frac{١}{٤}$ × (-٤) = -١

∴ أب ⊥ جـد

(ب) إذا كان ميل $\overleftrightarrow{جـد}$ هو -٣ ، $\overleftrightarrow{أب}$ معادلته : $\frac{١}{٢}$ ص - $\frac{١}{٦}$ س - ٣ = ٠ ،

فابحث فيما إذا كان $\overleftrightarrow{جـد}$ ، $\overleftrightarrow{أب}$ متوازيَين أو متعامدَين .

معادلة أب هـ $\frac{١}{٢}$ ص = $\frac{١}{٦}$ س + ٣ ، ص = $\frac{١}{٣}$ س + ٦

∴ ميل أب = $\frac{١}{٣}$

∴ ميل أب × ميل جـد = $\frac{١}{٣}$ × (-٣) = -١

∴ أب // جـد

عبِّر عن فهمك (٢)

هل كلّ مستقيمَين متعامدَين حاصل ضرب ميلَيهما يساوي -١ ؟ فسِّر إجابتك .

لا ، حيث أنه حاصل ضرب مستقيم يوازي محور السينات والآخر محور الصادات لا يساوي (-١)

تمارين ذاتية :

(١) إذا كان ميل $\overleftrightarrow{أب}$ هو -٢ ، $\overleftrightarrow{جـد}$ يمرّ بالنقطتَين جـ (٣ ، ١٠) ، د (٥ ، ٦) ،

فأثبِت أنّ $\overleftrightarrow{أب}$ // $\overleftrightarrow{جـد}$.

ميل جـد = $\frac{١٠ - ٦}{٣ - ٥}$ = $\frac{٤}{-٢}$ = -٢

∴ ميل أب = ميل جـد = -٢ ∴ أب // جـد

٢ إذا كان ميل $\overleftrightarrow{ل}$ هو ٤ ، ومعادلة $\overleftrightarrow{ك}$: ص - ٤ س - ٦ = ٠ ، فأثبِت أنّ المستقيمَين متوازيان .

معادلة ك ← ص = ٤ س + ٦

∴ ميل ك = ٤

∴ ميل ل = ميل ك = ٤

∴ ل // ك

٣ إذا كانت معادلة $\overleftrightarrow{هـ}$: ص = ٩ س + ٥ ومعادلة $\overleftrightarrow{ن}$: ٢ ص - ١٨ س - ١ = ٠ ،
فأثبِت أنّ المستقيمَين متوازيان .

ميل هـ = ٩

معادلة ن ← ص = ٩ س + $\frac{١}{٢}$

∴ ميل هـ = ميل ن = ٩

∴ هـ // ن

٤ إذا كان $\overleftrightarrow{ك}$ يمرّ بالنقطتَين (٤ ، ٧) ، (٩ ، ٤) ، ومعادلة $\overleftrightarrow{ل}$: ٥ س - ٣ ص - ٦ = ٠ ،
فأثبِت أنّ المستقيمَين متعامدان .

ميل ك = $\frac{٧ - ٤}{٤ - ٩}$ = $\frac{٣}{-٥}$ = $-\frac{٣}{٥}$

معادلة ل ← ٣ ص = ٥ س - ٦ ، ص = $\frac{٥}{٣}$ س - ٢

∴ ميل ل = $\frac{٥}{٣}$

∴ ميل ك × ميل ل = $(-\frac{٣}{٥}) \times \frac{٥}{٣}$ = -١ ∴ $\overline{ك} \perp \overline{ل}$

٥ إذا كان $\overleftrightarrow{أب}$ يمرّ بالنقطتَين أ (٢ ، ٥) ، ب (٣ ، ٥) ،
$\overleftrightarrow{جـ د}$ يمرّ بالنقطتَين جـ (٣ ، ٦) ، د (٨ ، ٦) فأثبِت أنّ $\overleftrightarrow{أب}$ // $\overleftrightarrow{جـ د}$.

ميل أب = $\frac{٥ - ٥}{٣ - ٢}$ = صفر

ميل جـ د = $\frac{٦ - ٦}{٨ - ٣}$ = صفر

∴ ميل أب = ميل جـ د = صفر ∴ أب // جـ د

٦ إذا كان $\overleftrightarrow{\text{هـ}}$ يمرّ بالنقطتَين (٣ ، -٧) ، (٥ ، ٧) ،
$\overleftrightarrow{\text{ل}}$ يمرّ بالنقطتَين (٢ ، ٦) ، (٩ ، ٥) ،
فأثبِت أنّ $\overleftrightarrow{\text{هـ}} \perp \overleftrightarrow{\text{ل}}$.

ميل هـ $= \frac{٧ + ٧}{٥ - ٣} = \frac{١٤}{٢} = ٧$

ميل ل $= \frac{٥ - ٦}{٩ - ٢} = \frac{-١}{٧}$

$\therefore$ ميل هـ × ميل ل $= ٧ \times (\frac{-١}{٧}) = -١$

$\therefore$ هـ $\perp$ ل

مهارات تفكير عليا :

اِختر الإجابة الصحيحة .

٧ إذا كان $\overleftrightarrow{\text{ل}_١}$ ميله $\frac{أ}{٤}$ ، $\overleftrightarrow{\text{ل}_٢}$ ميله $\frac{-ب}{٣}$ ، حيث أ ≠ ٠ ، ب ≠ ٠ وكان $\overleftrightarrow{\text{ل}_١} \perp \overleftrightarrow{\text{ل}_٢}$ ،
فإنّ أ ب = ...

(أ) ١٢ (ب) -١٢ (ج) $\frac{٣}{٤}$ (د) $-\frac{٣}{٤}$

٨ في المستوى الإحداثي إذا كانت أ (١ ، ٧) ، ب (٢ ، ٤) ، جـ (٥ ، ص) ، تمثّل رؤوس مثلّث قائم الزاوية في ب ، فإنّ قيمة ص تساوي :

(أ) -٥ (ب) -٣ (ج) ٥ (د) ٣

٦ ـ ٣ حلّ معادلتَين خطّيتَين في متغيّرَين آنيًّا

Solving Two Linear Equations in Two Variables Simultaneously

سوف تتعلّم : حلّ معادلتَين خطّيتَين (من الدرجة الأولى) في متغيّرَين آنيًّا .

العبارات والمفردات :

معادلة خطّية	Linear Equation	آنيًّا	Simultaneous

الصورة العامّة لمعادلة مستقيم هي : ٢س + ب ص + جـ = ٠ حيث ٢ ، ب ، جـ ∈ ح ؛ ٢ ، ب لا يساويان الصفر معًا .

أوّلًا : حلّ معادلتَين خطّيتَين آنيًّا بيانيًّا

حُلّ وناقِش

تعلم أنّ حلّ المعادلة هو إيجاد قيَم المتغيّر التي تحقّق صحّة المعادلة .

أكمِل الجدول التالي :

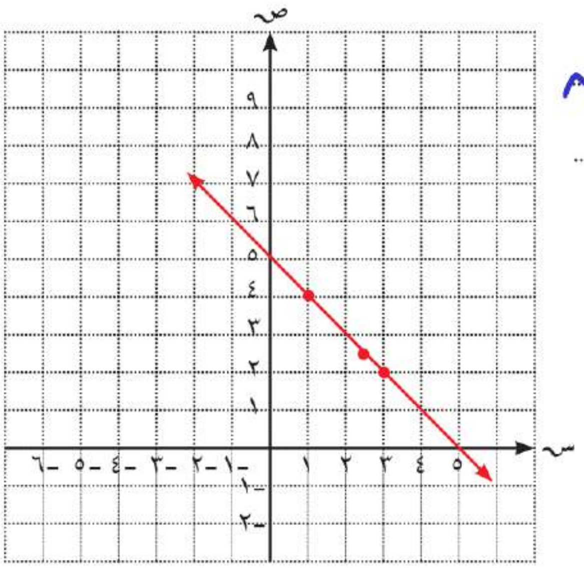
المعادلة	نوعها	عدد الحلول
س + ٢ = ٧	معادلة من الدرجة ...الأولى... في متغيّر ...واحد...	حلّ وحيد
س^{٢} − ٤ = ٠	معادلة من الدرجة ...الثانية... في متغيّر ...واحد...	...حلان...

لتكن المعادلة : ص + س = ٥

- **ما نوعها ؟** معادلة من الدرجة ...الأولى... في ...متغيرين...
- **كم تتوقّع عدد الحلول لها ؟** ...عدد لا نهائي...
- **أُذكر بعض هذه الحلول :** (...٣... ، ...٢...) ، (...٤... ، ...١...) ، (٢$\frac{1}{2}$ ، ٢$\frac{1}{2}$) ، (٢ ، ...٣...)

يوضّح الشكل المقابِل بيان الدالّة الخطّية : ص + س = ٥

لاحِظ أنّ جميع النقاط الواقعة على بيان الخطّ المستقيم هي حلول للمعادلة : ص + س = ٥



- على الشبكة البيانية نفسها من الصفحة السابقة ،
أُرسم بيان الدالّة الخطّية : ص = س + ١

ص = س + ١			
س	-١	٠	٢
ص	٠	١	٣

لاحِظ أنّ الأزواج المرتَّبة (س ، ص) في الجدول هي بعض حلول المعادلة : ص = س + ١
وهي النقاط التي تساعدنا على رسم بيان الدالّة الخطّية .

- **هل يوجد حلّ مشترَك يحقّق المعادلتَين معًا ؟** ....نعم....

الحلّ الذي يحقّق المعادلتَين في آن واحد هو : (....٢.... ، ....٣....) وهو نقطة تقاطع المستقيمَين .

- حلّ معادلتَين خطّيتَين من الدرجة الأولى في متغيّرَين آنيًّا بيانيًّا هو **الحلّ المشترَك** (س ، ص) وهو **نقطة تقاطع** بيانَي الدّالتَين الخطّيتَين .

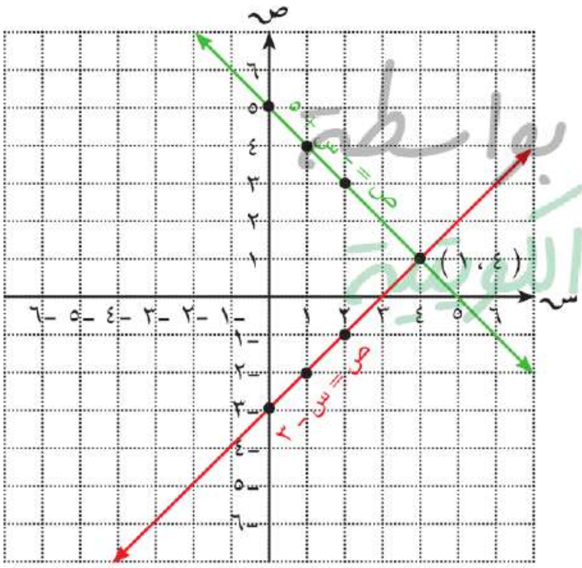
وبالتالي تكون { (....٢.... ، ....٣....) } هي مجموعة الحلّ التي تحقّق المعادلتَين في **آن واحد** .

مثال (٢) :

أوجِد مجموعة حلّ المعادلتَين آنيًّا بيانيًّا :

ص − س + ٣ = ٠   ص + س = ٥

الحلّ :



- نكتب معادلتَي المستقيمَين على الصورة :
ص = س − ٣   ص = − س + ٥

- نرسم بيان المستقيمَين :

ص = س − ٣			
س	٠	١	٢
ص	-٣	-٢	-١

ص = − س + ٥			
س	٠	١	٢
ص	٥	٤	٣

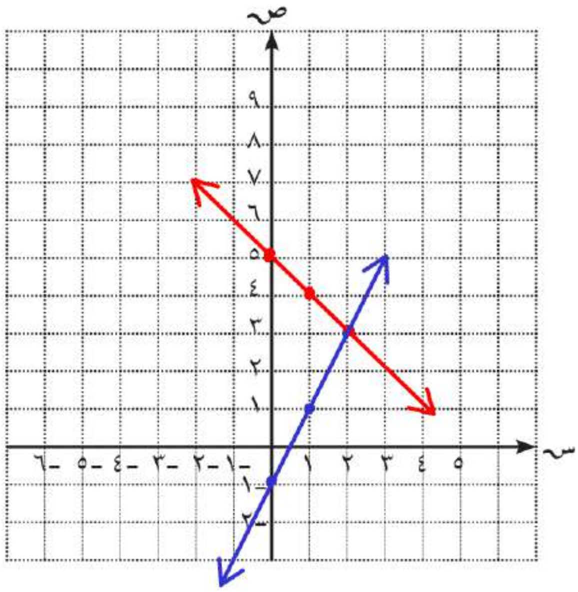
نلاحظ أنّ المستقيمَين تقاطعا في النقطة (٤ ، ١)   (تحقَّق بالتعويض في كلّ من معادلتَي المستقيم)

∴ مجموعة الحلّ = { (٤ ، ١) }

دورك الآن (١)

أوجِد مجموعة حلّ المعادلتَين آنيًّا بيانيًّا :

ص = ٢ س - ١ ، ص = - س + ٥



ص = ٢ س - ١			
س	٠	١	٢
ص	-١	١	٣

ص = - س +٥			
س	٠	١	٢
ص	٥	٤	٣

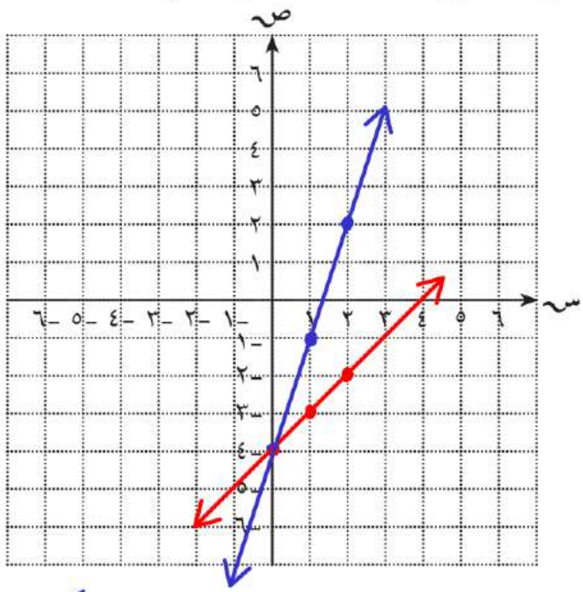
∴ مجموعة الحلّ = { (٢ ، ٣) }

تحقَّق بالتعويض في كلّ من معادلتَي المستقيمَين .

دورك الآن (٢)

أوجِد مجموعة حلّ المعادلتَين آنيًّا بيانيًّا :

ص - ٣ س + ٤ = ٠ ، ص - س = -٤



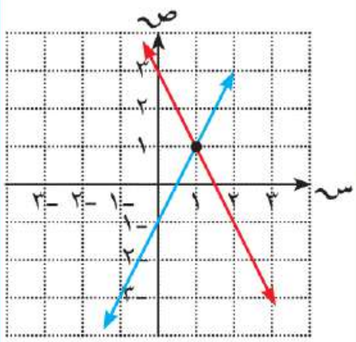
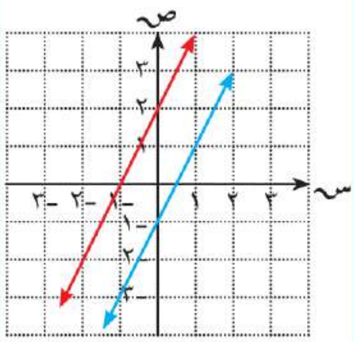
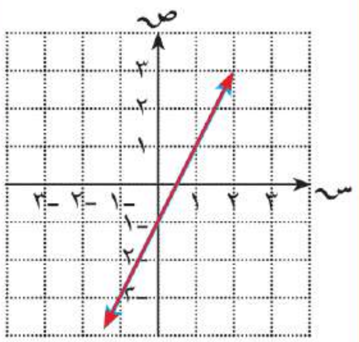
ص = ٣س -٤			
س	٠	١	٢
ص	-٤	-١	٢

ص = س -٤			
س	٠	١	٢
ص	-٤	-٣	-٢

∴ مجموعة الحلّ = { (٠ ، -٤) }

تحقَّق بالتعويض في كلّ من معادلتَي المستقيمَين .

ربط الأفكار

المثال	ص = ٢ س - ١ ص = - ٢ س + ٣	ص = ٢ س - ١ ص = ٢ س + ٢	ص = ٢ س - ١ ٢ ص = ٤ س - ٢
التمثيل البياني			
وضع المستقيمَين	متقاطعان	متوازيان وغير منطبقَين	منطبقان
مجموعة الحلّ	{(١ ، ١)}	∅	جميع نقاط المستقيم
الملاحظات	الميلان مختلفان الجزء المقطوع من محور الصادات مختلف	الميلان متساويان الجزء المقطوع من محور الصادات مختلف	الميلان متساويان (لماذا) ؟ الجزء المقطوع من محور الصادات متساوٍ (لماذا) ؟
عدد الحلول	حلّ وحيد	صفر	عدد لا نهائي من الحلول

عبِّر عن فهمك

تقول ساره : « إذا كان للمعادلتَين قيمة الجزء المقطوع نفسه من محور الصادات ، يكون للمعادلتَين عدد لا نهائي من الحلول » هل هي على صواب ؟ وضِّح إجابتك .

لا، حيث يجب أيضاً أن يكون ميل المعادلتين متساوٍ

ثانيًا : حلّ معادلتَين خطّيتَين آنيًّا جبريًّا

يمكن حلّ معادلتَين خطّيتَين آنيًّا جبريًّا بطريقتَين (الحذف أو التعويض) .

- **طريقة الحذف**

مثال (٢) :

اِستخدِم طريقة الحذف لإيجاد مجموعة حلّ المعادلتَين آنيًّا :

ص - س + ٣ = ٠ ، ص + س = ٥

الحلّ :

ص - س = - ٣ (١) رتِّب المعادلتَين

ص + س = ٥ (٢)

اِجمع المعادلتَين (١) ، (٢)

٢ ص = ٢

$\frac{١}{\cancel{٢}} \times \cancel{٢}$ ص = $\cancel{٢} \times \frac{١}{\cancel{٢}}$

$\boxed{\text{ص} = ١}$

ص + س = ٥ اِختر إحدى المعادلتَين ولتكن المعادلة (٢)

١ + س = ٥ عوِّض عن ص بالعدد ١

١ - ١ + س = ٥ - ١

$\boxed{\text{س} = ٤}$

∴ مجموعة الحلّ = { (٤ ، ١) } (تحقَّق من صحّة الحلّ)

تحقَّق من الحلّ بيانيًّا بالرجوع إلى «مثال (١)» السابق صفحة ١٠٣ .

> **لاحِظ أنّ**
> تعتمد طريقة الحذف على : حذف أحد المتغيّرَين وحساب قيمة الآخر .

> **لاحِظ أنّ**
> معاملات المتغيّر س في المعادلتَين أحدهما معكوس جمعي للآخر ، إذًا نجمع المعادلتَين .

> **اِنتبِه**
> يجب كتابة الإحداثي السيني أوّلًا في مجموعة الحلّ { (س ، ص) }

دورك الآن (٣)

اِستخدِم طريقة الحذف لإيجاد مجموعة حلّ المعادلتَين آنيًّا :

٢ س + ٣ ص = ١١ ، -٢ س + ٤ ص = ١٠

٢س + ٣ص = ١١

-٢س + ٤ص = ١٠ ∴ بجمع المعادلتين

٠ + ٧ص = ٢١ ∴ ص = $\frac{٢١}{٧}$ = ٣

بالتعويض في المعادلة ٢س + ٣ص = ١١ ∴ ٢س + ٩ = ١١ ، س = ١

∴ مجموعة الحل = { (١ ، ٣) }

مثال (٣) :

أوجِد مجموعة الحلّ للمعادلتَين الخطّيتَين آنيًّا جبريًّا باستخدام طريقة الحذف :

٨ س + ٣ ص = ٥ ، ٢ س + ص - ١ = ٠

الحلّ :

٨ س + ٣ ص = ٥ (١)

٢ س + ص = ١ (٢)

نرتّب المعادلتَين

٨ س + ٣ ص = ٥

٦ س + ٣ ص = ٣

الضرب في العدد ٣

٨ س + ٣ ص = ٥

٦ س + ٣ ص = ٣

٢ س = ٢

نلاحظ تساوي معاملات المتغيّر ص ، إذًا نطرح المعادلتَين .

$\frac{1}{\cancel{2}} \times \cancel{2}$ س $= \cancel{2} \times \frac{1}{\cancel{2}}$

حلّ المعادلة

$\boxed{\text{س} = ١}$

بالتعويض بقيمة س في المعادلة (٢)

٢ س + ص = ١

٢ × (١) + ص = ١

٢ - ٢ + ص = ١ - ٢

$\boxed{\text{ص} = -١}$

∴ مجموعة الحلّ = { (١ ، -١) }

(تحقّق من صحّة الحلّ)

لاحِظ أنّ

معاملات المتغيّر س مختلفة في المعادلتَين وكذلك معاملات المتغيّر ص . لذا ، نحتاج إلى إجراء عملية الضرب لتوحيد معاملات أحد المتغيّرَين .

اِنتبِه

عملية الطرح هي عملية جمع المعكوس الجمعي .

• **طريقة التعويض**

مثال (٤) :

حُلّ المعادلتَين الخطّيتَين آنيًّا جبريًّا بطريقة التعويض :

ص − س = −٣ ، ص + س = ٥

لاحِظ أنّ

تعتمد طريقة التعويض على إيجاد متغيّر بدلالة الآخر من إحدى المعادلتَين .

الحلّ :

ص − س = −٣ (١)
ص + س = ٥ (٢)

من المعادلة (١)

ص = س − ٣ (٣) أُكتب ص بدلالة س

بالتعويض عن قيمة ص في المعادلة (٢)

(س − ٣) + س = ٥ اِجمع الحدود المتشابهة

٢ س − ٣ = ٥

٢ س − ٣ + ٣ = ٥ + ٣ حلّ المعادلة

$\frac{١}{\cancel{٢}_{١}}$ × $\cancel{٢}$ س = $\overset{٤}{\cancel{٨}}$ × $\frac{١}{\cancel{٢}_{١}}$

$\boxed{\text{س = ٤}}$

بالتعويض عن قيمة س في المعادلة (٣)

ص = ٤ − ٣

$\boxed{\text{ص = ١}}$

∴ مجموعة الحلّ = { (٤ ، ١) } (تحقّق من صحّة الحلّ)

تحقّق من الحلّ بيانيًّا بالرجوع إلى «مثال (١)» السابق صفحة ١٠٣

ملاحظة : يمكنك إيجاد مجموعة حلّ معادلتَين خطّيتَين آنيًّا بعدّة طرق منها :

(١) بيانيًّا (٢) جبريًّا

(أ) الحذف (ب) التعويض

(اِلتزِم بالطريقة التي تُحدَّد لك في رأس السؤال) .

مثال (٥) :

اِستخدِم طريقة التعويض لحلّ المعادلتَين الخطّيتَين آنيًّا :

ص - ٣ س + ٤ = ٠ ، ص - س = -٤

الحلّ :

ص - ٣ س + ٤ = ٠ (١)

ص - س = -٤ (٢)

ص = س - ٤ (٣) أُكتب ص بدلالة س من المعادلة (٢)

بالتعويض عن قيمة ص في المعادلة (١)

(س - ٤) - ٣ س + ٤ = ٠ اِجمع الحدود المتشابهة

-٢ س = ٠

$\boxed{\text{س} = ٠}$

عوِّض عن قيمة س بالعدد ٠ بالمعادلة (٣)

ص = ٠ - ٤

$\boxed{\text{ص} = -٤}$

∴ مجموعة الحلّ = { (٠ ، -٤) } (تحقَّق من صحّة الحلّ)

دورك الآن (٤)

اِستخدِم طريقة التعويض لحلّ المعادلتَين الخطّيتَين آنيًّا : س - ٢ ص = ٣ ، ٥ ص - ٤ س = ٦

س - ٢ص = ٣ ← (١) بالضرب في ٤

∴ ٤س - ٨ص = ١٢

-٤س + ٥ص = ٦ بجمع المعادلتين

-٣ص = ١٨ ∴ ص = -٦

بالتعويض عن قيمة ص في المعادلة (١)

∴ س - ٢×(-٦) = ٣ ، س + ١٢ = ٣ ، س = -٩

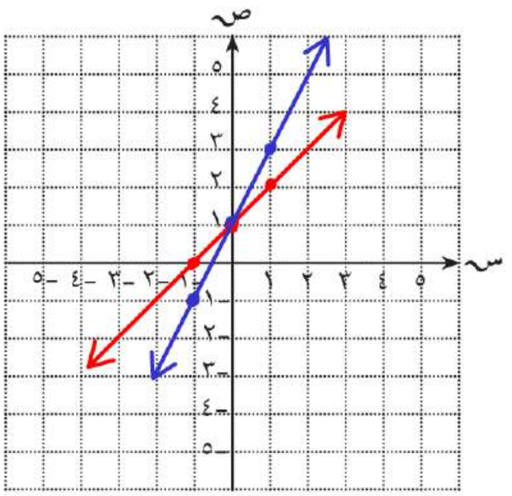
∴ مجموعة الحل = {(-٩ ، -٦)}

الدرس الثالث

تمارين ذاتية :

١ أوجِد مجموعة حلّ المعادلتَين آنيًّا بيانيًّا :

ص = ٢ س + ١ ، ص = س + ١



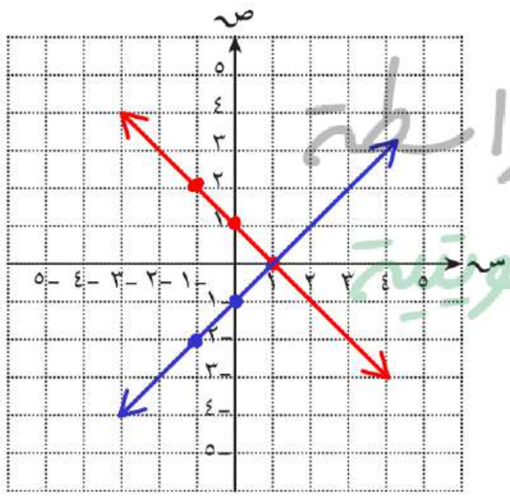
ص = ٢س + ١			
س	١	٠	-١
ص	٣	١	-١

ص = س + ١			
س	١	٠	-١
ص	٢	١	٠

مجموعة الحل = {(٠ ، ١)}

٢ أوجِد مجموعة حلّ المعادلتَين آنيًّا بيانيًّا :

ص = س - ١ ، ص = - س + ١



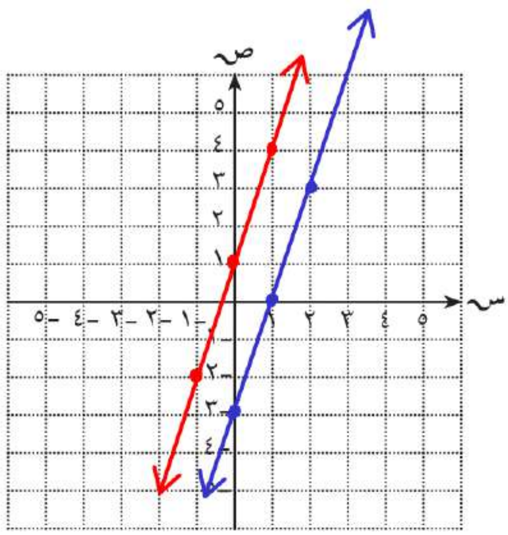
ص = س - ١			
س	١	٠	-١
ص	٠	-١	-٢

ص = -س + ١			
س	١	٠	-١
ص	٠	١	٢

مجموعة الحل = {(١ ، ٠)}

٣ أوجِد مجموعة حلّ المعادلتَين آنيًّا بيانيًّا :

ص = ٣ س - ٣ ، ص = ٣ س + ١



ص = ٣س - ٣			
س	٠	١	٢
ص	-٣	٠	٣

ص = ٣س + ١			
س	٠	١	-١
ص	١	٤	-٢

مجموعة الحل = ϕ

المستقيمان متوازيان

٣ أوجِد مجموعة حلّ المعادلتَين آنيًّا جبريًّا

بطريقة الحذف :

س + ص = ٤ ، س − ص = ٢

س + ص = ٤ ← (١)

س − ص = ٢ ← (٢)

بجمع (١)، (٢)

٢س = ٦

∴ س = ٣

بالتعويض بقيمة س في المعادلة (١)

∴ ٣ + ص = ٤

∴ ص = ٤ − ٣ = ١

∴ مجموعة الحل = {(٣، ١)}

٤ أوجِد مجموعة حلّ المعادلتَين آنيًّا جبريًّا

بطريقة الحذف :

س + ٥ص = ٢ ، ٢س − ٣ص = −٩

س + ٥ص = ٢ بالضرب × (−٢)

−٢س − ١٠ص = −٤ ← (١)

٢س − ٣ص = −٩ ← (٢)

بجمع (١)، (٢)

٠ − ١٣ص = −١٣

∴ ص = ١

بالتعويض بقيمة ص في معادلة (٢)

∴ ٢س − ٣ × ١ = −٩

٢س = −٩ + ٣

٢س = −٦

∴ س = −٣

∴ مجموعة الحل = {(−٣، ١)}

٥ أوجِد مجموعة حلّ المعادلتَين آنيًّا جبريًّا بطريقة التعويض :

س = ص ، س + ٢ ص = ٦

س = ص

− س + ص = ٠ ← (١)

س + ٢ص = ٦ ← (٢)

بجمع (١)، (٢)

٠ + ٣ص = ٦

∴ ص = ٢

بالتعويض بقيمة ص في معادلة (١)

∴ − س + ٢ = ٠

∴ س = ٢

∴ مجموعة الحل = {(٢، ٢)}

٦ أوجِد مجموعة حلّ المعادلتَين آنيًّا جبريًّا بطريقة التعويض :

س + ص = ٧ ، ٣ س − ٢ ص = ٦

س + ص = ٧ بالضرب × ٢

∴ ٢س + ٢ص = ١٤

٣س − ٢ص = ٦

بجمع المعادلتين

٥س + ٠ = ٢٠

∴ س = ٢٠/٥ = ٤

بالتعويض بقيمة س في معادلة

س + ص = ٧

∴ س + ٤ = ٧

س = ٧ − ٤ = ٣

∴ مجموعة الحل = {(٣، ٤)}

اِختر الإجابة الصحيحة لكلّ ممّا يلي :

٧ لتكن المعادلتان : س - $\frac{١}{٢}$ص = ٤ ، ٢ س - ص = ٢ ، فإنّ عدد حلول المعادلتَين آنيًّا هو :

(أ) حلّ وحيد (ب) حلّان (ج) عدد لا نهائي (د) صفر

٨ إذا كان المستقيمان الممثّلان للمعادلتَين : س + ٣ ص = ٤ ، س + ا ص = ٧ متوازيَين ،
فإنّ : ا = ...

(أ) ٣ (ب) -٣ (ج) $\frac{١}{٣}$ (د) -$\frac{١}{٣}$

مهارات تفكير عليا :

٩ أوجِد قِيَم ا ، جـ التي تجعل للمعادلتَين : ص = ا س + ٤ ، ٣ ص = ٣ س + جـ
عددًا لا نهائيًّا من الحلول .

لكي يكون حل المعادلتين لها عدد لا نهائي من الحلول ،

يجب أن يكون المستقيمان متوازيين

∴ ص = ا س + ٤ ← (١)

٣ ص = ٣ س + جـ بالقسمة على ٣

∴ ص = س + $\frac{جـ}{٣}$ ← (٢)

بمقارنة المعادلة (١) ، (٢)

∴ ا = ١

∴ $\frac{جـ}{٣}$ = ٤ ، جـ = ٣ × ٤ = ١٢

∴ ا = ١ ، جـ = ١٢

٦ – ٤ المتباينات الخطّية (منطقة الحلّ المشترَك)
The Graph of Linear Inequalities

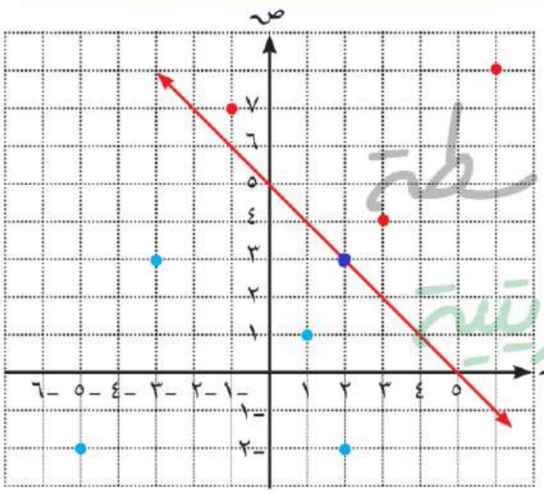
سوف تتعلّم : تمثيل منطقة حلّ متباينة ومنطقة الحلّ المشترَك لمتباينتَين من الدرجة الأولى في متغيّرَين بيانيًّا .

العبارات والمفردات :

متباينة خطّية Linear Inequality

خطّ فاصل (خطّ الحدود) Boundary Line

حُلّ وناقِش (١)



يوضّح الشكل المقابِل بيان الدالّة الخطّية : س + ص = ٥

سبق وأن علمت أنّ جميع نقاط المستقيم تمثّل حلًّا للمعادلة : س + ص = ٥

لاحِظ المتباينة س + ص ≤ ٥

• **ما نوعها ؟** متباينة من الدرجة الاولى في متغيرين

١ **هل النقاط في المستوى الإحداثي التي باللون الأزرق تحقّق صحّة المتباينة ؟** لا

٢ **هل النقاط في المستوى الإحداثي الواقعة على الخطّ المستقيم تحقّق صحّة المتباينة ؟** نعم

٣ **هل النقاط في المستوى الإحداثي التي باللون الأحمر تحقّق صحّة المتباينة ؟** نعم

٤ **إختر نقاطًا أخرى تحقّق صحّة المتباينة ومثّلها في المستوى الإحداثي .** (٢ ، ٣)

نلاحظ أنّ جميع نقاط المستوى الإحداثي الواقعة جهة النقاط الحمراء تحقّق صحّة المتباينة وكذلك جميع نقاط الخطّ المستقيم تحقّق صحّة المتباينة ، ونسمّي ذلك « منطقة الحلّ » لمتباينة من الدرجة الأولى في متغيّرَين .

لاحِظ أنّ المستقيم الذي معادلته س + ص = ٥ قسّم المستوى الإحداثي إلى منطقتَين .

٥ ظلِّل المنطقة التي تمثّل حلّ المتباينة : س + ص ≤ ٥

تُعرف منطقة الحلّ لمتباينة من الدرجة الأولى في متغيّرَين على أنّها جميع النقاط (س ، ص) في المستوى الإحداثي التي تحقّق المتباينة .

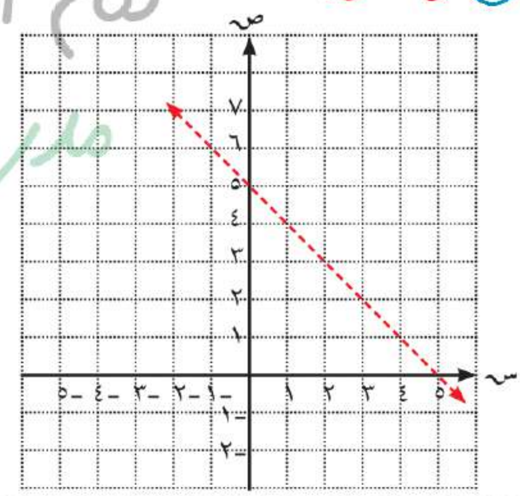
- إذا كانت المتباينة س + ص > ٥ ، فهل النقاط الواقعة على الخطّ المستقيم تحقّق صحّة المتباينة ؟ لا

عند إيجاد منطقة الحلّ لمتباينة من الدرجة الأولى في متغيّرَين ، سوف نحتاج إلى رسم خطّ مستقيم يُسمّى خطّ الحدود (أو الخطّ الفاصل) . إذا كانت المتباينة على الصورة :

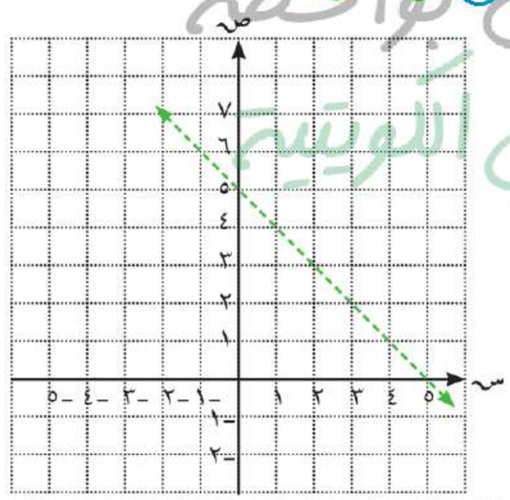
- أ س + ب ص ≥ جـ أو أ س + ب ص ≤ جـ ، نرسم خطّ الحدود (متّصل)
- أ س + ب ص < جـ أو أ س + ب ص > جـ ، نرسم خطّ الحدود (متقطّع)
(حيث أ ، ب ، جـ ∈ ح ؛ أ ، ب لا يساويان الصفر معًا)

- ظلِّل منطقة الحلّ في كلّ ممّا يلي :

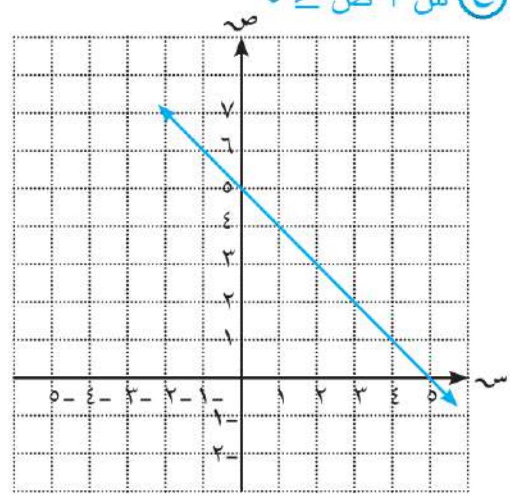
أ) س + ص > ٥



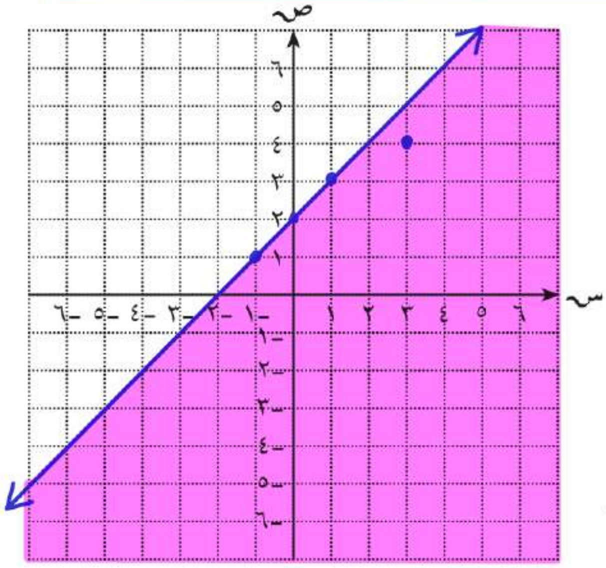
ب) س + ص < ٥



ج) س + ص ≥ ٥



دورك الآن (٢)



مثّل بيانيًّا منطقة حلّ المتباينة : ص ≥ س + ٢

- **المعادلة المناظِرة : ص =** س + ٢
- **جدول القِيَم :**

ص = س + ٢			
س	١	٠	-١
ص	٣	٢	١

- **أُرسم خطّ الحدود (** متصل **) .**
- **اِختر النقطة (** ٣ ، ٤ **) لا تنتمي إلى خطّ الحدود .**

عوِّض في المتباينة ص ≥ س + ٢

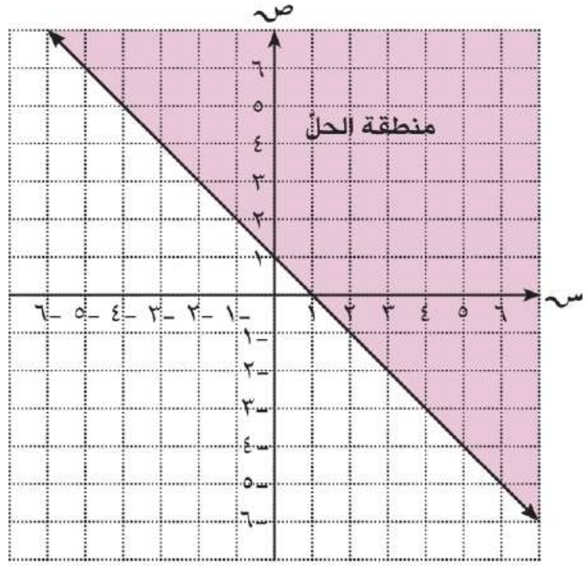
٤ ≥ ٥ **(عبارة** صحيحة **)**

- **ظلِّل منطقة حلّ المتباينة .**

مثال (٢) :

مثِّل بيانيًّا منطقة الحلّ للمتباينة : س + ص ≤ ١

الحلّ :



- المعادلة المناظِرة : ص = ١ - س
- جدول القِيَم :

ص = ١ - س			
س	١	٠	-١
ص	٠	١	٢

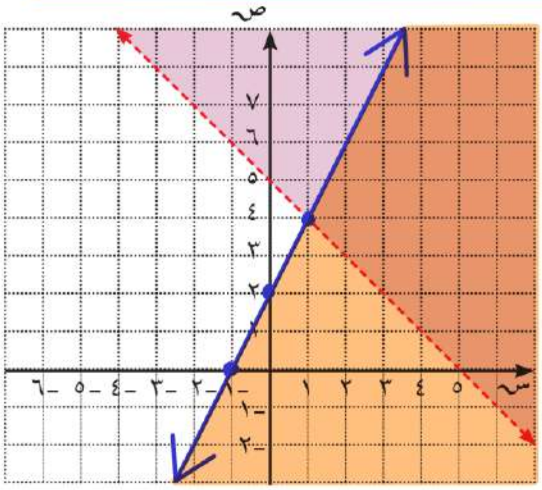
- أُرسم خطّ الحدود (متّصل)
- اِختر النقطة (٠ ، ٠) لا تنتمي إلى خطّ الحدود .

عوِّض في المتباينة ص ≤ ١ - س

٠ ≤ ١ (عبارة غير صحيحة)

- إذًا (٠ ، ٠) ∉ منطقة الحلّ
- ظلِّل منطقة حلّ المتباينة وهي المنطقة التي لا تنتمي إليها النقطة (٠ ، ٠) وجميع نقاط خطّ الحدود .

حُلّ وناقِش (٢)



في الشكل المقابِل : المنطقة المظلَّلة تمثّل حلّ المتباينة :
س + ص > ٥ بيانيًّا

- **على المستوى الإحداثي المقابِل نفسه ، مثِّل بيانيًّا منطقة الحلّ للمتباينة : ص ≥ ٢ س + ٢**
- **المعادلة المناظِرة (معادلة خطّ الحدود) هي :**
  ص = ٢ س + ٢
- **كوِّن جدولًا لِقِيَم المعادلة المناظِرة :**

ص = ٢ س + ٢			
س	١	٠	-١
ص	٤	٢	٠

- **أُرسم خطّ الحدود (متصل) .**
- **اِختر النقطة (٠ ، ٠) لا تنتمي إلى خطّ الحدود وعوِّض بها في المتباينة ص ⩽ ٢ س + ٢**
- **ظلِّل منطقة حلّ المتباينة : ص ≥ ٢ س + ٢**
  ماذا تلاحظ ؟ هل هناك حلول مشترَكة بين المتباينتَين ؟ نعم

المنطقة التي تمثّل منطقة الحلّ هي تقاطع منطقتَي الحلّ للمتباينتَين (منطقة الحلّ المشترَك)

- **عيِّن على المستوى الإحداثي منطقة الحلّ المشترَك للمتباينتَين .**

تُعرف منطقة الحلّ المشترَك لمتباينتَين من الدرجة الأولى في متغيّرَين بيانيًّا على أنّها : جميع النقاط (س ، ص) في المستوى الإحداثي والتي تحقّق المتباينتَين معًا .

خطوات إيجاد منطقة الحلّ المشترَك لمتباينتَين من الدرجة الأولى في متغيّرَين بيانيًّا :

١ **نرسم خطّ الحدود لكلّ متباينة في المستوى الإحداثي نفسه .**

٢ **نظلّل منطقة الحلّ لكلّ متباينة .**

٣ **نعيّن منطقة الحلّ المشترَك والتي تتكوّن من جميع النقاط (س ، ص) التي تنتمي إلى منطقة تقاطع منطقتَي حلّ المتباينتَين .**

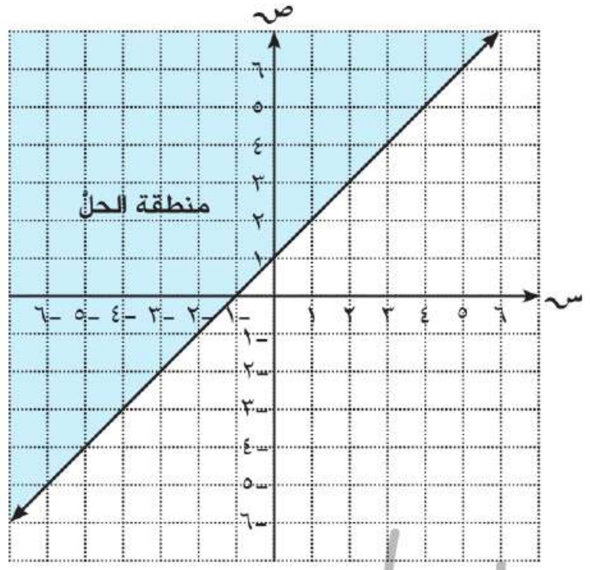
مثال (٣) :

مثِّل بيانيًّا منطقة الحلّ المشترَك للمتباينتَين التاليتَين :

ص ≤ س + ١

ص > ٢ - س

الحلّ :



أوّلًا : مثِّل منطقة حلّ المتباينة ص ≤ س + ١ بيانيًّا

المعادلة المناظِرة ص = س + ١

كوِّن جدول القِيَم :

س	١	٠	١-
ص	٢	١	٠

- أُرسم خطّ الحدود متّصلًا
- اِختر نقطة لا تنتمي إلى خطّ الحدود
  ولتكن نقطة الأصل (٠ ، ٠)
  ونعوّض بها في المتباينة ٠ ≤ ٠ + ١
  ٠ ≤ ١ (عبارة غير صحيحة) ، إذًا (٠ ، ٠) ∌ منطقة الحلّ

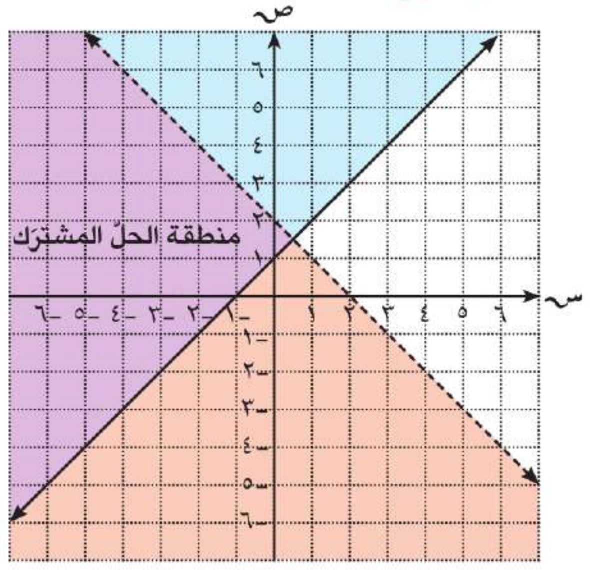
لذلك ، ظلِّل الجانب الآخر من الرسم والذي يمثّل منطقة حلّ المتباينة .

ثانيًا : مثِّل منطقة حلّ المتباينة ص > ٢ - س بيانيًّا

المعادلة المناظِرة ص = ٢ - س

كوِّن جدول القِيَم :

س	١	٠	١-
ص	١	٢	٣



- أُرسم خطّ الحدود متقطّعًا .
- اِختر نقطة لا تنتمي إلى خطّ الحدود ، ولتكن
  نقطة الأصل (٠ ، ٠) ونعوّض بها في
  المتباينة ٠ > ٢ - ٠
  ٠ > ٢ (عبارة صحيحة)
- إذًا (٠ ، ٠) ∈ منطقة الحلّ

لذلك ، ظلِّل الجانب الذي يحوي نقطة الأصل والذي يمثّل منطقة حلّ المتباينة .

المنطقة التي تمثّل منطقة الحلّ هي تقاطع منطقتَي الحلّ للمتباينتَين (منطقة الحلّ المشترَك)

دورك الآن (٢)

مثِّل بيانيًّا منطقة الحلّ المشترَك للمتباينتَين :

ص < ٣ س − ١

• المعادلة المناظِرة

ص = ٣س − ١

• جدول القِيَم :

ص = ٣س − ١			
س	١	٠	−١
ص	٢	−١	−٤

• اُرسم خطّ الحدود (متقطع) .

• عوِّض بالنقطة (٢ ، ٤)

٤ < ٥

عبارة صحيحة

ص > س − ١

• المعادلة المناظِرة

ص = س − ١

• جدول القِيَم :

ص = س − ١			
س	١	٠	−١
ص	٠	−١	−٢

• اُرسم خطّ الحدود (متقطع) .

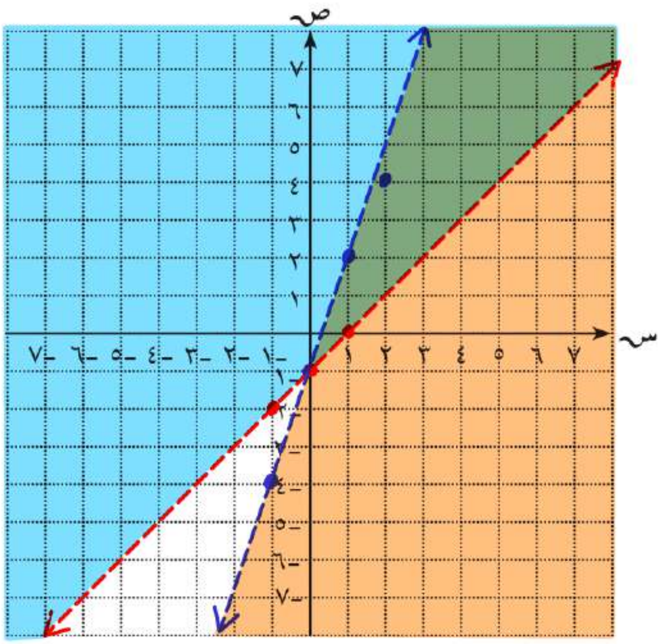
• عوِّض بالنقطة (٢ ، ٤)

٤ > ١

عبارة صحيحة

• ظلِّل منطقة الحلّ لكلّ من المتباينتَين .

• عيِّن على الرسم منطقة الحلّ المشترَك .



دورك الآن (٣)

مثِّل بيانيًّا منطقة الحلّ المشترَك للمتباينتَين :

ص > س ، ص ≤ ٤

ص > س

المعادلة المناظرة ← ص = س

ص = س			
س	١	٠	١-
ص	١	٠	١-

خط الحدود متقطع

نعوض بالنقطة (٢ ، ٣)

٣ > ٢

العبارة غير صحيحة

∴ النقطة (٢ ، ٣) ∉ منطقة الحل

ص ≤ ٤

المعادلة المناظرة ← ص = ٤

ص = ٤			
س	١	٠	١-
ص	٤	٤	٤

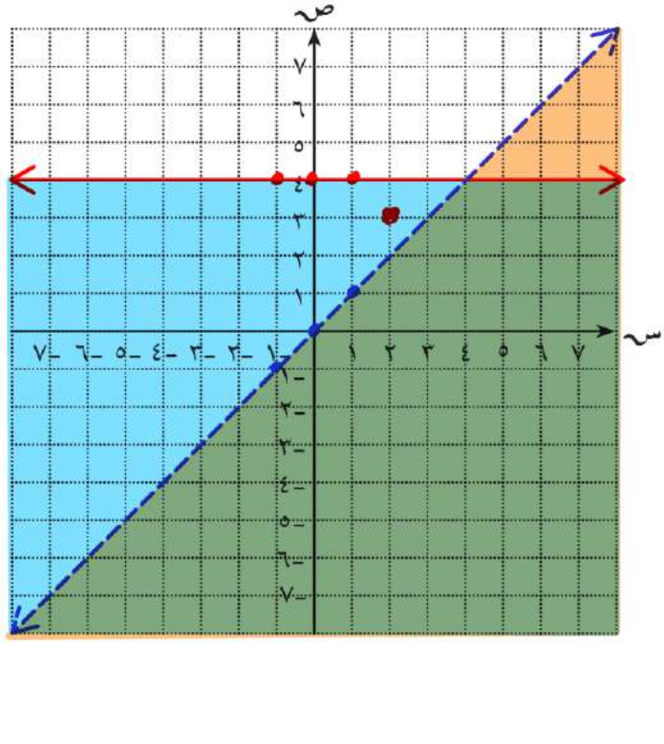
خط الحدود متصل

نعوض بالنقطة (٢ ، ٣)

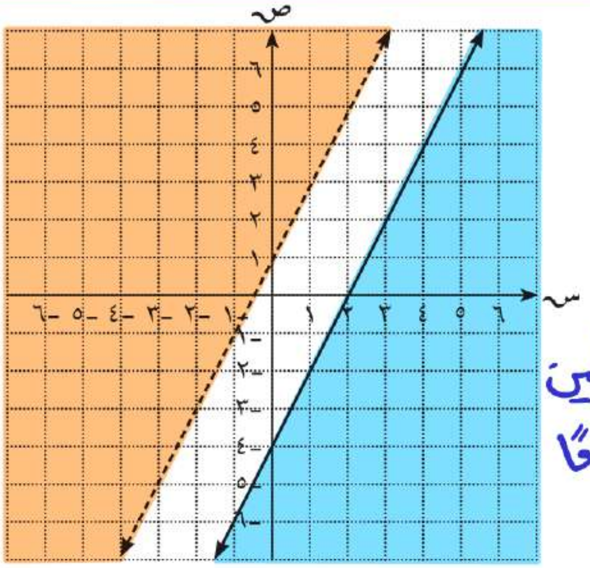
٣ ≤ ٤

العبارة صحيحة

∴ النقطة (٢ ، ٣) ∈ منطقة الحل.



عبِّر عن فهمك



ظلِّل في الشكلِ المقابِل منطقة الحلّ لكلّ من المتباينتَين :

ص > ٢ س + ١

ص ≥ ٢ س − ٤

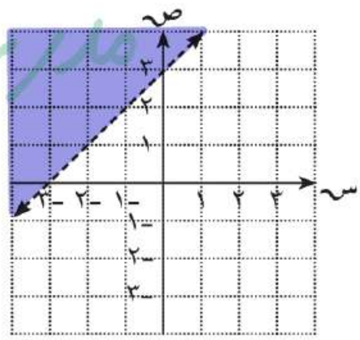
ماذا تلاحظ ؟

ألاحظ أن منطقة حل المتباينتين تساوي ∅ لأنهما لم يتقاطعا معًا

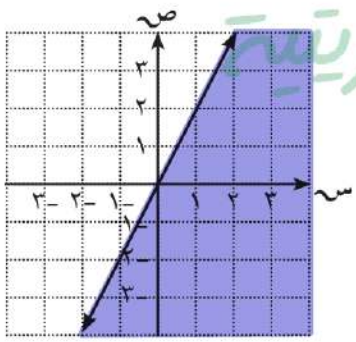
تمارين ذاتية :

١ ظلِّل منطقة حلّ كلّ متباينة في ما يلي :

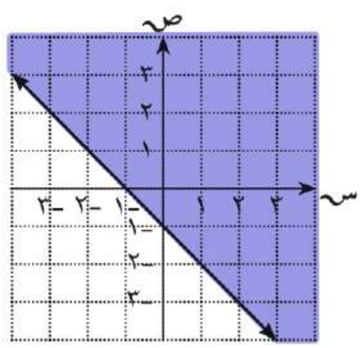
(أ) ص > س + ٣



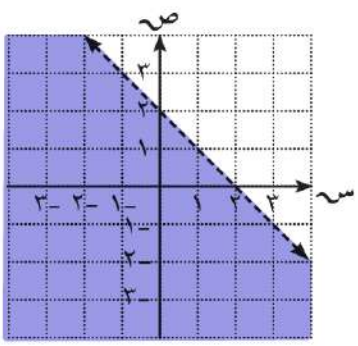
(ب) ص ≥ ٢ س

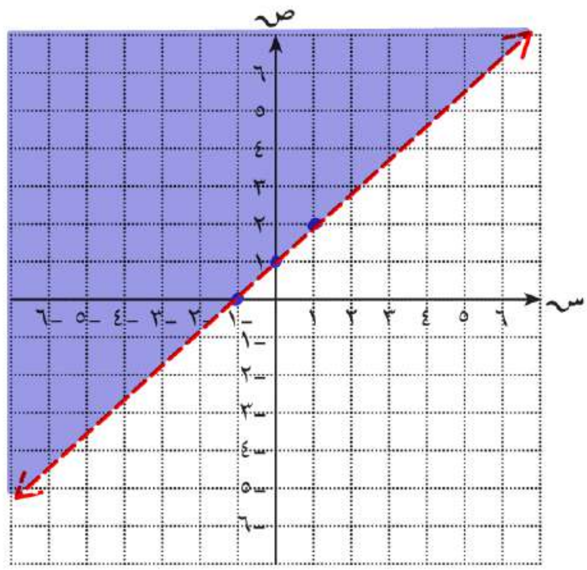


(ج) ص ≤ − س − ١



(د) ص < ٢ − س





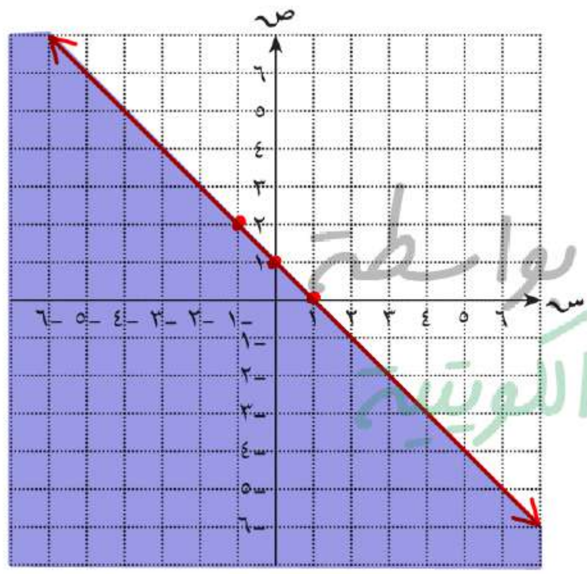
٢ مثِّل بيانيًّا منطقة الحلّ للمتباينة :

ص > س + ١

المعادلة المناظرة ← ص = س + ١

ص = س + ١			
س	١	٠	١-
ص	٢	١	٠

خط الحدود متقطع



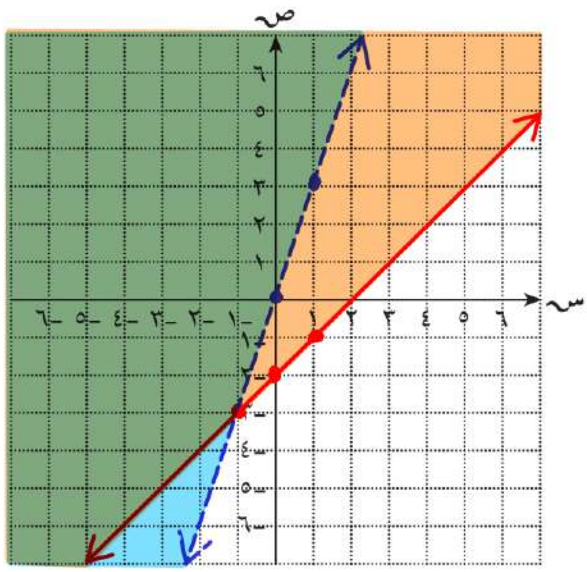
٣ مثِّل بيانيًّا منطقة الحلّ للمتباينة :

ص ≥ ١ - س

المعادلة المناظرة ← ص = ١ - س

ص = ١ - س			
س	١	٠	١-
ص	٠	١	٢

خط الحدود متصل



٤ مثِّل بيانيًّا منطقة الحلّ المشترَك للمتباينتَين :

ص > ٣س ، ص ≤ س - ٢

ص = ٣س

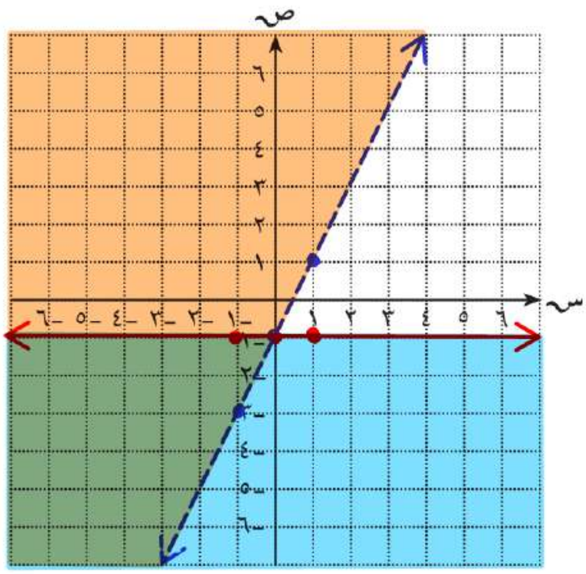
ص = ٣س			
س	١	٠	١-
ص	٣	٠	٣-

خط الحدود متقطع

ص = س - ٢

ص = س - ٢			
س	١	٠	١-
ص	١-	٢-	٣-

خط الحدود متصل



٥ مثِّل بيانيًّا منطقة الحلّ المشترَك للمتباينتَين :

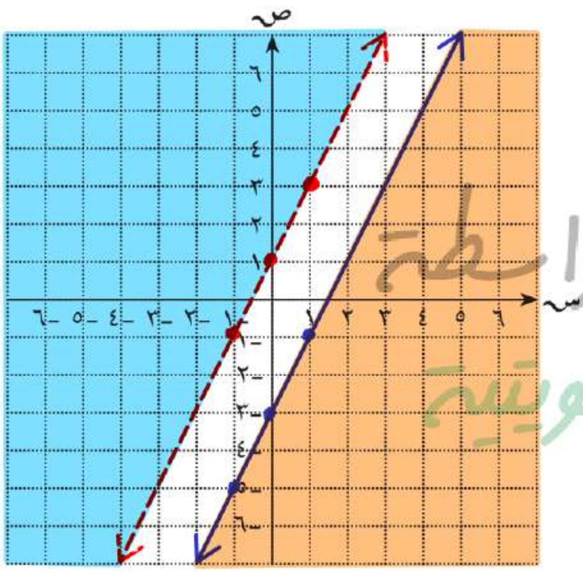
ص > ٢س − ١ ، ص ≥ −١

ص = ٢س − ١ | ص = −١

ص = ٢س − ١			
س	١	٠	−١
ص	١	−١	−٣

ص = −١			
س	١	٠	−١
ص	−١	−١	−١

خط الحدود متقطع | خط الحدود متصل



٦ مثِّل بيانيًّا منطقة الحلّ المشترَك للمتباينتَين :

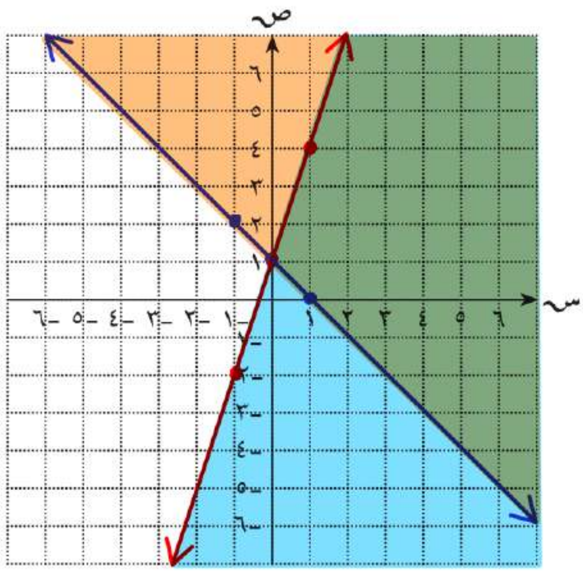
ص ≥ ٢س − ٣ ، ص > ٢س + ١

ص = ٢س − ٣ | ص = ٢س + ١

ص = ٢س − ٣			
س	١	٠	−١
ص	−١	−٣	−٥

ص = ٢س + ١			
س	١	٠	−١
ص	٣	١	−١

خط الحدود متصل | خط الحدود متقطع



٧ مثِّل بيانيًّا منطقة الحلّ المشترَك للمتباينتَين :

ص ≤ −س + ١ ، ص ≥ ٣س + ١

ص = −س + ١ | ص = ٣س + ١

ص = −س + ١			
س	١	٠	−١
ص	٠	١	٢

ص = ٣س + ١			
س	١	٠	−١
ص	٤	١	−٢

خط الحدود متصل | خط الحدود متصل

تقويم الوحدة التعليمية السادسة
Unit Six Assessment

أوّلاً : البنود المقالية

١ أوجِد ميل المستقيم المارّ بالنقطتَين في كلّ من الحالات التالية :

(أ) (٢، ٥) ، (٣، −٤)

الميل = $\frac{٥+٤}{٢-٣} = \frac{٩}{-١} = -٩$

(ب) (−٣، ٦) ، (٥، ٠)

الميل = $\frac{٦-٠}{-٣-٥} = \frac{٦}{-٨} = -\frac{٣}{٤}$

(ج) (٢، ٤) ، (٥، ٤)

الميل = $\frac{٤-٤}{٥-٢} = \frac{٠}{٣} = ٠$

يوازي محور الصادات

(د) (−٣، ٠) ، (٠، −٤)

الميل = $\frac{٠+٤}{-٣-٠} = \frac{-٤}{٣}$

٢ أوجِد الميل والجزء المقطوع من محور الصادات والجزء المقطوع من محور السينات لكلّ من المستقيمات التالية :

(أ) ص = ٤ س + ٩

الميل = ٤

الجزء المقطوع من محور الصادات = ٩

الجزء المقطوع من محور السينات = $\frac{-٩}{٤}$

(ب) ٢ ص = ٤ س + ٥

الميل = ٢

الجزء المقطوع من محور الصادات = $\frac{٥}{٢}$

الجزء المقطوع من محور السينات = $\frac{-٥}{٤}$

(ج) ٣ س + ٥ ص = ١

الميل = $-\frac{٣}{٥}$

الجزء المقطوع من محور الصادات = $\frac{١}{٥}$

الجزء المقطوع من محور السينات = $\frac{١}{٣}$

(د) ٥ س + ٦ ص − ٢ = ٠

الميل = $-\frac{٥}{٦}$

الجزء المقطوع من محور الصادات = $\frac{١}{٣}$

الجزء المقطوع من محور السينات = $\frac{٢}{٥}$

٣ حدِّد المستقيمات المتوازية والمستقيمات المتعامدة في كلّ من الحالات التالية :

(أ) $\overleftrightarrow{هـ}$ الذي يمرّ بالنقطتَين (٢ ، ٤) ، (٥ ، ١٠)

$\overleftrightarrow{و}$ الذي معادلته : ٢ ص − ٤ س + ٥ = ٠

ميل هـ = $\frac{١٠ - ٤}{٥ - ٢}$ = $\frac{٦}{٣}$ = ٢

ميل و = $\frac{٤}{٢}$ = ٢

∴ ميل هـ = ميل و ∴ هـ // و (المستقيمان متوازيان)

(ب) $\overleftrightarrow{ك}$ الذي يمرّ بالنقطتَين (٢ ، ٤) ، (٥ ، ٧)

$\overleftrightarrow{ل}$ الذي يمرّ بالنقطتَين (٣ ، ٥) ، (٢ ، ٦)

ميل ك = $\frac{٧ - ٤}{٥ - ٢}$ = $\frac{٣}{٣}$ = ١

ميل ل = $\frac{٦ - ٥}{٢ - ٣}$ = $\frac{١}{-١}$ = −١

∴ ميل ك × ميل ل = −١ ∴ ك ⊥ ل (المستقيمان متعامدان)

٤ أوجِد مجموعة حلّ المعادلتَين آنيًّا جبريًّا :

ص = س − ٣ ، ص − ٢ س = −٣

ص − س = −٣ ← (١)

ص − ٢ س = −٣ ← (٢)

بطرح (٢) من (١)

∴ ٠ − س = ٠

∴ س = ٠

بالتعويض في معادلة (١)

∴ ص − ٠ = −٣

∴ ص = −٣

∴ مجموعة الحل = {(٠ ، −٣)}

٥ أوجِد مجموعة حلّ المعادلتَين آنيًّا جبريًّا :

ص + ٢ س − ٤ = ٠ ، ص − س = −٢

ص + ٢ س = ٤ ← (١)

ص − س = −٢ ← (٢)

بطرح (٢) من (١)

∴ ٠ + ٣ س = ٦

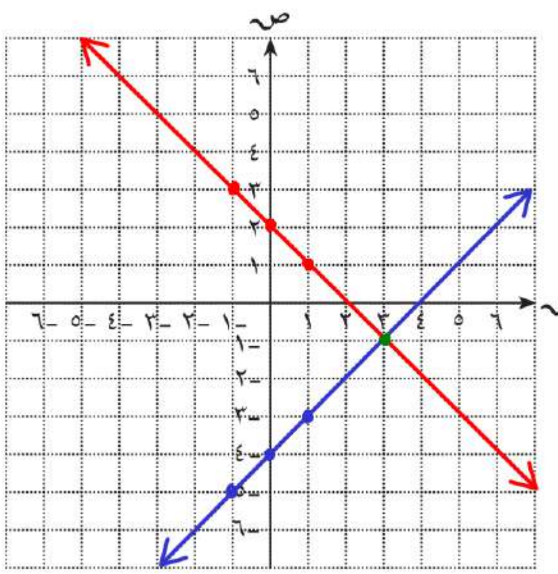
∴ س = $\frac{٦}{٣}$ = ٢

بالتعويض في معادلة (٢)

∴ ص − ٢ = −٢

∴ ص = ٢ − ٢ = ٠

∴ مجموعة الحل = {(٢ ، ٠)}



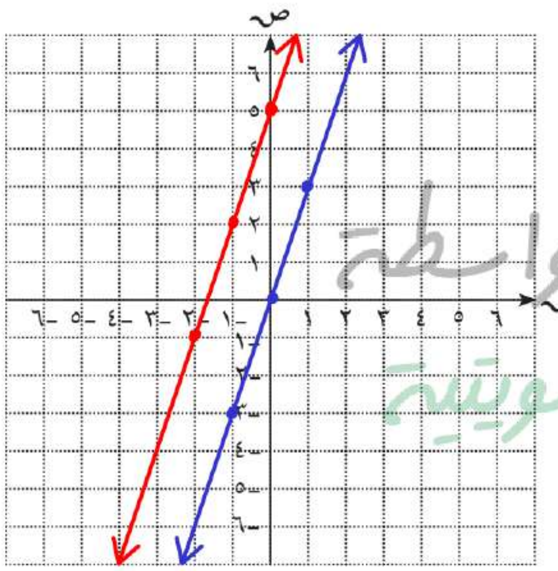
٦ أوجِد مجموعة حلّ المعادلتَين آنيًّا بيانيًّا :

ص = س - ٤ ، ص = - س + ٢

ص = س - ٤			
س	١	٠	-١
ص	-٣	-٤	-٥

ص = - س + ٢			
س	١	٠	-١
ص	١	٢	٣

∴ مجموعة الحل من الرسم = {(٣ ، -١)}



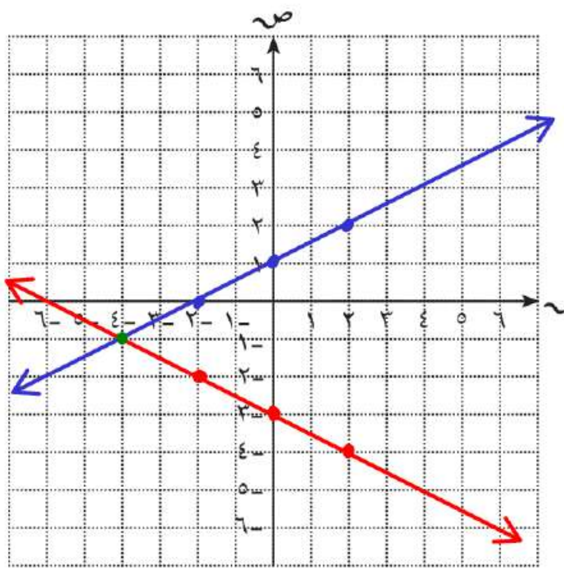
٧ أوجِد مجموعة حلّ المعادلتَين آنيًّا بيانيًّا :

ص - ٣ س = ٠ ، ص = ٣ س + ٥

ص = ٣س			
س	١	٠	-١
ص	٣	٠	-٣

ص = ٣س + ٥			
س	٠	-١	-٢
ص	٥	٢	-١

∴ من الرسم
مجموعة الحل = ∅
لأنهما مستقيمان متوازيان .



٨ أوجِد مجموعة حلّ المعادلتَين آنيًّا بيانيًّا :

ص = $\frac{1}{2}$ س + ١ ، ص = - $\frac{1}{2}$ س - ٣

ص = $\frac{1}{2}$ س + ١			
س	٢	٠	-٢
ص	٢	١	٠

ص = - $\frac{1}{2}$ س - ٣			
س	٢	٠	-٢
ص	-٤	-٣	-٢

∴ من الرسم

مجموعة الحل = {(-٤ ، -١)}

٩ مثّل بيانيًّا منطقة الحلّ المشترَك للمتباينتَين :

ص ≥ س + ٤ ، ص > س - ٣

ص ≥ س + ٤

المعادلة المناظرة

ص = س + ٤

ص = س + ٤			
س	١	٠	-١
ص	٥	٤	٣

خط الحدود متصل

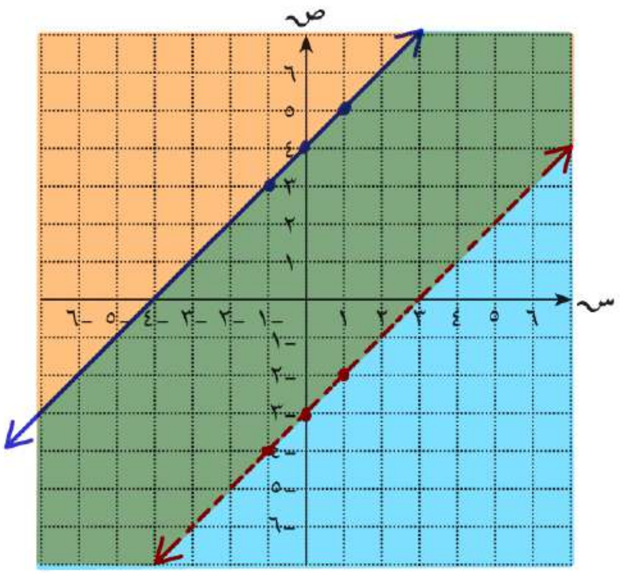
ص > س - ٣

المعادلة المناظرة

ص = س - ٣

ص = س - ٣			
س	١	٠	-١
ص	-٢	-٣	-٤

خط الحدود متقطع



١٠ مثّل بيانيًّا منطقة الحلّ المشترَك للمتباينتَين :

ص - س - ٢ ≥ ٠ ، ص ≥ ١ - س

ص - س - ٢ ≥ ٠

ص ≥ س + ٢

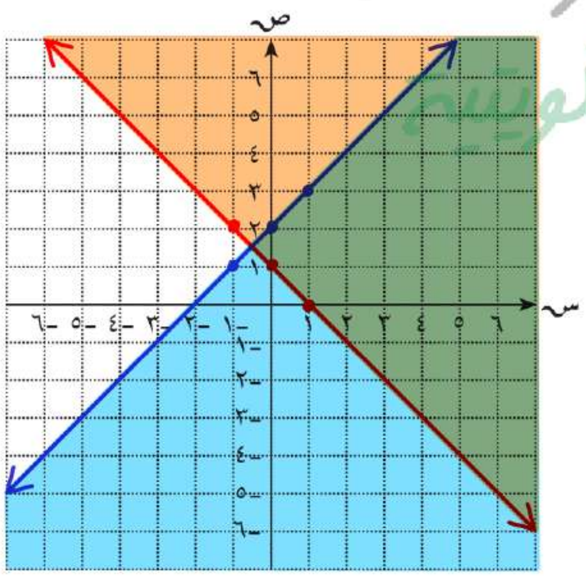
ص = س + ٢			
س	١	٠	-١
ص	٣	٢	١

خط الحدود متصل

ص ≥ ١ - س

ص = ١ - س			
س	١	٠	-١
ص	٠	١	٢

خط الحدود متصل



ثانيًا : البنود الموضوعية

في البنود (١ - ١٠) ، ظلّل أ إذا كانت العبارة صحيحة ، وظلّل ب إذا كانت العبارة غير صحيحة .

١ ميل المستقيم الأفقي يساوي صفرًا .	أ	ب
٢ ميل المستقيم الموازي لمحور الصادات يساوي صفرًا .	أ	ب
٣ الجزء المقطوع من محور الصادات للمستقيم الذي معادلته : ٣ س + ٣ ص = ١ هو ١	أ	ب
٤ إذا كان المستقيمان اللذان ميلاهما $\frac{-٢}{٣}$ ، $\frac{٦}{ك}$ متعامدَين ، فإنّ ك تساوي ٤ .	أ	ب
٥ المستقيم الذي معادلته ص = ٥ ليس له ميل .	أ	ب
٦ المستقيمان ص = ٢ س + ٣ ، ٢ ص = ٤ س - ١ متوازيان .	أ	ب
٧ المستقيم الذي معادلته ص = ٣ والمستقيم الذي معادلته س = ٢ مستقيمان متعامدان .	أ	ب
٨ إذا كان ميل $\overleftrightarrow{ع_١}$ هو ٣ ، فإنّ ميل $\overleftrightarrow{ع_٢}$ العمودي عليه $\frac{-١}{٣}$	أ	ب
٩ النقطة (٢ ، ٠) هي أحد حلول المتباينة ص ≤ ٣ س - ٢	أ	ب
١٠ مجموعة حلّ المعادلتَين ص = ٣ س - ٢ ، ص = ٢ س + ٢ هي { (٤ ، ١٠) }	أ	ب

تقويم الوحدة السادسة

في البنود (١١ – ١٨) ، لكلّ بند أربعة اختيارات ، واحد فقط منها صحيح ، ظلّل الإجابة الصحيحة .

١١ الجزء المقطوع من محور الصادات للمستقيم الذي معادلته :
٣ ص − س + ١ = ٠ هو :

أ − ١
ب + ١
ج $\frac{-١}{٣}$
د $\frac{١}{٣}$

١٢ ميل المستقيم المتعامد مع المستقيم : ٢ ص = −٤ س + ٣ هو :

أ ٢
ب $\frac{١}{٢}$
ج ١
د $\frac{-١}{٢}$

١٣ مجموعة حلّ المعادلتَين :
ص = ٣ س − ١ ، ص = ٢ س + ١ هي :

أ { (٠ ، −١) }
ب { (٢ ، ٥) }
ج { (٠ ، ١) }
د ∅

١٤ النقطة التي تنتمي إلى منطقة الحلّ المشترَك للمتباينتَين
س + ص > ٣ ، ٢ س − ص < ٣ هي :

أ (−٢ ، ١)
ب (٣ ، ١)
ج (٢ ، ٢)
د (٤ ، ١)

١٥ المستقيم الموازي للمستقيم : ٣ ص = ٦ س + ٢ هو :

أ ص = ٢ س + ٥
ب ٢ ص = ٣ س − ٢
ج ٣ ص = س + ٢
د ص = ٣ س + ٢

١٦ إذا كان المستقيمان اللذان ميلاهما $\frac{-٢}{٣}$ ، $\frac{ك}{٢}$ متوازيَين ، فإنّ ك تساوي :

أ $-\frac{٣}{٤}$
ب $\frac{١}{٣}$
ج ٣
د $-\frac{٤}{٣}$

١٧ أ ب جـ د مربّع قطراه $\overline{\text{أ جـ}}$ ، $\overline{\text{ب د}}$ حيث أ (٥ ، ٤) ، جـ (-٢ ، ٣) فإنّ ميل $\overleftrightarrow{\text{ب د}}$ يساوي :

أ ٧ | ب -٧ | ج $\frac{١}{٧}$ | د $-\frac{١}{٧}$

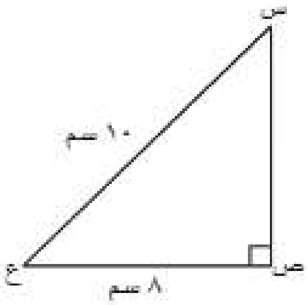
١٨ إذا كان م١ ، م٢ ميلَي مستقيمَين متوازيَين وغير رأسيَّين ، فإنّ :

أ م١ + م٢ = ٠ | ب م١ − م٢ = ٠

ج م١ × م٢ = ٠ | د م١ − م٢ ≠ ٠

هل أنت مستعدّ؟

١ في الشكل المقابِل :



أوجِد بالبرهان طول س ص ،
ثمّ أوجِد مساحة المثلّث .

$(س ص)^2 = (١٠)^2 - (٨)^2$ (فيثاغورث)

∴ س ص $= \sqrt{١٠٠ - ٦٤} = \sqrt{٣٦} = ٦$ سم

∴ مساحة المثلث $= \frac{1}{2} \times$ ق $\times$ ع

$= \frac{1}{2} \times ٨ \times ٦ = ٢٤$ سم^2

٢ حُلّ المعادلة التالية : س = ٢ (س + ٣) حيث س ∈ ح

س = ٢س + ٦ ← س − ٢س = ٦

∴ −س = ٦ ، ∴ س = −٦ ∴ م.ح = {−٦}

٣ أوجِد ناتج كلّ ممّا يلي في أبسط صورة :

أ) $\frac{١}{٢} \times ١٥ = \frac{١٥}{٢} = ٧\frac{١}{٢}$

ب) $\sqrt{١٤٤} = ١٢$

ج) $\sqrt{٩} = ٣$

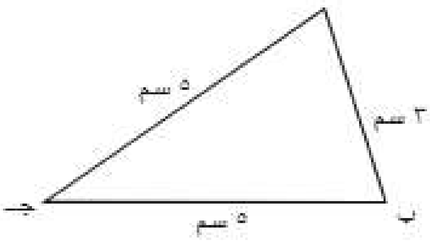
د) $\frac{٢}{٣} \times ٢٧ = \frac{٢ \times \cancel{٢٧}^{٩}}{\cancel{٣}_{١}} = ٢ \times ٩ = ١٨$

هـ) $\frac{٣}{٢} \times ١٨ = \frac{٣ \times \cancel{١٨}^{٩}}{\cancel{٢}_{١}} = ٣ \times ٩ = ٢٧$

و) $\frac{١}{٣} \times ٣٩ = \frac{٣٩}{٣} = ١٣$

ز) $\sqrt{١٠٠} = ١٠$

٤ في الشكل المقابِل ، أكمِل :



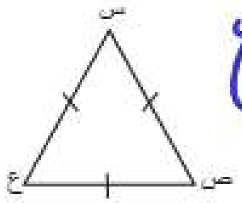
أ) نوع المثلّث أ ب جـ بالنسبة إلى أضلاعه

مثلث متطابق الضلعين

ب) محيط المثلّث أ ب جـ =

٣ + ٥ + ٥ = ١٣ سم

٥ في الشكل المقابِل ، أكمِل :

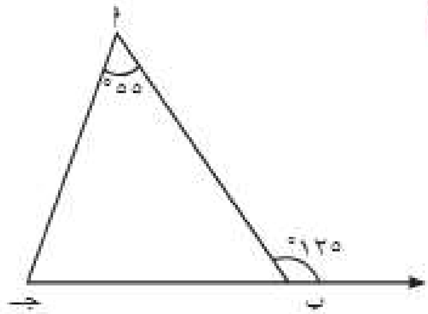


أ) نوع المثلّث س ص ع بالنسبة إلى أضلاعه .... متطابق الأضلاع

ب) ق ($\hat{ص}$) = ق ($\hat{ع}$) = ق ($\hat{س}$) = ... ٦٠°

٦ أكمِل ما يلي :

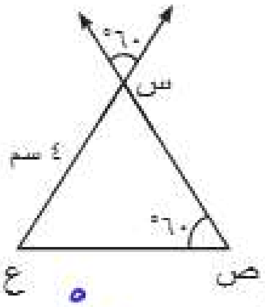
أ)



ق ($\hat{جـ}$) = ... ١٢٥ − ٥٥ = ٧٠

السبب = الزاوية الخارجة للمثلث = مجموع زاويتي المثلث عدا المجاورة لها

ب)

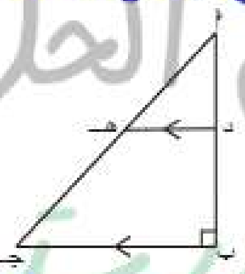


ق (ص $\hat{س}$ ع) = ... ٦٠° السبب = بالتقابل بالرأس

ق ($\hat{ع}$) = ... ٦٠ السبب = مجموع زوايا المثلث = ١٨٠

س ص = ... ٤ سم السبب = Δ س ص ع متطابق الأضلاع

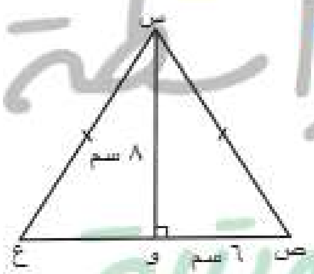
جـ)



ق (أ $\hat{د}$ هـ) = ... ٩٠

السبب = بالتناظر مع ($\hat{ب}$)

د)

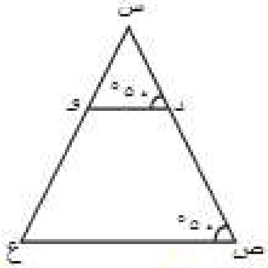


و ع = ... ٦ السبب = وس ينصف Δ متطابقة الضلعين

س ص = ... ١٠ السبب = نظرية فيثاغورث

٧ في الشكل التالي :

أثبِت أنّ : $\overline{د و}$ // $\overline{ص ع}$



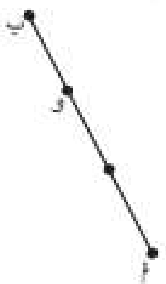
∵ ق(س $\hat{د}$ و) = ق($\hat{ص}$)

(وهما في وضع تناظر)

∴ د و // ص ع

٨ في الشكل المقابِل : النقطة و تقسم $\overline{أب}$ بنسبة ٢ : ١ من جهة أ

أكمِل ما يلي :



أ) أ و = ... ٢ و ب

و ب = ... $\frac{1}{2}$ أ و

ب) أ ب = ... $\frac{3}{2}$ أ و

أ و = ... $\frac{2}{3}$ أ ب

جـ) أ ب = ... ٣ و ب

و ب = ... $\frac{1}{3}$ أ ب

٧ ـ ١ القطعة المستقيمة الواصلة بين منتصفَي ضلعَين في مثلّث
The Midsegment of a Triangle

سوف تتعلّم : توظيف نظرية القطعة المستقيمة الواصلة بين منتصفَي ضلعَين في مثلّث لحلّ تمارين هندسية .

العبارات والمفردات :

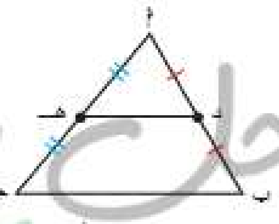
مثلّث	Triangle	قطعة مستقيمة	Segment

استكشِف (١)

في المثلّث أ ب جـ :

د منتصف $\overline{أب}$ ، هـ منتصف $\overline{أجـ}$

ما العلاقة بين $\overline{دهـ}$ ، $\overline{بجـ}$ ؟

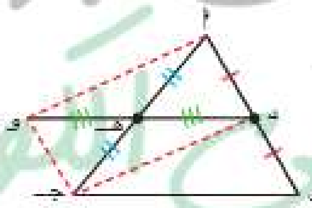


اللوازم

أدوات هندسية .

العمل : نمدّ $\overleftarrow{دهـ}$ إلى و ، حيث د هـ = هـ و

ثمّ نصل $\overline{أو}$ ، $\overline{دجـ}$ ، $\overline{وجـ}$.



تذكّر

من خواصّ متوازي الأضلاع القطران ينصّف كلّ منهما الآخر

١ هل الشكل أ د جـ و متوازي أضلاع ؟ لماذا ؟

نعم لأنه قطراه ينصف كل منهما الآخر

٢ $\overline{أد}$ // وجـ ، أد = وجـ

٣ هل الشكل ب جـ و د متوازي أضلاع ؟ لماذا ؟

نعم ، لأنه فيه ضلعين متقابلين متطابقان ومتوازيان

٤ $\overline{دو}$ // ب جـ ، دو = ب جـ

٥ $\overline{دهـ}$ // ب جـ ، دهـ = $\frac{1}{2}$ ب جـ

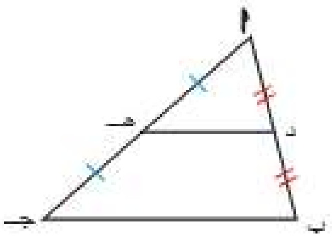
نظرية :

القطعة المستقيمة الواصلة بين منتصفَي ضلعَين في مثلّث توازي الضلع الثالث ، وطولها يساوي نصف طول هذا الضلع .

في المثلّث أ ب جـ :

إذا كان د منتصف $\overline{أب}$ ، هـ منتصف $\overline{أجـ}$

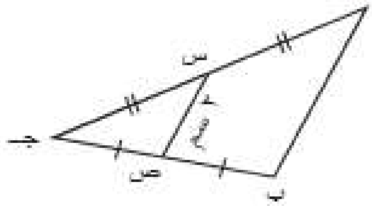
فإنّ $\overline{د هـ}$ // $\overline{ب جـ}$ ، د هـ = $\frac{1}{2}$ ب جـ



دورك الآن (١)

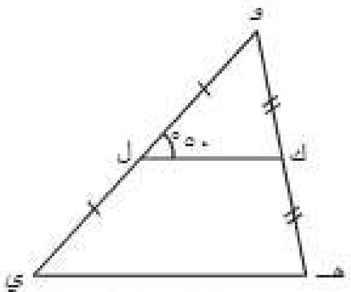
في كلّ من المثلّثات التالية ، أكمِل (دون استخدام الأدوات الهندسية) :

(أ)



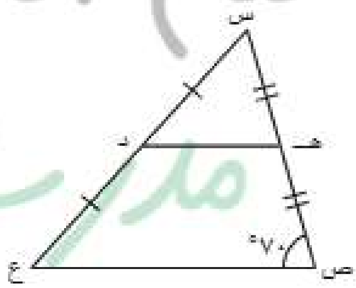
أ ب = ٢ س ص = ٢ × ٢ = ٤ سم

(ب)



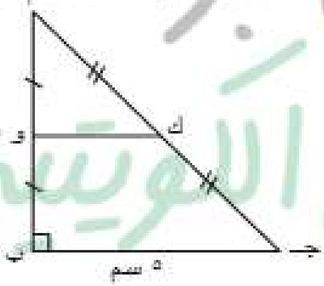
ق (ي^) = ٥٠° (بالتناظر مع (و ل^ ك))

(ج)



ق (س هـ^ د) = ٧٠°

(د)



و ك = $\frac{1}{2}$ ب جـ = $\frac{1}{2}$ × ٥ = $\frac{5}{2}$ سم

مثال (١):

في الشكل المقابِل س ص ع مثلّث فيه :

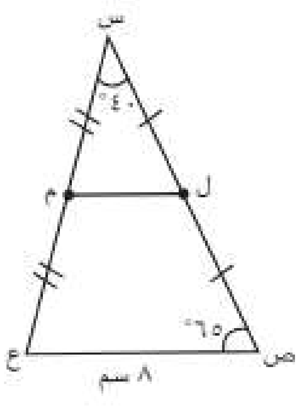
ل منتصف $\overline{س ص}$ ، م منتصف $\overline{س ع}$ ،

ص ع = ٨ سم ، ق (ص سَ^ ع) = ٤٠° ، ق (س صَ^ ع) = ٦٥° .

أوجِد بالبرهان : (١) طول $\overline{ل م}$

(٢) ق (س لَ^ م)

(٣) ق (س مَ^ ل)



الحلّ :

المعطيات : ل منتصف $\overline{\text{س ص}}$ ، م منتصف $\overline{\text{س ع}}$ ، ص ع = ٨ سم ،

ق (ص $\hat{\text{س}}$ ع) = ٤٠° ، ق (س $\hat{\text{ص}}$ ع) = ٦٥°

المطلوب : إيجاد : (١) طول $\overline{\text{ل م}}$ (٢) ق (س $\hat{\text{ل}}$ م) (٣) ق (س $\hat{\text{م}}$ ل)

البرهان : في Δ س ص ع :

∵ ل منتصف $\overline{\text{س ص}}$ ، م منتصف $\overline{\text{س ع}}$ (معطى)

∴ ل م = $\frac{1}{2}$ ص ع ، $\overline{\text{ل م}}$ // $\overline{\text{ص ع}}$ (نظرية)

∵ ص ع = ٨ سم (معطى)

∴ ل م = $\frac{1}{2}$ × ٨ = ٤ سم

∴ ق (س $\hat{\text{ل}}$ م) = ق ($\hat{\text{ص}}$) = ٦٥° (بالتناظر والتوازي)

∵ مجموع قياسات زوايا المثلّث الداخلة = ١٨٠°

∴ ق (س $\hat{\text{م}}$ ل) = ١٨٠° - (٦٥° + ٤٠°) = ١٨٠° - ١٠٥° = ٧٥°

دورك الآن (٢)

في الشكل المقابِل ، أ ب جـ مثلّث قائم الزاوية في ب

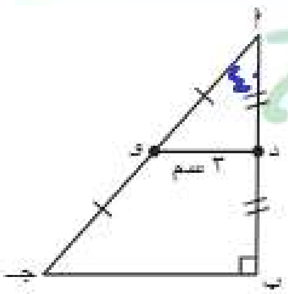
د منتصف $\overline{\text{أ ب}}$ ، و منتصف $\overline{\text{أ جـ}}$ ،

ق ($\hat{\text{أ}}$) = ٤٠° ، د و = ٣ سم

أوجِد بالبرهان : (١) طول $\overline{\text{ب جـ}}$

(٢) ق (أ $\hat{\text{د}}$ و)

(٣) ق (أ $\hat{\text{و}}$ د)



المعطيات : د منتصف أب ، و منتصف أجـ ،

ق (أ̂) = ٤٠° ، د و = ٣ سم

المطلوب : إيجاد : (١) طول ب جـ ، (٢) ق (أ د̂ و) ، ق (أ و̂ د)

البرهان : ∵ د منتصف أب ، و منتصف أجـ

∴ د و // ب جـ ، د و = $\frac{1}{2}$ ب جـ

∴ ب جـ = ٢ د و = ٢ × ٣ = ٦ سم #

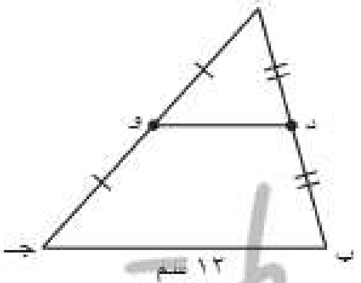
∵ د و // ب جـ

∴ ق(أ د̂ و) = ق(ب̂) = ٩٠° (بالتناظر والتوازي)

∵ Δ أ د و قائم في (د) ∴ ق(أ̂) + ق(أ و̂ د) = ٩٠

∴ ق(أ و̂ د) = ٩٠ − ٤٠ = ٥٠°

مثال (٢):



أ ب جـ مثلّث فيه :

د منتصف $\overline{أب}$ ، و منتصف $\overline{أجـ}$

أ ب = ١٠ سم ، أ جـ = ١٣ سم ، ب جـ = ١٢ سم .

أوجِد بالبرهان : (١) طول $\overline{د و}$

(٢) محيط Δ أ د و .

الحلّ :

المعطَيات : أ ب جـ مثلّث فيه د منتصف $\overline{أب}$ ، و منتصف $\overline{أجـ}$

أ ب = ١٠ سم ، أ جـ = ١٣ سم ، ب جـ = ١٢ سم .

المطلوب : إيجاد (١) طول $\overline{د و}$

(٢) محيط Δ أ د و

البرهان : في Δ أ ب جـ :

∵ د منتصف $\overline{أب}$ ، و منتصف $\overline{أجـ}$ (معطى)

∴ $\overline{د و}$ // $\overline{ب جـ}$ ، د و = $\frac{1}{2}$ ب جـ (نظرية)

∴ د و = $\frac{1}{2}$ × ١٢ = ٦ سم

أ د = $\frac{1}{2}$ أ ب = $\frac{1}{2}$ × ١٠ = ٥ سم

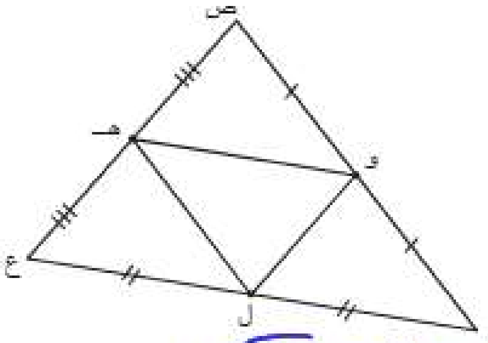
أ و = $\frac{1}{2}$ أ جـ = $\frac{1}{2}$ × ١٣ = ٦,٥ سم

∴ محيط Δ أ د و = مجموع أطوال أضلاعه

= ٦ + ٦,٥ + ٥

= ١٧,٥ سم

دورك الآن (٣)



المثلّث س ص ع فيه :

س ص = ٢٠ سم ، ع ص = ١٦ سم ،

س ع = ٢٤ سم ، و ، هـ ، ل منتصفات

$\overline{\text{س ص}}$ ، $\overline{\text{ع ص}}$ ، $\overline{\text{س ع}}$ على الترتيب .

أوجِد بالبرهان محيط المثلّث ل هـ و .

المعطَيات : س ص = ٢٠ سم ، ع ص = ١٦ سم ، س ع = ٢٤ سم ، و ، هـ ، ل منتصفات س ص ، ع ص ، س ع على الترتيب

المطلوب : إيجاد محيط Δ ل هـ و

البرهان : في المثلّث س ص ع :

∵ و منتصف $\overline{\text{س ص}}$ ، هـ منتصف $\overline{\text{ع ص}}$ (معطى)

∴ و هـ = $\frac{1}{2}$ س ع = $\frac{1}{2}$ × ٢٤ سم = ١٢ سم (نظرية)

∵ ل منتصف س ع ، هـ منتصف ع ص

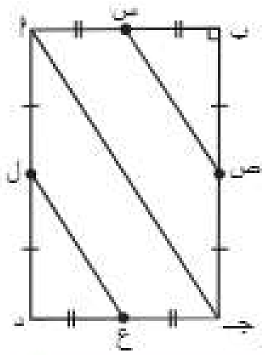
∴ ل هـ = $\frac{1}{2}$ س ص = $\frac{1}{2}$ × ٢٠ = ١٠ سم (نظرية)

∵ و منتصف س ص ، ل منتصف س ع

∴ ل و = $\frac{1}{2}$ ص ع = $\frac{1}{2}$ × ١٦ = ٨ سم (نظرية)

محيط Δ ل و هـ = ١٢ + ١٠ + ٨ = ٣٠ سم

مثال (٣) :



في الشكل المقابِل ، أ ب جـ د مستطيل فيه :

س ، ص ، ع ، ل منتصفات أضلاعه

أثبِت أنّ س ص = ع ل

الحلّ :

المعطَيات : أ ب جـ د مستطيل

س ، ص ، ع ، ل منتصفات أضلاع المستطيل

المطلوب : إثبات أنّ س ص = ع ل .

تذكّر

من خواصّ المساواة

إذا كان أ = ب ، ب = جـ ،

فإنّ أ = جـ

البرهان : في Δ ا ب جـ

∵ س منتصف $\overline{\text{ا ب}}$ ، ص منتصف $\overline{\text{ب جـ}}$

س ص = $\frac{1}{2}$ ا جـ　　(١)　(نظرية)

في Δ جـ د ا :

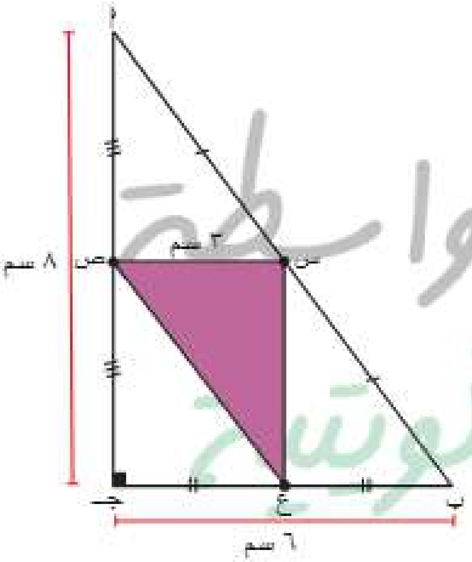
∵ ع منتصف $\overline{\text{جـ د}}$ ، ل منتصف $\overline{\text{ا د}}$

∴ ع ل = $\frac{1}{2}$ ا جـ　　(٢)　(نظرية)

من (١) ، (٢)

∴ س ص = ع ل　　(من خواصّ المساواة)

دورك الآن (٤)



في الشكل المقابِل ، Δ ا ب جـ قائم الزاوية في جـ

س منتصف $\overline{\text{ا ب}}$ ، ص منتصف $\overline{\text{ا جـ}}$ ، ع منتصف $\overline{\text{ب جـ}}$.

أوجِد بالبرهان : (١) محيط المثلّث س ع ص .

(٢) مساحة المثلّث س ع ص .

المعطَيات : المثلّث ا ب جـ قائم الزاوية في جـ ،

س منتصف $\overline{\text{ا ب}}$ ، ص منتصف $\overline{\text{ا جـ}}$ ،

ع منتصف $\overline{\text{ب جـ}}$

المطلوب : إيجاد (١) محيط المثلّث س ع ص .

(٢) مساحة المثلّث س ع ص .

البرهان : في Δ ا ب جـ قائم الزاوية في جـ

(باستخدام نظرية فيثاغورث)

$(\text{ا ب})^2 = (\text{ا جـ})^2 + (\text{ب جـ})^2$

∴ ا ب = $\sqrt{(٨)^2 + (٦)^2}$

= $\sqrt{٦٤ + ٣٦}$

= $\sqrt{١٠٠}$ = ١٠ سم

تذكَّر

نظرية فيثاغورث

في المثلّث القائم الزاوية ، يكون مربّع طول الوتر مساوِيًا لمجموع مربّعَي طولَي الضلعَين الآخرَين .

∵ س منتصف $\overline{\text{ا ب}}$ ، ع منتصف $\overline{\text{ب جـ}}$

∴ س ع = $\frac{1}{2}$ ا جـ　　(نظرية)

س ع = $\frac{1}{2}$ × ٨ = ٤

بالمثل :

∵ ع منتصف ب جـ ، ص منتصف $\overline{\text{ا جـ}}$

∴ ع ص = $\frac{1}{2}$ ا ب　　(نظرية)

= $\frac{1}{2}$ × ١٠

= ٥

∴ محيط Δ س ع ص = ٥ + ٤ + ٣ = ١٢ سم

في Δ س ع ص :

(ص ع)^{٢} = (٥)^{٢} = ٢٥ ،

(س ص)^{٢} + (س ع)^{٢} = (٣)^{٢} + (٤)^{٢} = ٩ + ١٦ = ٢٥

∵ (ص ع)^{٢} = (س ص)^{٢} + (س ع)^{٢}

∴ Δ س ص ع قائم الزاوية في س   (عكس نظرية فيثاغورث)

∴ مساحة المثلّث س ص ع = $\frac{١}{٢}$ × ق × ع

= $\frac{١}{٢}$ × ٣ × ٤ = ٦ سم^{٢}

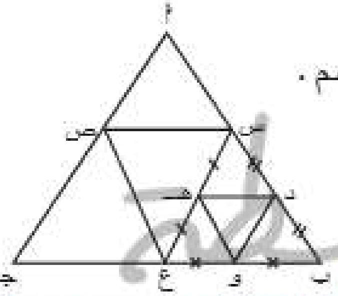
تذكّر

عكس نظرية فيثاغورث

إذا كان مربّع طول الضلع الأطول في مثلّث مساويًا لمجموع مربّعَي طولَي الضلعَين الآخرَين ، فإنّ هذا المثلّث يكون قائم الزاوية والزاوية القائمة هي المقابِلة للضلع الأطول .

عبِّر عن فهمك

إذا كان س ، ص ، ع منتصفات أضلاع المثلّث أ ب جـ ،
د ، هـ ، و منتصفات أضلاع المثلّث س ب ع ، كما هو موضّح في الرسم .
فما العلاقة بين محيط المثلّث د هـ و ومحيط المثلّث أ ب جـ ؟



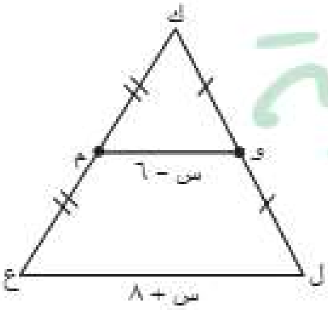
محيط Δ أ ب جـ = ٢ محيط Δ س ب ع ← (١)

محيط Δ س ب ع = ٢ محيط Δ د هـ و ← (٢)

من (١) ، (٢) ∴ محيط Δ أ ب جـ = ٤ محيط Δ د هـ و

مثال (٤) :

المثلّث ك ل ع فيه و منتصف $\overline{ك ل}$ ، م منتصف $\overline{ك ع}$.
أوجِد بالبرهان قيمة س .



الحلّ :

المعطَيات : ك ل ع مثلّث فيه و منتصف $\overline{ك ل}$ ، م منتصف $\overline{ك ع}$.

المطلوب : إيجاد قيمة س .

البرهان : في Δ ك ل ع

∵ و منتصف $\overline{ك ل}$ ، م منتصف $\overline{ك ع}$ (معطى)

∴ $\overline{و م}$ // $\overline{ل ع}$ ، و م = $\frac{١}{٢}$ ل ع   (نظرية)

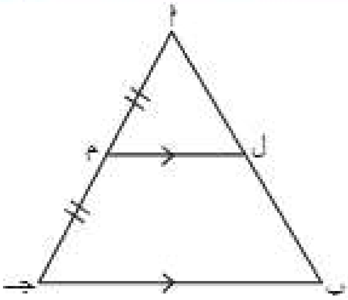
∴ س - ٦ = $\frac{١}{٢}$ (س + ٨)

٢ س - ١٢ = س + ٨   (بالضرب في العدد ٢ لكلا الطرفَين)

٢ س - س = ١٢ + ٨

∴ س = ٢٠

اِستكشِف (٢)



في الشكل المقابِل ، المثلّث أ ب جـ فيه :

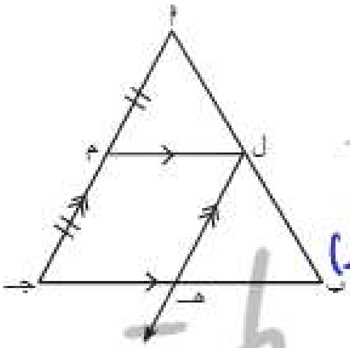
م منتصف $\overline{أجـ}$ ، $\overline{ل م}$ // $\overline{ب جـ}$ ،

هل ل منتصف $\overline{أب}$ ؟

العمل :

نرسم $\overleftarrow{ل هـ}$ // $\overline{أجـ}$ ويقطع $\overline{ب جـ}$ في هـ .

أجِب عن الأسئلة التالية :



١ هل الشكل ل هـ جـ م يمثّل متوازي أضلاع ؟ وضّح ذلك .

نعم ، كل ضلعين متقابلين متوازيان

٢ هل Δ أ ل م ≅ Δ ل ب هـ ؟ وضّح ذلك .

نعم ، حيث أن أم ≅ ل هـ ، ق(أ̂) ≅ ق(ب ل̂ هـ)

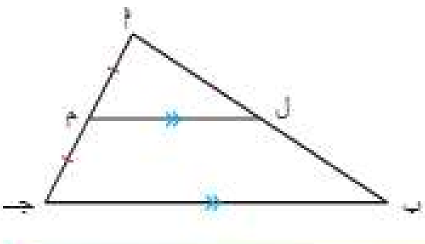
، ق(ب̂) ≅ ق(أ ل̂ م) (بالتناظر التوازي)

وينتج من التطابق أنّ $\overline{أل}$ ≅ ل ب

∴ ل منتصف أ ب

نظرية :

إذا رُسم مستقيم من منتصف أحد أضلاع مثلّث موازيًا ضلعًا آخر فيه ، فإنّه ينصّف الضلع الثالث .

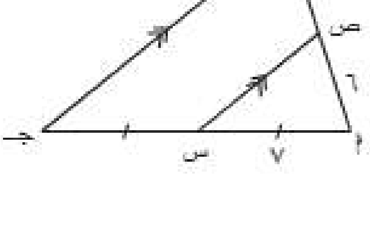


في المثلّث أ ب جـ :

∵ م منتصف $\overline{أجـ}$ ، $\overline{ل م}$ // $\overline{ب جـ}$

∴ ل منتصف $\overline{أب}$

دورك الآن (٥)



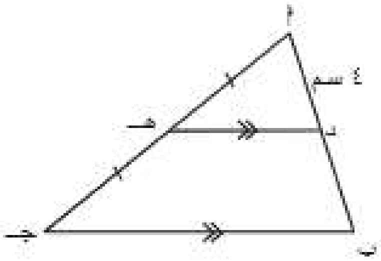
في الشكل المقابِل ، أكمِل ما يلي :

أ ص منتصف أ ب

ب طول $\overline{أب}$ = ٢ × ٦ = ١٢

مثال (٥):

أ ب جـ مثلث فيه : هـ منتصف $\overline{\text{أ جـ}}$ ،
$\overline{\text{د هـ}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$ ، أ د = ٤ سم .
أوجد بالبرهان طول $\overline{\text{أ ب}}$.



الحلّ :

المعطيات : أ ب جـ مثلث ، هـ منتصف $\overline{\text{أ جـ}}$ ،
$\overline{\text{د هـ}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$ ، أ د = ٤ سم .

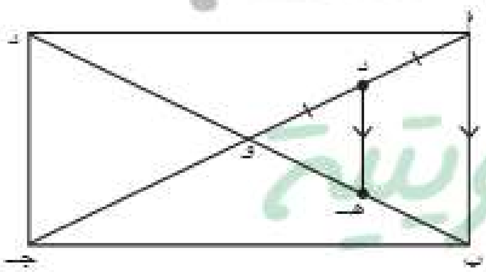
المطلوب : إيجاد طول $\overline{\text{أ ب}}$.

البرهان : في المثلّث أ ب جـ :

∵ هـ منتصف $\overline{\text{أ جـ}}$ ، $\overline{\text{د هـ}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$ (معطى)
∴ د منتصف $\overline{\text{أ ب}}$ (نظرية)
∴ أ د = د ب = ٤ سم
∴ أ ب = ٨ سم

مثال (٦):

أ ب جـ د مستطيل فيه : أ جـ = ١٢ سم ،
$\overline{\text{د هـ}}$ // $\overline{\text{أ ب}}$ ، د منتصف $\overline{\text{أ و}}$.
أوجد بالبرهان طول ب هـ .



الحلّ :

المعطيات : أ ب جـ د مستطيل ، أ جـ = ١٢ سم
$\overline{\text{د هـ}}$ // $\overline{\text{أ ب}}$ ، د منتصف $\overline{\text{أ و}}$.

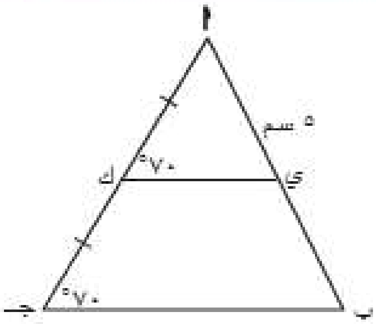
المطلوب : إيجاد طول $\overline{\text{ب هـ}}$.

البرهان : ∵ أ ب جـ د مستطيل (معطى)
∴ قطراه متطابقان وينصّف كلّ منهما الآخر (خواصّ المستطيل)
∴ أ جـ = ب د = ١٢ سم
أ و = و ب = ٦ سم
في Δ أ و ب :
∵ د منتصف $\overline{\text{أ و}}$ ، $\overline{\text{د هـ}}$ // $\overline{\text{أ ب}}$ (معطى)
∴ هـ منتصف $\overline{\text{و ب}}$ (نظرية)
∴ هـ ب = $\frac{1}{2}$ × ٦ = ٣ سم

تذكّر

من خواصّ المستطيل : القطران متطابقان وينصّف كلّ منهما الآخر.

دورك الآن (٦)



أ ب جـ مثلث فيه :

ك منتصف $\overline{أجـ}$ ، ق (جـ^) = ق (أ ك^ ي) = ٧٠° ،

أ ي = ٥ سم .

أوجِد بالبرهان طول $\overline{أب}$.

المعطيات : ك منتصف أ جـ ، أ ي = ٥ سم
ق (جـ^) = ق (أ ك^ ي) = ٧٠

المطلوب : إيجاد طول أ ب

البرهان : ∵ ق (جـ^) = ق (أ ك^ ي) = ٧٠ (وهما في وضع تناظر)

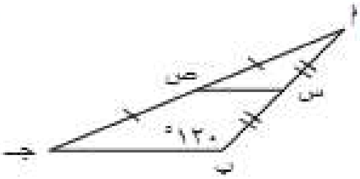
∴ ي ك // ب جـ
∵ ك منتصف أ جـ ، ي ك // ب جـ
∴ ي منتصف أ ب

∴ أ ب = ٢ أ ي
= ٢ × ٥ = ١٠ سم

تمارين ذاتية :

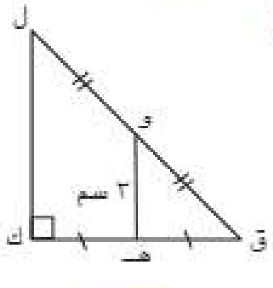
١ في كلٍّ من المثلثات التالية ، أكمِل (دون استخدام الأدوات الهندسية) :

(أ)



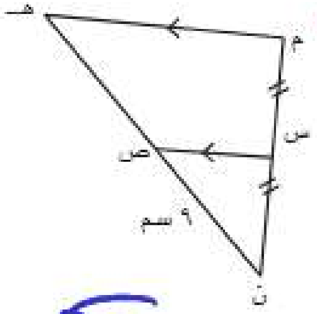
ق (أ س^ ص) = ١٢٠°

(ب)



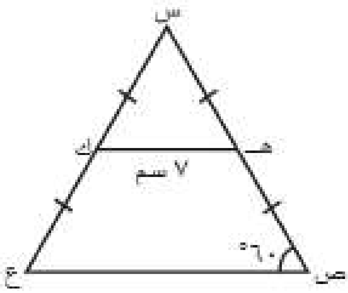
ك ل = ٦ سم

(ج)



ص هـ = ٩ سم

٢ في Δ س ص ع : س هـ = هـ ص = س ك = ك ع
ق ($\hat{ص}$) = ٦٠° ، هـ ك = ٧ سم .
أوجِد بالبرهان : (١) طول $\overline{ص ع}$.
(٢) ق ($\hat{ع}$)
(٣) طول $\overline{س ع}$.

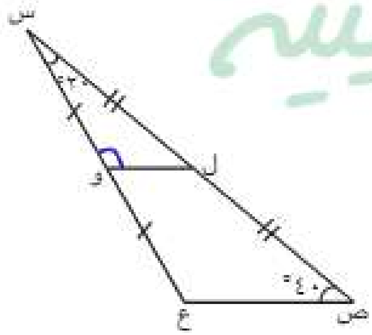


تذكّر

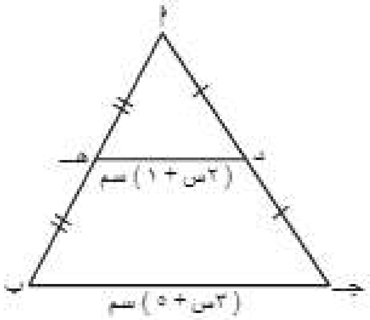
إذا كان المثلّث متطابق الضلعَين وقياس إحدى زواياه ٦٠° ، فإنّ المثلّث يكون متطابق الأضلاع .

∵ س هـ = هـ ص = س ك = ك ع
هـ منتصف س ص ، ك منتصف س ع
∵ ق($\hat{ص}$) = ٦٠ ، س ص = س ع
∴ Δ س ص ع متطابق الأضلاع .
∴ ق($\hat{ع}$) = ق($\hat{س}$) = ٦٠ ، س هـ = س ك
∴ Δ س هـ ك متطابق الأضلاع
∴ ق($\hat{ص}$) = ق(س $\hat{هـ}$ ك) = ٦٠ (وهما في وضع تناظر)
∴ هـ ك // ص ع ، ص ع = ٢ هـ ك
∴ ص ع = ٢ × ٧ = ١٤ سم
∴ س ع = ص ع = ١٤ سم

٣ س ص ع مثلّث فيه ،
ل منتصف $\overline{س ص}$ ، و منتصف $\overline{س ع}$
ق ($\hat{ص}$) = ٤٠° ، ق ($\hat{س}$) = ٢٠°
أوجِد بالبرهان ق (س $\hat{و}$ ل) .



∵ ل منتصف س ص ، و منتصف س ع
∴ ل و // ص ع
∵ مجموع قياسات الزوايا الداخلة للمثلث = ١٨٠
∴ ق($\hat{ع}$) = ١٨٠ − (٤٠ + ٢٠) = ١٨٠ − ٦٠ = ١٢٠
∵ ل و // ص ع
∴ ق(س $\hat{و}$ ل) = ق($\hat{ع}$) = ١٢٠ (بالتناظر والتوازي)



٤ أ ب جـ مثلّث فيه :
د منتصف أ جـ ، هـ منتصف أ ب
حيث د هـ = (٢س + ١) سم ، جـ ب = (٣س + ٥) سم .
أوجِد بالبرهان قيمة س .

∵ د منتصف أ جـ ، هـ منتصف أ ب

∴ جـ ب = ٢ د هـ

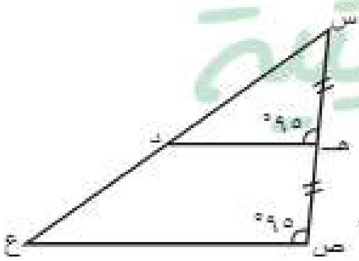
(٣س + ٥) = ٢ × (٢س + ١)

٣س + ٥ = ٤س + ٢

٣س − ٤س = ٢ − ٥

− س = − ٣

∴ س = ٣



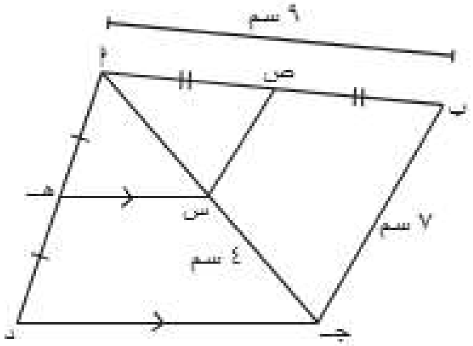
٥ س ص ع مثلّث فيه : هـ منتصف س ص ،
ق (ص^) = ق (س هـ^ د) = ٩٥°
أثبِت أنّ : د منتصف س ع .

∵ ق(ص^) = ق(س هـ^ د) = ٩٥°
(وهما في وضع تناظر)

∴ هـ د // ص ع

∵ هـ منتصف س ص ، هـ د // ص ع

∴ د منتصف س ع .

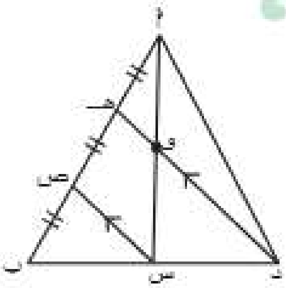


٦ في الشكل المقابِل : أ ب جـ د شكل رباعي فيه :
هـ ، ص منتصفا $\overline{أد}$ ، $\overline{أب}$ على الترتيب
س ∈ $\overline{أجـ}$ بحيث $\overline{س هـ}$ // $\overline{جـ د}$ ، جـ س = ٤ سم .
إذا كان ب جـ = ٧ سم ، أب = ٩ سم ،
أوجِد : (١) طول $\overline{أس}$.
(٢) محيط △ أ س ص .

∵ هـ منتصف أد ، س هـ // جـ د
∴ س منتصف أجـ
∴ أس = س جـ = ٤ سم
أص = $\frac{١}{٢}$ أب = $\frac{١}{٢}$ × ٩ = ٤٫٥ سم

∵ س منتصف أجـ ، ص منتصف أب
∴ س ص // ب جـ ، س ص = $\frac{١}{٢}$ ب جـ = $\frac{١}{٢}$ × ٧ = ٣٫٥
∴ محيط △ أ س ص = أس + أص + س ص = ٤ + ٤٫٥ + ٣٫٥ = ١٢ سم

مهارات تفكير عليا :



٧ في الشكل المقابِل :
$\overline{س ص}$ // $\overline{د هـ}$ ، و هـ = ٤ سم ،
أهـ = هـ ص = ص ب
أوجِد بالبرهان : طول $\overline{و د}$.

في △ أ س ص
∵ هـ منتصف أص ، و هـ // س ص
∴ و منتصف أس ، س ص = ٢ و هـ
∴ س ص = ٢ × ٤ = ٨ سم
في △ ب د هـ
∵ ص منتصف ب هـ ، د هـ // س ص
∴ س منتصف ب د ، د هـ = ٢ س ص
∴ د هـ = ٢ × ٨ = ١٦ سم ، د و = د هـ − و هـ = ١٦ − ٤ = ١٢ سم

٧ ـ ٢ القطعة المستقيمة الواصلة من رأس الزاوية القائمة إلى منتصف الوتر

The Segment Joining the Vertex of Right Angle to the Midpoint of the Hypotenuse

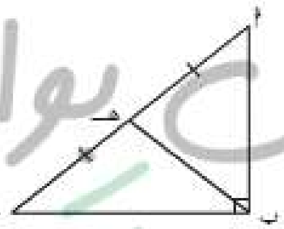
سوف تتعلّم : توظيف نظرية القطعة المستقيمة الواصلة من رأس الزاوية القائمة في المثلّث القائم الزاوية إلى منتصف الوتر لحلّ تمارين هندسية .

العبارات والمفردات :

رأس	Vertex	وتر المثلّث	Hypotenuse
زاوية قائمة	Right Angle		

اِستكشِف (١)

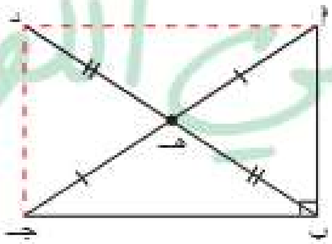
أ ب جـ مثلّث قائم الزاوية في ب ،
هـ منتصف الوتر $\overline{أجـ}$.
ما العلاقة بين طول ب هـ ، طول أجـ ؟



العمل :

١ نأخذ نقطة د $\in \overleftarrow{ب هـ}$ بحيث تكون ب هـ = هـ د

٢ أرسم $\overline{أد}$ ، $\overline{جـ د}$ ليكون شكلًا رباعيًّا .



أجِب عمّا يلي :

(أ) هل أ ب جـ د متوازي أضلاع ؟ لماذا ؟
نعم ، قطراه ينصف كل منهما الآخر

(ب) هل أ ب جـ د مستطيل ؟ لماذا ؟
نعم ، قطراه متطابقان وإحدى زواياه قائمة

(جـ) هل ب هـ = أ هـ = هـ جـ ؟ لماذا ؟
نعم ، المستطيل قطراه متطابقان وينصف كل منهما الآخر

(د) ما العلاقة بين ب هـ ، أجـ ؟
ب هـ = $\frac{1}{2}$ أجـ

اللوازم

أدوات هندسية .

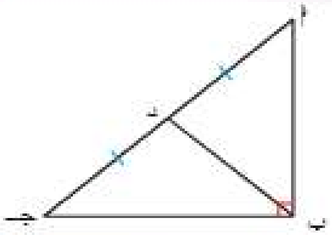
تذكّر

في المثلّثات القائمة الزاوية ضلعا القائمة هما الضلعان اللذان يحدّدان الزاوية القائمة ، والوتر هو أطول ضلع في المثلّث وهو الضلع المقابِل للزاوية القائمة .

معلومة مفيدة :

يستخدم المهندسون نظرية القطعة المستقيمة الواصلة من رأس الزاوية القائمة في مثلّث إلى منتصف الوتر ، لمعرفة طول الدعائم الحديدية المستخدَمة في الجسور .

نظرية :
طول القطعة المستقيمة الواصلة من رأس الزاوية القائمة إلى منتصف الوتر في المثلّث القائم الزاوية يساوي نصف طول الوتر .



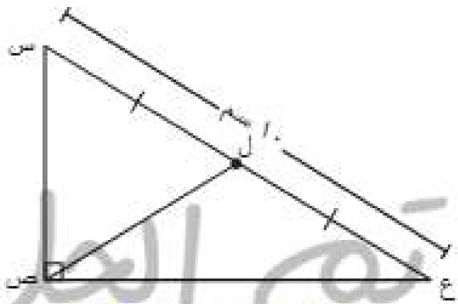
في المثلّث أ ب جـ :

∵ ق ($\hat{ب}$) = ٩٠° ، د منتصف $\overline{أجـ}$

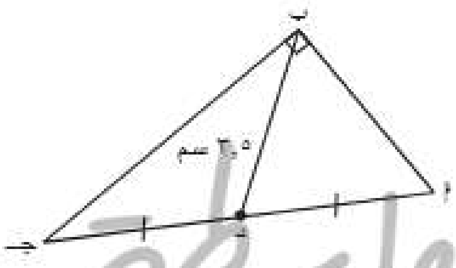
∴ ب د = $\frac{١}{٢}$ أ جـ

دورك الآن (٢)

أكمِل ما يلي (دون استخدام الأدوات الهندسية) :

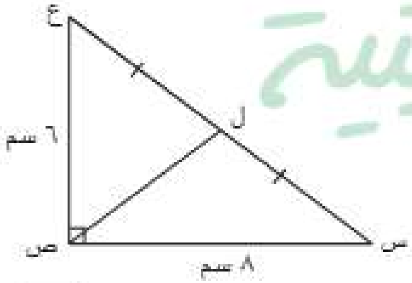


طول $\overline{ص ل}$ = $\frac{١}{٢}$ × ١٠ = ٥ سم



أ جـ = ٢ ب د = ٢ × ٣,٥ = ٧ سم

مثال (٢):



في الشكل المقابِل ، س ص ع مثلّث قائم الزاوية في ص ،
ع ص = ٦ سم ، س ص = ٨ سم ، ل منتصف $\overline{س ع}$.
أوجِد بالبرهان طول $\overline{ص ل}$.

الحلّ :

المعطيات : س ص ع مثلّث قائم الزاوية في ص ، ع ص = ٦ سم ، س ص = ٨ سم ، ل منتصف $\overline{س ع}$.

المطلوب : إيجاد طول $\overline{ص ل}$.

البرهان : س ص ع مثلّث قائم الزاوية في ص (١)

∴ (س ع)^٢ = (س ص)^٢ + (ص ع)^٢ (نظرية فيثاغورث)

= (٨)^٢ + (٦)^٢

= ٦٤ + ٣٦ = ١٠٠

∴ س ع = $\sqrt{١٠٠}$ = ١٠ سم

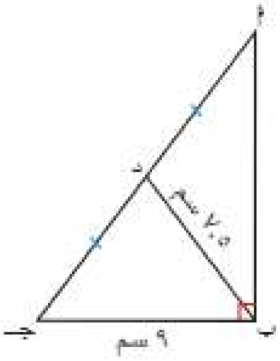
∵ ل منتصف $\overline{س ع}$ (٢)

من (١) ، (٢)

∴ ص ل = $\frac{١}{٢}$ (س ع) = $\frac{١}{٢}$ × ١٠ = ٥ سم (نظرية)

دورك الآن (٢)

في الشكل المقابل ، أب جـ مثلث قائم الزاوية في ب ، د منتصف $\overline{\text{أجـ}}$ ،
ب جـ = ٩ سم ، ب د = ٧,٥ سم



أوجِد بالبرهان : (١) أجـ (٢) أب

المعطَيات : أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في ب
د منتصف أ جـ ، ب جـ = ٩ سم ، ب د = ٧,٥ سم

المطلوب : إيجاد (١) أ جـ (٢) أ ب

البرهان : أب جـ مثلث قائم الزاوية في ب

∵ د منتصف أ جـ

∴ ب د = $\frac{1}{2}$ أجـ

أجـ = ٢ × ب د

أجـ = ٢ × ٧,٥ = ١٥

من نظرية فيثاغورث

(أب)^2 = (أجـ)^2 - (ب جـ)^2

= (١٥)^2 - (٩)^2 = ٢٢٥ - ٨١

(أب)^2 = ١٤٤

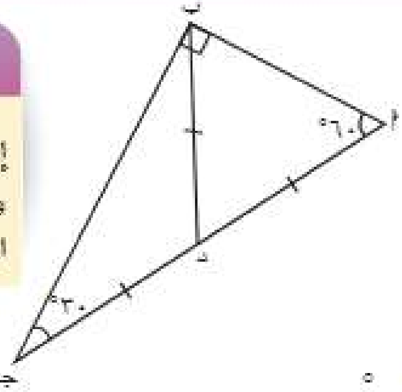
أب = $\sqrt{١٤٤}$ = ١٢ سم

عبّر عن فهمك

إذا كان طول القطعة المستقيمة الواصلة من رأس مثلّث إلى منتصف الضلع المقابِل له يساوي نصف طول هذا الضلع . فهل المثلّث قائم الزاوية ؟ فسِّر إجابتك .

نعم

اِستكشِف (٢)



$\triangle$ ٢ب جـ مثلث ثلاثيني ستيني ،

ق (جـ^) = ٣٠° ، ق (٢^) = ٦٠°

نلاحظ أنَّ : ب د = ½ ٢ جـ

في $\triangle$ ٢ب د :

∵ د ب = د ٢

∴ ق (٢^) = ق (٢ب د) = ٦٠°

هل $\triangle$ ٢ب د متطابق الأضلاع ؟ نعم

٢ب = ٢د = ب د

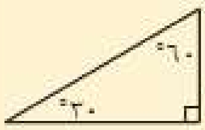
∴ ٢ب = ½ ٢جـ

تذكَّر

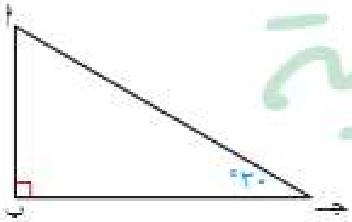
إذا كان المثلث متطابق الضلعين وقياس إحدى زواياه ٦٠° ، فإنَّ المثلث يكون متطابق الأضلاع .

لاحِظ أنَّ

المثلث التالي يُسمَّى : مثلثًا ثلاثينيًّا ستينيًّا



نتيجة (١) :
في المثلث الثلاثيني الستيني ، يكون طول الضلع المقابِل للزاوية التي قياسها ٣٠° مساويًا نصف طول الوتر.

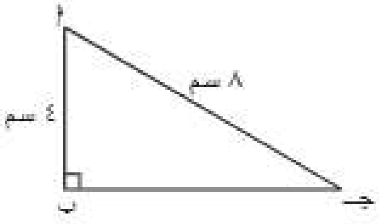


∵ ٢ب جـ مثلث قائم الزاوية في ب ، ق (جـ^) = ٣٠°

∴ ٢ب = ½ ٢جـ

وعكس ذلك أيضًا صحيح :

نتيجة (٢) :
في المثلث القائم الزاوية ، إذا كان طول أحد ضلعَي الزاوية القائمة مساويًا نصف طول الوتر ، فإنَّ قياس الزاوية المقابِلة لهذا الضلع ٣٠° ويُسمَّى المثلث ثلاثينيًّا ستينيًّا .



∵ ٢ب جـ مثلث قائم الزاوية في ب ، ٢ب = ½ ٢جـ

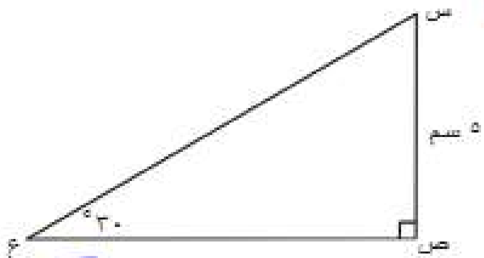
∴ ق (جـ^) = ٣٠°

∴ المثلث ٢ب جـ ثلاثيني ستيني

دورك الآن (٣)

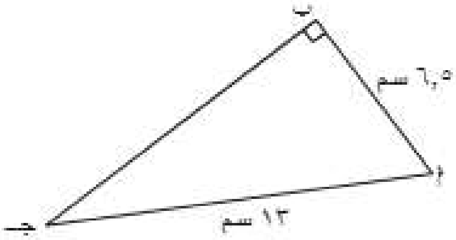
أكمِل ما يلي (دون استخدام الأدوات الهندسية) :

(أ)



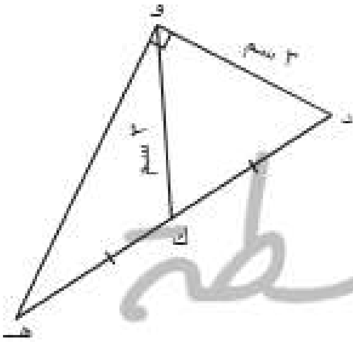
س ع = ٢ س ص = ٢ × ٥ = ١٠

(ب)



ق ($\hat{\text{جـ}}$) = ٣٠°

مثال (٢):



في الشكل المقابِل : د و هـ مثلّث قائم الزاوية في و ،
د و = و ك = ٣ سم ، ك منتصف $\overline{\text{د هـ}}$
أوجِد بالبرهان : (١) ق ($\hat{\text{هـ}}$)
(٢) ق ($\hat{\text{د}}$)

الحلّ :

المعطَيات : د هـ و مثلّث قائم الزاوية في و ، د و = ٣ سم ،
و ك = ٣ سم ، ك منتصف $\overline{\text{د هـ}}$.

المطلوب : إيجاد (١) ق ($\hat{\text{هـ}}$) (٢) ق ($\hat{\text{د}}$)

البرهان : ∵ المثلّث د و هـ قائم الزاوية في و
، ك منتصف $\overline{\text{د هـ}}$

∴ و ك = $\frac{1}{2}$ د هـ (نظرية)

∴ د هـ = ٢ × ٣ = ٦ سم

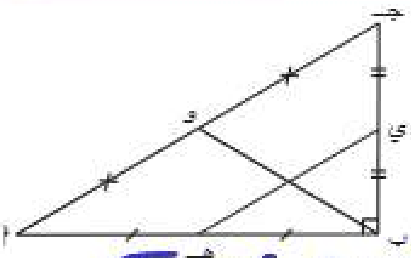
∵ د و = $\frac{1}{2}$ د هـ

∴ ق ($\hat{\text{هـ}}$) = ٣٠° (نتيجة)

∴ د و هـ مثلّث ثلاثيني ستّيني

∴ ق ($\hat{\text{د}}$) = ٦٠°

دورك الآن (٤)



في الشكل المقابِل : أ ب جـ مثلّث قائم الزاوية في ب ، فيه :

هـ منتصف $\overline{\text{أب}}$ ، ي منتصف $\overline{\text{ب جـ}}$ ،

و منتصف $\overline{\text{أجـ}}$ ، هـ ي = ٥ سم

أوجِد بالبرهان كلًّا ممّا يلي : (١) طول $\overline{\text{أجـ}}$ (٢) طول $\overline{\text{ب و}}$

المعطَيات : أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في ب ، هـ ي = ٥ سم
هـ منتصف أ ب ، ي منتصف ب جـ ، و منتصف أ جـ

المطلوب : إيجاد طول (١) أ جـ (٢) ب و

البرهان : أ ب جـ مثلّث فيه : هـ منتصف $\overline{\text{أب}}$ ، ي منتصف $\overline{\text{ب جـ}}$

∴ هـ ي = $\frac{١}{٢}$ أ جـ (نظرية)

أ جـ = ٢ × ٥ = ١٠ سم

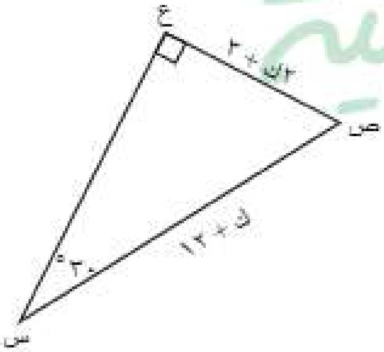
∵ أ ب جـ مثلّث قائم الزاوية في ب

و منتصف أ جـ

∴ ب و = $\frac{١}{٢}$ × أ جـ (نظرية)

= $\frac{١}{٢}$ × ١٠ = ٥ سم

مثال (٣) :



في الشكل المقابِل : أوجِد بالبرهان قيمة ك .

الحلّ :

المعطَيات : س ع ص مثلّث قائم الزاوية في ع ، ق (س^) = ٣٠°

المطلوب : إيجاد قيمة ك .

البرهان : ∵ المثلّث س ع ص قائم الزاوية في ع ، ق (س^) = ٣٠°

∴ Δ س ع ص مثلّث ثلاثيني ستّيني

∴ ع ص = $\frac{١}{٢}$ س ص (نتيجة)

٢ ك + ٣ = $\frac{١}{٢}$ × (ك + ١٢)

٢ × (٢ ك + ٣) = ك + ١٢

٤ ك + ٦ = ك + ١٢

٤ ك - ك = ١٢ - ٦

٣ ك = ٦

∴ ك = $\frac{٦}{٣}$ = ٢

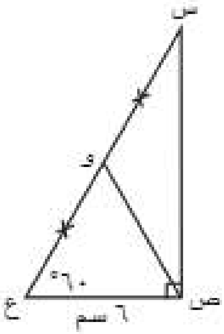
تمارين ذاتية :

١ س ص ع مثلث قائم الزاوية في ص ، و منتصف $\overline{\text{س ع}}$.

أوجِد بالبرهان كلًّا ممّا يلي : (١) طول $\overline{\text{س ع}}$

(٢) طول $\overline{\text{ص و}}$

(٣) ق ($\hat{\text{و ص س}}$)



∵ س ص ع مثلث قائم الزاوية في ص

ق (ع) = ٦٠

∴ Δ س ص ع ثلاثيني ستيني

∴ ق (س) = ٣٠ ← (١)

∵ و منتصف س ع ← (٢)

من (١) و(٢) ∴ س ع = ٢ص ع = ٢ × ٦ = ١٢ سم

∵ س ص ع مثلث قائم الزاوية في ص ، و منتصف س ع

∴ ص و = $\frac{1}{2}$ س ع = $\frac{1}{2}$ × ١٢ = ٦ سم

∴ س و = ص و = ٦ سم

∴ Δ س ص و مثلث متطابق الضلعين ∴ ق(و ص س) = ق(س) = ٣٠

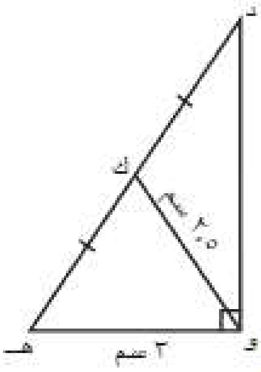
تذكَّر

الزاويتان المتتامّتان مجموع قياسيهما = ٩٠°

٢ في الشكل المقابِل : المثلّث هـ و د قائم الزاوية في و ، ك منتصف $\overline{\text{هـ د}}$.

أوجِد بالبرهان كلًّا ممّا يلي : (١) طول $\overline{\text{هـ د}}$

(٢) طول د و



∵ Δ هـ و د قائم الزاوية في و

∵ ك منتصف هـ د

∴ هـ د = ٢ ك و = ٢ × ٢٫٥ = ٥ سم

$(\text{د و})^2 = (\text{هـ د})^2 - (\text{هـ و})^2$ (نظرية فيثاغورث)

$(\text{د و})^2 = (5)^2 - (3)^2$

$(\text{د و})^2 = 25 - 9 = 16$

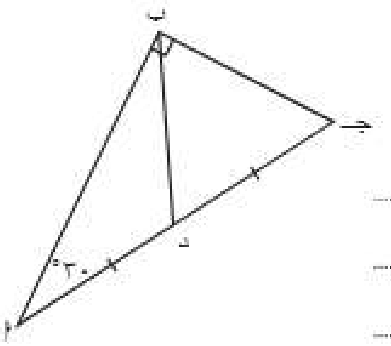
د و = $\sqrt{16}$

د و = ٤ سم

٣ في الشكل المقابل :

المثلث أ ب جـ قائم الزاوية في ب ، ق ($\hat{أ}$) = ٣٠° .

أثبت أنَّ المثلث ب د جـ متطابق الأضلاع .



∵ أ ب جـ قائم الزاوية في ب ← (١)

∵ ق($\hat{أ}$) = ٣٠ ← (٢)

من (١) ، (٢) ∴ ب جـ = $\frac{1}{2}$ أ جـ = جـ د

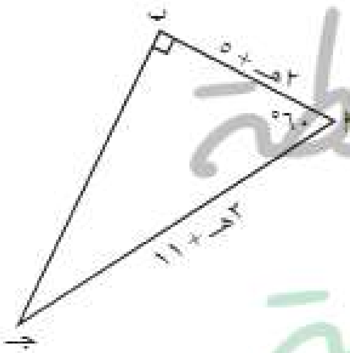
∵ △ أ ب جـ مثلث قائم ثلاثيني ستيني

∴ ق($\hat{جـ}$) = ٦٠

∵ △ ب د جـ فيه ب جـ = جـ د ، ق($\hat{جـ}$) = ٦٠°

∴ △ ب د جـ متطابق الأضلاع .

٤ في الشكل المقابل : أوجِد بالبرهان طول $\overline{أب}$.



∵ △ أ ب جـ مثلث قائم في ب

ق($\hat{أ}$) = ٩٠ − ٦٠ = ٣٠° (زاويتان متتامتان)

∴ أ جـ = ٢ أ ب

∴ (٣هـ + ١١) = ٢(٢هـ + ٥)

٣هـ + ١١ = ٤هـ + ١٠ ∴ هـ = ١ سم

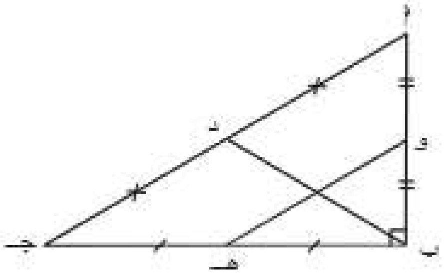
∴ أ ب = ٢هـ + ٥ = ٢×١ + ٥ = ٧ سم

٥ في الشكل المقابل : أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في ب ،

و منتصف $\overline{أب}$ ، هـ منتصف $\overline{ب جـ}$ ،

د منتصف $\overline{أجـ}$.

أثبِت أنَّ و هـ = ب د



∵ △ أ ب جـ قائم الزاوية في ب

د منتصف أ جـ

∴ ب د = $\frac{1}{2}$ أ جـ ← (١)

∵ و منتصف أ ب ، هـ منتصف ب جـ

∴ و هـ = $\frac{1}{2}$ أ جـ ← (٢)

من (١) ، (٢) ينتج أن ∴ و هـ = ب د

٧ ـ ٣ محاور أضلاع المثلّث
Perpendicular Bisectors of a Triangle

سوف تتعلّم : توظيف نظرية محاور أضلاع المثلّث لحلّ تمارين هندسية .

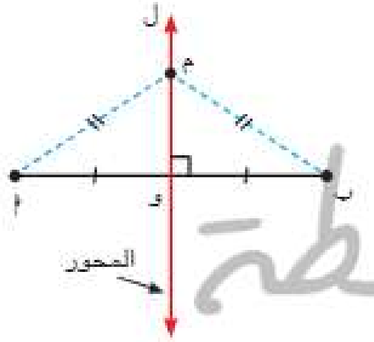
العبارات والمفردات :

محور القطعة المستقيمة — Perpendicular Bisector

تعلم أنّ محور القطعة المستقيمة هو العمود المنصِّف لها .

في الشكل المقابِل : $\overleftrightarrow{ل}$ محور $\overline{أب}$

∴ $\overleftrightarrow{ل} \perp \overline{أب}$ ، أو = ب و



خواصّ محور قطعة مستقيمة

- **أيّ نقطة تنتمي إلى محور قطعة مستقيمة تكون على أبعاد متساوية من طرفَي القطعة المستقيمة .**
- **أيّ نقطة على أبعاد متساوية من طرفَي قطعة مستقيمة تنتمي إلى محور هذه القطعة المستقيمة .**

اِستكشِف

أكمِل :

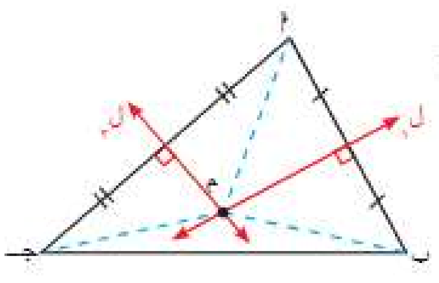
∵ $\overleftrightarrow{ل_1}$ محور م ب ، م ∈ $\overleftrightarrow{ل_1}$

م أ = م ب (١)

بالمثل :

$\overleftrightarrow{ل_2}$ محور م جـ ، م ∈ $\overleftrightarrow{ل_2}$

م أ = م جـ (٢)



من (١) ، (٢)

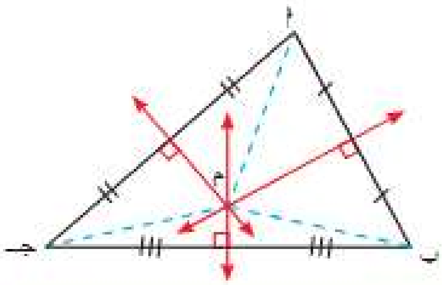
∴ م ب = م جـ

∴ م ∈ محور ل١ ، ل٢

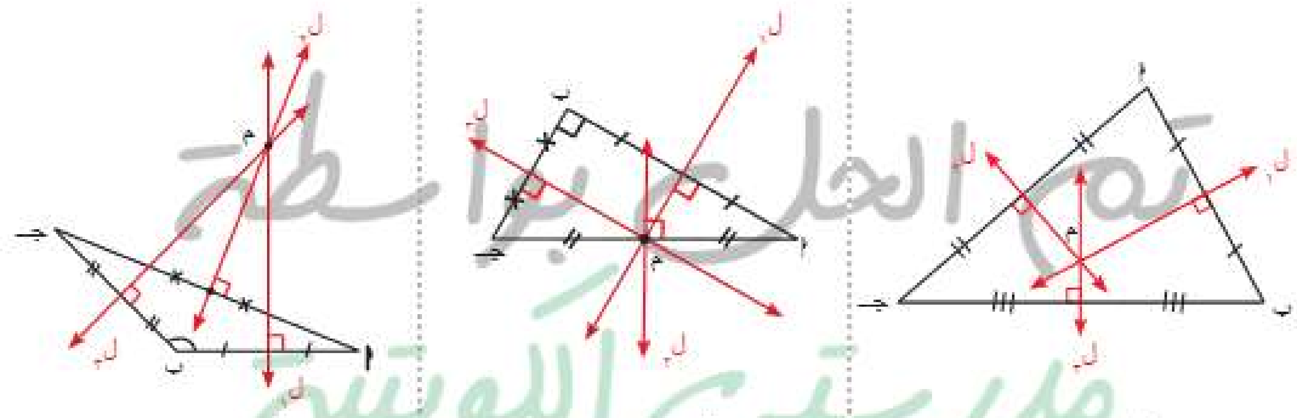
∴ محاور أضلاع المثلّث تتقاطع في نقطة واحدة

نظرية : محاور أضلاع المثلّث تتقاطع في نقطة واحدة .

من « إستكشِف » السابق ،
م نقطة تقاطع محاور أضلاع المثلّث أ ب جـ
∴ م أ = م ب = م جـ



نتيجة :
نقطة تقاطع محاور أضلاع المثلّث تقع على أبعاد متساوية من رؤوسه .



مثلّث حادّ الزوايا | مثلّث قائم الزاوية | مثلّث منفرج الزاوية

من الأشكال السابقة نلاحظ أنّ :

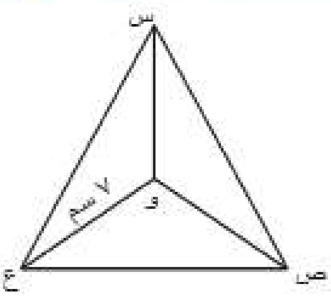
- نقطة تقاطع محاور أضلاع المثلّث الحادّ الزوايا تقع داخل المثلّث .
- نقطة تقاطع محاور أضلاع المثلّث القائم الزاوية تقع في منتصف الوتر .
- نقطة تقاطع محاور أضلاع المثلّث المنفرج الزاوية تقع خارج المثلّث .

دورك الآن (١)

المثلّث س ص ع فيه : و نقطة تقاطع محاور أضلاع المثلّث ،
و ع = ٧ سم . أكمِل دون استخدام الأدوات الهندسية :

و س = ...٧.... سم

و ص = ...٧.... سم

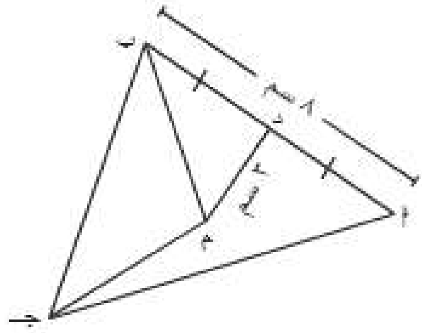


عبّر عن فهمك (١)

لتكن م نقطة تقع على أبعاد متساوية من رؤوس مثلّث . فهل م هي نقطة تقاطع محاور أضلاعه ؟ فسِّر إجابتك .

نعم ، حيث أن المحور يكون على أبعاد متساوية من القطعة المستقيمة

مثال (١):



أ ب جـ مثلّث فيه : أ ب = ٨ سم ، د منتصف $\overline{\text{أ ب}}$
م نقطة تقاطع محاور أضلاع المثلّث ، م د = ٣ سم .
أوجِد بالبرهان كلًّا مما يلي : (١) طول $\overline{\text{م ب}}$. (٢) طول $\overline{\text{م جـ}}$.

الحلّ :

المعطَيات : أ ب جـ مثلّث فيه : أ ب = ٨ سم ، د منتصف $\overline{\text{أ ب}}$
م نقطة تقاطع محاور أضلاع المثلّث ، م د = ٣ سم

المطلوب : إيجاد : (١) طول $\overline{\text{م ب}}$ (٢) طول $\overline{\text{م جـ}}$

البرهان : ∵ أ ب = ٨ سم ، د منتصف $\overline{\text{أ ب}}$ (معطى)
∴ د ب = $\frac{1}{2}$ × ٨ = ٤ سم
∵ م نقطة تقاطع محاور أضلاع المثلّث ، د منتصف $\overline{\text{أ ب}}$ (معطى)
∴ $\overline{\text{م د}}$ ⊥ $\overline{\text{أ ب}}$
∴ Δ م د ب قائم الزاوية في د
(م ب)^2 = (م د)^2 + (د ب)^2 (نظرية فيثاغورث)
∴ م ب = $\sqrt{(٣)^2 + (٤)^2}$
= $\sqrt{٩ + ١٦}$ = $\sqrt{٢٥}$ = ٥ سم
∵ نقطة تقاطع محاور أضلاع المثلّث تقع على أبعاد متساوية من رؤوسه
∴ م جـ = م ب = ٥ سم (نتيجة)

دورك الآن (٢)

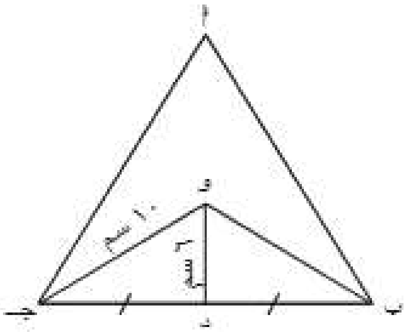
أ ب جـ مثلث فيه :

و نقطة تقاطع محاور أضلاعه ،

د منتصف $\overline{\text{ب جـ}}$ ،

و جـ = ١٠ سم ، و د = ٦ سم

أوجِد بالبرهان كلًّا ممّا يلي :



(١) ب و (٢) ب د (٣) ب جـ

المعطيات : و نقطة تقاطع محاور أضلاع $\triangle$ أ ب جـ ، د منتصف ب جـ

و جـ = ١٠ سم ، و د = ٦ سم

المطلوب : إيجاد (١) ب و (٢) ب د (٣) ب جـ

البرهان : $\because$ و نقطة تقاطع محاور أضلاع المثلث (معطى)

$\therefore$ و ب = و جـ (نتيجة)

= ١٠ سم

$\because$ د منتصف ب جـ

$\therefore$ $\overline{\text{و د}} \perp$ ب جـ

$\therefore$ $\triangle$ و د ب قائم الزاوية في د

$\therefore$ (ب د)^2 = (ب و)^2 - (و د)^2 (نظرية فيثاغورث)

ب د = $\sqrt{(١٠)^2 - (٦)^2}$

= $\sqrt{١٠٠ - ٣٦}$

= $\sqrt{٦٤}$

= ٨ سم

$\therefore$ ب جـ = ٢ × ب د

= ٢ × ٨

= ١٦ سم

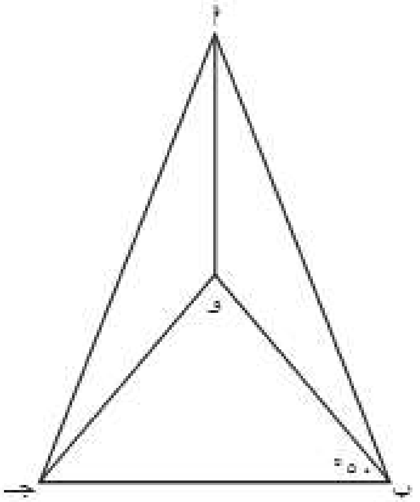
مثال (٢):

أ ب جـ مثلث فيه : و نقطة تقاطع محاور أضلاعه ،

إذا كان ق (و $\hat{\text{ب}}$ جـ) = ٥٠° .

(١) أثبت أن المثلث ب و جـ متطابق الضلعين .

(٢) أوجد ق (ب $\hat{\text{و}}$ جـ) .



الحلّ :

المعطيات : أ ب جـ مثلث فيه و نقطة تقاطع محاور أضلاعه .

المطلوب : إثبات أنّ المثلث ب و جـ متطابق الضلعين .

إيجاد ق (و $\hat{\text{جـ}}$ ب)

البرهان : ∵ و نقطة تقاطع محاور أضلاع المثلث (معطى)

∴ و ب = و جـ (نتيجة)

∴ Δ ب و جـ متطابق الضلعين

∴ ق (و $\hat{\text{ب}}$ جـ) = ق (و $\hat{\text{جـ}}$ ب) = ٥٠° (زاويتا القاعدة في مثلث متطابق الضلعين متطابقتان)

∴ ق (ب $\hat{\text{و}}$ جـ) = ١٨٠° − (٥٠° + ٥٠°) = ٨٠° (مجموع قياسات زوايا المثلث الداخلة = ١٨٠°)

دورك الآن (٣)

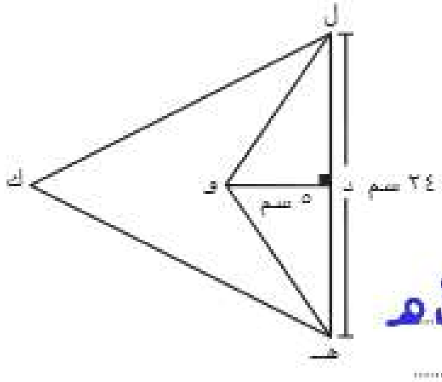
ك ل هـ مثلث فيه :

و نقطة تقاطع محاور أضلاع المثلث ك ل هـ ،

$\overline{\text{و د}}$ ⊥ $\overline{\text{ل هـ}}$ ، ل هـ = ٢٤ سم ، د و = ٥ سم .

أوجد بالبرهان كلًّا مما يلي : (١) هـ و

(٢) محيط Δ ل و هـ



المعطيات : و نقطة تقاطع محاور أضلاع المثلث ك ل م
و د ⊥ ل م ، ل م = ٢٤ ، د و = ٥

المطلوب : إيجاد (١) هـ و (٢) محيط Δ ل و هـ

البرهان : ∵ و نقطة تقاطع محاور أضلاع المثلث ك ل هـ ، $\overline{\text{و د}}$ ⊥ ل م

∴ د منتصف $\overline{\text{ل هـ}}$ ،

∴ د هـ = $\frac{1}{2}$ × ٢٤ = ١٢ سم

∆ و د هـ قائم الزاوية في د

$(و هـ)^٢ = (د هـ)^٢ + (و د)^٢$ (نظرية فيثاغورث)

$و هـ = \sqrt{(١٢)^٢ + (٥)^٢}$

$= \sqrt{١٤٤ + ٢٥}$

$= \sqrt{١٦٩}$

∴ و هـ = ١٣ سم

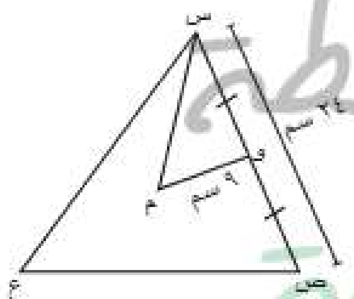
∵ و نقطة تقاطع محاور أضلاع المثلث ك ل هـ، تقع على ∆ ل وهـ

∴ ل و = وهـ = ١٣ سم

محيط ∆ ل و هـ = ٢٤ + ١٣ + ١٣

= ٥٠ سم

تمارين ذاتية :



١ س ص ع مثلث فيه :

م نقطة تقاطع محاور أضلاع المثلث، و م = ٩ سم،
س ص = ٢٤ سم، و منتصف س ص.
أوجِد بالبرهان كلًّا ممّا يلي :

(١) و س (٢) س م (٣) م ص

∵ و منتصف س ص

∴ و س = $\frac{١}{٢}$ س ص = $\frac{١}{٢} \times ٢٤ = ١٢$ سم

∵ و تقاطع محاور المثلث س ص ع

∴ و م ⊥ س ص

$(س م)^٢ = (و س)^٢ + (و م)^٢$ (نظرية فيثاغورث)

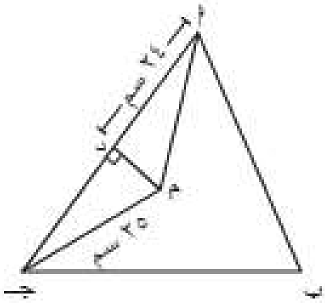
$(س م)^٢ = (١٢)^٢ + (٩)^٢$

$(س م)^٢ = ١٤٤ + ٨١ = ٢٢٥$

∴ $س م = \sqrt{٢٢٥} = ١٥$ سم

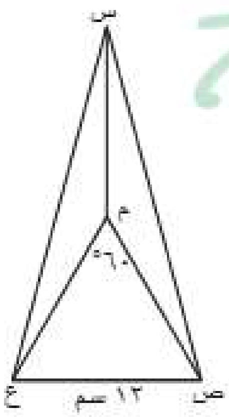
∵ و نقطة تقاطع محاور المثلث

∴ م ص = م س = ١٥ سم



٢ Δ أ ب جـ فيه : م نقطة تقاطع محاور أضلاع المثلث ،
جـ م = ٢٥ سم ، د أ = ٢٤ سم .
أوجِد بالبرهان :
(١) طول م أ
(٢) محيط Δ م جـ أ

∵ م نقطة تقاطع محاور أضلاع المثلث
∴ م أ = م جـ = ٢٥سم
∵ د منتصف أ م
∴ أ م = ٢ أ د = ٢ × ٢٤ = ٤٨ سم
∴ محيط Δ م جـ أ = م أ + م جـ + أ جـ
= ٢٥ + ٢٥ + ٤٨ = ٩٨ سم



٣ س ص ع مثلث فيه : م نقطة تقاطع محاور أضلاعه ،
إذا كان ص ع = ١٢ سم ، ق (ص م̂ ع) = ٦٠° .
(أ) أثبِت أنّ المثلّث ص م ع متطابق الأضلاع .
(ب) أوجِد طول م س .

∵ م نقطة تقاطع محاور أضلاع المثلث
∴ م ص = م ع = م س
في Δ ص م ع
∵ م ص = م ع ، ق (ص م ع) = ٦٠°
∴ Δ ص م ع مثلث متطابق الأضلاع
∴ م ص = م ع = ص ع = ١٢ سم
∴ م س = ١٢ سم

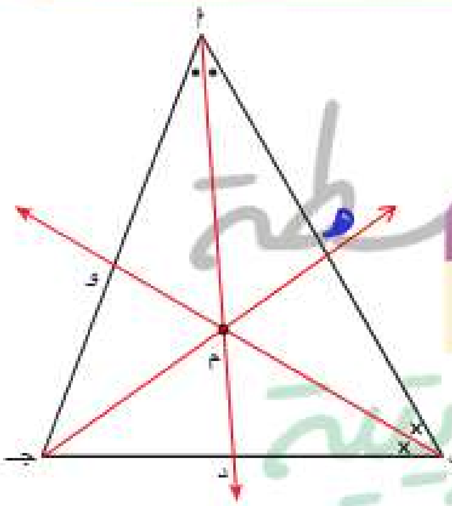
٧ ـ ٤ منصِّفات الزوايا الداخلة للمثلّث
Interior Angles Bisectors of a Triangle

سوف تتعلّم : توظيف نظرية منصّفات الزوايا الداخلة للمثلّث لحلّ تمارين هندسية .

العبارات والمفردات :

منصِّفات الزوايا — Angle Bisectors

اِستكشِف (١)



$\triangle$ أ ب جـ مثلّث فيه :

$\overleftarrow{\text{أ د}}$ منصِّف $\hat{\text{أ}}$ ، $\overleftarrow{\text{ب و}}$ منصِّف $\hat{\text{ب}}$ ،

$\overleftarrow{\text{أ د}} \cap \overleftarrow{\text{ب و}} = \{\text{م}\}$

اللوازم

أدوات هندسية .

أجِب عمّا يلي :

١ ما نوع المثلّث بالنسبة إلى زواياه ؟ حاد الزوايا

٢ أرسم $\overleftarrow{\text{جـ م}}$ يقطع $\overline{\text{أ ب}}$ في هـ.

٣ أوجِد ق (أ $\hat{\text{جـ}}$ م) = ٣٥

٤ أوجِد ق (ب $\hat{\text{جـ}}$ م) = ٣٥

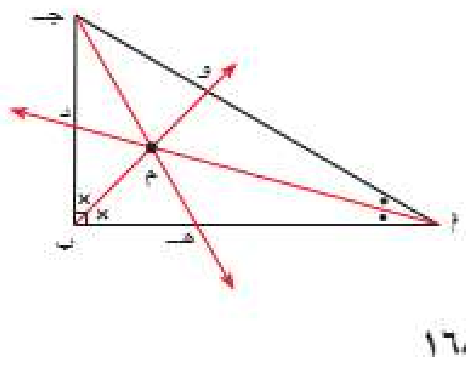
ماذا تلاحظ ؟ الاحظ أن ق(أ $\hat{\text{جـ}}$ م) = ق(ب $\hat{\text{جـ}}$ م) = ٣٥

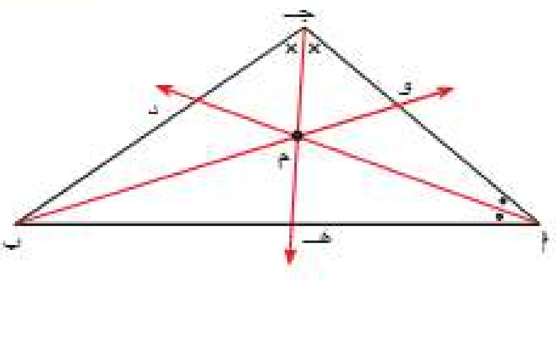
$\overleftarrow{\text{جـ هـ}}$ منصِّف $\hat{\text{جـ}}$

بالمثل للمثلّث القائم الزاوية والمنفرج الزاوية .

تذكّر

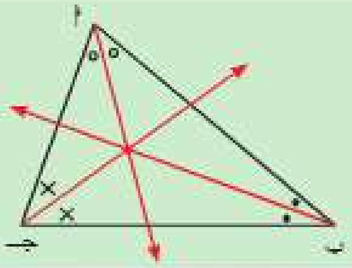
منصِّف الزاوية هو شعاع مرسوم من رأس الزاوية يقسم الزاوية إلى زاويتين متطابقتين .





نظرية :

منصِّفات الزوايا الداخلة للمثلَّث تتقاطع في نقطة واحدة .

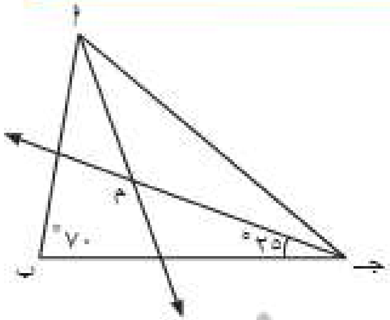


دورك الآن (٢)

في الشكل المقابِل :

م نقطة تقاطع منصِّفات الزوايا الداخلة للمثلَّث أ ب جـ

أكمِل ما يلي (دون استخدام الأدوات الهندسية) :



ق (م جـ^ أ) = ٢٥

السبب جـم منصف (جـ^)

ق (أ^) = ٦٠

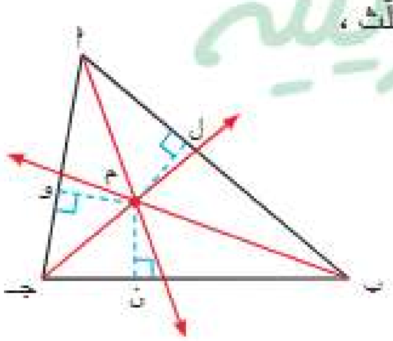
السبب مجموع قياسات زوايا داخلة لمثلث = ١٨٠°

اِستكشِف (٢)

إذا كانت م هي نقطة تقاطع منصِّفات الزوايا الداخلة للمثلَّث أ ب جـ ،

$\overline{\text{م ل}}$ ، $\overline{\text{م ن}}$ ، $\overline{\text{م و}}$ هي الأعمدة المرسومة من النقطة م على أضلاع المثلَّث ،

فأوجِد باستخدام الأدوات الهندسية كلًّا ممّا يلي :



١ طول $\overline{\text{م ل}}$ = ١ سم

٢ طول $\overline{\text{م ن}}$ = ١ سم

٣ طول $\overline{\text{م و}}$ = ١ سم

• ماذا تلاحظ ؟ م ل = م ن = م و

نتيجة :

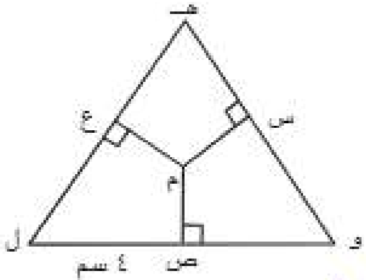
نقطة تقاطع منصِّفات الزوايا الداخلة للمثلَّث على أبعاد متساوية من أضلاعه .

لاحِظ أنّ

بُعْد نقطة عن مستقيم هو طول العمود المرسوم من هذه النقطة على المستقيم .

بالمثل تتحقّق صحّة النتيجة للمثلّث القائم الزاوية والمثلّث المنفرج الزاوية .

دورك الآن (٢)



المثلث هـ و ل فيه :

م نقطة تقاطع منصِّفات زواياه الداخلة ،

م ع = ٣ سم ، ص ل = ٤ سم .

أكمِل ما يلي (دون استخدام الأدوات الهندسية) :

م ص = ٣سم

السبب م نقطة تقاطع منصفات زواياه الداخلة على أبعاد متساوية من أضلاعه

م س = ٣سم

السبب م نقطة تقاطع منصفات زواياه الداخلة على أبعاد متساوية من أضلاعه

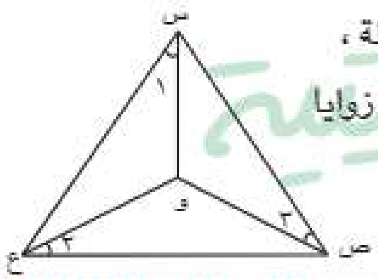
م ل = ٥سم

السبب نظرية فيثاغورث

تذكَّر

الوتر : هو الضلع المقابل للزاوية القائمة في المثلث قائم الزاوية .

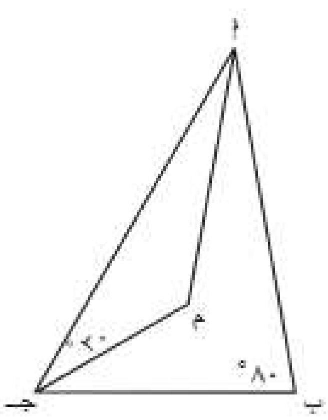
عبِّر عن فهمك (١)



إذا كانت و نقطة تقاطع منصِّفات زوايا المثلث س ص ع الداخلة ، فما علاقة (ق ($\hat{1}$) + ق ($\hat{2}$) + ق ($\hat{3}$)) بمجموع قياسات زوايا المثلث س ص ع الداخلة ؟

= $\frac{1}{2}$ مجموع قياسات زوايا Δ س ص ع

مثال (١):



في الشكل المقابل ، Δ أ ب جـ فيه : م نقطة تقاطع منصِّفات زواياه الداخلة ، أوجِد بالبرهان ق (جـ $\hat{أ}$ م) .

الحلّ :

المعطيات : في Δ أ ب جـ : م نقطة تقاطع منصِّفات زواياه الداخلة

المطلوب : إيجاد ق (جـ $\hat{أ}$ م)

البرهان : ∵ م نقطة تقاطع منصِّفات زوايا المثلّث الداخلة (معطى)

∴ جـ م منصِّف جـ^ (نظرية)

∴ ق (جـ^) = ٢ × ٣٠° = ٦٠°

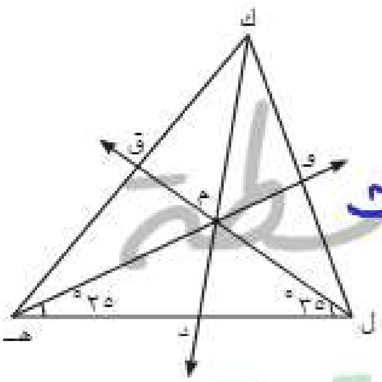
∵ مجموع قياسات زوايا المثلّث الداخلة يساوي ١٨٠°

∴ ق (أ^) = ١٨٠° - (٨٠° + ٦٠°) = ١٨٠° - ١٤٠° = ٤٠°

∵ أ م منصِّف أ^

∴ ق (جـ أ^ م) = ٤٠° / ٢ = ٢٠°

دورك الآن (٣)



Δ ك ل هـ فيه : م نقطة تقاطع منصِّفات زواياه الداخلة ،

ق (م ل^ هـ) = ٣٥° ، ق (م هـ^ ل) = ٣٥°

أوجِد بالبرهان ق (ل ك^ هـ) ، ق (م ك^ هـ) .

المعطَيات : م نقطة تقاطع منصفات زوايا داخلة المثلث

ق(م ل^ هـ) = ٣٥ ، ق(م هـ^ ل) = ٣٥

المطلوب : إيجاد ق(ل ك^ هـ) ، ق(م ك^ هـ)

البرهان : ∵ م نقطة تقاطع منصفات زوايا المثلّث الداخلة ،

∴ ل م منصِّف ل^

∴ ق (ل^) = ٢ × ٣٥° = ٧٠°

∵ هـ م منصِّف هـ^

∴ ق (هـ^) = ٢ × ٣٥° = ٥٠°

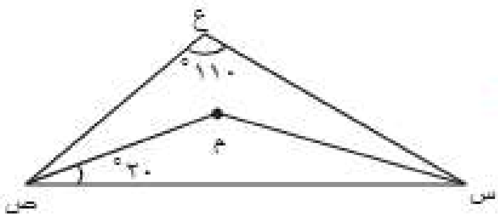
∵ مجموع قياسات زوايا المثلّث الداخلة ١٨٠°

∴ ق (ل ك^ هـ) = ١٨٠° - (٧٠ + ٥٠) = ١٨٠° - ١٢٠ = ٦٠°

∵ ك م منصِّف م^

∴ ق (م ك^ هـ) = ٣٠°

مثال (٢):



Δ س ع ص فيه م نقطة تقاطع منصِّفات زواياه الداخلة ،

ق (ع^) = ١١٠° ، إذا كان ق (م ص^ س) = ٢٠°

أوجِد بالبرهان كلًّا من :

(١) ق (س ص^ ع)

(٢) ق (س^)

(٣) ق (س م^ ص)

الحلّ :

المعطَيات : م نقطة تقاطع منصِّفات زواياه الداخلة ،

ق (ع^) = ١١٠° ، ق (م ص^ س) = ٢٠°

المطلوب : إيجاد : (١) ق (م ص^ ع)

(٢) ق (س^)

(٣) ق (س م^ ص)

البرهان : في Δ س ع ص ،

∵ م نقطة تقاطع منصِّفات زواياه الداخلة (معطى)

∴ م ص ⟵ منصِّف ص^ (نظرية)

∴ ق (س ص^ ع) = ٢ × ٢٠° = ٤٠°

∴ ق (س^) = ١٨٠° - (١١٠° + ٤٠°) (مجموع قياسات زوايا المثلّث الداخلة يساوي ١٨٠°)

= ١٨٠° - ١٥٠°

= ٣٠°

∵ س م ⟵ منصِّف س^

∴ ق (م س^ ص) = $\frac{٣٠°}{٢}$ = ١٥°

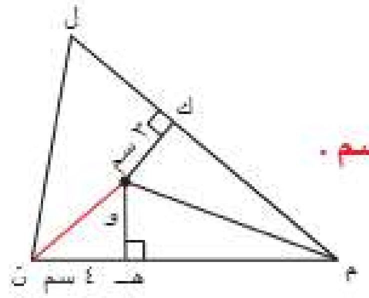
في Δ م س ص ،

ق (س م^ ص) = ١٨٠° - (١٥° + ٢٠°) (مجموع قياسات زوايا المثلّث الداخلة يساوي ١٨٠°)

= ١٨٠° - ٣٥°

= ١٤٥°

مثال (٣):



في الشكل المقابل ، المثلث ل م ن فيه :
و نقطة تقاطع منصِّفات زواياه الداخلة ، و ك = ٣ سم ، هـ ن = ٤ سم .
أوجِد و ن .

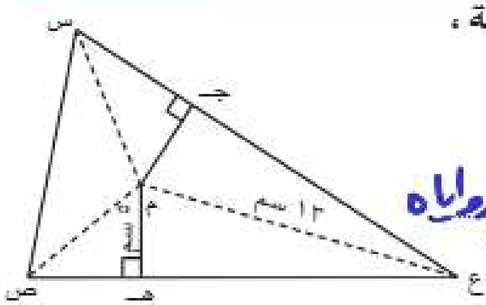
الحلّ :

المعطَيات : Δ ل م ن فيه : و نقطة تقاطع منصِّفات زواياه الداخلة ،
و ك = ٣ سم ، هـ ن = ٤ سم

المطلوب : إيجاد و ن

البرهان : ∵ و نقطة تقاطع منصِّفات الزوايا في Δ م ل ن
تقع على أبعاد متساوية من أضلاعه (نتيجة)
∴ و هـ = و ك = ٣ سم
∵ و هـ ⊥ م ن ، ق(و هـ ن) = ٩٠° .
∴ Δ و هـ ن قائم الزاوية
(و ن)^٢ = (و هـ)^٢ + (هـ ن)^٢ (نظرية فيثاغورث)
∴ و ن = $\sqrt{(٣)^٢ + (٤)^٢}$
= $\sqrt{٩ + ١٦}$
∴ و ن = $\sqrt{٢٥}$ = ٥ سم

دورك الآن (٤)



المثلث س ص ع فيه : م نقطة تقاطع منصِّفات زواياه الداخلة ،
م ع = ١٣ سم ، م هـ = ٥ سم
أوجِد طول ع جـ .

المعطَيات : Δ س ص ع فيه : م نقطة تقاطع منصفات زواياه الداخلة

المطلوب : إيجاد طول ع جـ

البرهان : ∵ م نقطة تقاطع منصفات زوايا Δ س ص ع
∴ م تقع على أبعاد متساوية من اضلاع Δ س ص ع
م جـ = م هـ = ٥ سم
∵ م جـ ⊥ س ع
∴ ق(م هـ ص) = ٩٠°
∴ Δ ع م جـ قائم الزاوية في جـ

$(ع ج)^2 = (ع م)^2 - (ج م)^2$ (نظرية فيثاغورث)

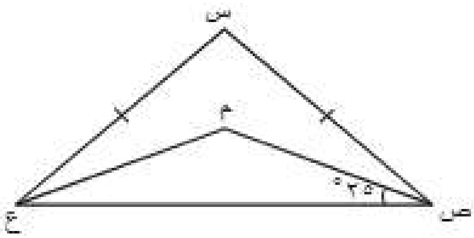
$\therefore$ ع ج = $\sqrt{(١٣)^2 - (٥)^2}$

= $\sqrt{١٦٩ - ٢٥}$

= $\sqrt{١٤٤}$

$\therefore$ ع ج = ١٢ سم

مثال (٤):



المثلّث س ص ع متطابق الضلعَين فيه : م هي نقطة تقاطع منصِّفات زواياه الداخلة ، ق (م $\hat{ص}$ ع) = ٢٥° .

أوجِد بالبرهان ق (ص $\hat{س}$ ع) .

الحلّ :

المعطيات : س ص ع مثلّث متطابق الضلعَين :

م نقطة تقاطع منصِّفات زواياه الداخلة ، ق (م $\hat{ص}$ ع) = ٢٥°

المطلوب : إيجاد ق (ص $\hat{س}$ ع)

البرهان : $\because$ م نقطة تقاطع منصِّفات الزوايا الداخلة للمثلّث س ص ع (معطى)

$\therefore$ ص م منصِّف $\hat{ص}$ (نظرية)

$\therefore$ ق ($\hat{ص}$) = ٢ × ٢٥° = ٥٠°

$\because$ Δ س ص ع متطابق الضلعَين (معطى)

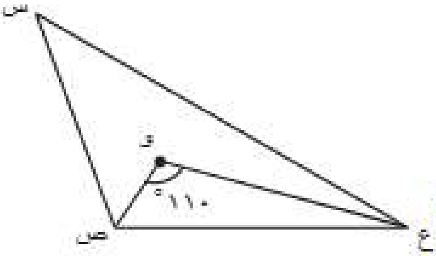
$\therefore$ ق ($\hat{ص}$) = ق ($\hat{ع}$) = ٥٠° (زاويتا القاعدة متطابقتان في المثلّث المتطابق الضلعَين)

$\therefore$ ق ($\hat{س}$) = ١٨٠° - (٥٠° + ٥٠°) (مجموع قياسات الزوايا الداخلة للمثلّث يساوي ١٨٠°)

= ١٨٠° - ١٠٠°

= ٨٠°

دورك الآن (٥)



في الشكل المقابل : Δ س ص ع فيه :

و نقطة تقاطع منصّفات زواياه الداخلة ، ق (ص $\hat{و}$ ع) = ١١٠°

أوجِد بالبرهان ق ($\hat{س}$) .

المعطيات : و نقطة تقاطع منصفات زوايا Δ س ص ع

ق (ص $\hat{و}$ ع) = ١١٠

المطلوب : إيجاد ق ($\hat{س}$)

البرهان : في Δ ص و ع ،

∵ ق (ص $\hat{و}$ ع) = ١١٠° (معطى)

∵ مجموع قياسات زوايا المثلّث الداخلة = ١٨٠

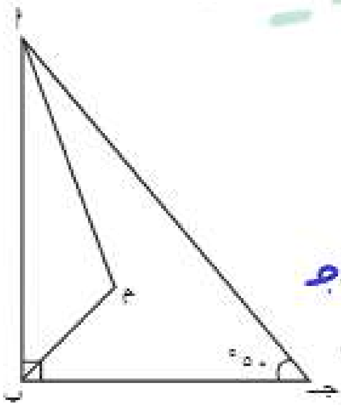
∴ ق (و $\hat{ص}$ ع) + ق (و $\hat{ع}$ ص) = ١٨٠° - ١١٠° = ٧٠

∵ و نقطة تقاطع منصفات زوايا المثلّث س ص ع

∴ ق ($\hat{ص}$) + ق ($\hat{ع}$) = ٢ × ٧٠° = ١٤٠

∴ ق ($\hat{س}$) = ١٨٠° - ١٤٠ = ٤٠ (مجموع قياسات الزوايا الداخلة للمثلّث = ١٨٠°)

تمارين ذاتية :



١ أب جـ مثلّث قائم الزاوية في ب

م نقطة تقاطع منصّفات زواياه الداخلة ، ق ($\hat{جـ}$) = ٥٠° .

أوجِد بالبرهان : (أ) ق (م $\hat{ب}$ أ) (ب) ق (م $\hat{أ}$ ب)

∵ م نقطة تقاطع منصفات زوايا المثلث أ ب جـ

∴ م ب ينصف ب

∴ ق (م $\hat{ب}$ أ) = $\frac{1}{2}$ × ٩٠ = ٤٥°

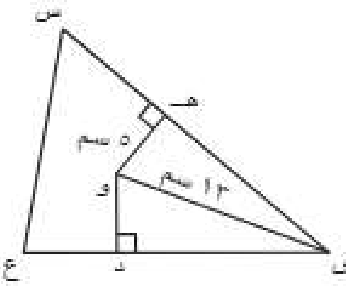
∵ مجموع قياسات زوايا المثلث الداخلة = ١٨٠°

∴ ق (أ) = ١٨٠ - (٩٠ + ٥٠) = ١٨٠ - ١٤٠ = ٤٠°

∴ م أ ينصف أ ∴ ق (م $\hat{أ}$ ب) = $\frac{1}{2}$ × ٤٠ = ٢٠°

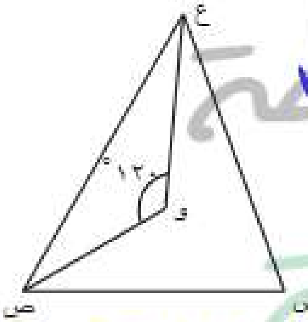
٢ المثلث س ص ع فيه: و نقطة تقاطع منصفات زواياه الداخلة ،
هـ و = ٥ سم ، ص و = ١٣ سم
أوجد بالبرهان:

(أ) و د (ب) ص د



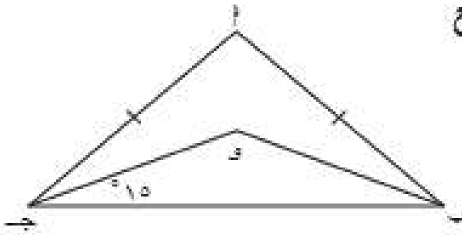
∵ و نقطة تقاطع منصفات زوايا المثلث س ص ع
تكون على أبعاد متساوية من أضلاعه
∴ و د = و هـ = ٥ سم
(ص د)^2 = (و ص)^2 − (و د)^2 (نظرية فيثاغورث)
∴ (ص د)^2 = (١٣)^2 − (٥)^2
(ص د)^2 = ١٦٩ − ٢٥ = ١٤٤ ، ص د = $\sqrt{١٤٤}$ = ١٢ سم

٣ المثلث س ص ع فيه: و نقطة تقاطع منصفات زواياه الداخلة ، ق($\hat{و}$) = ١٢٠°
أوجد بالبرهان ق($\hat{س}$).

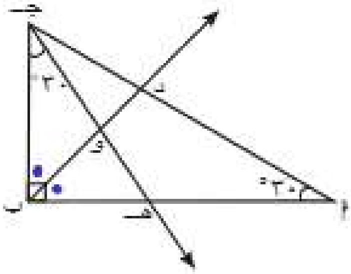


في △ و ع ص : مجموع قياسات زوايا المثلث الداخلة = ١٨٠
∴ ق(و ع ص) + ق(و ص ع) = ١٨٠ − ١٢٠ = ٦٠
∵ و نقطة تقاطع منصفات زوايا المثلث س ص ع
∴ ق($\hat{ع}$) + ق($\hat{ص}$) = ٢ × (ق(و ع ص) + ق(و ص ع)) = ٢ × ٦٠ = ١٢٠
∴ ق($\hat{س}$) = ١٨٠ − ١٢٠ = ٦٠°

٤ المثلث أ ب جـ متطابق الضلعين فيه: و هي نقطة تقاطع منصفات زواياه الداخلة ، ق(و $\hat{جـ}$ ب) = ١٥°.
أوجد بالبرهان ق($\hat{أ}$).



∵ و نقطة تقاطع منصفات زوايا △ أ ب جـ
∴ و جـ ينصف $\hat{جـ}$
∴ ق($\hat{جـ}$) = ٢ × ق(و $\hat{جـ}$ ب) = ٢ × ١٥ = ٣٠°
∵ △ أ ب جـ متطابق الضلعين
∴ ق($\hat{ب}$) = ق($\hat{جـ}$) = ٣٠
∴ ق($\hat{أ}$) = ١٨٠ − (٣٠ + ٣٠) = ١٨٠ − ٦٠ = ١٢٠° (مجموع قياسات زوايا المثلث الداخلة = ١٨٠)



٥ أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في $\hat{ب}$ ،

ق (هـ $\hat{جـ}$ ب) = ق ($\hat{أ}$) = ٣٠° ،

إذا كان $\overleftarrow{ب د}$ منصف $\hat{ب}$ ،

$\overline{د ب}$ ∩ $\overline{جـ هـ}$ = { و } ،

أثبت أنّ و نقطة تقاطع منصفات الزوايا الداخلة للمثلث أ ب جـ .

∵ مجموع قياسات زوايا المثلث الداخلة = ١٨٠

∴ ق (جـ) = ١٨٠ − (٩٠ + ٣٠) = ١٨٠ − ١٢٠ = ٦٠

∴ ق (أ $\hat{جـ}$ و) = ق (جـ) − ق (هـ $\hat{جـ}$ ب) = ٦٠ − ٣٠ = ٣٠

∴ ق (أ $\hat{جـ}$ و) = ق (هـ $\hat{جـ}$ ب) = ٣٠°

∴ جـ و ينصف $\hat{جـ}$ ← (١)

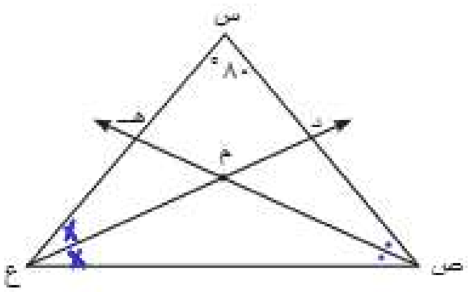
ب د منصف $\hat{ب}$ ← (٢)

$\overline{جـ هـ}$ ∩ $\overline{ب د}$ = { و }

∴ من (١) ، (٢) ينتج أن و نقطة تقاطع منصفات زوايا المثلث أ ب جـ

مهارات تفكير عليا :

اختر الإجابة الصحيحة .



٦ س ص ع مثلث فيه : $\overleftarrow{ص هـ}$ منصف $\hat{ص}$ ،

$\overleftarrow{ع د}$ منصف $\hat{ع}$

ق (د $\hat{م}$ هـ) = ...

(أ) ١٠٠°　　(ب) ٥٠°

(ج) ١٣٠°　　(د) ٤٠°

٧ ـ ٥ الأعمدة المرسومة من رؤوس المثلّث على أضلاعه

Altitudes from Vertices of a Triangle to its Sides

سوف تتعلّم : توظيف نظرية الأعمدة المرسومة من رؤوس المثلّث على أضلاعه لحلّ تمارين هندسية .

العبارات والمفردات :

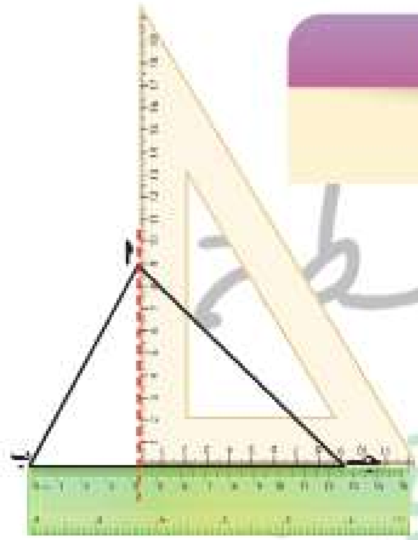
الأعمدة	Altitudes	الارتفاعات	Heights

اللوازم

أدوات هندسية .

اِرتفاع المثلّث هو طول العمود المرسوم من رأس المثلّث على قاعدته (أو امتدادها) .

في المثلّث أ ب جـ الموضّح في الشكل المقابِل ، يمكن رسم العمود النازل من رأس المثلّث أ على الضلع المقابِل له $\overline{\text{ب جـ}}$ باستخدام المثلّث القائم والمسطرة كما في الشكل .

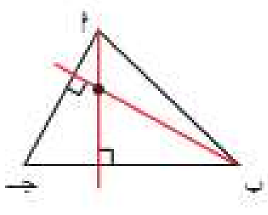


اِستكشِف

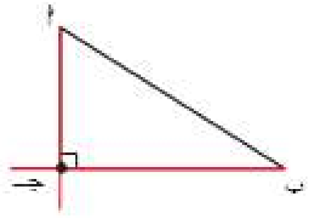
في المثلّثات التالية ، تمّ رسم العمودَين من الرأسَين أ ، ب على الضلعَين المقابِلَين لهما (أو امتدادهما) كما في الشكل .

أرسم العمود الثالث من الرأس جـ .

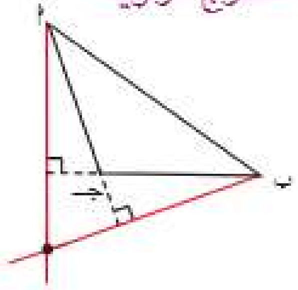
مثلّث حادّ الزوايا



مثلّث قائم الزاوية



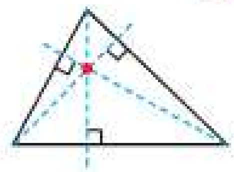
مثلّث منفرج الزاوية



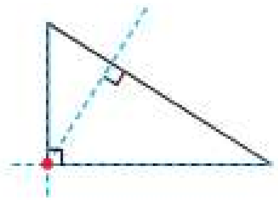
• ماذا تلاحظ ؟ ....

نظرية : الأعمدة المرسومة من رؤوس المثلّث على أضلاعه تتقاطع في نقطة واحدة .

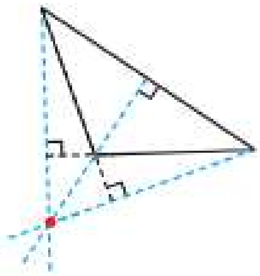
لاحِظ أنّ :



نقطة تقاطع الأعمدة المرسومة من رؤوس المثلّث الحادّ الزوايا على أضلاعه تقع داخل المثلّث .



نقطة تقاطع الأعمدة المرسومة من رؤوس المثلّث القائم الزاوية على أضلاعه هي رأس الزاوية القائمة .

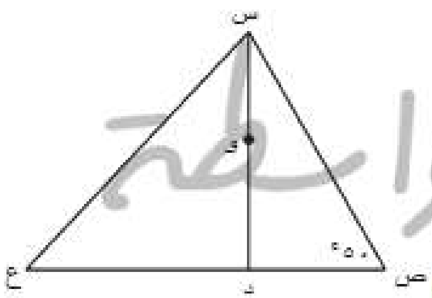


نقطة تقاطع الأعمدة المرسومة من رؤوس المثلّث المنفرج الزاوية على أضلاعه (أو امتداداها) تقع خارج المثلّث .

دورك الآن (١)

(أ) في المثلّث س ص ع : و نقطة تقاطع الأعمدة المرسومة من رؤوس المثلّث على أضلاعه ، و ∈ $\overline{\text{س د}}$.

أكمِل ما يلي :



• ق (س د̂ ص) = ٩٠°

السبب و نقطة تقاطع الأعمدة المرسومة من رؤوس المثلث على أضلاعه

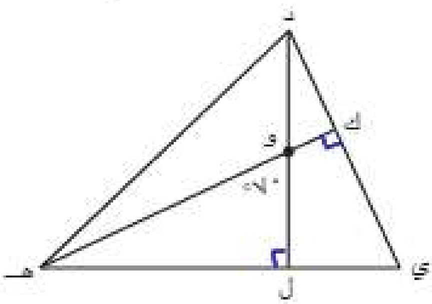
• ق (ص س̂ د) = ٤٠°

السبب مجموع قياسات زوايا المثلث الداخلة = ١٨٠

(ب) في المثلّث د هـ ي : و نقطة تقاطع الأعمدة المرسومة من رؤوس المثلّث على أضلاعه ، $\overline{\text{هـ ك}}$ ∩ $\overline{\text{د ل}}$ = { و } . أكمِل ما يلي :

تذكّر

مجموع قياسات زوايا الشكل الرباعي = ٣٦٠°



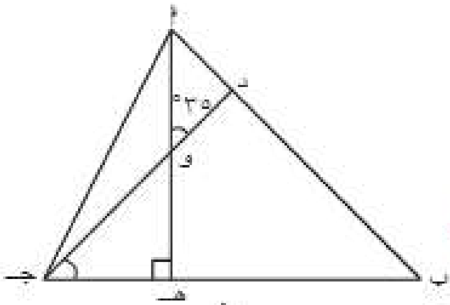
• ق (و هـ̂ ل) = ١٨٠ - (٩٠ + ٧٠) = ١٨٠ - ١٦٠ = ٢٠°

السبب مجموع قياسات زوايا المثلث الداخلة = ١٨٠

• ق (ي̂) = ٣٦٠ - (٩٠ + ٩٠ + ١١٠) = ٣٦٠ - ٢٩٠ = ٧٠°

السبب مجموع قياسات زوايا الشكل الرباعي = ٣٦٠

مثال (١):



أ ب جـ مثلث فيه : و نقطة تقاطع الأعمدة المرسومة من رؤوس المثلث على أضلاعه ، ق (د و^ أ) = ٣٥° ، إذا كان $\overline{\text{جـ د}} \cap \overline{\text{أ هـ}}$ = { و } ، أوجد بالبرهان ق (و جـ^ هـ) .

الحل :

المعطيات : و نقطة تقاطع الأعمدة المرسومة من رؤوس المثلث على أضلاعه ، ق (د و^ أ) = ٣٥°

المطلوب : إيجاد ق (و جـ^ هـ)

البرهان : ∵ و نقطة تقاطع الأعمدة المرسومة من رؤوس المثلث على أضلاعه (معطى)

∴ $\overline{\text{أ هـ}} \perp \overline{\text{ب جـ}}$

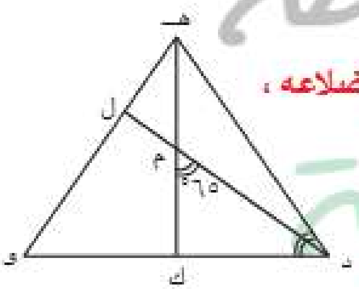
∴ Δ و هـ جـ قائم الزاوية في هـ ، ∴ ق (و هـ^ جـ) = ٩٠°

∵ ق (هـ و^ جـ) = ق (د و^ أ) = ٣٥° بالتقابل بالرأس

∴ ق (و جـ^ هـ) = ١٨٠° - (٩٠° + ٣٥°)

= ١٨٠° - ١٢٥° = ٥٥° (مجموع قياسات الزوايا الداخلة للمثلث = ١٨٠°)

مثال (٢):



Δ د هـ و فيه : م نقطة تقاطع الأعمدة المرسومة من رؤوس المثلث على أضلاعه ، $\overline{\text{هـ ك}} \cap \overline{\text{د ل}}$ = { م } ، ق (هـ د^ و) = ق (د م^ ك) = ٦٥° .

(١) أوجِد بالبرهان ق (و^)

(٢) أثبِت أنّ المثلث هـ د و متطابق الضلعين

الحل :

المعطيات : م نقطة تقاطع الأعمدة المرسومة من رؤوس المثلث على أضلاعه ، ق (هـ د^ و) = ق (د م^ ك) = ٦٥°

المطلوب : إيجاد : (١) ق (و^) (٢) إثبات أنّ المثلث هـ د و متطابق الضلعين

البرهان : ∵ م نقطة تقاطع الأعمدة المرسومة من رؤوس المثلث على أضلاعه (معطى)

∴ $\overline{\text{م ك}} \perp \overline{\text{د و}}$ ، $\overline{\text{م ل}} \perp \overline{\text{هـ و}}$ (نظرية)

∵ ق (ك م^ د) = ٦٥° (معطى)

∴ ق (ك م^ ل) = ١٨٠° - ٦٥° = ١١٥° (بالتجاور على خطّ مستقيم)

ك م ل و شكل رباعي فيه :

∵ ق (م ك^ و) = ق (م ل^ و) = ٩٠°

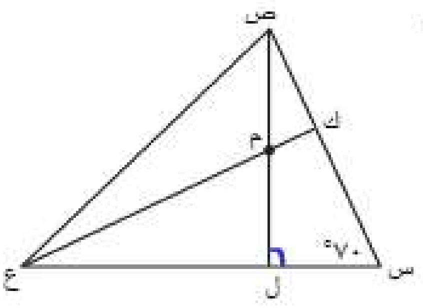
∴ ق (و^) = ٣٦٠° - (٩٠° + ٩٠° + ١١٥°) = ٦٥° (مجموع قياسات زوايا الشكل الرباعي = ٣٦٠°)

∵ ق (هـ د^ و) = ٦٥° (معطى)

∴ Δ هـ د و متطابق الضلعين . (لتطابق زوايا القاعدة)

تمارين ذاتية :

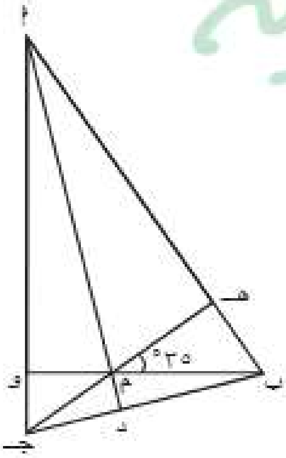
١ في الشكل المقابِل ، المثلّث س ص ع فيه : ق($\hat{س}$) = ٧٠° ،
م نقطة تقاطع الأعمدة المرسومة
من رؤوس المثلّث على أضلاعه ،
$\overline{ل ص} \cap \overline{ك ع}$ = { م } ،
أوجِد بالبرهان : (١) ق(س $\hat{ص}$ ل)
(٢) ق(ص $\hat{م}$ ع)



∵ م نقطة تقاطع الأعمدة المرسومة من رؤوس المثلث على أضلاعه
∴ ص ل ⊥ س ع
∴ ق(س $\hat{ص}$ ل) = ١٨٠ − (٩٠ + ٧٠) = ١٨٠ − ١٦٠ = ٢٠°
(مجموع قياسات زوايا المثلث الداخلة = ١٨٠)

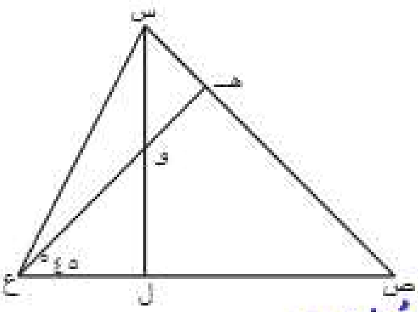
∵ مجموع قياسات زوايا الشكل الرباعي = ٣٦٠
∴ ق(ك $\hat{م}$ ل) = ٣٦٠ − (٩٠ + ٩٠ + ٧٠) = ٣٦٠ − ٢٥٠ = ١١٠°
∴ ق(ص $\hat{م}$ ع) = ق(ك $\hat{م}$ ل) = ١١٠° (بالتقابل بالرأس) .

٢ في الشكل المقابِل ، ا ب جـ مثلّث فيه :
م نقطة تقاطع الأعمدة المرسومة
من رؤوس المثلّث على أضلاعه ، ق(هـ $\hat{م}$ ب) = ٣٥° ،
أوجِد بالبرهان ق(ب $\hat{ا}$ جـ) .



∵ م نقطة تقاطع الأعمدة المرسومة من رؤوس المثلث على أضلاعه
∴ جـ هـ ⊥ ا ب ، ب و ⊥ ا جـ
∴ △ م هـ ب قائم الزاوية في هـ
(مجموع قياسات زوايا المثلث الداخلة = ١٨٠)
∴ ق(م $\hat{ب}$ هـ) = ١٨٠ − (٩٠ + ٣٥) = ١٨٠ − ١٢٥ = ٥٥

∵ △ ا ب و قائم الزاوية في و
∴ ق(ب $\hat{ا}$ جـ) = ١٨٠ − (٩٠ + ٥٥) = ١٨٠ − ١٤٥ = ٣٥°



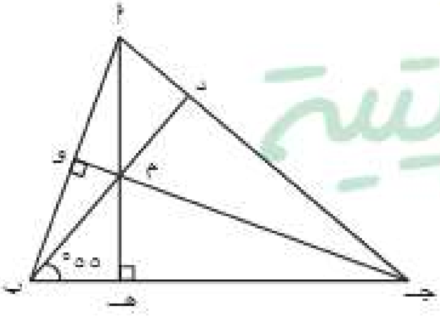
٣ في الشكل المقابل ، س ص ع مثلّث فيه : ق (هـ ع^ ل) = ٤٥°
و نقطة تقاطع الأعمدة المرسومة من رؤوسه على أضلاعه ،
س ل ∩ هـ ع = { و } .

(١) أوجِد بالبرهان ق (هـ و^ س)

(٢) ما نوع المثلّث هـ و س بالنسبة إلى أضلاعه ؟

∵ و نقطة تقاطع الأعمدة المرسومة من رؤوس المثلث على أضلاعه
∴ س ل ⊥ ع ص ، ع هـ ⊥ س ص
△ و ل ع قائم الزاوية في ل
(مجموع قياسات زوايا المثلث الداخلة = ١٨٠)

∴ ق(ل و^ ع) = ١٨٠ − (٩٠ + ٤٥) = ١٨٠ − ١٣٥ = ٤٥°
∴ ق(هـ و^ س) = ق(ل و^ ع) = ٤٥° (بالتقابل بالرأس)
∵ △ هـ و س قائم الزاوية في هـ ، ق(هـ و^ س) = ٤٥
∴ △ هـ و س متطابق الضلعين .



٤ أ ب جـ مثلّث فيه :
أهـ ⊥ ب جـ ، جـ و ⊥ أ ب .
ق (م ب^ هـ) = ٥٥°

(١) أثبِت أنّ : ب د ⊥ أ جـ .

(٢) أوجِد ق (م أ^ جـ) .

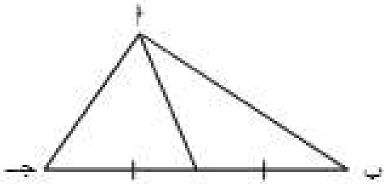
∵ أ هـ ⊥ ب جـ ، جـ و ⊥ أ ب
أ هـ ∩ جـ و = { م }
∴ م نقطة تقاطع الأعمدة المرسومة من رؤوس المثلث على أضلاعه
∴ ب د ⊥ أ جـ
∵ ق(جـ^) = ١٨٠ − (٩٠ + ٥٥) = ١٨٠ − ١٤٥ = ٣٥°
(مجموع قياسات زوايا المثلث الداخلة = ١٨٠)
في △ أ هـ جـ قائم الزاوية في هـ
ق(م أ^ جـ) = ١٨٠ − (٩٠ + ٣٥) = ١٨٠ − ١٢٥ = ٥٥

٧ ـ ٦ القطع المتوسَطة للمثلَث
Medians of a Triangle

سوف تتعلَم : توظيف نظرية القطع المتوسَطة للمثلَث لحلّ تمارين هندسية .

العبارات والمفردات :

القطع المتوسّطة للمثلّث — Median of a Triangle



في Δ أ ب جـ :

د منتصف $\overline{\text{ب جـ}}$ ،

$\overline{\text{أ د}}$ تُسمّى (قطعة متوسّطة للمثلّث أ ب جـ) .

القطعة المتوسّطة للمثلّث : هي القطعة المستقيمة التي تصل بين أيّ رأس في المثلّث ومنتصف الضلع المقابِل له .

اِستكشِف

اللوازم

أدوات هندسية .

في Δ أ ب جـ : و منتصف $\overline{\text{أ ب}}$ ، هـ منتصف $\overline{\text{أ جـ}}$ ،

$\overline{\text{ب هـ}} \cap \overline{\text{جـ و}} = \{ \text{م} \}$

هل $\overleftrightarrow{\text{أ م}}$ ينصّف $\overline{\text{ب جـ}}$ ؟

للتحقّق من ذلك ، نتّبع ما يلي :

العمل : نرسم $\overleftrightarrow{\text{أ م}}$ يقطع $\overline{\text{ب جـ}}$ في د ، بحيث أ م = م س ، ثمّ صِل $\overline{\text{ب س}}$ ، $\overline{\text{س جـ}}$

في Δ أ ب س : $\overline{\text{و م}}$ // $\overline{\text{ب س}}$ ؟ لماذا ؟

في Δ أ س جـ : $\overline{\text{م هـ}}$ // جـ س

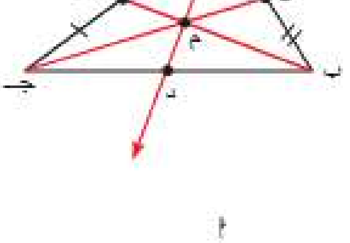
هل الشكل ب س جـ م متوازي أضلاع ؟ وضّح إجابتك .

$\because$ قطرا متوازي الأضلاع ينصف كل منهما الآخر

$\therefore$ ب د = د جـ

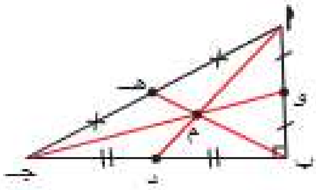
$\therefore$ $\overline{\text{أ د}}$ قطعة متوسطة

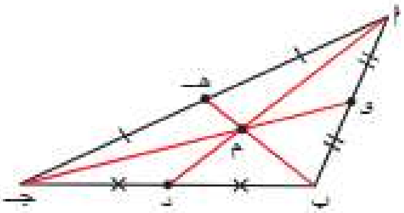
م د = د س



$\therefore$ م د = $\frac{1}{2}$ م س = $\frac{1}{2}$ م أ (لأنّ م س = م أ عملًا)

بالمثل في المثلّث القائم الزاوية والمثلّث المنفرج الزاوية .





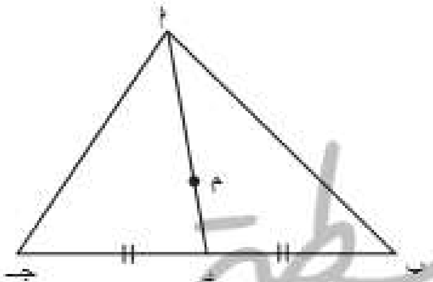
• ماذا تلاحظ ؟ ....

نظرية :
القطع المتوسّطة للمثلّث تتقاطع في نقطة واحدة تُقسم كلّ منها بنسبة ٢ : ١ من جهة الرأس .

في Δ أ ب جـ :

$\overline{\text{أد}}$ قطعة متوسّطة ،

م نقطة تقاطع القطع المتوسّطة للمثلّث .



أكمِل :

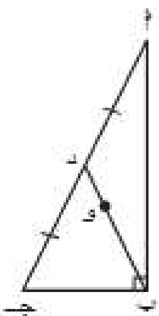
أ م = ...٢... م د
م د = ...$\frac{1}{2}$... أ م

م د = ...$\frac{1}{3}$... أ د
أ د = ...٣... م د

أ م = ...$\frac{2}{3}$... أ د
أ د = ...$\frac{3}{2}$... أ م

دورك الآن (١)

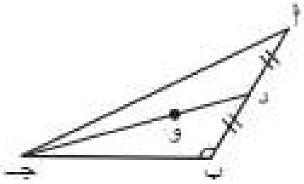
في كلّ من المثلّثات التالية : و نقطة تقاطع القطع المتوسّطة .
أكمِل (دون استخدام الأدوات الهندسية) .



لتكن ب و = ٢ سم

∴ و د = ...١... سم

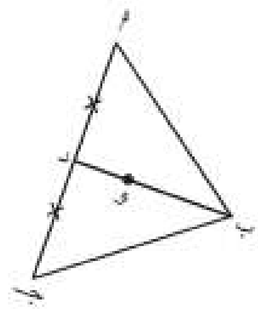
∴ ب د = ...٣... سم



لتكن و د = ٤ سم

∴ و جـ = ...٨... سم

∴ د جـ = ...١٢... سم



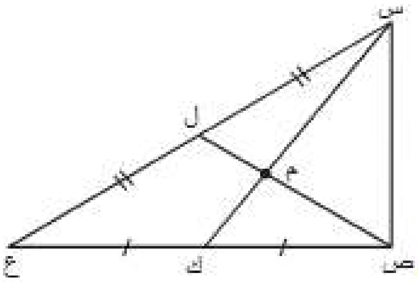
لتكن ب د = ٣٠ سم

∴ ب و = ...٢٠... سم

∴ و د = ...١٠... سم

دورك الآن (٢)

في الشكل المقابل س ص ع مثلث :



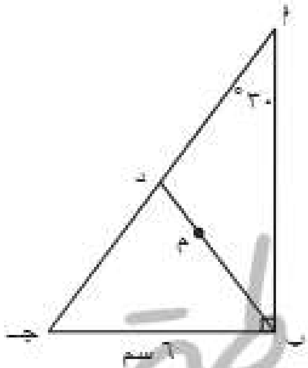
∵ ل منتصف $\overline{\text{س ع}}$ ∴ $\overline{\text{ص ل}}$ قطعة متوسطة للمثلث

∵ ك منتصف $\overline{\text{ص ع}}$ ∴ $\overline{\text{س ك}}$ قطعة متوسطة للمثلث

∵ $\overline{\text{ص ل}} \cap \overline{\text{س ك}}$ = {م}

∴ م هي نقطة تقاطع القطع المتوسطة للمثلث س ص ع

مثال (١):



أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في ب ،

ب جـ = ٦ سم ،

م نقطة تقاطع القطع المتوسطة للمثلث أ ب جـ ، ق ($\hat{\text{أ}}$) = ٣٠°

أوجد بالبرهان كلًا من : (١) أ جـ (٢) ب د

(٣) ب م (٤) م د

الحل :

المعطيات : أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في ب ، م نقطة تقاطع القطع المتوسطة ،

ب جـ = ٦ سم ، ق ($\hat{\text{أ}}$) = ٣٠°

المطلوب : إيجاد كلٍّ من : (١) أ جـ (٢) ب د (٣) ب م (٤) م د

البرهان : Δ أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في ب فيه :

∵ ق ($\hat{\text{أ}}$) = ٣٠°

∴ ب جـ = $\frac{١}{٢}$ أ جـ (نتيجة)

∴ أ جـ = ٢ × ب جـ = ٢ × ٦ = ١٢ سم (مثلث ثلاثيني ستيني)

∵ د منتصف $\overline{\text{أ جـ}}$ ، ب زاوية قائمة

ب د = $\frac{١}{٢}$ أ جـ (نظرية)

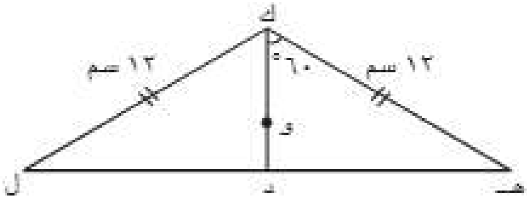
= $\frac{١}{٢}$ × ١٢ = ٦ سم

∵ م نقطة تقاطع القطع المتوسطة (معطى)

∴ $\overline{\text{ب د}}$ قطعة متوسطة

∴ ب م = $\frac{٢}{٣}$ × ب د = $\frac{٢}{٣}$ × ٦ = ٤ سم (نظرية)

∴ د م = $\frac{١}{٣}$ × ب د = $\frac{١}{٣}$ × ٦ = ٢ سم



مثال (٢):

ك هـ ل مثلث فيه :

ك هـ = ك ل = ١٢ سم ، ق (هـ ك̂ د) = ٦٠° ،

و نقطة تقاطع القطع المتوسطة للمثلث .

أوجِد بالبرهان كلًّا من : (١) ق (هـ̂)

(٢) ك د

(٣) و د

الحلّ :

المعطَيات : ك هـ ل مثلّث فيه : ك هـ = ك ل = ١٢ سم، ق (هـ ك̂ د) = ٦٠°

المطلوب : إيجاد كلّ من : (١) ق (هـ̂) (٢) ك د (٣) و د

البرهان : Δ ك هـ ل فيه :

∵ و نقطة تقاطع القطع المتوسّطة للمثلّث ك هـ ل (معطى)

∴ د منتصف $\overline{\text{هـ ل}}$

∵ ك هـ = ك ل (معطى)

∴ $\overline{\text{ك د}}$ ⊥ $\overline{\text{هـ ل}}$ (من خواصّ المثلّث المتطابق الضلعَين)

∴ ق (ك د̂ هـ) = ٩٠°

في Δ هـ ك د :

∵ ق (هـ ك̂ د) = ٦٠°

∴ ق (هـ̂) = ٩٠° − ٦٠° = ٣٠°

∴ Δ هـ ك د مثلّث ثلاثيني ستّيني

∴ ك د = $\frac{١}{٢}$ ك هـ (نتيجة)

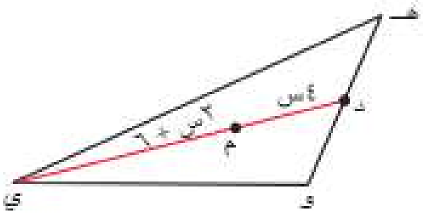
= $\frac{١}{٢}$ × ١٢ = ٦ سم

∴ و د = $\frac{١}{٣}$ × ك د

= $\frac{١}{٣}$ × ٦ = ٢ سم (نظرية)

مثال (٣):

المثلث هـ و ي فيه : م نقطة تقاطع القطع المتوسطة للمثلث .
إذا كان د م = (٤ س) سم ، م ي = (٢ س + ٦) سم ،
أوجِد بالبرهان قيمة س .



الحلّ :

المعطَيات : المثلّث هـ و ي فيه : م نقطة تقاطع القطع المتوسّطة للمثلّث ،
د م = (٤ س) سم ، م ي = (٢س + ٦) سم .

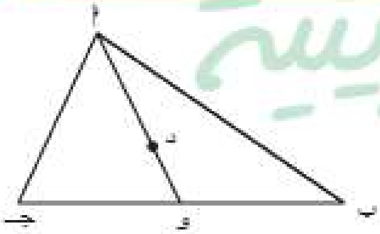
المطلوب : إيجاد قيمة س .

البرهان : ∵ م نقطة تقاطع القطع المتوسّطة للمثلّث هـ و ي (معطى)
∴ د م = $\frac{١}{٢}$ × م ي (نظرية)
∴ ٤ س = $\frac{١}{٢}$ (٢ س + ٦) (حلّ المعادلة)
٤ س = س + ٣
٤ س ـ س = ٣
٣س = ٣
س = ١ (تحقّق من إجابتك)

> **اِنتبِه**
> إستخدِم خاصّية توزيع الضرب على الجمع لتسهيل العمليات الحسابية .
> $\frac{١}{٢}$ (٢ س + ٦)

دورك الآن (٣)

في الشكل المقابِل : $\overline{أو}$ قطعة متوسّطة للمثلّث أ ب جـ ،
إذا كان أ د = ٥س ـ ١ ، و د = ٢س ،
أوجِد بالبرهان طول $\overline{أو}$.



المعطَيات : أو قطعة متوسطة للمثلث أ ب جـ ،
أ د = ٥ س ـ ١ ، و د = ٢ س

المطلوب : إيجاد طول أو

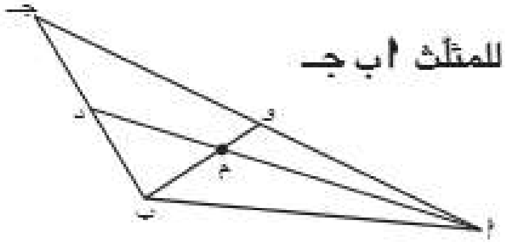
البرهان : ∵ د نقطة تقاطع القطع المتوسطة للمثلث أ ب جـ (معطى)
∴ $\overline{أو}$ قطعة متوسّطة ،
∴ و د = $\frac{١}{٢}$ × أ د (نظرية)
٢س = $\frac{١}{٢}$ × (٥ س ـ ١) (حلّ المعادلة)
٤س = ٥س ـ ١
٤س ـ ٥ س = ‎-١
ـ س = ـ ١ ∴ س = ١
وبالتالي ، أو = أ د + و د = ٤ + ٢ = ٦ (تحقّق من إجابتك)

> **اِنتبِه**
> إضرب طرفَي المعادلة في ٢ لتسهيل العمليات الحسابية .
> ٢ × ٢س = $\cancel{٢}$ × $\frac{١}{\cancel{٢}}$ (٥س ـ ١)

الدرس السادس

تمارين ذاتية :

١ في الشكل المقابِل :



$\overline{اد} \cap \overline{ب و} = \{ م \}$ ، م نقطة تقاطع القطع المتوسّطة للمثلّث ا ب جـ

إذا كان م ب = ٤ سم ، اد = ٢٧ سم ،

أوجِد بالبرهان كلًّا من : (١) و م

(٢) ا م

(٣) م د

∵ م نقطة تقاطع القطع المتوسطة للمثلث ا ب جـ

∴ و م = $\frac{1}{2}$ م ب

و م = $\frac{1}{2}$ × ٤ = ٢ سم

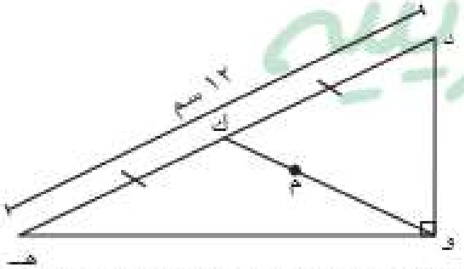
∴ ا م = $\frac{2}{3}$ ا د

ا م = $\frac{2}{\cancel{3}}$ × $\cancel{27}$ = ٢ × ٩ = ١٨ سم

∴ م د = $\frac{1}{3}$ ا د

∴ م د = $\frac{1}{\cancel{3}}$ × $\cancel{27}$ = ٩ سم

٢ Δ هـ و د قائم الزاوية في و ، فيه :



م نقطة تقاطع القطع المتوسّطة للمثلّث .

أوجِد بالبرهان كلًّا ممايلي : (١) و ك

(٢) م ك

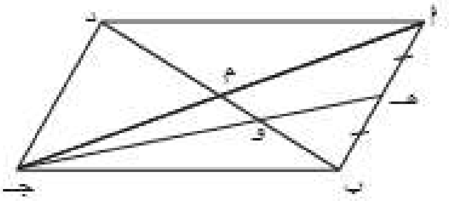
∵ Δ هـ و د قائم الزاوية في و

، ك منتصف د هـ

∴ و ك = $\frac{1}{2}$ د هـ = $\frac{1}{2}$ × ١٢ = ٦ سم

∵ م نقطة تقاطع القطع المتوسطة للمثلث د و هـ

∴ م ك = $\frac{1}{3}$ و ك = $\frac{1}{3}$ × ٦ = ٢ سم

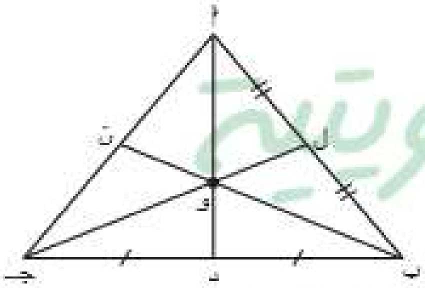


٣ أ ب جـ د متوازي أضلاع تقاطع قطراه في م ،
إذا كان ب د = ١٨ سم ، هـ منتصف $\overline{أب}$
$\overline{ب م} \cap \overline{جـ هـ}$ = {و}
أوجِد بالبرهان : (١) م ب (٢) ب و

∵ أ ب جـ د متوازي أضلاع .
∴ م ب = ½ ب د = ½ × ١٨ = ٩ سم

في Δ أ ب جـ
∵ م منتصف أ جـ ، هـ منتصف أ ب
∴ و نقطة تقاطع القطع المتوسطة للمثلث أ ب جـ

∴ ب و = ⅔ م ب
ب و = ⅔ × ٩ = ٦ سم

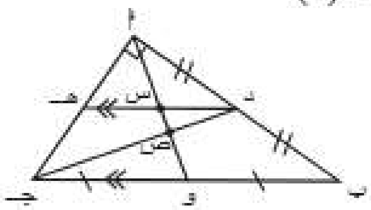


٤ المثلث أ ب جـ فيه :
و نقطة تلاقي القطع المتوسّطة للمثلث ،
إذا كان أ و = (٨ س) وحدة طول ،
و د = (٥ س - ٣) وحدة طول ،
أوجِد بالبرهان قيمة س . ثمّ تحقّق من الحلّ .

∵ و نقطة تقاطع القطع المتوسطة للمثلث أ ب جـ
∴ أ و = ٢ و د
٨ س = ٢ (٥ س - ٣)
٨ س = ١٠ س - ٦
٨ س - ١٠ س = - ٦
- ٢ س = - ٦
∴ س = ٣
التحقق : أ و = ٨ س = ٨ × ٣ = ٢٤ سم
و د = ٥ × ٣ - ٣ = ١٥ - ٣ = ١٢ سم
∴ أ و = ٢ و د #

مهارات تفكير عليا :

٥ لديك قائمتان ، اِختر من القائمة (٢) ما يناسب كلّ تمرين من القائمة (١) لتحصل على إجابة صحيحة .



في الشكل المقابِل : أ ب جـ مثلّث قائم الزاوية في أ ،

د منتصف $\overline{\text{أ ب}}$ ، و منتصف $\overline{\text{ب جـ}}$ ،

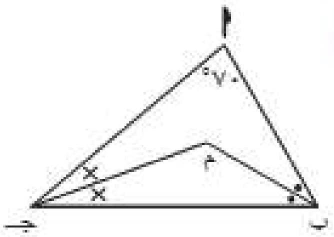
$\overline{\text{د هـ}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$ ، د هـ = ٦ سم

القائمة (١)	القائمة (٢)
١ ص و = ٢	أ ١ سم
٢ د س = ٣	ب ٢ سم
٣ س ص = ١	ج ٣ سم
	د ٤ سم
	هـ ٦ سم

أوّلًا : البنود المقالية

١ في كلّ من المثلّثات التالية ، أكمِل دون استخدام الأدوات الهندسية :

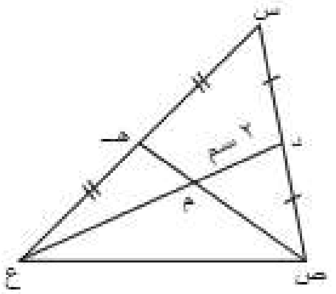
أ



ق (أ ب̂ جـ) + ق (أ جـ̂ ب) = ١٨٠ − ٧٠ = ١١٠

ق (ب م̂ جـ) = ١٨٠ − ٥٥ = ١٢٥

ب

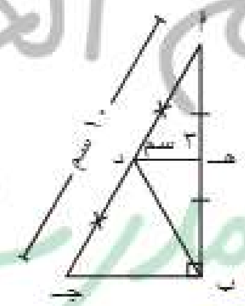


م نقطة تقاطع القطع المتوسّطة للمثلّث س ص ع .

م ع = ٢ × ٢ = ٤ م

د ع = ٣ × ٢ = ٦ م

ج

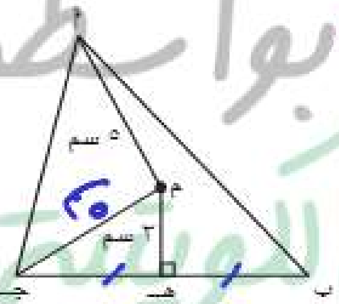


ب جـ = ٦ م

ب د = ٥ م

أ ب = ٨ م

د



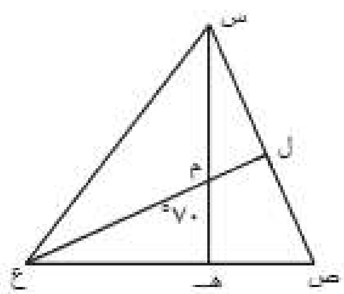
م نقطة تقاطع محاور أضلاع المثلّث أ ب جـ .

م جـ = ٥ م

هـ جـ = ٤ م

ب جـ = ٨ م

هـ

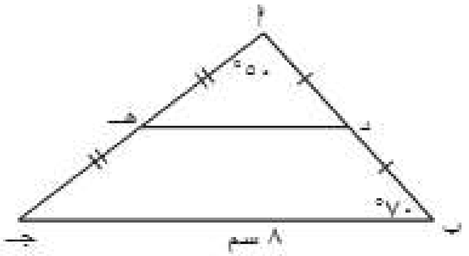


م نقطة تقاطع الأعمدة المرسومة من رؤوس المثلّث س ص ع على أضلاعه .

ق (م ع̂ هـ) = ٢٠°

ق (ل ص̂ ع) = ٧٠°

٢ اب جـ مثلث فيه : د منتصف $\overline{\text{اب}}$ ،
هـ منتصف $\overline{\text{اجـ}}$ ، ق($\hat{\text{ا}}$) = ٥٠° ،
ب جـ = ٨ سم ، ق($\hat{\text{ب}}$) = ٧٠° .
أوجِد بالبرهان : (١) د هـ (٢) ق($\text{ا}\hat{\text{د}}\text{هـ}$)
(٣) ق($\text{ا}\hat{\text{هـ}}\text{د}$)



∵ د منتصف اب ، هـ منتصف اجـ

∴ د هـ = $\frac{1}{2}$ ب جـ = $\frac{1}{2}$ × ٨ = ٤ سم

∴ د هـ // ب جـ

∴ ق($\text{ا}\hat{\text{د}}\text{هـ}$) = ق($\hat{\text{ب}}$) = ٧٠° (بالتناظر والتوازي)

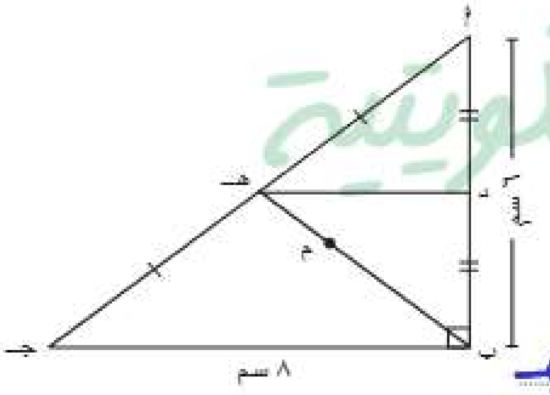
في Δ ا ب جـ : (مجموع قياسات زوايا المثلث الداخلة = ١٨٠)

∴ ق($\hat{\text{جـ}}$) = ١٨٠ − (٧٠ + ٥٠) = ١٨٠ − ١٢٠ = ٦٠

∵ د هـ // ب جـ

∴ ق($\text{ا}\hat{\text{هـ}}\text{د}$) = ق($\hat{\text{جـ}}$) = ٦٠° (بالتناظر والتوازي)

٣ اب جـ مثلث قائم الزاوية في ب فيه :
د منتصف $\overline{\text{اب}}$ ، هـ منتصف $\overline{\text{اجـ}}$ ،
اب = ٦ سم ، ب جـ = ٨ سم
م نقطة تقاطع القطع المتوسطة للمثلث اب جـ .
أوجِد بالبرهان : (أ) د هـ (ب) اجـ
(ج) ب هـ (د) م هـ



∵ د منتصف اب ، هـ منتصف اجـ

∴ د هـ // ب جـ ، د هـ = $\frac{1}{2}$ ب جـ

∴ د هـ = $\frac{1}{2}$ × ٨ = ٤ سم

(اجـ)^2 = (اب)^2 + (ب جـ)^2 (نظرية فيثاغورث)

∴ (اجـ)^2 = (٦)^2 + (٨)^2 = ٣٦ + ٦٤ = ١٠٠ ، اجـ = $\sqrt{١٠٠}$ = ١٠ سم

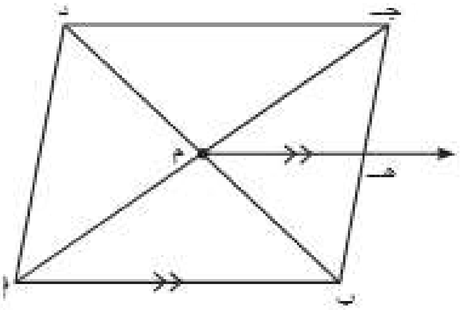
∵ هـ منتصف اجـ ، Δ اب جـ قائم الزاوية في ب

∴ ب هـ = $\frac{1}{2}$ اجـ = $\frac{1}{2}$ × ١٠ = ٥ سم

∵ م نقطة تقاطع القطع المتوسطة للمثلث اب جـ

∴ م هـ = $\frac{1}{3}$ × ب هـ = $\frac{1}{3}$ × ٥ = $\frac{5}{3}$ سم

٤ في الشكل المقابِل :
أ ب جـ د متوازي الأضلاع تقاطع قطراه في م
م هـ // أ ب ويقطع ب جـ في هـ.
أثبِت أنّ : هـ منتصف ب جـ.

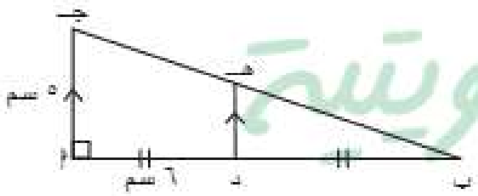


∵ أ ب جـ د متوازي الأضلاع

∴ القطران ينصف كل منهما الآخر
∴ م منتصف أ جـ ← (١)
م هـ // أ ب ← (٢)

من (١) ، (٢) ينتج أن
هـ منتصف ب جـ

٥ في الشكل المقابِل ، أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في أ
د منتصف أ ب ، د هـ // أ جـ ،
د أ = ٦ سم ، أ جـ = ٥ سم .

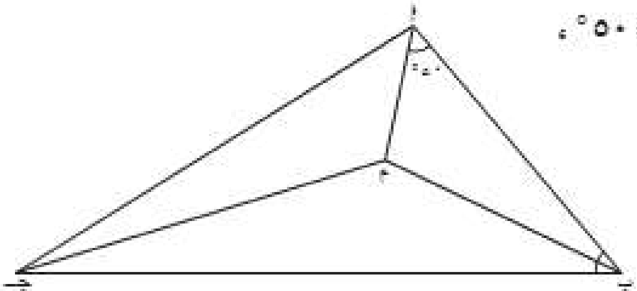


(أ) أثبِت أنّ : ب هـ = هـ جـ .

(ب) أوجِد : طول هـ جـ .

∵ د هـ // أ جـ ، د منتصف أ ب

∴ هـ منتصف ب جـ ∴ ب هـ = هـ جـ
أ ب = ٢ أ د = ٢ × ٦ = ١٢ سم
∴ (ب جـ)^2 = (أ ب)^2 + (أ جـ)^2 (نظرية فيثاغورث)
(ب جـ)^2 = (١٢)^2 + (٥)^2
(ب جـ)^2 = ١٤٤ + ٢٥ = ١٦٩
∴ ب جـ = $\sqrt{١٦٩}$ = ١٣ سم



٦ أ ب جـ مثلث فيه : ق (ب $\hat{أ}$ م) = ق (أ $\hat{ب}$ جـ) = ٥٠° ، حيث م نقطة تقاطع منصفات الزوايا الداخلة . أوجِد بالبرهان ق (أ $\hat{جـ}$ م) .

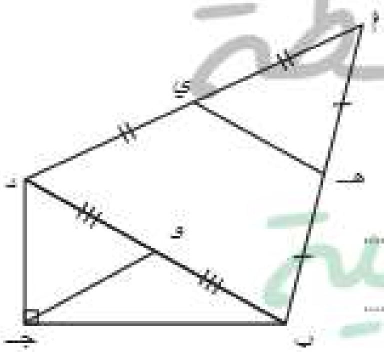
∵ م نقطة تقاطع منصفات زوايا المثلث أ ب جـ

∴ ق(ب أ جـ) = ٢ق(ب أ م) = ٢ × ٥٠ = ١٠٠

∵ مجموع قياسات زوايا المثلث الداخلة = ١٨٠

∴ ق(أ جـ ب) = ١٨٠ − (٥٠ + ١٠٠) = ١٨٠ − ١٥٠ = ٣٠°

∴ ق(أ جـ م) = ½ ق(أ جـ ب) = ½ × ٣٠ = ١٥°



٧ في الشكل المقابل : هـ ، ي ، و منتصفات $\overline{أب}$ ، $\overline{أد}$ ، $\overline{ب د}$ على الترتيب ، ق ($\hat{جـ}$) = ٩٠° .
برهن أنَّ : هـ ي = و جـ .

∵ هـ منتصف أ ب ، ي منتصف أ د

∴ هـ ي = ½ ب د ⟵ (١)

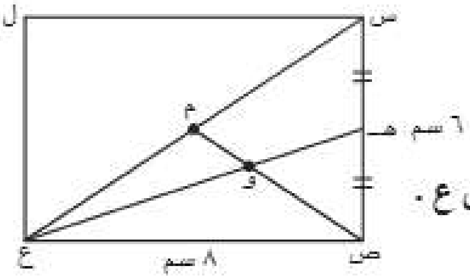
∵ △ ب جـ د قائم الزاوية في جـ

∵ و منتصف ب د

∴ و جـ = ½ ب د ⟵ (٢)

من (١) ، (٢) ينتج أن
هـ ي = و جـ

٨ س ص ع ل مستطيل ،



م نقطة تقاطع قطرَيه ، ص ع = ٨ سم ، س ص = ٦ سم

نصّفت س ص في هـ ، هـ ع ∩ ص م = { و } .

(١) برهِن أنّ : و نقطة تقاطع القطع المتوسّطة للمثلّث س ص ع .

(٢) أوجِد طول و م .

∵ س ص ع ل مستطيل

∴ م منتصف س ع

∵ هـ منتصف س ص (معطى)

∴ و نقطة تقاطع القطع المتوسطة للمثلث س ص ع

(س ع)^2 = (س ص)^2 + (ص ع)^2 (نظرية فيثاغورث)

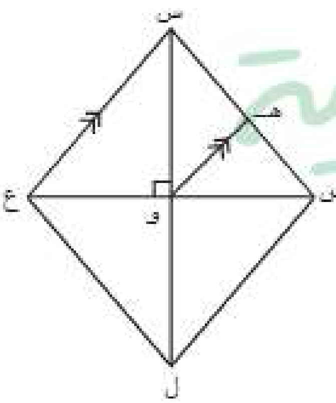
(س ع)^2 = ٣٦ + ٦٤ = ١٠٠ ، س ع = $\sqrt{١٠٠}$ = ١٠ سم

∵ △ س ص ع قائم الزاوية في ص ، م منتصف س ع

∴ ص م = $\frac{1}{2}$ س ع = $\frac{1}{2}$ × ١٠ = ٥ سم

∴ و م = $\frac{1}{3}$ ص م = $\frac{1}{3}$ × ٥ = $\frac{٥}{٣}$ سم

٩ عند تصميم إحدى النقوشات الفنيّة .



قرّر المصمِّم رسم الشكل المقابِل كما هو موضّح :

حيث س ص = س ع = ١٠ سم ، س ل ⊥ ص ع ،

رسم و هـ // س ع ، هـ ∈ ص س . أوجِد بالبرهان طول هـ و .

∵ س ص = س ع

∵ س ل ⊥ ص ع

∴ و منتصف ص ع ← (١)

∵ و هـ // س ع ← (٢)

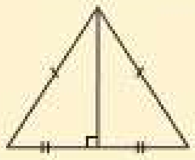
من (١)، (٢) ينتج أن هـ منتصف س ص

هـ و = $\frac{1}{2}$ س ع

هـ و = $\frac{1}{2}$ × ١٠ = ٥ سم

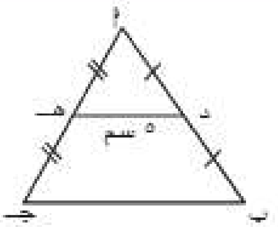
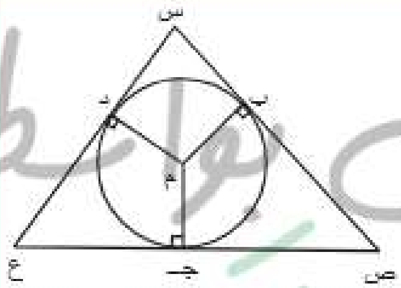
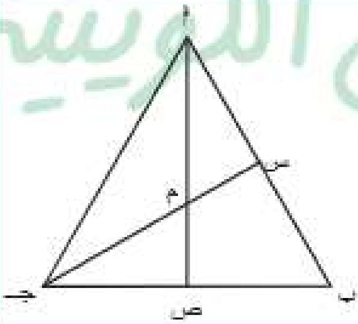
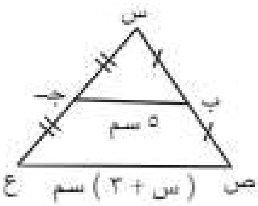
تذكّر

في المثلّث المتطابق الضلعَين العمود المرسوم من رأس المثلّث على قاعدته ينصّفها .



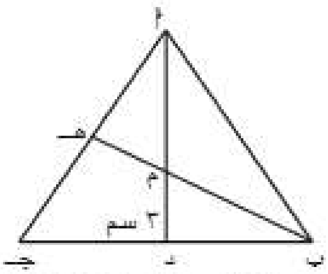
ثانيًا : البنود الموضوعية

في البنود (١ - ٦) ، ظلّل أ إذا كانت العبارة صحيحة ، وظلّل ب إذا كانت العبارة غير صحيحة .

١ المثلّث أ ب جـ فيه : د منتصف أب ، هـ منتصف أجـ ، د هـ = ٥ سم ، فإنّ أجـ = ١٠ سم . 	أ	ب
٢ نقطة تقاطع محاور أضلاع المثلّث المنفرج الزاوية تقع داخل المثلّث .	أ	ب
٣ نقطة تقاطع الأعمدة المرسومة من رؤوس المثلّث القائم الزاوية على أضلاعه هي رأس الزاوية القائمة .	أ	ب
٤ في الشكل المقابل : دائرة مركزها م فإنّ م هي نقطة تقاطع القطع المتوسّطة للمثلّث س ص ع . 	أ	ب
٥ إذا كان Δ أ ب جـ متطابق الأضلاع ، م نقطة تقاطع الأعمدة المرسومة من رؤوسه على أضلاعه ، جـس ∩ أص = { م } ، فإنّ ق (أ م̂ جـ) = ١٢٠° 	أ	ب
٦ في الشكل المقابل : س = ٧ 	أ	ب

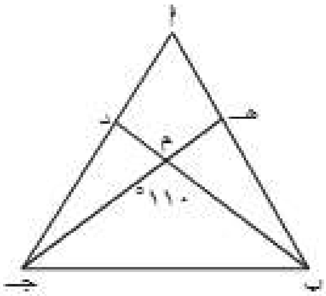
في البنود (٧ - ١٩) أربعة اختيارات ، واحد فقط منها صحيح ، ظلّل الإجابة الصحيحة .

٧ أ ب جـ مثلّث فيه م نقطة تقاطع متوسّطات المثلّث ،
م د = ٣ سم ، فإنّ أ د =



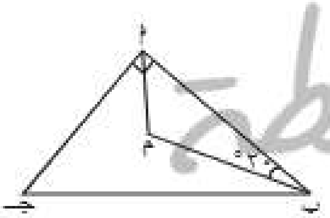
أ ٦ سم　ب ٩ سم　ج ١,٥ سم　د ٥ سم

٨ أ ب جـ مثلّث فيه م نقطة تقاطع الأعمدة المرسومة
من رؤوس المثلّث على أضلاعه ، ق (ب $\hat{م}$ جـ) = ١١٠° ،
فإنّ ق ($\hat{أ}$) =



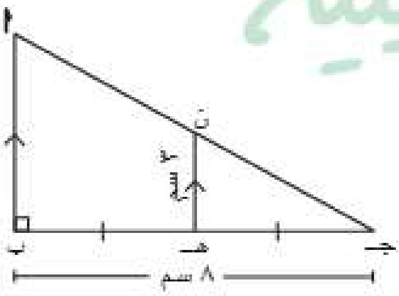
أ ٧٠°　ب ١١٠°　ج ٣٥°　د ٦٠°

٩ أ ب جـ مثلّث قائم الزاوية في أ ،
م نقطة تقاطع منصّفات الزوايا الداخلة للمثلّث ،
ق (أ $\hat{ب}$ م) = ٢٠° ، فإنّ ق ($\hat{جـ}$) =



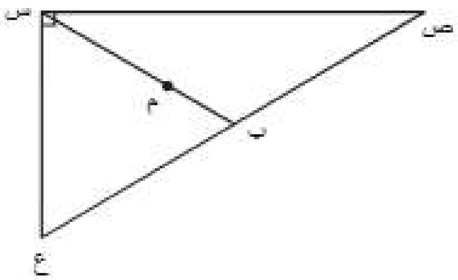
أ ٣٠°　ب ٤٠°　ج ٥٠°　د ٦٠°

١٠ أ ب جـ مثلّث قائم الزاوية في ب ،
هـ منتصف ب جـ ، هـ ن // ب أ .
فإنّ : أ جـ =



أ ٨ سم　ب ١٠ سم　ج ٣ سم　د ٦ سم

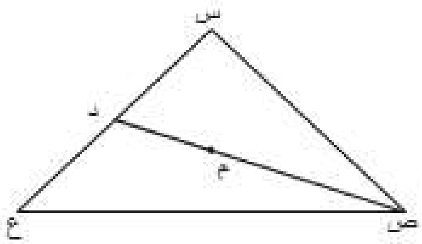
١١ س ص ع مثلّث قائم الزاوية في س .
طول وتره = ٢٤ سم ، م نقطة تقاطع القطع
المتوسّطة للمثلّث س ص ع ،
فإنّ : م ب =



أ ٤ سم　ب ٣ سم　ج ٦ سم　د ١٢ سم

١٢ عدد القطع المتوسّطة للمثلّث المنفرج الزاوية يساوي :

أ صفر   ب ١   ج ٢   د ٣

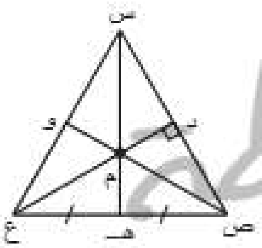


١٣ إذا كان $\overline{\text{ص د}}$ قطعة متوسّطة في المثلّث س ص ع ،
م نقطة تلاقي القطع المتوسّطة ، فإنّ م د =

أ $\frac{١}{٢}$ ص م   ب ٢ ص م   ج $\frac{١}{٢}$ ص د   د ٢ ص د

---

١٤ س ص ع مثلّث متطابق الأضلاع ، $\overline{\text{س هـ}} \cap \overline{\text{ص و}} \cap \overline{\text{ع د}} = \{\text{م}\}$ ،
فإنّ م هي نقطة تقاطع :

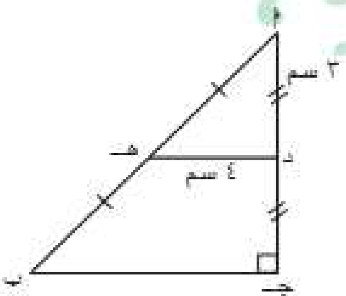


أ منصِّفات زوايا المثلّث فقط .

ب منصِّفات زوايا المثلّث والأعمدة المرسومة من رؤوسه على أضلاعه فقط .

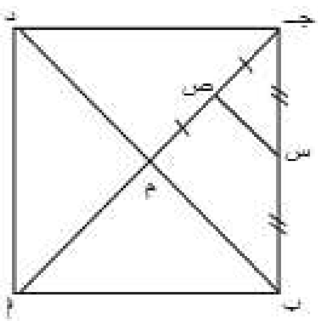
ج منصِّفات زوايا المثلّث والأعمدة المرسومة من رؤوسه على أضلاعه و القطع المتوسّطة للمثلّث ومحاور أضلاعه .

د منصِّفات زوايا المثلّث ومحاور أضلاعه فقط .



١٥ في الشكل المقابِل : إذا كانت د ، هـ منتصفَي $\overline{\text{أ جـ}}$ ،
$\overline{\text{أ ب}}$ على الترتيب ، فإنّ أ ب =

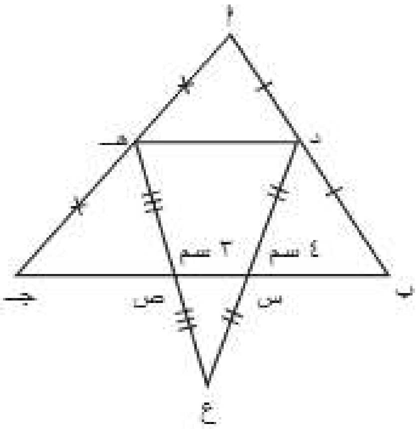
أ ٥ سم   ب ١٠ سم   ج ٢٥ سم   د ١٢ سم



١٦ في الشكل المقابِل : أ ب جـ د مربّع فيه
س ، ص منتصفا ب جـ ، جـ م على الترتيب
حيث أ جـ = ١٢ سم ، فإنّ س ص يساوي :

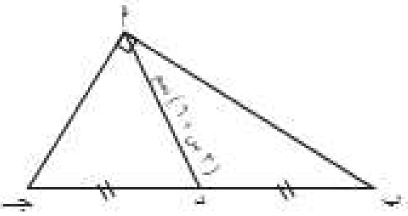
أ ١٢ سم   ب ٦ سم   ج ٣ سم   د ٤ سم

١٧ في الشكل المقابل ، وحسب المعطيات الموضحة حيث ب س = ٤ سم ، س ص = ٣ سم ، فإنّ طول $\overline{\text{ص جـ}}$ يساوي :



أ ٣ سم   ب ٤ سم   ج ٥ سم   د ٦ سم

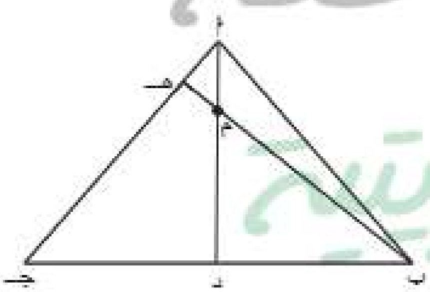
١٨ في الشكل المقابل : المثلث أ ب جـ قائم الزاوية في أ ، د منتصف $\overline{\text{ب جـ}}$ حيث أ د = (٣ س + ٦) سم ، ب جـ = (١٠ س) سم ، فإنّ طول $\overline{\text{أ د}}$ يساوي



أ ٣٠ سم   ب ١٥ سم   ج ١٠ سم   د ٢٠ سم

١٩ في الشكل المقابل : إذا كانت م نقطة تقاطع الأعمدة المرسومة من رؤوس المثلث على أضلاعه ،

فإنّ ق (هـ $\hat{\text{ب}}$ جـ) =



أ ق (ب $\hat{\text{أ}}$ د)   ب ق (هـ $\hat{\text{جـ}}$ د)

ج ق (جـ $\hat{\text{أ}}$ د)   د ق (د $\hat{\text{م}}$ هـ)

الوحدة التعليمية
الثامنة

النسبة المئوية – الهندسة والقياس

« الجمال في هندسة أبراج الكويت »

تحتوي أبراج الكويت على كرة ضخمة تُستخدم كخزّان للماء ، ويعتمد تصميمها بالكامل على حسابات المساحة السطحية والحجم .

فكلّما تغيّر طول نصف قطر الكرة ولو قليلًا ، تغيّر الحجم والمساحة السطحية بشكل كبير .

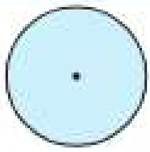
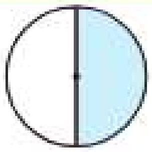
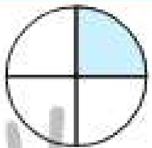
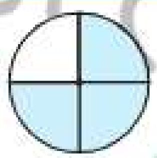
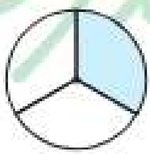
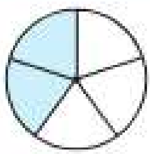
ولهذا السبب ، يحرص المهندسون عند تصميم المعالم على اختيار النسب بدقّة ، لأنّ زيادة بسيطة في الأبعاد قد تسبّب زيادة كبيرة في الحجم والمساحة السطحية وبالتالي زيادة التكلفة .

المجال	معايير المنهج	مؤشر الأداء
العدّ والجبر	تحديد علاقات التناسب في المسائل الرياضية .	التذكّر – التعرّف – الفهم – التمثيل – التعاون – العمل الجماعي – الوسائط – حلّ المشكلات – الاستكشاف والتقصّي – النمذجة – العلاقات – الاستدلال – الاستنتاج – التقويم
الهندسة والقياس	تطبيق الأساليب والأدوات والصيغ الملائمة لتحديد قياسات .	التذكّر – التعرّف – الفهم – الوسائط – الاستكشاف والتقصّي – النمذجة – المقارنة والتمييز – الاستنتاج – حلّ المشكلات – التحليل والتركيب – القوانين – التقويم – الاستدلال – العلاقات
	فهم خواصّ القياس للأشياء والوحدات والأنظمة وعمليات القياس .	

مخطّط تنظيمي للوحدة التعليمية الثامنة

هل أنت مستعدّ ؟

١ أكمِل الجدول التالي :

الشكل	الصورة الكسرية	الصورة العشرية	النسبة المئوية
	$\frac{١}{١}$	١	١٠٠٪
	$\frac{١}{٢}$	٠٫٥	٥٠ ٪
	$\frac{١}{٤}$	٠٫٢٥	٢٥٪
	$\frac{٣}{٤}$	٠٫٧٥	٧٥ ٪
	$\frac{١}{٣}$	٠٫$\overline{٣}$	$٣٣\frac{١}{٣}$٪
	$\frac{٢}{٥}$	٠٫٤	٤٠ ٪

٢ حُلّ التناسب لكلّ ممّا يليّ :

أ) $\frac{٥}{٨} = \frac{س}{١٦}$

$\frac{س}{\cancel{١٦}\,٢} = \frac{٥}{\cancel{٨}\,١}$

$\frac{س}{٢} = \frac{٥}{١}$

∴ س = ٢ × ٥ = ١٠

ب) $\frac{\cancel{١٥}\,١}{س} = \frac{\cancel{١٢٥}\,٥}{٤٠}$

$\frac{١}{س} = \frac{\cancel{٥}\,١}{\cancel{٤٠}\,٨}$

∴ $\frac{١}{س} = \frac{١}{٨}$ ∴ س = ٨

هل أنت مستعدّ ؟

٣ حُلّ المعادلات التالية في ح :

أ) ٤٠ س = ٣٦٠

س = ٣٦٠/٤٠ = ٩

ب) س × ٢٨/١٠٠ = ٧

س = ~~٧~~١ × ١٠٠/~~٢٨~~٤

س = ١٠٠/٤ = ٢٥

ج) ١ + س = ٩/٥

س = ١ ٤/٥ − ١

∴ س = ٤/٥

د) ١ − س = −٧

−س = −٧ − ١

−س = −٨

∴ س = ٨

هـ) ~~٢٠~~٥ = ~~١٦~~٤ × (١ + س)

٥ = ٤ × (١ + س)

٥ = ٤ + ٤س

∴ ٤س = ١ ، س = ١/٤

و) ٣ = ٥ × (١ − س)

٣ = ٥ − ٥س

٥س = ٥ − ٣

٥س = ٢ ، س = ٢/٥

٤ أوجِد قيمة كلّ ممّا يلي :

أ) ٣٠٪ من ٧٠

٣٠/١٠٠ × ٧٠

= ٣ × ٧ = ٢١

ب) ١٥٪ من ١٨٠

١٥/١٠٠ × ١٨٠

= ١٥ × ١٨٠ / ١٠٠ = ٢٧

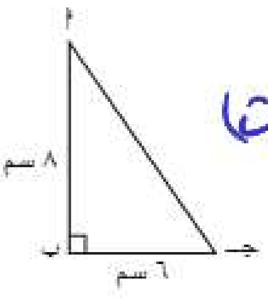
٥ أوجِد ناتج كلّ ممّا يلي :

أ) ٤,٢ × ١٠,٥ = ٤٤,١

ب) ٣,١٤ × ١٠ = ٣١,٤

ج) ١٤ × ٣,٥ = ٤٩

٦ في الشكل المقابِل : أوجِد طول أجـ.

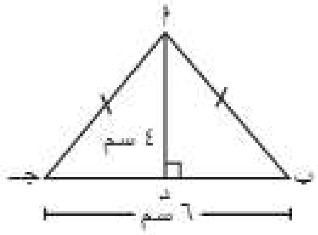


(أجـ)² = (أب)² + (ب جـ)² (فيثاغورث)

(أجـ)² = (٨)² + (٦)² = ٦٤ + ٣٦ = ١٠٠

∴ أجـ = √١٠٠ = ١٠ سم

٧ في الشكل المقابِل ، أوجِد كلًّا ممّا يلي :



(أ) طول $\overline{دب}$ = $\frac{1}{2}$ ب جـ

= $\frac{1}{2}$ × ٦ = ٣ سم

(ب) طول $\overline{أب}$ = $\sqrt{(دب)^2 + (أد)^2}$

= $\sqrt{9 + 16}$ = $\sqrt{25}$ = ٥ سم

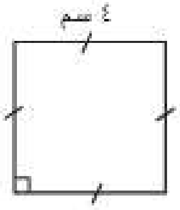
(ج) محيط Δ أب جـ = أب + أجـ + ب جـ

= ٥ + ٥ + ٦ = ١٦

(د) مساحة Δ أب جـ = $\frac{1}{2}$ أد × ب جـ

= $\frac{1}{2}$ × ٤ × ٦ = ١٢ سم^2

٨ في الشكل المقابِل ، أوجِد مساحة المنطقة المربّعة .



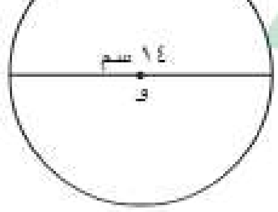
مساحة المربع = ل^2

= (٤)^2

= ١٦ سم^2

٩ في الشكل المقابِل ، أوجِد مساحة المنطقة الدائرية .

(اِعتبِر $\pi = \frac{22}{7}$)



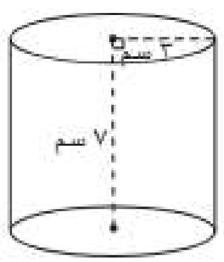
نق = ٧ سم

مساحة الدائرة = ط نق^2

= $\frac{22}{\cancel{7}}$ × $\cancel{7}$ × ٧

= ٢٢ × ٧ = ١٥٤ سم^2

١٠ أوجِد حجم الأسطوانة الدائرية القائمة (اِعتبِر $\pi = \frac{22}{7}$) .



حجم الأسطوانة = مساحة القاعدة × الارتفاع

= ط نق^2 × ع

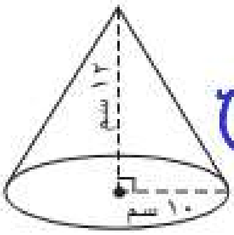
= $\frac{22}{\cancel{7}}$ × ٣ × ٣ × $\cancel{7}$

= ٢٢ × ٩

= ١٩٨ سم^3

هل أنت مستعد؟

١١ **أوجِد حجم المخروط الدائري القائم الذي طول نصف قطر قاعدته ١٠ سم وارتفاعه ١٢ سم (اِعتبِر π = ٣,١٤) .**



حجم المخروط = $\frac{1}{3}$ مساحة القاعدة × الارتفاع

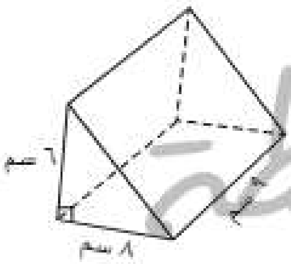
$= \frac{1}{3} \times \pi$ نق^2 × ع

$= \frac{1}{\cancel{3}_{1}} \times ٣,١٤ \times ١٠ \times ١٠ \times \cancel{١٢}^{٤}$

$= ٣١٤ \times ٤$

$= ١٢٥٦$ سم^3

١٢ **في الشكل المقابِل ، أوجِد حجم المنشور القائم :**



حجم المنشور = مساحة القاعدة × الارتفاع

$٩ \times (٦ \times ٨ \times \frac{1}{2})$

$= ٩ \times ٦ \times ٤$

$= ٢١٦$ سم^3

هل أنت مستعد ؟

٨ ـ ١ تقدير النسبة المئوية

Estimate Percent

سوف تتعلّم : تقدير النسبة المئوية .

العبارات والمفردات :

النسبة المئوية Percent تقدير Estimate

حُلّ وناقِش

أراد سالم دفع فاتورة العشاء في أحد المطاعم وقيمتها ٩ دنانير . وكان هذا المطعم يعتمد بدل الخدمة ١٠٪ من قيمة الفاتورة ، أو ١٩٪ بدل الخدمة المتميّزة .

RESTAURANT Kuwait	
HUMMUS	2.000
FALAFEL	2.500
GRILLED CHICKEN	3.500
ICED TEA	1.000
SUBTOTAL	9.000
SERVICE CHARGE	0.900
TOTAL	9.900
Thank you !	

١ قدّر قيمة ما يدفعه سالم في حالة بدل الخدمة ١٠٪

نلاحظ أنّ ٩ دنانير ≈ ١٠ دنانير

بدل الخدمة ≈ ١٠٪ × ١٠

≈ $\frac{١٠}{١٠٠}$ × ١٠ ≈ ١ دينار

قيمة ما يدفعه سالم ≈ ٩ + ١

≈ ١٠ دينار

٢ قدّر ما يدفعه سالم في حالة بدل الخدمة المتميّزة ١٩٪

نلاحظ أنّ ١٩٪ ≈ ٢٠٪

بدل الخدمة ≈ ٢٠٪ × ١٠

≈ $\frac{٢٠}{١٠٠}$ × ١٠ ≈ ٢ دينار

قيمة ما يدفعه سالم ≈ ٩ + ٢

≈ ١١ دينار

٣ ما القيمة الفعلية لبدل الخدمة في الفاتورة ؟ ٩,٩٠٠

٤ ما نسبة بدل الخدمة لهذه الفاتورة ؟ ٠,٩٠٠

عند تقدير النسب المئوية نختار أعدادًا مناسِبة .

معلومة مفيدة :

بدل الخدمة يُعطى مقابِل الخدمة التي تقدّمها المطاعم .
وهو النسبة المئوية المحدَّدة لبدل الخدمة × قيمة الفاتورة .

اِنتبِه

عند التقدير ، إستخدِم الرمز ≈ ويُقرأ « يساوي تقريبًا »

مثال (١):

أ) قدّر ٢٤٪ من ٦٢

الحلّ :

٢٤٪ ≈ ٢٥٪ ، ٦٢ ≈ ٦٠ (قدّر)

٢٥٪ من ٦٠

= ٢٥٪ × ٦٠

= $\frac{\cancel{٢٥}^{١}}{\cancel{١٠٠}_{٤}}$ × ٦٠ = $\frac{١}{٤}$ × $\cancel{٦٠}^{١٥}$ = ١٥

∴ ٢٤٪ من ٦٢ ≈ ١٥

ب) قدّر ٥٣,٥٪ من ٩٩

الحلّ :

٥٣,٥٪ ≈ ٥٤ ، ٩٩ ≈ ١٠٠ (قدّر)

٥٤٪ من ١٠٠

= ٥٤٪ × ١٠٠

= $\frac{٥٤}{\cancel{١٠٠}_{١}}$ × $\cancel{١٠٠}^{١}$ = ٥٤

∴ ٥٣,٥٪ من ٩٩ ≈ ٥٤

أعطِ تقديرًا آخر

دورك الآن (١)

قدّر ٣٢٪ من ٨٩

٣٢٪ ≈ ٣٠٪ ، ٨٩ ≈ ٩٠

∴ ٣٠٪ من ٩٠ ≈ $\frac{٣٠}{١٠٠}$ × ٩٠

≈ ٣ × ٩ = ٢٧

مثال (٢):

إذا كانت مبيعات شركة ما في أحد الأعوام ٣٠٠ ٠٠٠ دينار ، ثمّ انخفضت بنسبة ١٩٪ في العام الذي يليه ، فقدّر قيمة الانخفاض .

الحلّ :

١٩٪ ≈ ٢٠٪ (قدّر)

قيمة الانخفاض ≈ ٢٠٪ من ٣٠٠ ٠٠٠

≈ $\frac{٢٠}{\cancel{١٠٠}_{١}}$ × $\cancel{٣٠٠ ٠٠٠}$ ٣٠٠٠

≈ ٦٠ ٠٠٠

تُقدَّر قيمة الانخفاض بـ ٦٠ ٠٠٠ دينار تقريبًا .

الدرس الأول

مثال (٣):

تلقّى محرّر في صحيفة محلّية رسائل من ٤٠ شخصًا ، إذا كان هذا العدد يمثّل ٨٪ من العدد الكلّي لقرّاء الصحيفة في مدينة ما ، فقدّر عدد القرّاء لهذه الصحيفة .

الحلّ :

نفرض أنّ العدد الكلّي للقرّاء هو س .

٨٪ ≈ ١٠٪ (قدّر)

∴ ١٠٪ من س ≈ ٤٠

١٠٪ × س ≈ ٤٠

$\frac{١٠}{١٠٠}$ × س ≈ ٤٠

$\frac{١٠}{١٠}$ × $\frac{١٠}{١٠}$ × س ≈ $\frac{١٠٠}{١٠}$ × ٤٠

س ≈ ٤٠٠

يُقدّر عدد قرّاء الصحيفة بـ ٤٠٠ شخص تقريبًا .

تذكّر

- ١٠٪ من س تكافئ ١٠٪ × س
- ١٠٪ = $\frac{١٠}{١٠٠}$

دورك الآن (٢)

اشترى خالد معدّات للصيد بسعر ٢٠ دينارًا ، ودفع ١١٪ من سعرها كضريبة مبيعات . قدّر ما دفعه خالد .

١١٪ ≈ ١٠٪ (قدّر)

قيمة الضريبة ≈ ١٠٪ × ٢٠

≈ $\frac{١٠}{١٠٠}$ × ٢٠ ≈ ٢ **دينار**

ما دفعه خالد ≈ ٢٠ + ٢ ≈ ٢٢ **دينار**

عبّر عن فهمك

تمتلك الكاذي حاسوبًا قيمته ٢٥٠ دينارًا ، وهي تأمل أن تبيعه بحيث يكون سعر البيع على الأقلّ ٤٩٪ من قيمته الأصلية . إذا باعت الكاذي حاسوبها بمبلغ ٩٠ دينارًا ، فهل حقّقت ما كانت تصبو إليه ؟ فسّر إجابتك مستخدمًا مفهوم التقدير .

لا ، حيث أنّ ٤٩٪ ≈ ٥٠٪

∴ سعر البيع على الأقل ≈ ٥٠٪ × ٢٥٠

≈ $\frac{٥٠}{١٠٠}$ × ٢٥٠

≈ $\frac{١}{٢}$ × ٢٥٠ ≈ ١٢٥ دينار

تمارين ذاتية :

١ قدّر ٢٩٪ من ٤٢٠٠

٢٩٪ ≈ ٣٠٪

∴ ٣٠٪ × ٤٢٠٠

$\frac{٣٠}{\cancel{١٠٠}}$ × ٤٢~~٠٠~~ = ٣٠ × ٤٢ = ١٢٦٠

٢ قدّر ٣٨٪ من ١٢٠

٣٨٪ ≈ ٤٠٪

∴ ٤٠٪ × ١٢٠

≈ $\frac{٤٠}{١٠٠}$ × ١٢٠ ≈ ٤ × ١٢ ≈ ٤٨

٣ جهاز كهربائي ثمنه ٦٢٠ دينارًا ، وكان عليه خصم ٣٢٪ . قدّر ثمنه بعد الخصم .

٣٢٪ ≈ ٢٠٪

∴ ٢٠٪ × ٦٢٠

$\frac{٢٠}{١٠٠}$ × ٦٢٠ ≈ ٦٢ × ٢ ≈ ١٢٤ دينارًا

∴ قيمة الجهاز بعد الخصم ≈ ٦٢٠ - ١٢٤ ≈ ٤٩٦ دينارًا

٤ أعلن أحد المحلات التجارية عن خصم ١١٪ على إحدى السلع . قدّر قيمة الخصم إذا كان سعر السلعة ٤٩٩ دينارًا .

١١٪ ≈ ١٠٪ ، ٤٩٩ ≈ ٥٠٠

∴ قيمة الخصم ≈ ١٠٪ × ٥٠٠

≈ $\frac{١٠}{١٠٠}$ × ٥٠٠

≈ ١٠ × ٥٠ ≈ ٥٠ دينارًا

٥ أفاد استطلاع للرأي بأنّ ٢٧٪ من متعلمي مدرسة حكومية يمارسون هواية كرة السلّة وعددهم ١١٠ متعلّمين . قدّر عدد متعلّمي هذه المدرسة .

٢٧٪ ≈ ٢٥٪

∴ $\frac{١١٠}{س}$ = ٢٥٪

∴ $\frac{١١٠}{س}$ ≈ $\frac{١}{٤}$ ∴ س ≈ ٤ × ١١٠ ≈ ٤٤٠ متعلمًا

الدرس الأول

٨ ـ ٢ النسبة المئوية للتزايد والنسبة المئوية للتناقص
Percentage Increase and Percentage Decrease

سوف تتعلّم : حلّ مسائل تتضمّن نسبًا مئوية تزايدية ونسبًا مئوية تناقصية .

العبارات والمفردات :

النسبة المئوية للتزايد Percentage Increase النسبة المئوية للتناقص Percentage Decrease

حلّ وناقِش

إشترى صاحب معرض أثاث خزانة ثياب بمبلغ ١١٠ دنانير ، ثمّ باعها بنسبة ربح ٤٠٪ ، كما باع خزانة ثياب تصميمها قديم كانت في المعرض بنسبة خصم ٢٠٪ عن سعرها الأصلي وهو ١٢٠ دينارًا.
ما سعر بيع خزانة الثياب في الحالتَين ؟

• **خزانة سعرها ١١٠ دنانير : نسبة الربح ٤٠٪**

أوجِد ما يلي :

١ مقدار الزيادة :

مقدار الزيادة = ١١٠ × ٤٠٪

= $\frac{٤٠}{١٠٠}$ × ١١٠

= ٤٤

٢ القيمة النهائية للبيع (سعر البيع) :

القيمة النهائية = القيمة الأصلية + مقدار الزيادة

= ١١٠ + ٤٤

= ١٥٤

٣ النسبة المئوية بعد الزيادة :

النسبة المئوية بعد الزيادة = ١٠٠٪ + ٤٠٪

= ١٤٠٪

٤ ما قيمة ١٤٠٪ من ١١٠ دنانير ؟

١٥٤

• **خزانة سعرها ١٢٠ دينارًا : نسبة الخصم ٢٠٪**

أوجِد ما يلي :

١ مقدار النقصان :

مقدار النقصان = ١٢٠ × ٢٠٪

= $\frac{٢٠}{١٠٠}$ × ١٢٠

= ٢٤

٢ القيمة النهائية للبيع (سعر البيع) :

القيمة النهائية = القيمة الأصلية – مقدار النقصان

= ١٢٠ – ٢٤

= ٩٦

٣ النسبة المئوية بعد النقصان :

النسبة المئوية بعد النقصان = ١٠٠٪ – ٢٠٪

= ٨٠٪

٤ ما قيمة ٨٠٪ من ١٢٠ دينارًا ؟

٩٦

ماذا تلاحظ ؟

تذكّر

• القيمة النهائية
= القيمة الأصلية + مقدار الزيادة
• أو القيمة النهائية
= القيمة الأصلية – مقدار النقصان .
• التغيّر إمّا بالزيادة أو بالنقصان .

يمكن حلّ المسائل التي تتضمّن نسبًا مئوية تزايدية باستخدام المعادلة التالية :

القيمة النهائية = القيمة الأصلية × (١٠٠٪ + النسبة المئوية للتزايد) .

كذلك ، يمكن حلّ المسائل التي تتضمّن نسبًا مئوية تناقصية باستخدام المعادلة التالية :

القيمة النهائية = القيمة الأصلية × (١٠٠٪ - النسبة المئوية للتناقص) .

مثال (١):

أوجِد القيمة النهائية إذا كانت القيمة الأصلية ٤٠ والنسبة المئوية للتزايد ٣٠٪ .

الحلّ :

القيمة النهائية = القيمة الأصلية × (١٠٠٪ + النسبة المئوية للتزايد)

= ٤٠ × (١٠٠٪ + ٣٠٪)

= ٤٠ × ١٣٠٪

= $\cancel{٤٠}^{٤} \times \frac{\cancel{١٣٠}^{١٣}}{\cancel{١٠٠}_{\cancel{١٠}\,١}}$ = ٥٢

دورك الآن (١)

أوجِد القيمة النهائية إذا كانت القيمة الأصلية ٢٥٠ والنسبة المئوية للتناقص ٨٠٪ .

القيمة النهائية = القيمة الأصلية × (١٠٠٪ ـ النسبة المئوية للتناقص)

= ٢٥٠ × (١٠٠٪ ـ ٨٠)

= ٢٥٠ × ٢٠٪ = $\cancel{٢٥٠}_{٥٠} \times \frac{١}{\cancel{٥}_{١}}$ = ٥٠

مثال (٢):

تناقصت قيمة إيرادات إحدى شركات الاتّصالات المدرَجة في سوق الأوراق المالية بنسبة ١٠٪ حيث بلغت ٣٦ ٠٠٠ دينار (إيرادات يوم واحد) .

أوجِد القيمة الأصلية للإيرادات ومقدار النقص .

الحلّ :

القيمة النهائية = القيمة الأصلية × (١٠٠٪ - النسبة المئوية للتناقص)

٣٦ ٠٠٠ = القيمة الأصلية × (١٠٠٪ - ١٠٪)

٣٦ ٠٠٠ = القيمة الأصلية × ٩٠٪

$\cancel{٣٦٠٠٠}^{٤٠٠} \times \frac{١٠٠}{\cancel{٩٠}_{١}}$ = القيمة الأصلية × $\frac{\cancel{٩٠}^{١}}{\cancel{١٠٠}_{١}} \times \frac{\cancel{١٠٠}^{١}}{\cancel{٩٠}_{١}}$

∴ القيمة الأصلية = ٤٠٠ × ١٠٠ = ٤٠ ٠٠٠ دينار

مقدار النقص = ٤٠ ٠٠٠ − ٣٦ ٠٠٠ = ٤ ٠٠٠ دينار

دورك الآن (٢)

أوجِد القيمة الأصلية ومقدار الزيادة إذا كانت القيمة النهائية تساوي ٣٢٠ والنسبة المئوية للتزايد تساوي ٦٠٪ .

القيمة النهائية = القيمة الأصلية × (١٠٠٪ + ٦٠٪)

٣٢٠ = القيمة الأصلية × ١٦٠٪

٣٢٠ = القيمة الأصلية × $\frac{١٦٠}{١٠٠}$

٣٢٠ × $\frac{١٠٠}{١٦٠}$ = القيمة الأصلية

∴ القيمة الأصلية = ٢ × ١٠٠ = ٢٠٠

مقدار الزيادة = ٣٢٠ − ٢٠٠ = ١٢٠

عبِّر عن فهمك

اِشترت ريم من إحدى الدول مشتريات بقيمة ١٨٠٠ دينار ، وعند عودتها في المطار ، اِتّجهت ريم إلى قاعة (Tax Free) . حيث استرجعت ١٠٪ من قيمة مشترياتها.

في رأيك ، كم قيمة مشتريات ريم بعد استرجاع ١٠٪ منها ؟

١٨٠٠ × $\frac{٩٠}{١٠٠}$ = ١٨ × ٩٠ = ١٦٢٠ دينار

معلومة مفيدة :

بعض الدول تعفي الزائرين من الضريبة حيث يمكنهم استرجاع نسبة معيَّنة من قيمة مشترياتهم عند مغادرة البلد وتُسمّى Tax Free Shopping .

مثال (٣) :

زادت إحدى الجامعات الخاصّة المتميّزة عدد قبول المتعلّمين إلى ٦٣٠٠ متعلّم ، إذا كان العدد الأصلي للقبول كلّ سنة ٤٥٠٠ متعلّم ، فأوجِد النسبة المئوية للتزايد .

الحلّ :

القيمة النهائية = القيمة الأصلية × (١٠٠٪ + النسبة المئوية للتزايد)

٦٣٠٠ = ٤٥٠٠ × (١ + س)

١ + س = $\frac{\cancel{٦٣٠٠}\ ٧}{\cancel{٤٥٠٠}\ ٥}$

١ + س = $\frac{٧}{٥}$

س = $\frac{٧}{٥}$ − ١ = $\frac{٧}{٥}$ − $\frac{٥}{٥}$ = $\frac{٢}{٥}$

∴ النسبة المئوية للتزايد = $\frac{٢ \times ٢٠}{٥ \times ٢٠}$ = $\frac{٤٠}{١٠٠}$ = ٤٠٪

تذكَّر

١٠٠٪ = ١

اِنتبِه

١ = $\frac{٥}{٥}$

دورك الآن (٣)

أوجِد النسبة المئوية للتناقص إذا كانت القيمة النهائية ٢٠٠ والقيمة الأصلية ٥٠٠ .

القيمة النهائية = القيمة الأصلية × (١٠٠٪ - النسبة المئوية للتناقص)

٢٠٠ = ٥٠٠ × (١ - س)

٢٠٠ = ٥٠٠ - ٥٠٠ س ، ٥٠٠ س = ٥٠٠ - ٢٠٠

∴ ٥٠٠ س = ٣٠٠ ∴ س = $\frac{٣}{٥}$ ، ∴ النسبة المئوية للتناقص = ٦٠٪

تمارين ذاتية :

١ أوجِد التكلفة الإجمالية لسلعة كان سعرها ٣٠٠ دينار ، ثمّ زادت بنسبة ٢٠٪ .

التكلفة الإجمالية لسلعة = ٣٠٠ × (١٠٠٪ + ٢٠٪)

= ٣٠٠ × ١٢٠٪

= ٣٠٠ × $\frac{١٢٠}{١٠٠}$

= ٣ × ١٢٠ = ٣٦٠ دينار

٢ أوجِد القيمة الأصلية إذا كانت : القيمة النهائية تساوي ٥٠٠ ،
والنسبة المئوية للتناقص تساوي ٧٥٪ .

القيمة النهائية = القيمة الأصلية × (١٠٠٪ - النسبة المئوية للتناقص)

٥٠٠ = س × (١٠٠٪ - ٧٥٪)

٥٠٠ = س × ٢٥٪

٥٠٠ = س × $\frac{١}{٤}$

∴ س = ٤ × ٥٠٠ = ٢٠٠٠

٣ تزايدت إيرادات إحدى المؤسّسات التجارية في أحد الشهور بنسبة ٣٠٪ عن الشهر السابق حيث بلغت ١٣ ٠٠٠ دينار ، أحسب إيرادات الشهر السابق .

١٣٠٠٠ = إيرادات الشهر السابق × (١٠٠٪ + ٣٠٪)

١٣٠٠٠ = س × ١٣٠٪

١٣٠٠٠ = س × $\frac{١٣٠}{١٠٠}$

∴ س = ١٣٠٠٠ × $\frac{١٠٠}{١٣٠}$

س = ١٠٠٠٠ دينار

الدرس الثاني

٤ يعمل خالد كمحاسب في متجر ويحصل على خصم ٣٠٪ على مشترَياته منه .
إذا كان سعر البيع لإحدى السلع ٩٠ دينارًا ، فكم سيدفع خالد بعد الخصم ؟

القيمة النهائية = القيمة الأصلية × (١٠٠٪ − ٣٠٪)

س = ٩٠ × ٧٠٪

س = ٩٠ × $\frac{٧٠}{١٠٠}$

س = ٩ × ٧ = ٦٣ دينار

٥ إشترت منى أجهزة كهربائية بقمية ٢٤٠٠ دينار ، حيث حصلت على خصم ٢٠٪ .
أوجِد السعر الأصلي للأجهزة ، ثمَّ أوجِد مقدار الخصم .

٢٤٠٠ = السعر الأصلي × (١٠٠٪ − ٢٠٪)

٢٤٠٠ = س × ٨٠٪

٢٤٠٠ = س × $\frac{٨٠}{١٠٠}$

∴ س = ~~٢٤٠٠~~ ٣٠ × $\frac{١٠٠}{~~٨٠~~ ١}$

= ٣٠ × ١٠٠ = ٣٠٠٠ دينار

٦ أوجِد النسبة المئوية للتزايد إذا كانت القيمة النهائية ٢١٠ دنانير والقيمة الأصلية ١٤٠ دينارًا .

٢١٠ = ١٤٠ × (١٠٠٪ + النسبة المئوية للتزايد)

٢١٠ = ١٤٠ × ١٠٠٪ + ١٤٠ س

٢١٠ = ١٤٠ + ١٤٠ س

١٤٠ س = ٢١٠ − ١٤٠ = ٧٠

∴ س = $\frac{٧٠}{١٤٠}$ = $\frac{١}{٢}$

∴ النسبة المئوية للتزايد = $\frac{١}{٢}$ × ١٠٠٪ = ٥٠٪

الدرس الثاني

مهارات تفكير عليا :

٧ باع عبد الرحمن لأحمد درّاجة هوائية بسعر ٢٤ دينارًا وخوذة بسعر ٦ دنانير . تمثّل التكلفة الإجمالية التي دفعها أحمد ١٢٠٪ ممّا أنفقه عبد الرحمن في الأصل لشراء الدرّاجة والخوذة . فكم دفع عبد الرحمن في الأصل ؟ وما الربح الذي حقّقه ببيعه الدرّاجة والخوذة ؟

السعر الذي دفعه عبد الرحمن في الأصل

= السعر الذي دفعه أحمد × (١٠٠٪ − ٢٠٪)

∴ س = (٢٤ + ٦) × ٨٠٪

س = ٣٠ × ٨/١٠

∴ س = ٣ × ٨ = ٢٤ دينار

∴ دفع عبد الرحمن في الأصل ٢٤ دينار

الربح الذي حققه = ٣٠ − ٢٤ = ٦ دنانير.

٨ - ٣ تطبيقات على تغيّر النسبة المئوية
Application of Percent Change

سوف تتعلّم : اِستخدام النسبة المئوية للتزايد والتناقص وتطبيقها .

حَلّ وناقِش

أعلن بنك الكويت المركزي في إحدى السنوات أنّ قيمة الاحتياطي النقدي كان في بداية السنة المالية ١٠ مليارات دينار .
فأوجِد قيمة الاحتياطي الجديد في كلٍّ من الحالات التالية :

١ اِرتفاع بنسبة ١٠٪ ، ثمّ انخفاض بنسبة ١٠٪ .

القيمة النهائية للاحتياطي النقدي بعد ارتفاع ١٠٪

= القيمة الأصلية × (١٠٠٪ + النسبة المئوية للتزايد)
= ١٠ × (١٠٠٪ + ١٠٪)
= ١٠ × ١١٠٪
= ١٠ × $\frac{١١٠}{١٠٠}$ = ١١ مليار دينار

القيمة النهائية للاحتياطي النقدي بعد انخفاض ١٠٪

= القيمة الأصلية × (١٠٠٪ − النسبة المئوية للتناقص)
= ١١ × (١٠٠٪ − ١٠٪)
= ١١ × ٩٠٪
= ١١ × $\frac{٩٠}{١٠٠}$ = ٩٫٩ مليار دينار

ماذا تلاحظ ؟

هل عادت قيمة الاحتياطي النقدي إلى قيمته السابقة ؟

٢ اِنخفاض بنسبة ١٠٪ ، ثمّ ارتفاع بنسبة ١٠٪ .

= ١٠ × (١٠٠٪ − ١٠٪)
= ١٠ × ٩٠٪
= ١٠ × $\frac{٩٠}{١٠٠}$ = ٩ مليار دينار
ثم ارتفاع بنسبة ١٠٪ ← = ٩ × (١٠٠٪ + ١٠٪)
= ٩ × ١١٠٪ = ٩٫٩ مليار دينار

• قارِن بين القيمة النهائية في كلّ من ١ ، ٢ متساويه

تذكّر

تغيّر النسبة المئوية إمّا بالزيادة أو بالنقصان .

معلومة مفيدة :

بنك الكويت المركزي هو الجهة المسؤولة عن المحافظة على استقرار الدينار الكويتي وقيمته الشرائية ، وهو يقوم بذلك عبر التحكم في السياسة النقدية ، كما يُعدّ من أوائل البنوك المركزية الخليجية التي استخدمت نظام الرقابة المصرفية المبنية على المخاطر ، وهو نظام حديث يساعد على كشف المشكلات قبل حدوثها ويُسمّى النظام المالي .

مثال (١):

رفعت إحدى شركات الاتصال أسعار أجهزتها بنسبة ٢٠٪ ، ثمّ منحت هذه الشركة موظّفيها خصمًا يبلغ ١٠٪ . فكم ستدفع إحدى الموظّفات ثمن جهاز كان سعره ٣٠٠ دينار قبل الزيادة ؟

الحلّ :

ثمن الجهاز بعد الزيادة = القيمة الأصلية × (١٠٠٪ + النسبة المئوية للتزايد)

= ٣٠٠ × (١٠٠٪ + ٢٠٪)

= ٣٠٠ × ١٢٠٪

= ~~٣٠٠~~ × $\frac{١٢٠}{\cancel{١٠٠}}$ = ٣٦٠ دينارًا

اِنتبِه

ميِّز بين القيمة الأصلية في الحالتين .

القيمة النهائية لثمن الجهاز = القيمة الأصلية × (١٠٠٪ − النسبة المئوية للتناقص)

= ٣٦٠ × (١٠٠٪ − ١٠٪)

= ٣٦٠ × ٩٠٪

= ~~٣٦٠~~ × $\frac{\cancel{٩٠}}{\cancel{١٠٠}}$ = ٣٢٤ دينارًا

عبِّر عن فهمك (١)

هل يمكن حلّ « **مثال** (١) » بطريقة أخرى ؟ وضِّح إجابتك .

نعم ، حيث نجد مقدار نسبة التناقص أولاً ثم نسبة التزايد .

دورك الآن (١)

يريد تامر شراء جهاز للمشي (Treadmill) سعره الأصلي ٣٠٠ دينار ، وخلال فترة الخصومات كانت نسبة الخصم على الجهاز ٣٠٪ ، وضريبة مبيعات نسبتها ١٠٪ ، كم سيدفع تامر لشراء الجهاز ؟

سعر نهائي = ٣٠٠ × (١٠٠٪ − ٣٠٪) = ٣٠٠ × ٧٠٪ = ٢١٠ دينار

السعر النهائي بعد ضريبة المبيعات = ٢١٠ × (١٠٠٪ + ١٠٪)

= ٢١٠ × ١١٠٪ = ٢١ × ١١ = ٢٣١ دينار

دورك الآن (٢)

يهوى جاسم رياضة الغوص في البحر ، إذا كان استئجار لوازم الغطس في اليوم الواحد يكلّف ١٥ دينارًا يُضاف إليها نظير الخدمة ، فأوجِد تكلفة الاستئجار في حالة خصم ٢٠٪ بعد إضافة ٥ دنانير نظير الخدمة .

تكلفة الاستئجار بعد إضافة نظير الخدمة = ١٥ + ٥ = ٢٠ دينار .

تكلفة الاستئجار بعد الخصم = ٢٠ × (١٠٠٪ − ٢٠٪) = ٢٠ × ٨٠٪

= ٢ × ٨ = ١٦ دينار

مثال (٢):

اِنخفضت مبيعات شركة موادّ بناء بنسبة ٢٠٪ فأصبحت ٤٠٠٠ دينار .

(أ) أوجِد القيمة الأصلية للمبيعات قبل الانخفاض .

(ب) ما النسبة المئوية للتزايد التي تُعيد المبيعات إلى قيمتها الأصلية قبل الانخفاض ؟

الحلّ :

(أ) القيمة النهائية = القيمة الأصلية × (١٠٠٪ - النسبة المئوية للتناقص)

٤٠٠٠ = القيمة الأصلية × (١٠٠٪ - ٢٠٪)

٤٠٠٠ = القيمة الأصلية × ٨٠ ٪

٤٠٠٠ × $\frac{١٠٠}{٨٠}$ = القيمة الأصلية × $\frac{٨٠}{١٠٠}$ × $\frac{١٠٠}{٨٠}$

∴ القيمة الأصلية = ٤٠٠٠ × $\frac{١٠٠}{٨٠}$ = ٥٠٠٠ دينار

(ب) القيمة النهائية = القيمة الأصلية × (١٠٠٪ + النسبة المئوية للتزايد)

٥٠٠٠ = ٤٠٠٠ × (١٠٠٪ + س)

٥٠٠٠ = ٤٠٠٠ × (١ + س)

١ + س = $\frac{٥٠٠٠}{٤٠٠٠}$

١ + س = $\frac{٥}{٤}$

س = $\frac{٥}{٤}$ - ١ = $\frac{١}{٤}$ × ١٠٠٪ = ٢٥٪

∴ النسبة المئوية للتزايد = ٢٥٪

لاحِظ أنّ

دورك الآن (٣)

إذا زادت نفقات شركة للطيران بنسبة ١٠٠٪ عن الشهر السابق لتصل إلى ٨٠٠٠ دينار .

(أ) أوجِد نفقات الشركة قبل الزيادة .

٨٠٠٠ = القيمة الأصلية × (١٠٠٪ + ١٠٠٪)

٨٠٠٠ = القيمة الأصلية × ٢٠٠٪

القيمة الأصلية = ٨٠٠٠ × ٢ = ١٦٠٠٠ دينار

∴ نفقات الشركة قبل الزيادة هي ١٦٠٠٠ دينار .

(ب) ما النسبة المئوية للتناقص التي تجعل نفقات الشركة تعود إلى مستواها في الشهر الماضي ؟

٨٠٠٠ = ١٦٠٠٠ × (١٠٠٪ - س)

١ = ٢ (١ - س) ∴ س = ٥٠ ٪

عبِّر عن فهمك (٢)

إذا انخفض سعر سهم ٥٠٪ عن سعره في العام الماضي ، في رأيك ، ما النسبة المئوية للزيادة التي تُعيده إلى سعره الأصلي ؟ وضِّح إجابتك .

النسبة المئوية للزيادة ١٠٠٪

تمارين ذاتية :

١ تداول أحمد في سوق الكويت للأوراق المالية حيث اشترى أسهمًا بمبلغ ٤٠٠٠٠ دينار وكانت أسعار الأسهم تتأرجح بين هبوط وارتفاع . أوجِد سعر بيع أسهم أحمد عند ارتفاع الأسهم ٢٥٪ ، ثمّ انخفاض ١٠٪ ؟

عند ارتفاع الأسهم : س = ٤٠ ٠٠٠ × (١٠٠٪ + ٢٥٪)

س = ٤٠ ٠٠٠ × ١٢٥٪

س = ٤٠ ٠٠٠ × $\frac{١٢٥}{١٠٠}$ = ٥٠ ٠٠٠ دينار

عند انخفاض الأسهم : س = ٥٠ ٠٠٠ × (١٠٠٪ − ١٠٪)

= ٥٠ ٠٠٠ × ٩٠٪ = ٤٥ ٠٠٠ دينار

٢ يعمل ناصر وسيطًا عقاريًا في شركة عقارات في الكويت ، إذا طلبت منه الشركة بيع عقار (منزل) سعره الأصلي ٣٠٠ ٠٠٠ دينار بنسبة زيادة ٣٠٪ عن سعره الأصلي ، حيث يتقاضى ناصر ٥٪ من سعر البيع ، فما هو المبلغ الذي تحصل عليه الشركة من بيع العقار ؟

سعر البيع = ٣٠٠ ٠٠٠ × (١٠٠٪ + ٣٠٪)

= ٣٠٠ ٠٠٠ × ١٣٠٪

= ٣٠٠ ٠٠٠ × $\frac{١٣٠}{١٠٠}$ = ٣٩٠ ٠٠٠ دينار

المبلغ الذي تحصل عليه الشركة = ٣٩٠ ٠٠٠ × (١٠٠٪ − ٥٪)

∴ س = ٣٩٠ ٠٠٠ × ٩٥٪ = ٣٧٠ ٥٠٠

٣ بلغ سعر التذكرة الواحدة لحضور أمسية شعرية ٣٠ دينارًا ، ويُضاف إليها نظير الخدمة .
أوجِد سعر التذكرة في كلّ من الحالات التالية :

(أ) خصم ٢٠٪ ، ثمّ إضافة ١٠٪ نظير الخدمة . سعر التذكرة = ٣٠ × (١٠٠٪ − ٢٠٪)

سعر التذكرة = ٣٠ × ٨٠٪ = ٢٤ دينار ، سعر التذكرة النهائي = ٢٤ × ١١٠٪ = ٢٦٫٤ دينار

(ب) خصم ٢٠٪ بعد إضافة ١٠ دنانير نظير الخدمة .

سعر التذكرة بعد إضافة الخدمة = ٣٠ + ١٠ = ٤٠ دينار

السعر النهائي بعد الخصم = ٤٠ × (١٠٠٪ − ٢٠٪) = ٤٠ × ٨٠٪ = ٣٢ دينار

٤ إذا انخفضت نفقات فهد الشهرية ٦٠٪ عن الشهر السابق ، والتي كانت ٥٠٠ دينار ، أوجِد ما يلي :

(أ) نفقات فهد بعد الانخفاض .

٥٠٠ = القيمة الأصلية × (١٠٠٪ − ٦٠٪)

٥٠٠ = القيمة الأصلية × ٤٠٪

٥٠٠ = القيمة الأصلية × $\frac{٢}{٥}$

∴ القيمة الأصلية = ٥٠٠ × $\frac{٥}{٢}$ = ١٢٥٠ دينار

(ب) النسبة المئوية للتزايد التي تجعل نفقات فهد تعود إلى مستواها في الشهر السابق .

= × (١٠٠٪ + النسبة المئوية للزيادة)

$\frac{١٢٥٠}{٥٠٠}$ = ١ + س

∴ $\frac{٥}{٢}$ = ١ + س ∴ س = $\frac{٥}{٢}$ − ١ = ١ $\frac{١}{٢}$

∴ النسبة المئوية للتزايد = ١ $\frac{١}{٢}$ × ١٠٠٪ = ١٥٠٪

مهارات تفكير عليا :

اِختر الإجابة الصحيحة .

٥ إذا ارتفع سعر جرام الذهب بنسبة ٢٥٪ ، ثمّ انخفض بنسبة ٢٠٪ ،
فإنّ السعر النهائي يكون :

(أ) أقلّ بمقدار ٥٪ من السعر الأصلي .

(ب) أكثر بمقدار ٥٪ من السعر الأصلي .

(ج) السعر الأصلي نفسه .

(د) ليس أيًّا ممّا سبق .

الدرس الثالث

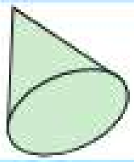
٨ ـ ٤ المساحة السطحية للمخروط الدائري القائم
Surface Area of a Right Circular Cone

سوف تتعلَّم : إيجاد المساحة السطحية للمخروط الدائري القائم .

العبارات والمفردات :

مخروط دائري قائم	Right Circular Cone	مساحة سطحية	Surface Area
راسم	Slant Height	مساحة جانبية	Lateral Area

المخروط الدائري القائم : مجسَّم قاعدته دائرية الشكل وله رأس واحد ، وارتفاعه هو طول العمود المرسوم من رأسه على قاعدته عند مركزها .



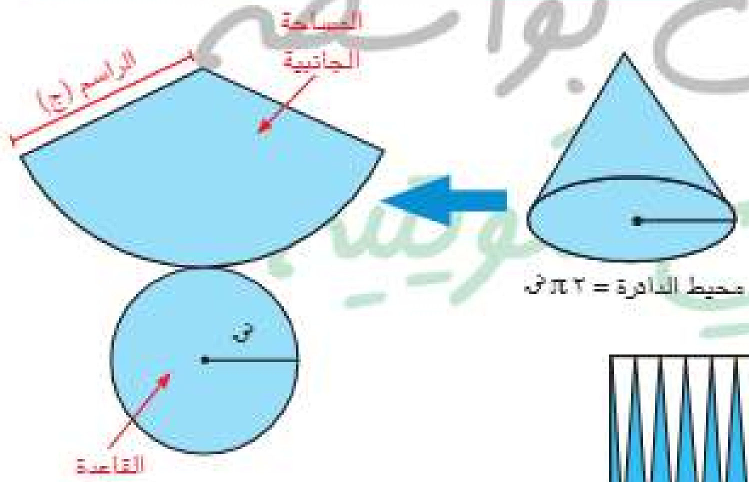
اِستكشِف

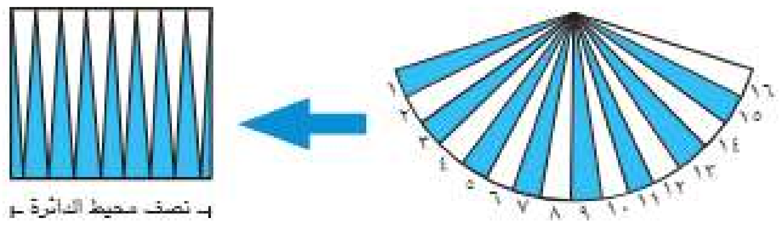
عند فكّ شبكة المخروط ، نحصل على منطقتَين كما هو موضَّح في الشكل المقابِل .

ولقد تعلَّمت سابقًا أنّ مساحة الدائرة = π نق^{2}

فما هي المساحة الجانبية للمخروط ؟

لو قمنا بتقسيم المنطقة إلى أجزاء متطابقة ، ثمّ أعدنا ترتيبها كما هو موضَّح في الشكل التالي :





نلاحظ أنّ كلّما زاد عدد الأجزاء المتطابقة ، اِقترب الشكل من مستطيل عرضه هو الراسم .

إذًا ، المساحة الجانبية للمخروط الدائري القائم

= مساحة المنطقة المستطيلة

= الطول × العرض

= $\frac{1}{2}$ × محيط الدائرة × طول الراسم

= $\frac{1}{2}$ × ٢ π نق × ج (حيث ج هو طول الراسم)

= π نق × ج

لاحِظ أنّ

الراسم : هو القطعة المستقيمة الواصلة من رأس المخروط إلى أيّ نقطة على الدائرة .

ومنه المساحة السطحية للمخروط الدائري

= المساحة الجانبية + مساحة الدائرة

= π نق × ج + π نق^{٢}

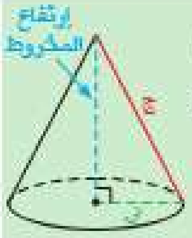
= π نق (ج + نق)

المساحة الجانبية للمخروط الدائري القائم = π نق × ج (حيث ج هو طول الراسم)

المساحة السطحية للمخروط الدائري القائم = المساحة الجانبية + مساحة القاعدة

= π نق × ج + π نق^{٢}

= π نق (ج + نق)

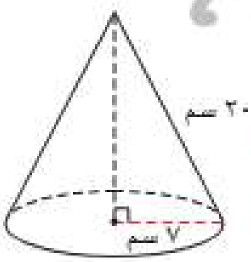


ملاحظة :

لاحِظ أنّ : في المخروط الدائري القائم أيّ راسم فيه هو وتر لمثلّث قائم الزاوية وضلعَي القائمة هما نصف قطر قاعدة المخروط وارتفاعه .

مثال (١) :

في الشكل المقابِل ، مخروط دائري قائم (اعتبِر π = $\frac{٢٢}{٧}$) .



أوجِد :

(أ) مساحته الجانبية .

(ب) مساحته السطحية .

الحلّ :

(أ) المساحة الجانبية = π نق × ج

= $\frac{٢٢}{\cancel{٧}_{١}}$ × $\cancel{٧}^{١}$ × ٢٠

= ٤٤٠ سم^{٢}

(ب) المساحة السطحية للمخروط الدائري القائم = المساحة الجانبية + مساحة القاعدة

= ٤٤٠ + π نق^{٢}

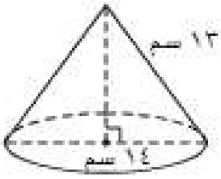
= ٤٤٠ + $\frac{٢٢}{\cancel{٧}_{١}}$ × $\cancel{٧}^{١}$ × ٧

= ٤٤٠ + ١٥٤

= ٥٩٤ سم^{٢}

دورك الآن (١)

أوجِد المساحة السطحية للمخروط الدائري القائم في الشكل المقابِل (اِعتبِر $\pi = \frac{22}{7}$) .



نق = $\frac{1}{2} \times ١٤ = ٧$

المساحة السطحية للمخروط الدائري القائم = π نق (ج + نق)

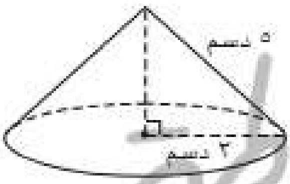
= $\frac{22}{7} \times ٧ (١٣ + ٧)$

= ٢٢×٢٠

= ٤٤٠ سم²

دورك الآن (٢)

أوجِد المساحة السطحية للمخروط الدائري القائم في الشكل المقابِل (اِعتبِر π = ٣,١٤) .



المساحة السطحية للمخروط = π نق × (ل + نق)

= ٣,١٤ × ٢ × (٥ + ٢)

= ٣,١٤ × ٢ × ٧

= ٤٣,٩٦ دسم²

عبِّر عن فهمك

يقول أحمد إنَّ كلَّ المخاريط التي محيط قاعدتها يساوي ٨ π سم تكون مساحتها السطحية متساوية . هل أحمد على صواب ؟ فسِّر إجابتك .

لا ، المخاريط القائمة

مثال (٢):

مخروط دائري قائم طول قطر قاعدته ٦ دسم وارتفاعه ٤ دسم .

أوجِد ما يلي :

(أ) طول الراسم (ج) :

∵ نق = ٣ دسم

∴ ج² = (٣)² + (٤)² نظرية فيثاغورث

ج² = ٩ + ١٦ = ٢٥

ج = $\sqrt{٢٥}$ = ٥ دسم

(ب) المساحة السطحية للمخروط الدائري القائم : (بدلالة π)

المساحة السطحية للمخروط الدائري القائم

= π نق (ج + نق)

= π × ٣ × (٥ + ٣)

= π × ٣ × ٨

= ٢٤ π دسم²

مثال (٣):

إشترت فتون مثلّجًا على شكل مخروط طول قطر قاعدته ٤ سم وطول راسمه ١٠ سم . أحسب المساحة السطحية للمخروط .
(اعتبِر π = ٣,١٤)

الحلّ :

المساحة السطحية للمخروط الدائري القائم

= π نق (ج + نق)

= ٣,١٤ × ٢ × (١٠ + ٢)

= ٣,١٤ × ٢ × ١٢

= ٣,١٤ × ٢٤

= ٧٥,٣٦ سم^2

دورك الآن (٣)

أرادت شركة ورقيات تصنيع قبّعات للأطفال على شكل مخروط دائري قائم طول نصف قطر قاعدته ٧ سم وطول الراسم ٣٠ سم . أحسب المساحة السطحية للقبّعة .
(اعتبِر $\pi = \frac{22}{7}$)

م = π نق (ج + نق)

= $\frac{22}{7}$ × ٧ × (٣٠ + ٧)

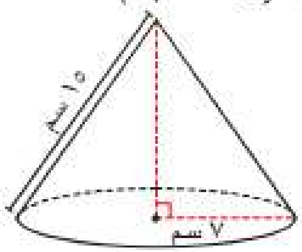
= ٢٢ × ٣٧ = ٨١٤ سم^2

اِنتبِه

القبّعة على شكل مخروط بدون قاعدة .

تمارين ذاتية :

١ أوجِد المساحة السطحية للمخروط الدائري القائم في الشكل المقابِل . (اِعتبِر $\pi = \frac{22}{7}$)

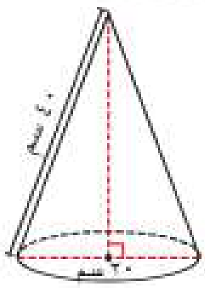


م = π نق (ج + نق)

= $\frac{22}{7}$ × ٧ (١٥ + ٧)

= ٢٢ × ٢٢ = ٤٨٤ سم^2

٢ أوجِد المساحة السطحية للمخروط الدائري القائم في الشكل المقابِل .
(اِعتبِر π = ٣,١٤)

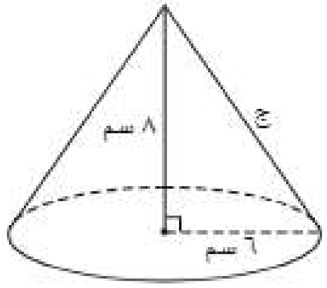


م = π نق (ج + نق)

= ٣,١٤ × ١٠ × (٤٠ + ١٠)

= ٣,١٤ × ١٠ × ٥٠ = ١٥٧٠ سم^2

٣ مخروط دائري قائم طول نصف قطر قاعدته ٦ سم وارتفاعه ٨ سم ، أوجِد ما يلي :



(أ) طول الراسم (ج) :

(ع)² = (٨)² + (٦)² (فيثاغورث)

= ٦٤ + ٣٦

= ١٠٠

∴ ع = √١٠٠ = ١٠ سم

(ب) المساحة السطحية للمخروط : (بدلالة π)

م = π نق × (ع + نق)

= π × ٦ × (١٠ + ٦)

= π × ٦ × ١٦

= π × ٩٦

٤ أوجِد المساحة السطحية لمخروط دائري قائم ، طول نصف قطر قاعدته ٧ سم وطول الراسم ٩ سم . (اِعتبِر π = $\frac{٢٢}{٧}$)

م = π نق (ع + نق)

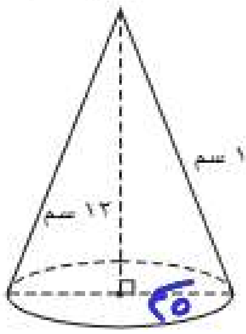
= $\frac{٢٢}{٧}$ × ٧ × (٩ + ٧)

= ٢٢ × ١٦

= ٣٥٢ سم²

مهارات تفكير عليا :

٥ في الشكل المقابِل ، المساحة السطحية للمخروط الدائري القائم مقرَّبة إلى أقرب عدد كلّي هي :
(اِعتبِر π = ٣,١٤) .



(أ) ٢٦٧ سم²

(ب) ٢٨٣ سم²

(ج) ٦٩١ سم²

(د) ٧٢٢ سم²

٨ ـ ٥ حجم الهرم القائم
Volume of The Pyramid

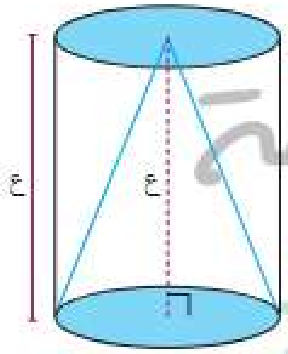
سوف تتعلَّم : إيجاد حجم الهرم القائم .

العبارات والمفردات :

هرم قائم	Right Pyramid	حجم	Volume

اِستكشِف

سبق وأن تعلّمت كيفية حساب حجم المخروط القائم من حساب حجم الأسطوانة الدائرية القائمة المشترَكة معه في القاعدة والارتفاع .



كما سبق وأن تعلّمت كيفية حساب حجم المنشور القائم

فهل تستطيع حساب حجم الهرم القائم بدلالة حجم المنشور القائم الذي له مساحة القاعدة نفسها والارتفاع نفسه كما فعلت سابقًا ؟

ليكن لدينا هرم قائم ومنشور قائم لهما الارتفاع نفسه والقاعدة نفسها.

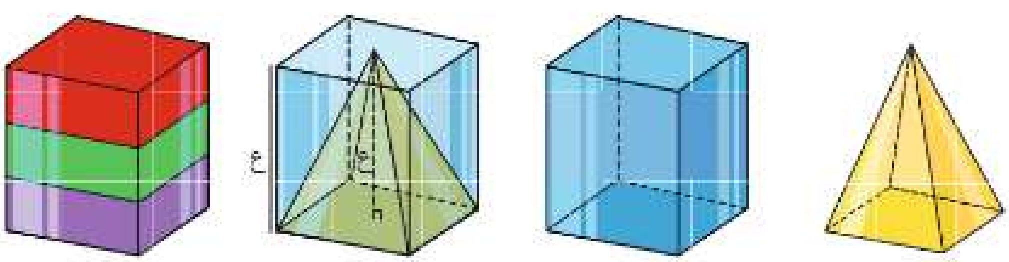
خطوات عمل التجربة :

١ إملأ الهرم (بالرمل البنفسجي مثلاً) تمامًا حتّى الحافّة .

٢ أُسكب الرمل في المنشور .

٣ كرِّر هذه العملية واملأ الهرم حتّى الحافّة بلون آخر (الأخضر مثلاً) ، ثمّ اسكبه داخل المنشور .

٤ كرِّر العملية حتّى يمتلئ المنشور .



ماذا تلاحظ ؟

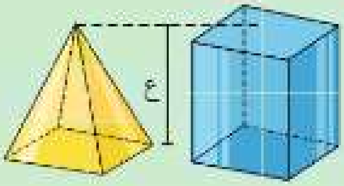
بعد ٣ مرّات من ملء الهرم وسكبه ، ستجد أنّ المنشور امتلأ تمامًا .

إذًا نلاحظ أنّ : حجم الهرم هو ثلث حجم المنشور المشترَك معه بالقاعدة والارتفاع .

حجم الهرم القائم = $\frac{1}{3}$ × حجم المنشور القائم المشترَك معه في القاعدة والارتفاع

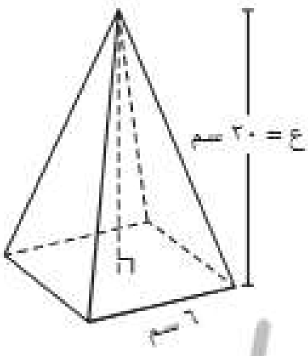
حجم الهرم القائم = $\frac{1}{3}$ × مساحة القاعدة × الارتفاع

ح = $\frac{1}{3}$ × م × ع



مثال (١):

أوجِد حجم الهرم القائم المنتظم الذي قاعدته على شكل مربع طول ضلعه ٦ سم وارتفاعه ٢٠ سم .



الحلّ :

حجم الهرم المنتظم = $\frac{1}{3}$ × مساحة القاعدة × الارتفاع

= $\frac{1}{3}$ × (٦)^{٢} × ٢٠

= $\frac{1}{\cancel{3}_{1}}$ × $\cancel{6}^{2}$ × ٦ × ٢٠

= ٢٤٠ سم^{٣}

∴ حجم الهرم = ٢٤٠ سم^{٣}

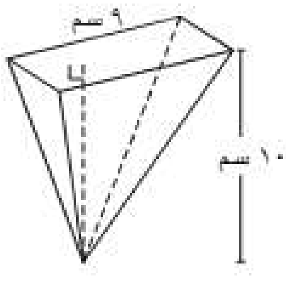
دورك الآن (١)

أوجِد حجم الهرم في كلّ شكل ممّا يلي :

انتبِه

مَيِّز بين ارتفاع الهرم وارتفاع قاعدة الهرم (المثلث)

أ) هرم رباعي قائم منتظم



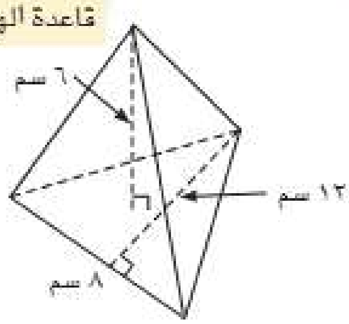
حجم الهرم = $\frac{1}{3}$ × م × ع

= $\frac{1}{3}$ × (٩ × ٩) × ١٠

= $\frac{1}{3}$ × ٨١ × ١٠

= ٢٧٠ سم^{٣}

ب) هرم ثلاثي قائم



حجم الهرم = $\frac{1}{3}$ × م × ع الهرم

= $\frac{1}{3}$ × ($\frac{1}{2}$ × ق × ع المثلث) × ع الهرم

= $\frac{1}{3}$ × ($\frac{1}{2}$ × ٨ × ١٢) × ٦

= ٩٦ سم^{٣}

عبِّر عن فهمك

أوجد كلٌّ من حمد ونوّاف حجم الهرم القائم الذي له الارتفاع والقاعدة نفسهما لمنشور قائم حجمه ٢٧ $م^٣$. فأيّهما على صواب ؟ فسِّر إجابتك .

حمد على صواب ، حيث أن حجم الهرم = $\frac{١}{٣}$ حجم المنشور = $\frac{١}{٣} \times ٢٧ = ٩$ $م^٣$

مثال (٢):

يقوم مصنع أثاث بصنع طبق تقديم على شكل هرم رباعي قائم منتظم ، حجم طبق التقديم ٤٠٠ $سم^٣$ وارتفاعه ٢٠ سم . أوجِد مساحة قاعدة الطبق .

الحلّ :

حجم الهرم المنتظم = $\frac{١}{٣}$ × م × ع

٤٠٠ = $\frac{١}{٣}$ × م × ٢٠

٣ × ٤٠٠ = $\cancel{٣}^{١} \times \frac{١}{\cancel{٣}} \times$ م × ٢٠

$\frac{١}{\cancel{٢٠}} \times \cancel{١٢٠٠}^{٦٠} = \frac{١}{\cancel{٢٠}} \times \cancel{٢٠}^{١}$ م

م = ٦٠

∴ مساحة قاعدة الطبق = ٦٠ $سم^٢$

دورك الآن (٢)

تصنع مها علبًا لتعبئة القرقيعان ، شكل العلبة هرم قائم منتظم ، إذا كان حجم العلبة ٤٤ $سم^٣$ ، ومساحة قاعدتها ١٢ $سم^٢$ ، فما ارتفاع هذه العلبة ؟

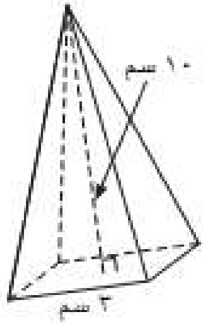
ح = $\frac{١}{٣}$ × م × ع

٤٤ = $\frac{١}{٣}$ × ١٢ × ع

٤٤ = ٤ ع

∴ ع = $\frac{٤٤}{٤}$ = ١١ سم

تمارين ذاتية :

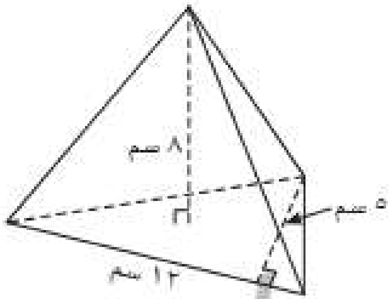


١ هرم قائم منتظم قاعدته مربّعة الشكل طول ضلعها ٣ سم وارتفاع الهرم ١٠ سم . أوجِد حجم الهرم .

حجم = $\frac{١}{٣}$ × م × ع

= $\frac{١}{٣}$ × ٣ × ٣ × ١٠

= ٣٠ سم³



٢ هرم قائم قاعدته مثلّثة الشكل ، طولها ١٢ سم ، وارتفاعها ٥ سم ، وارتفاع الهرم ٨ سم . أوجِد حجم الهرم .

ح = $\frac{١}{٣}$ × م × ع

= $\frac{١}{٣}$ × $\frac{١}{٢}$ × $\cancel{١٢}$ × ٥ × ٨

= ٢ × ٥ × ٨ = ٨٠ سم³

٣ هرم قائم منتظم مساحة قاعدته ١٥ م² ، إذا كان حجمه ٥٥ م³ ، فما ارتفاع هذا الهرم ؟

حجم = $\frac{١}{٣}$ × م × ع

٥٥ = $\frac{١}{٣}$ × $\cancel{١٥}$ × ع

٥٥ = ٥ع ∴ ع = $\frac{٥٥}{٥}$ = ١١ م

٤ هرم رباعي قائم منتظم حجمه ٣٠٠ سم³ ، إذا كان ارتفاع الهرم ٩ سم ، فما طول ضلع قاعدة الهرم ؟

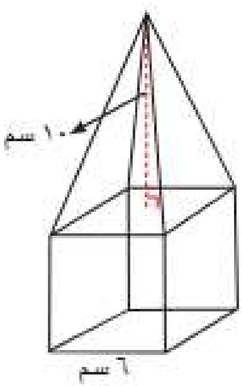
حجم = $\frac{١}{٣}$ × م × ع

٣٠٠ = $\frac{١}{٣}$ × م × ٩

٣٠٠ = ٣م ∴ م = ١٠٠ سم² ∴ طول ضلع قاعدة الهرم = $\sqrt{١٠٠}$ = ١٠ سم

مهارات تفكير عليا :

اِختر الإجابة الصحيحة .



٥ هرم رباعي قائم منتظم قاعدته هي أحد أوجه مكعّب .
حسب البيانات المدوَّنة ، فإنّ حجم المجسّم الموضّح في الشكل المقابِل يساوي :

أ ٢١٦ سم³ ب ٣٣٦ سم³ ج ١٢٠ سم³ د ٩٦ سم³

٨ ـ ٦ حجم الكرة

Volume of The Sphere

سوف تتعلَّم : حساب حجم كرة .

العبارات والمفردات :

حجم	Volume	كرة	Sphere

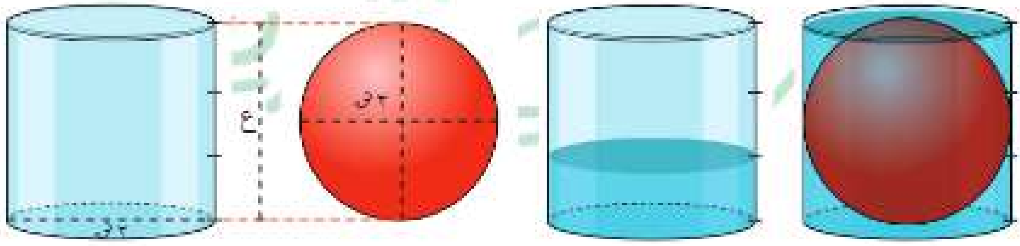
اِستكشِف

تعلم أنَّ حجم الأسطوانة الدائرية القائمة هو : π نق^{٢} × ع

ليكن لدينا أسطوانة دائرية قائمة ارتفاعها يساوي طول قطر قاعدتها وموضَّح عليها تدريج من الخارج بحيث يُجزِّأ ارتفاعها إلى ثلاثة أقسام متطابقة .

قُم بسكب كمّية من الماء بحيث تملأ $\frac{١}{٣}$ حجم الأسطوانة .

ضَع كرة داخل الأسطوانة بشرط أن يكون قطر الكرة يساوي ارتفاع الأسطوانة ، وكذلك قطر الكرة يساوي قطر قاعدة الأسطوانة .



ماذا تلاحظ ؟

سوف يرتفع السائل حتّى يصل إلى ارتفاع الأسطوانة

إذًا حجم الكرة = ... حجم الأسطوانة

= $\frac{٢}{٣}$ (π نق^{٢} × ع)

= $\frac{٢}{٣}$ π نق^{٢} × ٢ نق ، حيث ع = ٢ نق

= $\frac{٤}{٣}$ π نق^{٣}

حجم الكرة = $\frac{٤}{٣}$ × π نق^{٣}

معلومة مفيدة :

أهم ما توصّل إليه العالم أرخميدس هو العلاقة بين حجم الكرة وحجم الأسطوانة المحيطة بها (الأسطوانة التي قطرها يساوي قطر الكرة ، وارتفاعها يساوي قطر الكرة أيضًا ، أي حجم الكرة يساوي ثلثَي $\left(\frac{٢}{٣}\right)$ حجم الأسطوانة المحيطة بها .

مثال (١):

أوجِد حجم كرة طول نصف قطرها ٦ سم . (بدلالة π)

الحلّ :

حجم الكرة = $\frac{٤}{٣} \times \pi$ نق^{٣}

= $\frac{٤}{٣} \times \pi \times (٦)^{٣}$

= $\frac{٤}{\cancel{٣}_{١}} \times \pi \times \cancel{٦}^{٢} \times ٦ \times ٦$

= $٤ \times \pi \times ٧٢$

= ٢٨٨ π سم^{٣}

دورك الآن (١)

أوجِد حجم كرة طول نصف قطرها ٣ سم . (بدلالة π)

حجم الكرة = $\frac{٤}{٣} \times \pi$ نق^{٣}

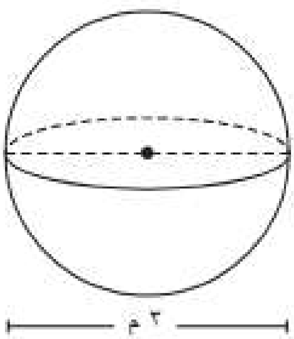
= $\frac{٤}{٣} \times \pi \times ($ ٣ $)^{٣}$

= $\frac{٤}{٣} \times \pi \times$ ٣ × ٣ × ٣

= ٣٦π سم^{٣}

مثال (٢):

أوجِد حجم الكرة المرسومة . (اِعتبِر π = $\frac{٢٢}{٧}$)



الحلّ :

نق = ١ م

حجم الكرة = $\frac{٤}{٣} \times \pi$ نق^{٣}

= $\frac{٤}{٣} \times \frac{٢٢}{٧} \times (١)^{٣}$

= $\frac{٤}{٣} \times \frac{٢٢}{٧} \times ١ \times ١ \times ١$

= $\frac{٤}{٣} \times \frac{٢٢}{٧}$

= $\frac{٨٨}{٢١}$

= $٤\frac{٤}{٢١}$ م^{٣}

مثال (٣):

وعاء على شكل نصف كرة طول قطرها ١٢ م .
أوجِد حجم الوعاء بدلالة π .

الحلّ :

$نق = \frac{١}{٢} \times ١٢ = ٦$ م

حجم الوعاء = حجم نصف الكرة $= \frac{١}{٢} \times \frac{٤}{٣} \times \pi \times نق^{٣}$

$= \frac{١}{٢} \times \frac{٤}{٣} \times \pi \times (٦)^{٣}$

$= \frac{٤}{\cancel{٦}_{١}} \times \pi \times \cancel{٦}^{١} \times ٦ \times ٦$

$= ٤ \times ٦ \times ٦ \times \pi$

$= ١٤٤ \pi$ م^{٣}

دورك الآن (٢)

أوجِد ثلاثة أرباع حجم كرة فولاذية طول قطرها ٢٠ سم . (اعتبِر π = ٣,١٤)

نق = ١٠ سم

حجم ثلاثة أرباع الكرة $= \frac{٣}{٤} \times \left(\frac{٤}{٣} \times \pi نق^{٣}\right)$

$= \frac{٣}{٤} \times \frac{٤}{٣} \times ٣,١٤ \times ١٠ \times ١٠ \times ١٠$

$= ٣,١٤ \times ١٠٠٠$

$= ٣١٤٠$ سم^{٣}

مثال (٤):

لدى مريم مصباح مزخرف كروي الشكل حجمه $\frac{٢٥٦}{٣}\pi$ سم^{٣} ، أوجِد طول قطر المصباح .

الحلّ :

حجم الكرة $= \frac{٤}{٣} \times \pi نق^{٣}$

$\frac{٢٥٦}{٣}\pi = \frac{٤}{٣} \times \pi نق^{٣}$

$\frac{\cancel{٢٥٦}^{٦٤}}{\cancel{٣}_{١}} \times \cancel{\pi}^{١} \times \frac{\cancel{٣}^{١}}{\cancel{٤}_{١}\cancel{\pi}_{١}} = \frac{\cancel{٣}^{١}}{\cancel{٤}_{١}\cancel{\pi}_{١}} \times \frac{\cancel{٤}\cancel{\pi}}{\cancel{٣}} \times نق^{٣}$

$٦٤ = نق^{٣}$

∴ $نق = \sqrt[٣]{٦٤} = ٤$ سم

∴ طول قطر المصباح = ٢ × ٤ = ٨ سم

تذكّر

$\sqrt[٣]{٨} = ٢$

$\sqrt[٣]{٢٧} = ٣$

$\sqrt[٣]{٦٤} = ٤$

الدرس السادس

دورك الآن (٣)

كرة حجمها $\frac{٣٢}{٣}\pi$ م^{٣} . أوجِد طول نصف قطرها .

حجم = $\frac{٤}{٣}\pi$ نق^{٣}

$\frac{٣٢}{٣}\pi = \frac{٤}{٣}\pi$ نق^{٣}

∴ نق^{٣} = $\dfrac{\frac{٣٢}{٣}\pi}{\frac{٤}{٣}\pi} = \frac{٣٢}{٤} = ٨$

∴ نق = $\sqrt[٣]{٨}$ = ٢ م

عبِّر عن فهمك

يقول محمّد إنَّ حجم الكرة يساوي $\frac{٢}{٣}$ حجم أيِّ أسطوانة .

في رأيك ، هل محمّد على صواب ؟ وضِّح إجابتك .

لا ، تساوي $\frac{٢}{٣}$ حجم الاسطوانة المحيطة بها فقط (قطرها = قطر الاسطوانة)

تمارين ذاتية :

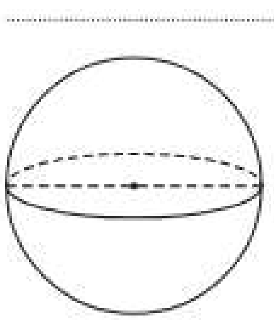
١ أوجِد حجم كرة طول نصف قطرها ٩ سم . (بدلالة π)

حجم = $\frac{٤}{٣}\pi$ نق^{٣}

= $\frac{٤}{٣}\pi \times ٩ \times ٩ \times ٩$

= ٩٧٢π

٢ من خلال الشكل المقابِل ، أوجِد حجم الكرة المرسومة . (بدلالة π)



٤ سم

حجم = $\frac{٤}{٣}\pi \times ٢ \times ٢ \times ٢$

= $\frac{٣٢}{٣}\pi$ سم^{٣}

٣ قبّة مسجد على شكل نصف كرة ، إذا كان طول قطر القبّة ١٢ م ، فاحسب حجم قبّة المسجد . (اِعتبِر $\pi = \frac{٢٢}{٧}$)

نق = ٦ م

حجم قبّة المسجد = $\frac{١}{٢} \times (\frac{٤}{٣}\pi$ نق$^{٣})$

= $\frac{١}{٢} \times \frac{٤}{٣} \times \frac{٢٢}{٧} \times ٦ \times ٦ \times ٦$

= ٤٥٢٫٥٧١ م^{٣}

٤ إذا كان حجم كرة ٣٦ π سم³ ، فاحسب طول قطرها .

حجم = $\frac{٤}{٣}$ π نق³

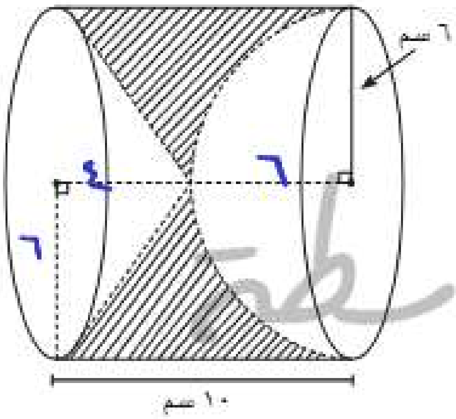
٩ $\cancel{٣٦}$ $\cancel{\pi}$ = $\frac{\cancel{٤}^{١}}{٣}$ $\cancel{\pi}$ نق³

∴ نق³ = ٣ × ٩ = ٢٧

نق = $\sqrt[٣]{٢٧}$ = ٣ ∴ طول قطر الكرة = ٢ × ٣ = ٦

مهارات تفكير عليا :

اختر الإجابة الصحيحة .



٥ مجسَّم أسطواني في داخله تجويفان أحدهما مخروطي الشكل والثاني نصف كرة .
بحسب المعطيات على الرسم ، فإنَّ حجم الجزء المتبقي من المجسَّم (بدلالة π) =

(أ) ٣٦٠ π سم³ (ب) ١٤٤ π سم³

(ج) ١٩٢ π سم³ (د) ١٦٨ π سم³

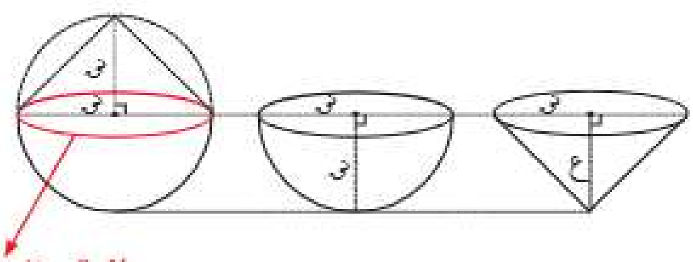
٦ لدى عمر قالبان أحدهما مخروطي الشكل والآخر كروي ، إذا كانت قاعدة المخروط هي دائرة عظمى للكرة ، وارتفاع المخروط هو نصف قطر الكرة .
فإنَّ حجم الكرة يساوي :

(أ) ٤ × حجم المخروط (ب) ٢ × حجم المخروط

(ج) $\frac{١}{٤}$ × حجم المخروط (د) $\frac{١}{٢}$ × حجم المخروط

تذكر

- حجم الأسطوانة الدائرية القائمة = π نق² ع
- حجم المخروط الدائري القائم = $\frac{١}{٣}$ π نق² ع



دائرة عظمى للكرة

تقويم الوحدة التعليمية الثامنة
Unit Eight Assessment

أولًا : البنود المقالية

١ قدِّر ما يلي :

أ) ١٨٪ من ١٥٢

١٨٪ ≈ ٢٠٪ ، ١٥٢ ≈ ١٥٠

∴ ٢٠٪ × ١٥٠

≈ $\frac{1}{\cancel{5}_{1}}$ × $\cancel{150}^{30}$ ≈ ٣٠

ب) ٦٢٪ من ٦٢

٦٢٪ ≈ ٦٠٪ ، ٦٢ ≈ ٦٠

≈ ٦٠٪ × ٦٠

≈ $\frac{3}{\cancel{5}_{1}}$ × $\cancel{60}^{12}$ = ٣ × ١٢ = ٣٦

ج) ٥٣٪ من ٤٥٨

٥٣٪ ≈ ٥٠٪ ، ٤٥٨ ≈ ٤٦٠

∴ ٥٠٪ × ٤٦٠

≈ $\frac{1}{\cancel{2}_{1}}$ × $\cancel{460}^{230}$ = ٢٣٠

د) ٣٤٪ من ٤٠٠

٣٤٪ ≈ ٣٥٪

∴ ٣٥٪ × ٤٠٠

≈ $\frac{35}{\cancel{100}_{1}}$ × $\cancel{400}^{4}$ = ٣٥ × ٤ = ١٤٠

٢ تقدِّم إحدى شركات التغذية لزبائنها عرضًا للاشتراك الشهري بخصم نسبته ١٥٪ . كم سيدفع المشترك إذا كان السعر الأصلي للاشتراك الشهري ٢٠٠ دينار ؟

القيمة النهائية = القيمة الأصلية × (١٠٠٪ − نسبة الخصم)

= ٢٠٠ × (١٠٠٪ − ١٥٪)

= $\cancel{200}^{1}$ × $\frac{85}{\cancel{100}_{5}}$ = $\frac{85}{5}$ = ١٧ دينار

٣ بلغ عدد زوّار المركز العلمي (قاعة الأحياء البحرية) يوم الأربعاء ٨٠ زائرًا ، وفي يوم الجمعة زاد عدد الزوّار إلى ٢٤٠ زائرًا . أوجِد النسبة المئوية للتزايد في عدد الزوّار يوم الجمعة .

٢٤٠ = ٨٠ (١٠٠٪ + النسبة المئوية للتزايد)

$\frac{\cancel{240}^{3}}{\cancel{80}_{1}}$ = ١ + س

٣ = ١ + س ∴ س = ٢ ∴ س = ٢٠٠٪

٤ رفع أحد معارض السيارات أسعاره بنسبة ٢٠٪ ، ثمّ منح هذا المعرض موظّفيه خصمًا يبلغ ١٠٪ . فكم سيدفع أحد الموظّفين في هذا المعرض ثمنًا لشراء سيارة كان سعرها الأصلي ٨٠٠٠ دينار قبل الزيادة ؟

السعر بعد رفع الثمن = ٨٠٠ × (١٠٠٪ + ٢٠٪) = ٨٠٠ × ١٢٠٪

= ٨ × ١٢٠ = ٩٦٠ دينار

ثمن الشراء النهائي = ٩٦٠ × (١٠٠٪ − ١٠٪) = ٩٦٠ × ٩٠٪ = ٨٦٤ دينار

٥ قام أحد متاجر الأجهزة الإلكترونية بعمل تخفيضات على أجهزة التلفاز قدره ٣٠٪ من ثمنها الأصلي. إذا كان ثمن جهاز تلفاز بمواصفات معيَّنة بعد التخفيض ٢٨٠ دينارًا، فما هو ثمنه قبل التخفيض؟

ثمن الجهاز بعد التخفيض = الثمن الأصلي × (١٠٠٪ − ٣٠٪)

٢٨٠ = س × ٧٠٪

٢٨٠ = س × $\frac{٧٠}{١٠٠}$

∴ س = ٢٨٠ × $\frac{١٠٠}{٧٠}$ = ٤ × ١٠٠ = ٤٠٠ دينار

٦ قامت مالكة مشروع، يُصنَّف من المشاريع الصغيرة، بتخفيض سعر سلعة لديها إلى ٣٠٠ دينار بنسبة خصم ٤٠٪. أوجِد ما يلي:

أ) القيمة الأصلية للسلعة.

٣٠٠ = س × (١٠٠٪ − ٤٠٪)

٣٠٠ = س × ٦٠٪

٣٠٠ = س × $\frac{٣}{٥}$

∴ س = ٣٠٠ × $\frac{٥}{٣}$ = ١٠٠ × ٥ = ٥٠٠ دينار

ب) ما النسبة المئوية للتزايد التي تُعيد سعر السلعة إلى سعرها الأصلي؟

٥٠٠ = ٣٠٠ × (١٠٠٪ + س)

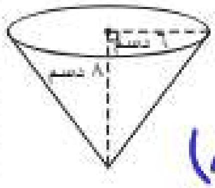
$\frac{٥}{٣}$ = ١ + س

∴ س = $\frac{٥}{٣}$ − ١ = $\frac{٢}{٣}$

∴ النسبة المئوية للتزايد = $\frac{٢}{٣}$ × ١٠٠٪ = ٦٦,٦٪

٧ أوجِد كلًّا ممّا يلي (بدلالة π):

أ) المساحة السطحية للمخروط الدائري القائم.



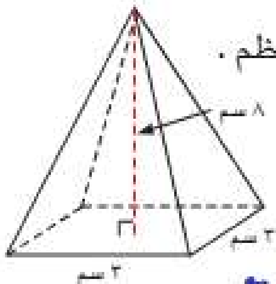
م = π نق (ل + نق)

= ٦π × (١٠ + ٦)

= π × ٦ × ١٦

= ٩٦π سم²

ب) حجم الهرم القائم المنتظم.



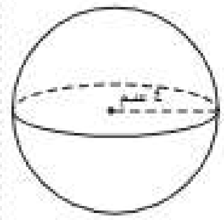
حجم = $\frac{١}{٣}$ × م × ع

= $\frac{١}{٣}$ × ٣ × ٣ × ٨

= ٣ × ٨

= ٢٤ سم³

ج) حجم الكرة .

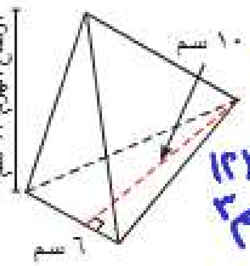


$\text{حجم} = \frac{4}{3} \pi \text{ نق}^3$

$= \frac{4}{3} \pi \times (4)^3$

$= \frac{256}{3} \pi \text{ سم}^3$

د) حجم الهرم القائم .

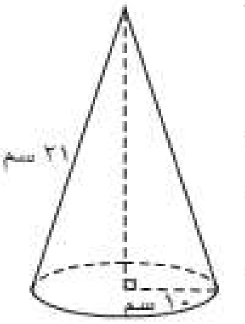


$\text{حجم} = \frac{1}{3} \times \text{ق} \times \text{ع}$

$= \frac{1}{\cancel{3}} \times (\frac{1}{\cancel{2}} \times \cancel{6} \times 10) \times 12$

$= 10 \times 12 = 120 \text{ سم}^3$

٨ أراد عثمان صنع قمع على شكل مخروط دائري قائم طول نصف قطره ١٠ سم ، وطول الراسم ٢١ سم ، أحسب المساحة الجانبية للقمع . (اِعتبِر $\pi = \frac{22}{7}$)



$\text{مساحة جانبية} = \pi \text{ نق} \times \text{ل}$

$= \frac{22}{\cancel{7}_1} \times 10 \times \cancel{21}^3$

$= 22 \times 10 \times 3 = 660 \text{ سم}^2$

٩ ملأ راشد كرة شاطئية ملوّنة بالماء ، إذا كان طول نصف قطر الكرة ١٢ سم .
أوجِد حجم الكرة (بدلالة π).

$\text{حجم} = \frac{4}{3} \pi \text{ نق}^3$

$= \frac{4}{3} \pi \times (12)^3$

$= 2304 \pi \text{ سم}^3$

١٠ في بداية عصر التقدّم الفضائي ، صُنعت كبسولة كروية الشكل حجمها ٩٧٢ ٠٠٠ π م^3 .
أوجِد طول نصف قطر الكبسولة .

$\frac{4}{3} \pi \times \text{نق}^3 = 972000 \pi$

$\therefore \text{نق}^3 = \frac{\cancel{\pi} \, 972000}{\frac{4}{3} \cancel{\pi}} = 729000 \text{ ، نق} = \sqrt[3]{729000} = 90 \text{ م}$

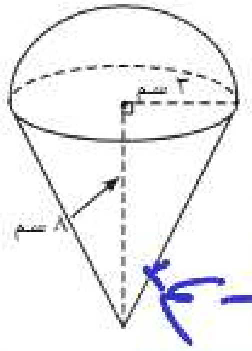
١١ أرادت ياسمين القيام بتوزيعات لزميلاتها . اِختارت شكل المخروط الموضّح في الشكل المقابِل لتعبئته بالفشار . أحسب المساحة الجانبية للمخروط .
(اِعتبِر $\pi = \frac{22}{7}$)

$\text{المساحة الجانبية} = \pi \text{ نق} \times \text{ل}$

$= \frac{22}{\cancel{7}} \times \cancel{7} \times 18$

$= 22 \times 18 = 396 \text{ سم}^2$

١٢ إشترى نايف مثلّجات لأصدقائه وكان أحد هذه المثلّجات على شكل مخروط دائري قائم طول نصف قطر قاعدته ٣ سم وارتفاعه ٨ سم ، يعلوه نصف كرة (كما في الشكل) .
أحسب حجم المجسّم (بدلالة π) .



حجم = حجم نصف الكرة + حجم المخروط

= $\frac{١}{٢} \times \frac{٤}{٣} \pi$ نق^{٣} + $\frac{١}{٣} \times \pi$ نق^{٢} × ع

= $\frac{١}{٣} \pi$ نق^{٢} (٢ نق + ع) = $\frac{١}{٣} \pi \times ٩ (٦+٨)$

= $٣\pi \times ١٤ = ٤٢\pi$ سم^{٣}

ثانيًا : البنود الموضوعية

في البنود (١-٦) ، ظلّل [أ] إذا كانت العبارة صحيحة ، وظلّل [ب] إذا كانت العبارة غير صحيحة .

١ جهاز سعره الأصلي ٢٥٠ دينارًا وقد أصبح ثمنه خلال فترة الخصومات ١٥٠ دينارًا ، فإنّ النسبة المئوية للخصم هي ٢٥٪ .	أ	**ب**
٢ قلادة ذهبية سعرها ١٠٠٠ دينار بيعت بسعر ١٢٠٠ دينار ، فإنّ النسبة المئويّة للتزايد ٢٠٪ .	**أ**	ب
٣ إذا انخفض سعر سلعة بنسبة ١٠٪ ثمّ ارتفع بنسبة ١٠٪ ، فإنّ سعر السلعة سيعود إلى سعرها الأصلي .	أ	**ب**
٤ حجم الكرة يساوي $\frac{٣}{٤} \pi$ نق^{٣} .	أ	**ب**
٥ حجم الهرم القائم يساوي ثلث حاصل ضرب مساحة القاعدة في الارتفاع .	**أ**	ب
٦ هرم قائم قاعدته مربّعة طول ضلعها ٤ سم وارتفاعه ٦ سم ، فإنّ حجمه يساوي ٣٢ سم^{٣} .	**أ**	ب

في البنود (٧-١٤) ، لكلّ بند أربعة اختيارات ، واحد فقط منها صحيح ، ظلّل الإجابة الصحيحة .

٧ إذا أنفق عبدالله ٣٠ دينارًا في الشهر على تعبئة بطاقات الاتّصال (شحن الرصيد) ، ثمّ أنفق ٤٠٪ زيادة ممّا أنفقه في الشهر السابق ، فإنّ مقدار المال الذي أنفقه في تعبئة بطاقات الاتّصال في الشهر الحالي يساوي :

أ ٣٥ دينارًا   **ب** ٤٢ دينارًا   ج ١٨ دينارًا   د ٧٠ دينارًا

٨ في أحد التنزيلات ، اِنخفضت الأسعار بنسبة ٣٥٪ . إذا كان سعر غسّالة بعد التنزيلات ٦٥ دينارًا ، فإنّ سعرها قبل التنزيلات يساوي :

أ ١٣٥ دينارًا   ب ٩٠ دينارًا   ج ١٠٠ دينار   د ٦٥ دينارًا

٩ إذا انخفض سعر سهم ٥٠٪ عن سعره في العام الماضي ، فإنّ النسبة المئوية للتزايد التي تُعيده إلى سعره الأصلي هي :

أ ١٠٠٪   ب ٥٠٪   ج ١٥٠٪   د ٢٠٠٪

١٠ كرة طول قطرها ٦ سم ، فإنّ ثلث حجمها بدلالة π يساوي :

أ ٣٦ π سم^3 ب ١٢ π سم^3 ج ٢٧ π سم^3 د ٩ π سم^3

١١ هرم قائم قاعدته مربّعة طول ضلعها ٦ سم وارتفاعه ٩ سم ، فإنّ حجمه يساوي :

أ ١٠٨ سم^3 ب ٣٢٤ سم^3 ج ٥٤ سم^3 د ٣٦٩ سم^3

١٢ إذا كان طول نصف قطر قاعدة مخروط دائري قائم ٥ سم وراسمه ١٣ سم ، فمساحته الجانبية بدلالة π تساوي :

أ ١٨ π سم^2 ب ٦٥ π سم^2 ج ٣٠ π سم^2 د ١٣ π سم^2

١٣ إذا كان حجم كرة ٢٨٨ π سم^3 ، فإنّ طول نصف قطرها يساوي :

أ ٣ سم   ب ٤ سم   ج ٦ سم   د ٨ سم

١٤ النسبة بين حجمَي كرتَين طول نصفا قطرَيهما ٢ سم ، ٦ سم على الترتيب تساوي :

أ ١ : ٢   ب ١ : ٣   ج ١ : ٩   د ١ : ٢٧