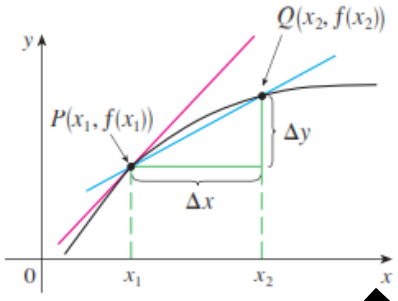
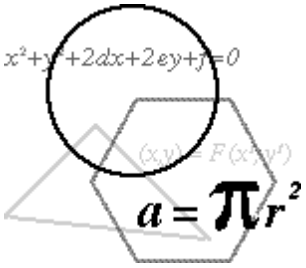
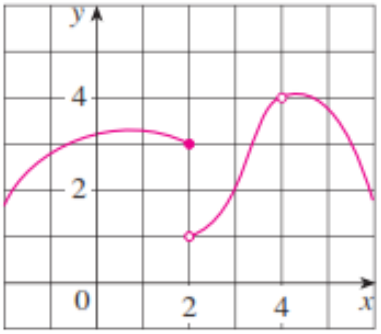
# الصف الثاني عشر علمي

## أمثلة الكتاب وحاول أن تحل

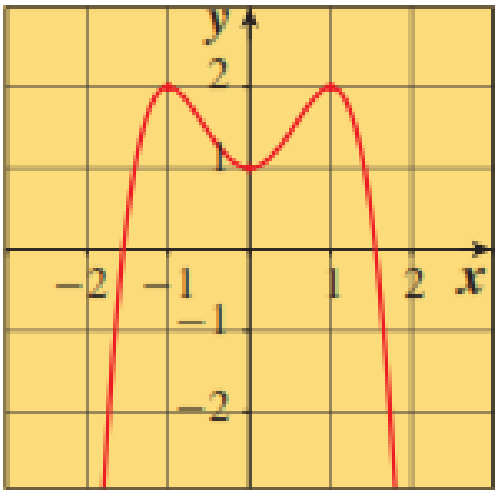


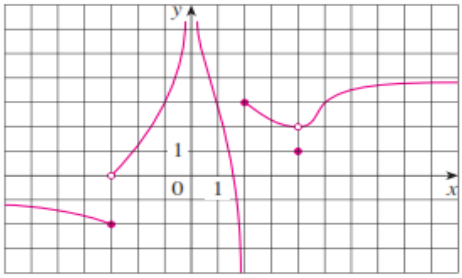




# الرياضيات

## الفصل الدراسي الأول




## العام الدراسي

## ٢٠٢٢ \ ٢٠٢٣ م

إعداد رئيس القسم:

أ . محمود حامد العلو

أسم الطالب: .....، الصف: ١٢ع/ .....

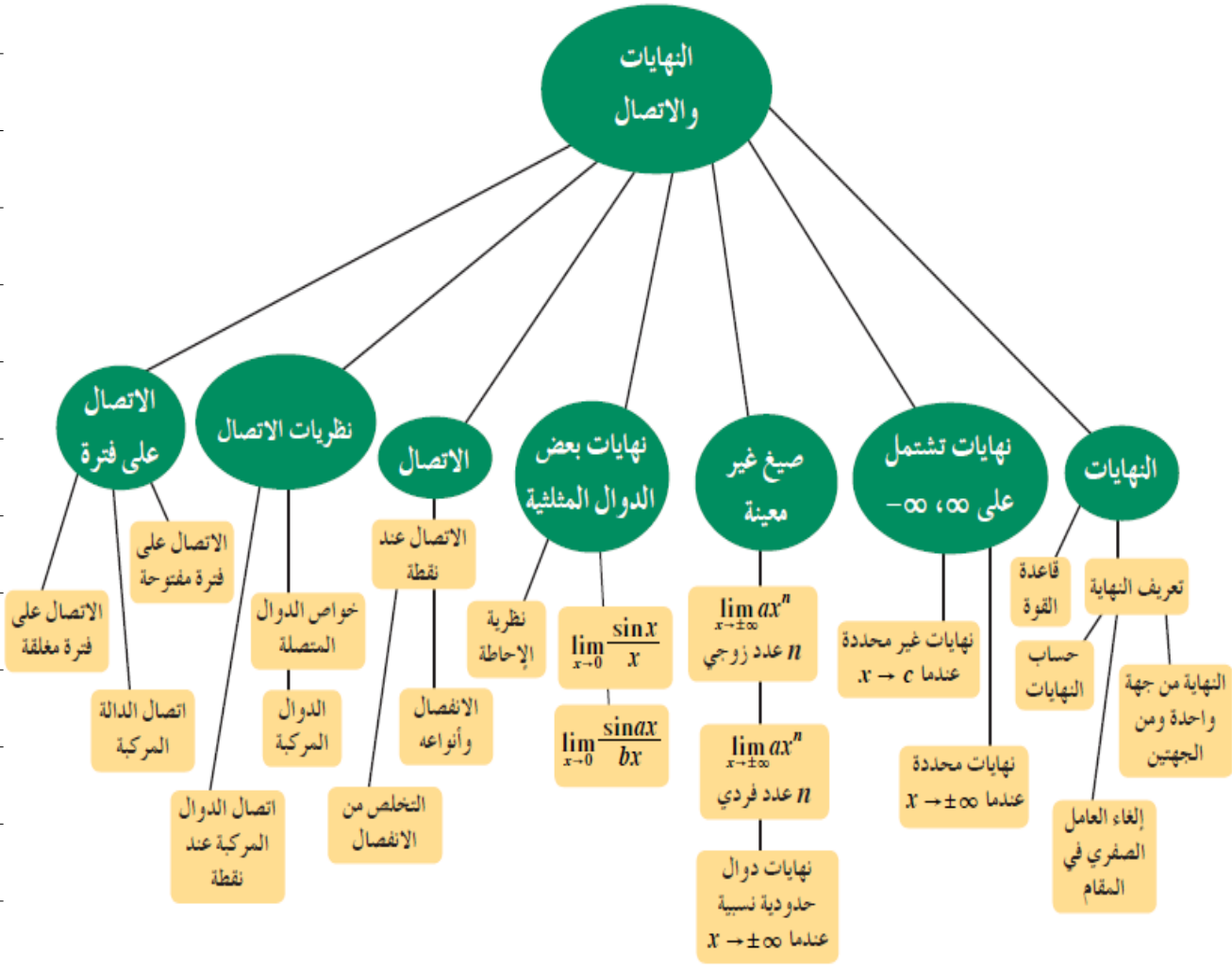
# الكتاب الاول

"مادة الرياضيات"

# الوحدة الاولى

# النهايات والاتصال

# Limits and Continuity




| النهايات | نهايات تشتمل على ∞ ، −∞ | صيغ غير معينة | نهايات بعض الدوال المثلثية | الاتصال | نظريات الاتصال | الاتصال على فترة |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1–1 | 1–2 | 1–3 | 1–4 | 1–5 | 1–6 | 1–7 |

رئيس القسم: محمود حامد العلو

| اليوم | التاريخ | الحصة | الصف |
|---|---|---|---|
| ..... | / / ٢٠٢٢م | | ١٢ ع / |
| الموضوع | ..... | | |

# أوراق متابعة الوحدة الأولى (النهايات والاتصال)

## (1 - 1) تمارين متابعة للنهايات

**تعريف (١):**

لتكن $x$ كمية متغيرة، $c$ عدد ثابت

نقول إن $x$ تقترب من $c$ باطراد إذا كان بالإمكان جعل الكمية $|x - c|$ أصغر من أي عدد حقيقي موجب

**تعريف النهاية:**

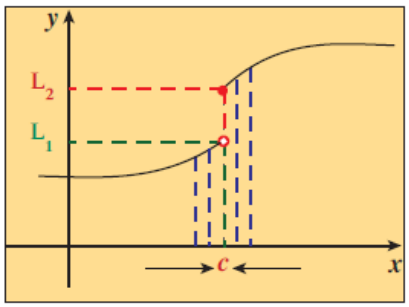
إذا كان $L$ ، $c$ عددين حقيقيين، $f$ دالة حقيقية فإن:

$\lim_{x \to c} f(x) = L$ ***The limit of $f(x)$ as $x$ approaches $c$ equals $L$***

تعني أن: عندما تقترب $x$ من $c$ باطراد، $x \neq c$ فإن $f(x)$ تقترب باطراد من $L$.

ملاحظة١: إن حقيقة وجود نهاية عندما $x \to c$ لا تعتمد على كون الدالة معرفة او غير معرفة عند $c$

**النهاية من جهة اليسار:**




إذا كانت $f(x)$ تؤول إلى العدد $L_1$ عندما تؤول $x$ إلى العدد $c$ من جهة اليسار

فإننا نكتب: $\lim_{x \to c^-} f(x) = L_1$

**النهاية من جهة اليمين:**

إذا كانت $f(x)$ تؤول إلى العدد $L_2$ عندما تؤول $x$ إلى العدد $c$ من جهة اليمين

فإننا نكتب: $\lim_{x \to c^+} f(x) = L_2$

$L_1 \neq L_2$

$\lim_{x \to c^-} f(x) \neq \lim_{x \to c^+} f(x)$

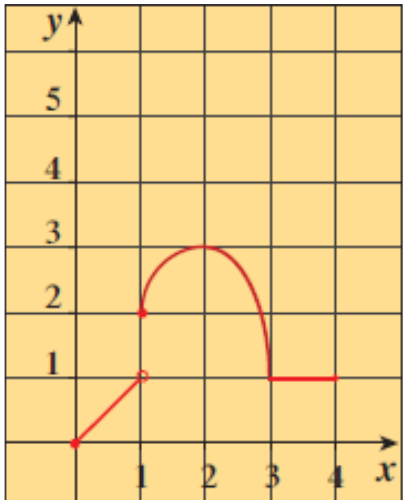
**نظرية1:**

يكون للدالة $f$ نهاية عندما تقترب $x$ من $c$ إذا وفقط إذا كانت النهاية من جهة اليمين تساوي النهاية من جهة اليسار

ويعبر عن ذلك: $\lim_{x \to c} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \to c^-} f(x) = L = \lim_{x \to c^+} f(x)$

| اليوم | التاريخ | الحصة | الصف |
|---|---|---|---|
| ..... | / / ٢٠٢٢م | | ١٢ع / |
| الموضوع | ..... | | |

تدريب (1) صفحة 15 : الشكل المقابل يمثل بيان الدالة: $f:[0,4]\to R$ أكمل ما يلي:




1) $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) =$

2) $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) =$

3) $\lim\limits_{x\to 1} f(x) =$

*) $f(1) =$

4) $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) =$

5) $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) =$

6) $\lim\limits_{x\to 2} f(x) =$

*) $f(2) =$

7) $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x) =$

8) $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) =$

9) $\lim\limits_{x\to 3} f(x) =$

*) $f(3) =$

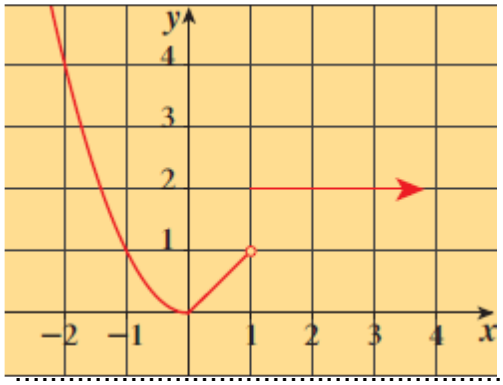
10) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) =$

11) $\lim\limits_{x\to 4^-} f(x) =$

*) $\lim\limits_{x\to 4^+} f(x) =$

---

مثال (1) صفحة 15 : الشكل المقابل يمثل بيان الدالة $f$ . أوجد إن أمكن:




1) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) =$

2) $\lim\limits_{x\to 1} f(x) =$

3) $\lim\limits_{x\to 2} f(x) =$

4) $\lim\limits_{x\to -2} f(x) =$

.....

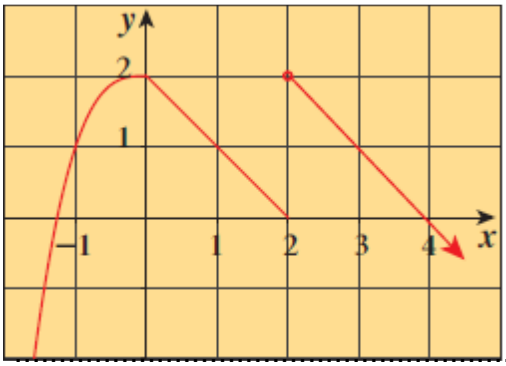
.....

.....

.....

---

حاول أن تحل (1) صفحة 16 : الشكل المقابل يمثل بيان الدالة $f$ . أوجد إن أمكن:




1) $\lim\limits_{x\to -1} f(x) =$

2) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) =$

3) $\lim\limits_{x\to 2} f(x) =$

4) $\lim\limits_{x\to 3} f(x) =$

.....

.....

.....

.....

.....

**نظرية2:** إذا كان $k$ عدداً ثابتاً، $c$ عددا حقيقياً فإن: $\lim_{x\to c} k = k$

**نظرية3:** إذا كانت: $f(x) = x$، حيث $c$ عددا حقيقياً فإن: $\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} x = c$

**نظرية4:** (قواعد حساب النهايات):

إذا كان $k, c, M, L$ أعداد حقيقية، $\lim_{x\to c} f(x) = L$ , $\lim_{x\to c} g(x) = M$ فإن :

a) قاعدة الجمع (الفرق) : $\lim_{x\to c}\big(f(x) \pm g(x)\big) = \lim_{x\to c} f(x) \pm \lim_{x\to c} g(x) = L \pm M$

b) قاعدة الضرب: $\lim_{x\to c}\big(f(x) \cdot g(x)\big) = \lim_{x\to c} f(x) \cdot \lim_{x\to c} g(x) = L \cdot M$

c) قاعدة الضرب في ثابت: $\lim_{x\to c}\big(kf(x)\big) = k \cdot \lim_{x\to c} f(x) = k \cdot L$

d) قاعدة ناتج القسمة: $\lim_{x\to c}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{\lim_{x\to c} f(x)}{\lim_{x\to c} g(x)} = \frac{L}{M} \; . M \neq 0$

مثال (2) صفحة 17 : بفرض أن $\lim_{x\to 1} g(x) = 5$ , $\lim_{x\to 1} f(x) = -2$ . أوجد:

$a)\ \lim_{x\to 1}(f(x) - g(x))$ $b)\ \lim_{x\to 1}\frac{2f(x)}{g(x)}$ $c)\ \lim_{x\to 1}\frac{g(x)+4}{f(x)\,.\,g(x)}$

حاول أن تحل (2) صفحة 17 : بفرض أن $\lim_{x\to 2} g(x) = -3$ , $\lim_{x\to 2} f(x) = 7$ . أوجد:

$a)\ \lim_{x\to 2}(f(x)+g(x))$ $b)\ \lim_{x\to 2}(f(x).g(x))$ $c)\ \lim_{x\to 2}(\frac{8f(x).g(x)}{f(x)+g(x)})$

## نظرية5: (قواعد حساب النهايات):

**a)** إذا كانت $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0$ دالة كثيرة الحدود، حيث $c$ عددا حقيقياً فإن:

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c) = a_n c^n + a_{n-1} c^{n-1} + \cdots + a_0$$

**b)** إذا كانت $f(x)$ , $g(x)$ كثيرتي حدود، $c$ عدداً حقيقياً فإن:

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(c)}{g(c)} \quad . \; g(c) \neq 0$$

مثال (3) صفحة18 : أوجد:

$a)$ $\lim\limits_{x \to -1} (x^4 - 2x^3 + 5)$

$b)$ $\lim\limits_{x \to 3} \frac{x^2+2x+4}{x+2}$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

| اليوم | التاريخ | الحصة | الصف |
|---|---|---|---|
| ..... | / / ٢٠٢٢م | | / ١٢ع |
| الموضوع | ..... | | |

حاول أن تحل (3) صفحة 18 : أوجد:

$a)\ \lim_{x\to 1}(x^3+3x^2-2x-17)$

$b)\ \lim_{x\to 2}\frac{x^2+5x+6}{x+2}$

$c)\ \lim_{x\to 3}(x^2(2-x))$

مثال (4) صفحة 19 : إذا كانت الدالة $f$ :

$$f(x)=\begin{cases}3x+2 & : x<1\\ 5 & : x=1\\ \frac{5}{x} & : x>1\end{cases}$$

أوجد (إن أمكن): $\lim_{x\to 1} f(x)$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

حاول أن تحل (4) صفحة 19 : إذا كانت الدالة $f$ :

$$f(x)=\begin{cases}x^2-3 & : x<2\\ x-1 & : x>2\end{cases}$$

أوجد (إن أمكن): $\lim_{x\to 2} f(x)$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

| اليوم | التاريخ | الحصة | الصف |
|---|---|---|---|
| ..... | / / ٢٠٢٢م | | / ١٢ع |
| الموضوع | ..... | | |

مثال (5) صفحة19 : إذا كانت الدالة $g$ :

$$g(x)=\begin{cases}x^2-2 & : x\le 0\\ 1-2x & : x>0\end{cases}$$

أوجد (إن أمكن): $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

حاول أن تحل (5) صفحة 19 : إذا كانت الدالة $g$ :

$$g(x)=\begin{cases}x^3+x & : x>1\\ \frac{x}{x^2+1} & : x\le 1\end{cases}$$

أوجد (إن أمكن): $\lim\limits_{x\to 1} g(x)$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

مثال (6) صفحة 20 : لتكن الدالة $f$ : $f(x) = |x-3| + 2x$

a) اكتب $f(x)$ دون استخدام رمز القيمة المطلقة.

b) أوجد: $\lim_{x\to 3^-} f(x)$ . $\lim_{x\to 3^+} f(x)$

c) هل للدالة $f$ نهاية عندما $x \to 3$ ؟

حاول أن تحل (6) صفحة 20 : لتكن الدالة: $f(x) = x^2 - |x - 2|$

d) اكتب $f(x)$ دون استخدام رمز القيمة المطلقة.

e) أوجد: $\lim_{x \to 2^-} f(x)$ . $\lim_{x \to 2^+} f(x)$

f) هل للدالة $f$ نهاية عندما $x \to 2$

**نظرية6: (قاعدة القوة):** إذا كان $n$ عدداً صحيحاً موجباً وكانت $\lim_{x\to c} f(x)$ $c$ موجودة فإن :

$a)\ \lim_{x\to c}[f(x)]^n = \left[\lim_{x\to c} f(x)\right]^n$

$b)\ \lim_{x\to c} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{c}$ في حالة $n$ عدداً زوجياً يشترط أن يكون $c > 0$

$c)\ \lim_{x\to c} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to c} f(x)}$ في حالة $n$ عدداً زوجياً يشترط أن يكون $\lim_{x\to c} f(x) > 0$

مثال (7) صفحة 21 : أوجد:

$a)\ \lim_{x\to -1}(x^2 - 3x - 1)^5$ $b)\ \lim_{x\to 2}\sqrt[3]{x-3}$ $c)\ \lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{3x^2-2}}{x-2}$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

| اليوم | التاريخ | الحصة | الصف |
|---|---|---|---|
| ..... | / / ٢٠٢٢م | | / ١٢ع |
| الموضوع | ..... | | |

حاول أن تحل (7) صفحة 22 : أوجد:

$a)\ \lim_{x\to 5}\left(\sqrt{x^2-5}\ \right)$ $b)\ \lim_{x\to 4}\left(x+\sqrt{x}\ \right)^4$ $c)\ \lim_{x\to -1}\frac{\sqrt[3]{x^3-4x+5}}{x-2}$



إعداد الأستاذ: محمود عامر العلو

مثال (8) صفحة 22 : أوجد إن أمكن:

$a)\ \lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{x^2-x}$ $b)\ \lim_{x\to 0}\frac{(2+x)^3-8}{x}$ $c)\ \lim_{x\to 1}\frac{|x-1|}{x^2-1}$

| اليوم | التاريخ | الحصة | الصف |
|---|---|---|---|
| ..... | / / ٢٠٢٢م | | / ١٢ع |
| الموضوع | ..... | | |

حاول أن تحل (8) صفحة 23 : أوجد إن أمكن:

$a)\ \lim_{x\to -2} \frac{x^2+3x+2}{x^2-4}$

$b)\ \lim_{x\to -7} \frac{(x+4)^2-9}{x^2+7x}$

تابع حاول أن تحل (8) صفحة 23 : أوجد إن أمكن:

$$c)\ \lim_{x\to 5}\frac{|x+2|-7}{x^2-25}$$

مثال (9) صفحة 24 : أوجد:

$a)\ \lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{2x-3}-1}{x-2}$

$b)\ \lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\sqrt[3]{x}-1}$

تابع مثال (9) صفحة24 : أوجد:

$$c)\ \lim_{x\to -2}\frac{x^2-4}{\sqrt[3]{x+2}}$$

| اليوم | التاريخ | الحصة | الصف |
|---|---|---|---|
| ..... | / / ٢٠٢٢م | | / ١٢ع |
| الموضوع | ..... | | |

حاول أن تحل (9) صفحة 25 : أوجد إن أمكن:

$$a)\ \lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x^2-2x}$$



إعداد الأستاذ: محمود عامر العلو

تابع حاول أن تحل (9) صفحة 25 : أوجد إن أمكن:

$b)\ \lim_{x\to -1} \frac{\sqrt[3]{x^3+1}}{\sqrt[3]{x+1}}$

$c)\ \lim_{x\to 9} \frac{x-9}{3-\sqrt{x}}$

مثال (10) صفحة25 : أوجد:

$a)\ \lim_{x\to -1}\left(\frac{x^3+6x^2+2x-3}{x+1}\right)$

$b)\ \lim_{x\to -2}\left(\frac{x^5+32}{x+2}\right)$

| اليوم | التاريخ | الحصة | الصف |
|---|---|---|---|
| ..... | / / ٢٠٢٢م | | / ١٢ع |
| الموضوع | ..... | | |

حاول أن تحل (10) صفحة 26 : أوجد:

$a)\ \lim_{x\to 3}\left(\frac{x^3-2x^2-4x+3}{x-3}\right)$

$b)\ \lim_{x\to 2}\left(\frac{-x^5+x^3+x+22}{x-2}\right)$

## (2 – 1) تمارين متابعة للنهايات تشتمل على $\pm\infty$

**تعريف (١):**

لتكن $f$ دالة معرفة في الفترة $(a.\infty)$ فإن: $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$

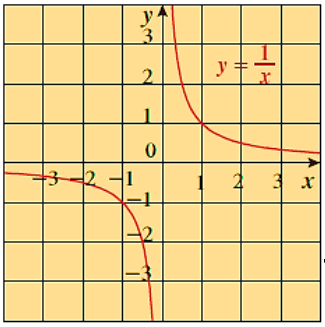
يعني أن قيم $f(x)$ تقترب باطراد من $L$ عندما $x$ تؤول إلى $\infty$ .

**تعريف (2):**

لتكن $f$ دالة معرفة في الفترة $(-\infty.b)$ فإن: $\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$

يعني أن قيم $f(x)$ تقترب باطراد من $L$ عندما $x$ تؤول إلى $-\infty$ .

---




**نظرية7:**

$$f: f(x) = \frac{1}{x} \quad \Longrightarrow \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0 \ . \ \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$$

---

**نظرية8:**

$$f: f(x) = \frac{k}{x^n} \ . \ n \in Z^+ \ . \ k \in R \quad \Longrightarrow \quad \lim_{x\to\pm\infty} \frac{k}{x} = 0$$

---

**ملاحظات:**

1) تبقى قواعد حساب النهايات (نظرية 4) وقاعدة القوة (نظرية 6) صحيحة عند ايجاد $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$

2) تبقى نظرية 2 أيضاً صحيحة أي أن : $\lim_{x\to\pm\infty} k = k$

مثال (1) / صفحة 29 : أوجد:

$a)\ \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x+4}\right)$

$b)\ \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x+5}{x^2+25}\right)$

تابع مثال (1) صفحة29 : أوجد:

$c)\ \lim_{x\to\infty}\left(\frac{6x^3}{5-7x^3}\right)$

حاول أن تحل (1) صفحة 30 : أوجد:

$a)\ \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x-2}\right)$

$b)\ \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x+2}{x^2+9}\right)$

تابع حاول أن تحل (1) صفحة 30 : أوجد:

$c)\ \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3-3x+1}{x^3+5}\right)$

| اليوم | التاريخ | الحصة | الصف |
|---|---|---|---|
| ..... | / / ٢٠٢٢م | | / ع١٢ |
| الموضوع | ..... | | |

## (3 – 1) تمارين متابعة للنهايات تشتمل على صيغ غير معينة

لتكن: $a \in \mathbf{R}^*$ . $n \in \mathbf{Z}^+$ . $f(x) = ax^n$ :

1) إذا كان $n$ عدد زوجي فإن:

$$\lim_{x\to\pm\infty} ax^n = \begin{cases} \infty & : \quad a > 0 \\ -\infty & : \quad a < 0 \end{cases}$$

2) إذا كان $n$ عدد فردي فإن:

$$\lim_{x\to\infty} ax^n = \begin{cases} \infty & : \quad a > 0 \\ -\infty & : \quad a < 0 \end{cases} \quad ، \quad \lim_{x\to-\infty} ax^n = \begin{cases} -\infty & : \quad a > 0 \\ \infty & : \quad a < 0 \end{cases}$$

**ملاحظات هامة جداً:**

إذا كانت: $a_n \in \mathbf{R}^*$ . $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$

فإن $$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} a_n x^n$$

**لا يجوز تطبيق هذه القاعدة عندما تؤول $x$ إلى عدد حقيقي $c$**

مثال (1) صفحة 37 : أوجد:

$$\lim_{x\to\infty}(2x^2 - 3x + 1)$$

.....

.....

.....

.....

حاول أن تحل (1) صفحة 37 : أوجد:

$$\lim_{x\to\infty}(-3x^2 + 2x + 4)$$

.....

.....

.....

## نظرية11:

إذا كانت كل من $g$ . $f$ دالة حدودية حيث

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0$$

$$g(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_0 \quad \text{فإن:}$$

$$a) \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \quad : \quad n < m$$

$$b) \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a_n}{b_m} \quad : \quad n = m$$

تستخدم في الأسئلة الموضوعية فقط

مثال (2) صفحة39 : استخدم النظرية السابقة في حساب:

$$b) \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{2x^2 + x - 1}{3x^4 + x}\right) \qquad c) \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{x^4 - 1}{7 - 2x^4}\right)$$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

حاول أن تحل (2) صفحة 39 : استخدم النظرية السابقة في حساب:

$a)\ \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-3x^2+5x+1}{6x^2-x+1}\right)$

$b)\ \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2x+1}{4x^3-2x+3}\right)$

مثال (3) صفحة 39 : إذا كانت: $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{ax^2+bx+3}{2x+5}\right)=3$

فأوجد قيمة كل من الثابتين **a , b**.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

حاول أن تحل (3) صفحة 40 : إذا كانت: $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x-2}{ax^2+bx-3}\right)=-1$

فأوجد قيمة كل من الثابتين **a , b**.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

مثال (4) صفحة 40 : أوجد: $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x-2}{\sqrt{x^2+2x-4}}\right)$

حاول أن تحل (4) صفحة 41 : أوجد:

$a)\ \lim_{x\to\infty}\left(\frac{\sqrt{2x^2-x}}{x+1}\right)$

$b)\ \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{3x-5}{\sqrt{x^2-9}}\right)$

## (4 – 1) تمارين متابعة لنهايات بعض الدوال المثلثية

$\lim_{x\to 0} \sin x = 0$ . $\lim_{x\to 0} \cos x = 1$ . $\lim_{x\to 0} \tan x = 0$

**نظرية12**: إذا كانت $x$ بالراديان

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

**نتائج:**

إذا كان $a, b$ عددين حقيقيين، $a.b \neq 0$ فإن:

1) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin ax}{bx} = \frac{a}{b}$ أو $\lim_{x\to 0} \frac{bx}{\sin ax} = \frac{b}{a}$

2) $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$

3) $\lim_{x\to 0} \frac{\tan ax}{bx} = \frac{a}{b}$

مثال (1) صفحة 43 : أوجد:

$a)\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin^2 x}{2x}\right)$

$b)\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{x-3}{\cos x}\right)$

| اليوم | التاريخ | الحصة | الصف |
|---|---|---|---|
| ..... | / / ٢٠٢٢م | | / ١٢ع |
| الموضوع | ..... | | |

حاول أن تحل (1) صفحة 43 : أوجد:

$a)\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{2x^2-x}\right)$

$b)\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 2x}{3x\ \cos x}\right)$

تابع حاول أن تحل (1) صفحة 43 : أوجد:

$$c)\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{x\ \sin x}{\cos x-1}\right)$$

تابع مثال (1) صفحة 43 : أوجد:

$$c)\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2}{1-\cos x}\right)$$

مثال (2) صفحة 44 : أوجد:

a) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan x}{x}\right)$

b) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{5\tan x - 3\sin x}{4x}\right)$

حاول أن تحل (2) صفحة 44 : أوجد:

$a)\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{2\tan x}\right)$

$b)\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{3\tan x+\ x^2\cos x}{5x}\right)$

| اليوم | التاريخ | الحصة | الصف |
|---|---|---|---|
| ..... | / / ٢٠٢٢م | | / ١٢ع |
| الموضوع | ..... | | |

مثال (3) صفحة44 : أوجد:

$a)\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{5x+\sin x}{x}\right)$

$b)\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos x\tan x-2x\cos x}{3x}\right)$

| اليوم | التاريخ | الحصة | الصف |
|---|---|---|---|
| ..... | / / ٢٠٢٢م | | / ١٢ع |
| الموضوع | ..... | | |

حاول أن تحل (3) صفحة 45 : أوجد:

$a)\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{x\sin x - x^2}{3x^2}\right)$

$b)\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan 2x + 3x\cos 4x}{5x}\right)$

| اليوم | التاريخ | الحصة | الصف |
|---|---|---|---|
| ..... | / / ٢٠٢٢م | | ١٢ع / |
| الموضوع | ..... | | |

## (5 – 1) تمارين متابعة الاتصال عند نقطة

**تعريف (٨): "الاتصال عند نقطة"**

تكون الدالة $f$ متصلة عند $x = c$ في مجالها إذا كانت: $\lim\limits_{x \to c} f(x) = f(c)$

أي أن: $\lim\limits_{x \to c^-} f(x) = \lim\limits_{x \to c^+} f(x) = f(c)$

**نتائج:**

١) تكون الدالة متصلة من جهة **اليسار** عند $x = c$: إذا كان $\lim\limits_{x \to c^-} f(x) = f(c)$

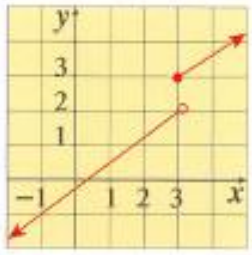
٢) تكون الدالة متصلة من جهة **اليمين** عند $x = c$: إذا كان $\lim\limits_{x \to c^+} f(x) = f(c)$

٣) تكون الدالة متصلة عند $x = c$ **إذا وفقط إذا** كانت متصلة من **اليسار** ومن **اليمين** عند $x = c$

---

**تدريب**

1

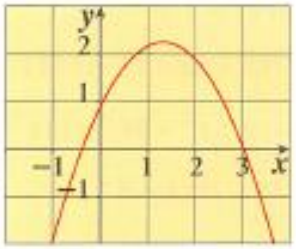


$\lim\limits_{x \to 3} f(x)$ .....

$f(3)$ .....

ماذا تلاحظ؟

2

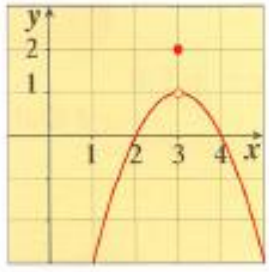


$\lim\limits_{x \to 3} f(x)$ .....

$f(3)$ .....

ماذا تلاحظ؟

3

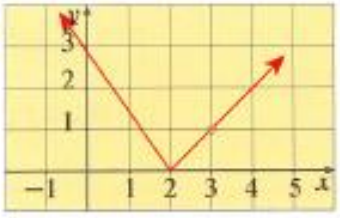


$\lim\limits_{x \to 3} f(x)$ .....

$f(3)$ .....

ماذا تلاحظ؟

4



$\lim\limits_{x \to 3} f(x)$ .....

$f(3)$ .....

ماذا تلاحظ؟

| اليوم | التاريخ | الحصة | الصف |
|---|---|---|---|
| ..... | / / ٢٠٢٢م | | ١٢ع / |
| الموضوع | ..... | | |

---

مثال (1) صفحة 49 : لتكن $f$:

$$f(x)=\begin{cases} x^2+3x : x \geq 1 \\ 5x-1 : x<1 \end{cases}$$

ابحث اتصال الدالة $f$ عند $x=1$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

حاول أن تحل (1) صفحة 50 : لتكن $f$:

$$f(x)=\begin{cases} x^3+x : x\le 0 \\ \frac{x^2}{x+1} : x>0 \end{cases}$$

ابحث اتصال الدالة $f$ عند $x=0$

مثال (2) صفحة 50 : لتكن $f$:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-9}{x-3} & : x>3\\ 7 & : x\le 3\end{cases}$$

ابحث اتصال الدالة $f$ عند $x=3$

حاول أن تحل (2) صفحة 50 : ابحث اتصال الدالة $f$ عند $x = 2$ . حيث :

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1 : x < 2 \\ 1 \quad\quad : x = 2 \\ x^2 + 1 : x > 2 \end{cases}$$

مثال (3) صفحة 51 : ابحث اتصال الدالة $f$ عند $x = 2$ . حيث : $f(x) = \begin{cases} \frac{x-2}{|x-2|} & : x \neq 2 \\ 1 & : x = 2 \end{cases}$

حاول أن تحل (3) صفحة 51 : ابحث اتصال الدالة $f$ عند $x=-1$ . حيث : $f(x)=\begin{cases}\frac{|x+1|}{x+1}-2x & : x\neq -1\\ 2 & : x=-1\end{cases}$

كراسة التمارين (8) صفحة 19 : ابحث اتصال الدالة $f$ عند $x = 0$ . حيث : $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 3x}{|x|} & : x \neq 2 \\ -3 & : x = 0 \end{cases}$

## (6 – 1) تمارين متابعة نظريات الاتصال عند نقطة

**نظرية ١٤:** إذا كانت $f.g$ دالتين متصلتين عند $x = c$ ، فإن الدوال التالية هي دوال متصلة عند $x = c$

الطرح : $2)\ f - g$ الجمع : $1)\ f + g$

الضرب : $4)\ f \cdot g$ الضرب في ثابت : $c \in \mathbf{R}$ . $3)\ c.f$

القسمة : $g(c) \neq 0$ $5)\ \frac{f}{g}$

---

**دوال متصلة:**

١) الدالة الثابتة: $k \in \mathbf{R}$ . $f(x) = k$ متصلة عند كل عدد $c \in \mathbf{R}$.

٢) الدالة كثيرة الحدود متصلة عند كل عدد $c \in \mathbf{R}$.

٣) الدالة الحدودية النسبية متصلة عند كل عدد حقيقي في مجالها $c \in \mathbf{D}$.

٤) دالة المطلق $f(x) = |x|$ متصلة عند كل عدد $c \in \mathbf{R}$.

٥) الدوال المثلثية متصلة عند كل عدد حقيقي في مجالها $c \in \mathbf{D}$.

٦) **الدالة الجذرية** $y = \sqrt[n]{x}$ :

a) متصلة عند كل عدد $c \in \mathbf{R}^+$ ، $n$ عدد صحيح زوجي موجب.

b) متصلة عند كل عدد $c \in \mathbf{R}$ ، $n$ عدد صحيح فردي أكبر من ١.

٧) **الدالة الجذرية** $g(x) = \sqrt{f(x)}$ : **إذا كانت الدالة** $f$ **متصلة عند** $x = c$ **وكانت** $f(c) > 0$

فإن الدالة: $g(x) = \sqrt{f(x)}$ متصلة عند $x = c$

نظرية ١٥

مثال (1) صفحة55 : ابحث اتصال الدالة f عند $x = c$ في كل مما يلي:

$a)\ f(x) = x^2 + |x|\ , c = -1$ $b)\ f(x) = \sin x - \cos x\ , c = \frac{\pi}{2}$

حاول أن تحل (1) صفحة 55 : ابحث اتصال الدالة f عند $x = c$ في كل مما يلي:

$a)\ f(x) = x^2 - 4x + 3 + |x|\ , c = 3$

$b)\ f(x) = \frac{\tan x}{x+1}\ , c = \frac{\pi}{4}$

مثال (2) صفحة 55 : ابحث اتصال الدالة $f$ : $f(x)=\frac{x-2}{x^2+9}-\frac{1}{x}$ عند $x=3$ .

حاول أن تحل (2) صفحة 55 : ابحث اتصال الدالة $f$ : $f(x)=\frac{x^2-1}{x^2+1}-\frac{2x}{x-2}$ عند $x=1$ .

| اليوم | التاريخ | الحصة | الصف |
|---|---|---|---|
| ..... | / / ٢٠٢٢م | | / ع ١٢ |
| الموضوع | ..... | | |

مثال (3) صفحة 56 : ابحث اتصال الدالة كل من الدالتين عند العدد المبين :

$a)\ f(x)=\frac{\sqrt[3]{x}}{x^2+1}\ ,\ c=1$ $b)\ f(x)=\sqrt{x+3}\ ,\ c=-1$

حاول أن تحل (3) صفحة 56 : ابحث اتصال الدالة كل من الدالتين عند $x = -2$ :

$a)\ f(x) = \frac{\sqrt[3]{x}}{x^2+4}$

$b)\ f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 3}$

## الدالة المركبة:

إذا كانت كل من $f, g$ دالتين حقيقيتين وكان مدى الدالة $f$ مجموعة جزئية من مجال الدالة $g$ فإنه يتعين دالة مركبة $h$:

$$h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x))$$

نظرية ١٦: إذا كانت $f$ دالة متصلة عند $x = c$ ، و $g$ متصلة عند $f(c)$ .

فإن الدالة المركبة $g \circ f$ هي دوال متصلة عند $x = c$

ملاحظة: $(g \circ f)(c) \neq (f \circ g)(c)$ إلا في بعض الحالات الخاصة

مثال (4) صفحة 58 : الدالتين f ، g معرفتان على R كما يلي: $g(x) = x^2 + 1$ , $f(x) = 1 + x$ أوجد :

$a)\ (gof)(x)$ , $b)\ (gof)(2)$ , $c)\ (fog)(x)$ , $d)\ (fog)(2)$

| اليوم | التاريخ | الحصة | الصف |
|---|---|---|---|
| ..... | / / ٢٠٢٢م | | ١٢ع / |
| الموضوع | ..... | | |

حاول أن تحل (4) صفحة 58 : الدالتين f ، g معرفتان على R كما يلي: $g(x) = x^2 + 3$ ، $f(x) = 2x + 3$ أوجد :

$a)\ (gof)(x)$ ، $b)\ (gof)(-1)$ ، $c)\ (fog)(x)$ ، $d)\ (fog)(-1)$

مثال (5) صفحة58 : لتكن: $g(x) = x^4 + 2$ ، $f(x) = \sqrt{x}$ أوجد :

$a)\ (fog)(x)$ ، $b)\ (fog)(0)$ ، $c)\ (gof)(x)$ ، $d)\ (gof)(0)$

حاول أن تحل (5) صفحة 59 : الدالتين $f$ ، $g$ معرفتان على $R$ كما يلي: $g(x) = \frac{3}{x^2+4}$ , $f(x) = \sqrt{1+x^2}$ أوجد :

$a)\ (fog)(x)$ $b)\ (gof)(\sqrt{3})$

مثال (6) صفحة59 : لتكن: $f(x) = x^2 + 5$ , $g(x) = \sqrt{x}$ .

ابحث اتصال الدالة $gof$ عند $x = -2$ .

حاول أن تحل (6) صفحة 60 : لتكن: $g(x) = 2x + 3$ ، $f(x) = \frac{|x|}{x+2}$ .

ابحث اتصال الدالة $fog$ عند $x = 1$ .

مثال (7) صفحة 60 : لتكن : $f(x) = |x^2 - 5x + 6|$

ابحث اتصال الدالة $f$ عند $x = 2$ .

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

حاول أن تحل (7) صفحة 60 : لتكن : $f(x) = |x^2 - 3x + 2|$

ابحث اتصال الدالة $f$ عند $x = 0$ .

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

## (7 – 1) تمارين متابعة الاتصال على فترة

**تعريف (٩):** "الاتصال على فترة مفتوحة"

لتكن الدالة $f$ معرّفة على الفترة $(a.b)$ فإننا نقول إن الدالة $f$ متصلة على الفترة المفتوحة $(a,b)$ إذا كانت $f$ متصلة عند كل $x$ تنتمي إلى الفترة $(a.b)$

**تعريف (١٠):** "الاتصال على فترة مغلقة"

لتكن الدالة $f$ معرّفة على الفترة $[a.b]$ فإننا نقول إن الدالة $f$ متصلة على الفترة المغلقة $[a.b]$ إذا تحققت الشروط الثلاثة التالية:

١) الدالة $f$ متصلة على الفترة المفتوحة $(a.b)$

٢) الدالة $f$ متصلة عند $x = a$ من جهة اليمين أي أن: $\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$

٣) الدالة $f$ متصلة عند $x = b$ من جهة اليسار أي أن: $\lim_{x\to b^+} f(x) = f(b)$

مثال (1) صفحة 62 : ادرس اتصال الدالة $f$ على الفترة $[1,3]$ حيث.

$$f(x)=\begin{cases} -2 & : \quad x=1 \\ x^2-3 & : \quad 1<x<3 \\ 6 & : \quad x=3 \end{cases}$$

حاول أن تحل (1) صفحة 62 : ادرس اتصال الدالة $f$ على الفترة $[1,5]$ حيث.

$$f(x)=\begin{cases}2 & : \quad x=1\\ \frac{x^2+1}{x} & : \quad 1<x<5\\ \frac{26}{5} & : \quad x=5\end{cases}$$

| اليوم | التاريخ | الحصة | الصف |
|---|---|---|---|
| ..... | / / ٢٠٢٢م | | / ع ١٢ |
| الموضوع | ..... | | |

مثال (2) صفحة 63 : ابحث اتصال كل من الدوال التالية على الفترة المبينة:

$a)\ f(x)=\frac{x}{x^2+1}\ ,[-1,5]$ $b)\ f(x)=\frac{x}{x^2-4}\ ,[0,5]$

حاول أن تحل (2) صفحة 63 : ابحث اتصال الدالة $f$ على الفترة المبينة:

$a)\ f(x)=\frac{2x+1}{x^2+2}\ ,[\ 0\ ,3\ ]$

$b)\ f(x)=\frac{x}{x^2-1}\ ,[\ 0\ ,2\ ]$

مثال (3) صفحة 63 : ادرس اتصال الدالة $f$ على مجالها.

$$f(x)=\begin{cases} x+3 & : x \le -1 \\ \frac{4}{x+3} & : x > -1 \end{cases}$$

مثال (4) صفحة63 : لتكن الدالة $f$ متصلة على $R$ .

$$f(x)=\begin{cases} x^2-a & : x<0 \\ 2 & : x=0 \\ ax+b & : x>0 \end{cases}$$

أوجد قيمة الثابتين a ، $b$ .

| اليوم | التاريخ | الحصة | الصف |
|---|---|---|---|
| ..... | / / ٢٠٢٢م | | / ١٢ع |
| الموضوع | ..... | | |

حاول أن تحل (4) صفحة 65 : لتكن الدالة $f$ متصلة على $[1,4]$ .

$$f(x)=\begin{cases}5 & : x=1\\ ax+b & : 1<x<4\\ b+8 & : x=4\end{cases}$$

أوجد قيمة الثابتين a ، $b$ .

مثال (5) صفحة65 : لتكن الدالة $f$ : $f(x)=\sqrt{x^2-2x}$ .

أوجد مجال الدالة $f$ ( $D_f$ ) ثم ادرس اتصالها على الفترة $[-5\ ,\ 0]$ .

حاول أن تحل (5) صفحة 66 : لتكن الدالة $f$ : $f(x)=\sqrt{x^2-7x+10}$ .

أوجد $D_f$ (مجال الدالة $f$) ثم ادرس اتصالها على الفترة $[6\ ,\ 10]$ .

مثال (6) صفحة 66 : لتكن الدالة $f$ : $f(x)=\sqrt{9-x^2}$ . ادرس اتصال الدالة $f$ على الفترة $[-3\ ,\ 3]$ .

حاول أن تحل (6) صفحة 66 : لتكن الدالة $f$ : $f(x)=\sqrt{-x^2+4x-3}$ . ادرس اتصال الدالة $f$ على الفترة $[1\ ,\ 3]$

مثال (7) صفحة 67 : لتكن الدالة $f$ : $f(x)=\sqrt[3]{x^2-5x+4}$ . ادرس اتصال الدالة $f$ على $R$ .

حاول أن تحل (7) صفحة 67 : لتكن الدالة $f$ : $f(x)=\sqrt[3]{-x^2+2x+5}$ . ادرس اتصال الدالة $f$ على $R$ .

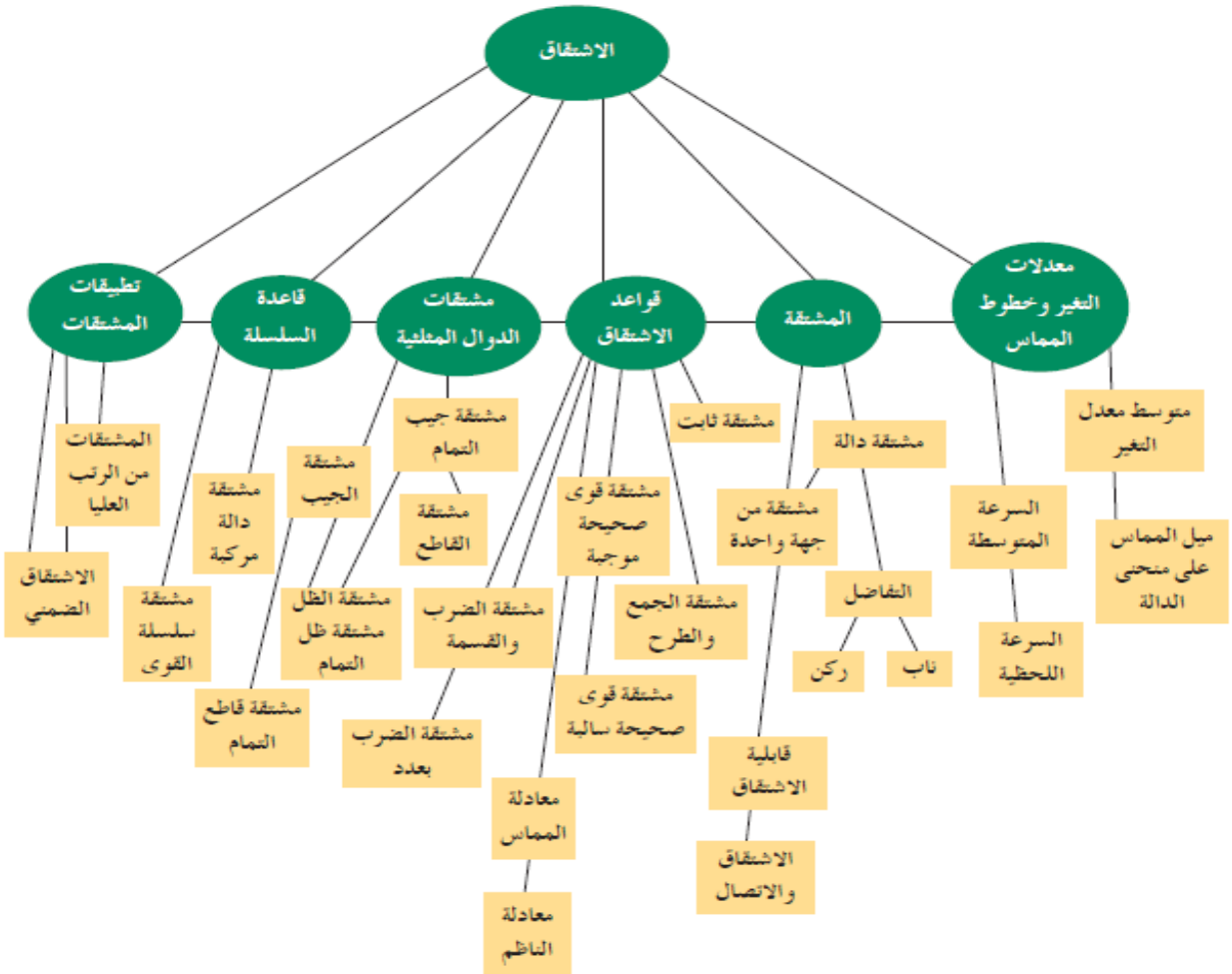
# الكتاب الاول

"مادة الرياضيات"

# الوحدة الثانية

# الاشتقاق

# The Derivatives




| معدلات التغير وخطوط المماس | المشتقة | قواعد الاشتقاق | مشتقات الدوال المثلثية | قاعدة السلسلة | المشتقات ذات الرتب العليا والاشتقاق الضمني |
|---|---|---|---|---|---|
| 2–1 | 2–2 | 2–3 | 2–4 | 2–5 | 2–6 |

رئيس القسم: محمود حامد العلو

| اليوم | التاريخ | الحصة | الصف |
|---|---|---|---|
| ..... | / / ٢٠٢٢م | | ١٢ع / |
| الموضوع | ..... | | |

# أوراق متابعة الوحدة الثانية (الاشتقاق)

## (1 – 2) تمارين متابعة معدلات التغير وخطوط المماس

متوسط معدل التغير للدالة $y$ بين نقطتين $(x_1.f(x_1)).(x_2.f(x_2))$:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$$

ميل المماس للمنحنى عند النقطة $P(a.f(a))$:

$$m=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

---

مثال (1) صفحة 77 : أوجد ميل المماس للقطع المكافئ: $y=x^2$ . عند النقطة $p\ (2,4)$ .

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

| اليوم | التاريخ | الحصة | الصف |
|---|---|---|---|
| ..... | / / ٢٠٢٢م | | ١٢ع / |
| الموضوع | ..... | | |

حاول أن تحل (1) صفحة 78 : أوجد ميل المماس للقطع المكافئ: $y = (x-2)^2 + 2$ . عند النقطة $A(1, 3)$ .

## (2 – 2) تمارين متابعة المشتقة عند نقطة

تعريف: "مشتقة الدالة عند نقطة"

مشتقة الدالة $f$ عند $x = a$ هي $f'(a)$ :

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

شرط وجود النهاية.

---

مثال (1) صفحة 80 : باستخدام التعريف، أوجد مشتقة الدالة $f$ : $f(x) = 2x^2 + 1$ . عند $x = 1$ .

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

| اليوم | التاريخ | الحصة | الصف |
|---|---|---|---|
| ..... | / / ٢٠٢٢م | | ١٢ع / |
| الموضوع | ..... | | |

حاول أن تحل (1) صفحة 80 : باستخدام التعريف، أوجد مشتقة الدالة $f$ : $f(x) = 3x^2$ . عند $x = -2$ .

تعريف بديل:

مشتقة الدالة $f$ عند $x = a$ هي $f'(a)$ :

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

شرط وجود النهاية.

---

مثال (2) صفحة 80 : باستخدام التعريف البديل، أوجد مشتقة الدالة $f$ : $f(x) = \sqrt{x}$ . عند $x = a$ حيث $a > 0$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

| اليوم | التاريخ | الحصة | الصف |
|---|---|---|---|
| ..... | / / ٢٠٢٢م | | ١٢ع / |
| الموضوع | ..... | | |

حاول أن تحل (2) صفحة 81 : باستخدام التعريف البديل، أوجد مشتقة الدالة $f$ : $f(x)=\frac{1}{x}$ . عند $x=b$ حيث $b\neq 0$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

## المشتقّة من جهة واحدة

مشتقة الدالة $f$ من اليمين ويرمز لها "إن وجدت" بالرمز $f'_+(a)$ وهي:

$$f'_+(a) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

مشتقة الدالة $f$ من اليسار ويرمز لها "إن وجدت" بالرمز $f'_-(a)$ وهي:

$$f'_-(a) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

إن الدالة لها مشتقة عند نقطة إذا وفقط إذا كانت المشتقتان لجهة اليمين ولجهة اليسار موجودتين ومتساويتين عند تلك النقطة.

---

مثال (3) صفحة 81 : بيّن أن الدالة $f$ لها مشتقة لجهة اليمين ومشتقة لجهة اليسار عند $x=0$ ، لكن ليس لها مشتقة عند $x=0$ .

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & : x \le 0 \\ 2x & : x > 0 \end{cases}$$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

حاول أن تحل (3) صفحة 82 : لتكن الدالة $f$ : $f(x) = |x - 2|$ . ابحث قابلية اشتقاق الدالة $f$ عند $x = 2$ .

إذا وضعنا $x$ بدلًا من $a$ في تعريف المشتقة عند النقطة نحصل على $f'(x)$ حيث:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

مثال (5) صفحة 83 : لتكن الدالة: $f(x) = x^3$ ، أوجد $f'(x)$ باستخدام تعريف المشتقة إن وجدت.

حاول أن تحل (5) صفحة 84 : لتكن الدالة: $f(x) = x^2 + 2$ ، أوجد $f'(x)$ باستخدام تعريف المشتقة.

## نظرية: "الاشتقاق والاتصال"

إذا كانت الدالة $f$ لها مشتقّة عند نقطة، فإنّها تكون متّصلة عند هذه النقطة "عكس النظرية ليس صحيح دائماً".

مثال (6) صفحة 85 : لتكن الدالة $f$ :

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & : \ x<2 \\ 2x-1 & : \ x\geq 2 \end{cases}$$

ابحث قابلية الاشتقاق للدالة $f$ عند $x=2$ .

| اليوم | التاريخ | الحصة | الصف |
|---|---|---|---|
| ..... | / / ٢٠٢٢م | | ١٢ع / |
| الموضوع | ..... | | |

حاول أن تحل (6) صفحة 86 : لتكن الدالة $f$ :

$$f(x)=\begin{cases} x^2-4 & : \ x\le 2 \\ 3x-2 & : \ x>2 \end{cases}$$

ابحث قابلية الاشتقاق للدالة $f$ عند $x=2$ .

مثال (9) صفحة89 : لتكن الدالة $f$ :

$$f(x)=\begin{cases} x+5 & : \ x \le 3 \\ x^2-1 & : \ x > 3 \end{cases}$$

أوجد إن أمكن $f'(3)$ .

حاول أن تحل (9) صفحة 89 : لتكن الدالة $f$ :

$$f(x)=\begin{cases} x^2+x & : \ x\le -1 \\ x^2-x-2 & : \ x>-1 \end{cases}$$

أوجد إن أمكن $f'(-1)$ .

| اليوم | التاريخ | الحصة | الصف |
|---|---|---|---|
| ..... | / / ٢٠٢٢م | | / ١٢ع |
| الموضوع | ..... | | |

## (3 – 2) تمارين متابعة قواعد الاشتقاق

### قواعد الاشتقاق:

1) $f(x) = c \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = 0 \quad ; \quad c \in \mathbf{R}$

2) $f(x) = x^n \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = n.x^{n-1} \quad ; \quad n \in \mathbf{Q}^* \ . \ x \neq 0$

3) $[k\,f(x)]' = k\,f'(x)$

4) $[f(x) + g(x)]' = f'(x) + g'(x)$

5) $[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

6) $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2} \quad ; \quad g(x) \neq 0$

---

مثال (1) صفحة 92 : أوجد $\frac{dy}{dt}$ ، حيث: $y = t^3 + 6t^2 - \frac{5}{3}t + 16$ .

.....

.....

.....

.....

.....

.....

حاول أن تحل (1) صفحة 92 : أوجد $\frac{dy}{dx}$ ، حيث: $y = 5x^3 - 4x^2 + 6$ .

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

مثال (2) صفحة 93 : أوجد $f'(x)$ إذا كان : $f(x) = (x^2 + 1)(x^3 + 3)$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

حاول أن تحل (2) صفحة 93 : أوجد $f'(x)$ :

1 ) $f(x) = (2x + 1)(3x - 2)$ 2 ) $f(x) = 4x^2(x + 6)$ 3 ) $f(x) = (x^3 - 4)^2$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

مثال (3) صفحة 94 : أوجد مشتقة الدالة: $f(x) = \frac{x^3-1}{5x^2+1}$ .

حاول أن تحل (3) صفحة 95 : أوجد مشتقة الدالة: $f(x) = \frac{4x^2+2x}{2x^3+5}$ .

## معادلة المماس ومعادلة العمودي (الناظم):

- ميل المماس عند $a$ هو $m = f'(a)$

- معادلة المماس لمنحنى الدالة $f$ عند $a$: $y - f(a) = f'(a)(x - a)$

- معادلة الناظم لمنحنى الدالة $f$ عند $a$: $y - f(a) = \frac{-1}{f'(a)}(x - a)$

- إذا كان للدالة $f$ مماس أفقي عند $a$ فإن: $f'(a) = 0$

مثال (4) صفحة 95 : أوجد معادلة المماس ومعادلة الناظم عند النقطة $(1, \frac{2}{3})$ لمنحنى الدالة: $f(x) = \frac{x^3+1}{x^2+2}$ .

حاول أن تحل (4) صفحة 96 : أوجد معادلة المماس ومعادلة الناظم على منحنى الدالة $f$ حيث : $f(x) = \frac{x-1}{x+2}$ عند النقطة $(1, 0)$

مثال (5) صفحة 96 : أوجد $f'(x)$ حيث: $f(x) = \frac{3}{x^2 + 1}$

حاول أن تحل (5) صفحة 96 : أوجد $f'(x)$ حيث: $f(x) = \frac{-4}{x^2 + 2x + 5}$

مثال (6) صفحة 97 : لتكن : $y = \frac{x^2+3}{2x}$ أوجد $\frac{dy}{dx}$ عند $x = 1$ .

حاول أن تحل (6) صفحة 98 : لتكن : $y = \frac{3x^2+7}{8x^2}$ أوجد $\frac{dy}{dx}$ عند $x = -1$ .

مثال (7) صفحة 98 : أوجد مشتقة الدالة: $f(x) = x^{\frac{3}{2}} \ , x > 0$ .

حاول أن تحل (7) صفحة 98 : أوجد مشتقة الدالة: $f(x) = x^{\frac{4}{3}}$ .

مثال (8) صفحة98 : لتكن الدالة $f$ : $f(x)=\begin{cases} x^2+2 & : x\le 1 \\ 2x+1 & : x>1 \end{cases}$ دالة متصلة على مجالها.

أوجد $f'(x)$ إن أمكن.

حاول أن تحل (8) صفحة 99 : لتكن الدالة $f$ : $a)\ f(x)=\begin{cases} x^2+1 & : x\le 2 \\ 4x-3 & : x>2 \end{cases}$ دالة متصلة على مجالها.

أوجد $f'(x)$ إن أمكن:

تابع حاول أن تحل (8) صفحة 99 : لتكن الدالة $f$ :

$b)\ f(x)=\begin{cases} x^2+1 & : x<1 \\ 2\sqrt{x} & : x\geq 1 \end{cases}$ دالة متصلة على مجالها.

أوجد $f'(x)$ إن أمكن.

| اليوم | التاريخ | الحصة | الصف |
|---|---|---|---|
| ..... | / / ٢٠٢٢م | | / ١٢ع |
| الموضوع | ..... | | |

## (4 – 2) تمارين متابعة مشتقات الدوال المثلثية

$(\sin x)' = \cos x$ . $(\sec x)' = \sec x \tan x$

$(\cos x)' = -\sin x$ . $(\csc x)' = -\csc x \cot x$

$(\tan x)' = sec^2 x$ . $(\cot x)' = -\csc^2 x$

مثال (1) صفحة 100 : أوجد المشتقات للدوال التالية:

$a)\ y = x^2 sinx$ $b)\ u = \frac{\cos x}{1-sin\, x}$ $c)\ f(x) = sin^2 x$

| اليوم | التاريخ | الحصة | الصف |
|---|---|---|---|
| ..... | / / ٢٠٢٢م | | / ١٢ع |
| الموضوع | ..... | | |

حاول أن تحل (1) صفحة 101 : أوجد المشتقات للدوال التالية:

$a)\ h(x) = cos^2 x$ $\quad$ $b)\ g(x) = \frac{x}{cos\ x}$ $\quad$ $c)\ y = \frac{sin\ x}{sin\ x + cos\ x}$

| اليوم | التاريخ | الحصة | الصف |
|---|---|---|---|
| ..... | / / ٢٠٢٢م | | ١٢ع / |
| الموضوع | ..... | | |

---

مثال (2) صفحة 102 : أوجد مشتقات للدوال التالية:

$a)\ f(x) = \tan x + \cot x$

$b)\ g(x) = \sec x\,.\,(1 + \sin x)$

$c)\ h(x) = \csc x + \sin x\,.\tan x$

| اليوم | التاريخ | الحصة | الصف |
|---|---|---|---|
| ..... | / / ٢٠٢٢م | | / ع١٢ |
| الموضوع | ..... | | |

حاول أن تحل (2) صفحة 102 : أوجد مشتقات للدوال التالية:

$a)\ f(x) = \frac{1+\tan x}{\tan x}$

$b)\ g(x) = \sec x + \csc x$

$c)\ h(x) = \frac{\sec x}{\csc x}$

مثال (3) صفحة102 : أوجد معادلة المستقيم العمودي لمنحنى الدالة: $y = \tan x$ عند النقطة $p(\frac{\pi}{4}, 1)$ .

حاول أن تحل (3) صفحة 102 : أوجد معادلة المستقيم العمودي لمنحنى الدالة: $y = \sec x$ عند النقطة $F(\frac{\pi}{3}, 2)$ .

| اليوم | التاريخ | الحصة | الصف |
|---|---|---|---|
| ..... | / / ٢٠٢٢م | | / ١٢ع |
| الموضوع | ..... | | |

## تمارين متابعة قاعدة السلسلة (5 – 2)

قاعدة السلسلة (التسلسل) $(f \circ g)'(x) = [f(g(x))]' = f'(g(x)).g'(x)$

- صورة أخرى لقاعدة السلسلة: $u = g(x)$ . $y = f(u)$ فإن:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}.\frac{du}{dx}$$

- قاعدة سلسلة القوى: $\frac{d}{dx}(f(x))^n = n(f(x))^{n-1}.f'(x)$

---

مثال (1) صفحة 104 : إذا كان: $g(x) = x^{10}$ . $f(x) = 3x^2 + 1$ . فأوجد باستخدام قاعدة السلسلة:

$a)$ $(f \circ g)'(x)$ $b)$ $(g \circ f)'(-1)$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

| اليوم | التاريخ | الحصة | الصف |
|---|---|---|---|
| ..... | / / ٢٠٢٢م | | / ١٢ع |
| الموضوع | ..... | | |

حاول أن تحل (1) صفحة 104 : لتكن $g(x) = x^{13}$ . $f(x) = -2x^3 + 4$ . أوجد باستخدام قاعدة السلسلة:

$a)\ (g \circ f)'(0)$ $b)\ (f \circ g)'(x)$

| اليوم | التاريخ | الحصة | الصف |
|---|---|---|---|
| ..... | / / ٢٠٢٢م | | / ١٢ع |
| الموضوع | ..... | | |

مثال (2) صفحة104 : لتكن: $g(x)=x^2+1$ , $f(x)=\frac{2x+1}{x}$ $(x\neq 0)$ . أوجد باستخدام قاعدة السلسلة: $(f\circ g)'(x)$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

حاول أن تحل (2) صفحة 105 : لتكن: $g(x)=\sqrt{x}$ . $f(x)=\frac{x^2-4}{x^2+4}$ . أوجد باستخدام قاعدة السلسلة: $(f\circ g)'(1)$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

مثال (3) صفحة105 : لتكن: $y = u^3 - 3u + 1$ ، $u = 5x^2 + 2$ . أوجد: $\frac{dy}{dx}$ باستخدام قاعدة التسلسل.

حاول أن تحل (3) صفحة 105 : لتكن: $y = u^2 + 4u - 3$ ، $u = 2x^3 + x$ . أوجد: $\frac{dy}{dx}$ باستخدام قاعدة التسلسل.

مثال (6) صفحة 107 : لتكن: $y = \sqrt[5]{(x^2 + 3x + 5)^3}$ ، أوجد: $y'$

حاول أن تحل (6) صفحة 107 : لتكن: $y = \sqrt[4]{(2x^4 - 3x^2 + 4)^3}$ ، أوجد: $y'$

مثال (7) صفحة107 : أوجد ميل مماس المنحنى: $y = sin^5 x$ ، عند $x = \frac{\pi}{3}$

## (6 – 2) تمارين متابعة المشتقات ذات الرتب العليا والاشتقاق الضمني

مثال (1) صفحة 109 : أوجد مشتقات حتى الرتبة الرابعة للدالة: $y = 2x^7 - 4x^2 + 3x - 5$ بدلالة المتغير $x$ .

حاول أن تحل (1) صفحة 109 : إذا كانت: $y = 4x^5 - 5x^3 + 7$ . فأوجد المشتقات حتى الرتبة الثالثة.

مثال (2) صفحة109 : إذا كانت: $y = \sin x$ ، بين ان: $y^{(4)} = y$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

حاول أن تحل (2) صفحة 109 : لتكن الدالة: $y = \cos x$ ، بين ان: $y^{(4)} + y'' = 0$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

مثال (3) صفحة 110 : أوجد $y''$ حيث $y = \frac{1}{\cos x}$ .

حاول أن تحل (3) صفحة 110 : أوجد $y''$ حيث $y = \frac{1}{\sin x}$ .

مثال (4) صفحة111 : أوجد: $y' = \frac{dy}{dx}$ في الحالات التالية:

$a)\ y^2 + xy = 7x$ $b)\ y = x + x^2y^5$

حاول أن تحل (4) صفحة 112 : لتكن: $y^2 = x^2 - 2x$ ، أوجد: $y' = \frac{dy}{dx}$ .

مثال (5) صفحة 112 : أوجد ميل المماس للمنحنى ( الدائرة ) الذي معادلته: $x^2 + y^2 = 25$ عند النقطة $(3, -4)$ .

حاول أن تحل (5) صفحة 112 : أوجد ميل المماس للمنحنى الذي معادلته: $x^2 - y^2 + yx - 1 = 0$ عند النقطة $(1, 1)$ .

مثال (6) صفحة113 : أوجد ميل المماس ( $\frac{dy}{dx}$ ) للمنحنى الذي معادلته: $2y = x^2 + \sin y$ عند النقطة $(2\sqrt{\pi}, 2\pi)$ .

حاول أن تحل (6) صفحة 113 : أوجد ميل المماس ( $\frac{dy}{dx}$ ) للمنحنى الذي معادلته: $x^2 + y^2 - 2xy = 1$ حيث $x \neq y$

عند النقطة $(1, 2)$ .

مثال (7) صفحة113 : للمنحنى الذي معادلته: $2\sqrt{y} + y = x$ . أوجد $y'$ .

ثم أوجد ميل المماس لهذا المنحنى عند النقطة $(1, 3)$ .

حاول أن تحل (7) صفحة 114 : للمنحنى الذي معادلته: $y^2 + \sqrt{y} + x^2 = 3$ . أوجد $y'$ .

ثم أوجد ميل المماس لهذا المنحنى عند النقطة $(1, 1)$ .

مثال (8) : صفحة114 إذا كانت: $y = \sqrt{1-2x}$ . فأثبت ان: $y\,y'' + (y')^2 = 0$ .

| اليوم | التاريخ | الحصة | الصف |
|---|---|---|---|
| ..... | / / ٢٠٢٢م | | ١٢ع / |
| الموضوع | ..... | | |

حاول أن تحل (8) صفحة 114 : إذا كانت: $y = x \sin x$ ، فأثبت ان: $y''' + y' + 2\sin x = 0$ .

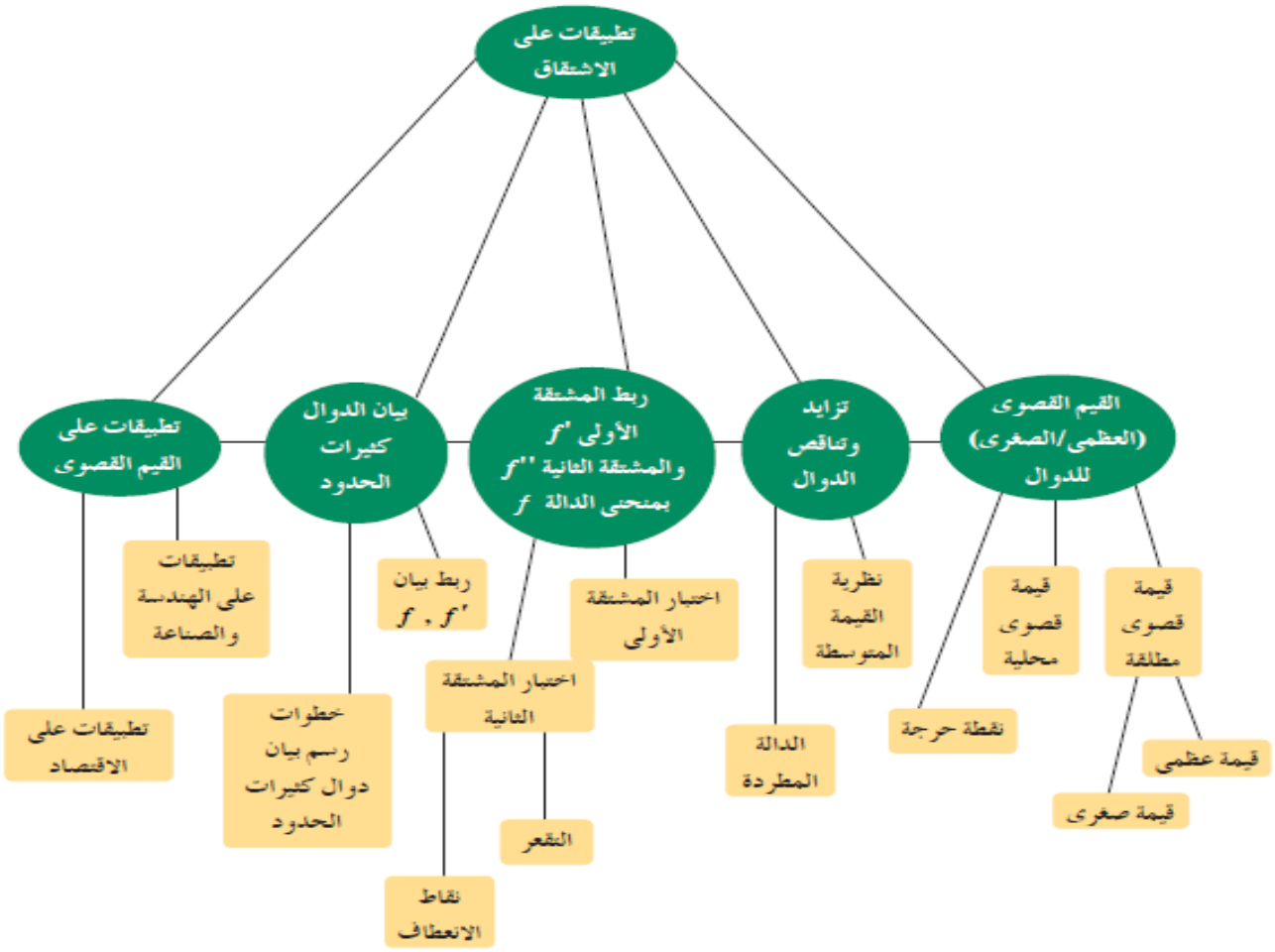
# الكتاب الاول

"مادة الرياضيات"

# الوحدة الثالثة

# تطبيقات على الاشتقاق

# Applications on Differentiation





| القيم القصوى (العظمى/الصغرى) للدوال | تزايد وتناقص الدوال | ربط المشتقة الأولى f' والمشتقة الثانية f'' بمنحنى الدالة f | رسم بيان دوال كثيرات الحدود | تطبيقات على القيم القصوى |
|---|---|---|---|---|
| 3–1 | 3–2 | 3–3 | 3–4 | 3–5 |



رئيس القسم: محمود حامد العلو

# أوراق متابعة الوحدة الثالثة (تطبيقات على الاشتقاق)

## (1 - 3) تمارين متابعة القيم القصوى للدوال

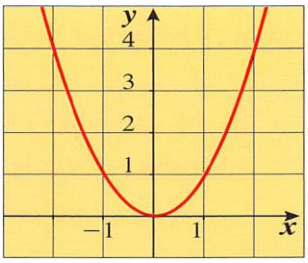
مثال (1) : صفحة 123

لتكن الدالة: $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ حيث $f(x) = x^2$ ، أوجد إن أمكن القيم القصوى للدالة $f$ مع رسم بيانها عندما:

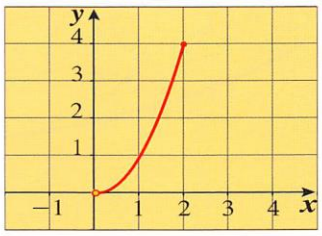
a $D = (-\infty, \infty)$ b $D = (0, 2]$ c $D = [0, 2]$ d $D = (0, 2)$

الحل:

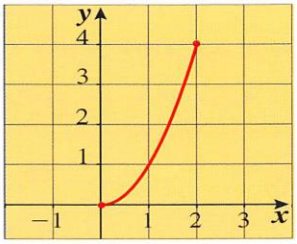
a

| القيم القصوى المطلقة للدالة $f$ على $D$ | المجال $D$ | بيان الدالة: $f(x) = x^2$ |
|---|---|---|
| لا توجد قيمة عظمى مطلقة.<br>توجد قيمة صغرى مطلقة تساوي 0<br>عند $x = 0$ | $(-\infty, \infty)$ | $y = x^2$  |

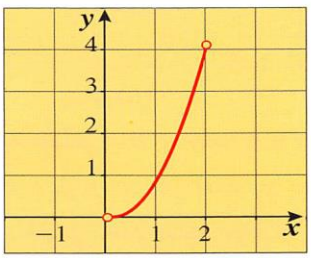
b

| | | |
|---|---|---|
| توجد قيمة عظمى مطلقة تساوي 4<br>عند $x = 2$<br>لا توجد قيمة صغرى مطلقة. | $(0, 2]$ | $y = x^2$  |

c

| | | |
|---|---|---|
| توجد قيمة عظمى مطلقة تساوي 4 عند $x = 2$<br>قيمة صغرى مطلقة تساوي 0 عند $x = 0$ | $[0, 2]$ | $y = x^2$  |

d

| | | |
|---|---|---|
| لا توجد قيم قصوى مطلقة. | $(0, 2)$ | $y = x^2$  |

لتكن $(c, f(c))$ نقطة داخلية للدالة $f$ ، $D$ فترة مفتوحة تحوي $c$ تكون $f(c)$ :

**a)** قيمة عظمى محلية عند $c$ عندما: $\forall x \in D \quad . \quad f(c) \geq f(x)$

**b)** قيمة صغرى محلية عند $c$ عندما: $\forall x \in D \quad . \quad f(c) \leq f(x)$

## تعريف "النقطة الحرجة":

**النقطة الداخليّة** للدالّة $f$ $(c, f(c))$ تسمى **نقطة حرجة** عندما $f'(c) = 0$ أو $f'(c)$ غير موجودة،

---

مثال (2) صفحة 125 : أوجد النقاط الحرجة للدالة: $a) \quad g(x) = x^3 - 3x^2 + 5$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

حاول أن تحل (2) صفحة 127 : أوجد النقاط الحرجة للدالة: $a)\ f(x) = x^4 - 4x^3 - 8x^2 + 10$

| اليوم | التاريخ | الحصة | الصف |
|---|---|---|---|
| ..... | / / ٢٠٢٢م | | ١٢ع / |
| الموضوع | ..... | | |

خطوات إيجاد القيم القصوى المطلقة على فترة مغلقة $[a\ ,b]$

١) إيجاد قيم الدالة عند النقاط الطرفية: $x=b$ . $x=a$

٢) إيجاد النقاط الحرجة للدالة $f$ في الفترة $(a\ ,b)$ إن وجدت.

٣) أكبر قيمة للدالة في الخطوتين ٢، ١ هي قيمة عظمى مطلقة في $[a\ ,b]$ وأصغر قيمة للدالة هي قيمة صغرى مطلقة في $[a\ ,b]$

---

مثال (3) صفحة128 : أوجد القيم القصوى المطلقة للدالة المتصلة $f$ : $f(x)=x^3-3x+1$ في الفترة $[\ 0\ ,3\ ]$ .

حاول أن تحل (3) صفحة 128 : أوجد القيم القصوى المطلقة للدالة المتصلة $f : f(x) = x^3 - 3x + 1$ في الفترة $[-2, 1]$ .

مثال (4) صفحة129 : أوجد القيم العظمى والصغرى المطلقة للدالة المتصلة $f$ : $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$ في الفترة $[\ -2\ ,\ 3\ ]$ .

حاول أن تحل (4) صفحة 129 : أوجد القيم العظمى والصغرى المطلقة للدالة المتصلة $f$ : $f(x) = \frac{1}{x^2}$ في الفترة $[\ 1\ ,\ 3\ ]$ .

| اليوم | التاريخ | الحصة | الصف |
|---|---|---|---|
| ..... | / / ٢٠٢٢م | | ١٢ع / |
| الموضوع | ..... | | |

## (2 – 3) تمارين متابعة تزايد وتناقص الدوال

### تزايد وتناقص الدوال:

**نظرية:**

لتكن $f$ دالة قابلة للاشتقاق على الفترة $(a,b)$:

١) إذا كانت: $\forall x \in (a,b)\ ,\ f'(x) > 0$ ،فإن الدالة $f$ تتزايد على $(a,b)$

٢) إذا كانت: $\forall x \in (a,b)\ ,\ f'(x) < 0$ ،فإن الدالة $f$ تتناقص على $(a,b)$

٣) إذا كانت: $\forall x \in (a,b)\ ,\ f'(x) = 0$ ،فإن الدالة $f$ ثابتة على $(a,b)$

---

مثال (3) صفحة 135: أوجد فترات التزايد وفترات التناقص للدالة: $f(x) = x^2 - 5x + 6$ .

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

حاول أن تحل (3) صفحة 135 : أوجد فترات التزايد وفترات التناقص للدالة: $f(x) = -x^2 + 4x - 3$ .

| اليوم | التاريخ | الحصة | الصف |
|---|---|---|---|
| ..... | / / ٢٠٢٢م | | ١٢ع / |
| الموضوع | ..... | | |

---

مثال (4) صفحة136 : لتكن الدالة $f : f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$ .

حدد الفترات حيث تكون $f$ متزايدة والفترات حيث تكون $f$ متناقصة .

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

حاول أن تحل (4) صفحة 136 : إذا كانت الدالة $f : f(x) = x^3 - 6x$ . حدد فترات التزايد وفترات التناقص للدالة $f$ .

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

مثال (5) صفحة137 : إذا كانت الدالة $f$ : $f(x)=\frac{x^2}{x-1}$ . حدد فترات التزايد وفترات التناقص للدالة $f$ .

حاول أن تحل (5) صفحة 137 : إذا كانت الدالة $f$ : $f(x) = \frac{x^2}{2x-1}$ . حدد فترات التزايد وفترات التناقص للدالة $f$ .

## (3 – 3) تمارين متابعة ربط المشتقة الأولى والمشتقة الثانية بمنحنى الدالة

**اختبار المشتقة الأولى للقيم القصوى المحلية:**

نظرية:

لتكن $f$ دالّة متّصلة على مجالها وكانت $(c, f(c))$ نقطة حرجة:

١) إذا كانت إشارة المشتقة $f'$ تتغير من الموجب إلى السالب عند $x = c$ ، فإن $f$ يكون لها قيمة **عظمى** محلية عند $c$.

٢) إذا كانت إشارة المشتقة $f'$ تتغير من السالب إلى الموجب عند $x = c$ ، فإن $f$ يكون لها قيمة **صغرى** محلية عند $c$.

٣) ذا لم تتغير إشارة المشتقة $f'$ عند $x = c$ ، فإن $f$ **لا يكون** لها قيم قصوى محلية عند $c$.

مثال (1) صفحة139 : إذا كانت الدالة $f$ : $f(x) = x^3 - 12x - 5$ . أوجد كلا مما يلي:

a) أوجد النقاط الحرجة للدالة.

b) الفترات التي تكون الدالة $f$ متزايد أو متناقصه عليها.

c) القيم القصوى المحليّة.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

| اليوم | التاريخ | الحصة | الصف |
|---|---|---|---|
| ..... | / / ٢٠٢٢م | | ١٢ع / |
| الموضوع | ..... | | |

حاول أن تحل (1) صفحة 140 : إذا كانت الدالة $f$ : $f(x) = -x^3 + 3x^2 - 4$ . أوجد كلا مما يلي:

a) أوجد النقاط الحرجة للدالة.

b) الفترات التي تكون الدالة $f$ متزايد أو متناقصه عليها.

c) القيم القصوى المحليّة.

## اختبار التقعر:

**a)** إذا كانت $\forall\, x \in I$ , $f''(x) > 0$ فإن منحنى الدالة $f$ مقعراً للأعلى على $I$

**b)** إذا كانت $\forall\, x \in I$ , $f''(x) < 0$ فإن منحنى الدالة $f$ مقعراً للأسفل على $I$

## تعريف نقطة الانعطاف:

تسمى النقطة $(c, f(c))$ نقطة انعطاف لمنحنى الدالة $f$ إذا كانت $f$ دالة متصلة عند $c$ ، ومنحنى الدالة $f$ يغيّر تقعّره عند هذه النقطة من أعلى إلى أسفل أو من أسفل إلى أعلى.

---

مثال (3) صفحة 143 : أوجد فترات التقعر ونقاط الانعطاف لمنحنى الدالة: $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 1$ .

حاول أن تحل (3) صفحة 144 : أوجد فترات التقعر ونقاط الانعطاف لمنحنى الدالة: $f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$ .

| اليوم | التاريخ | الحصة | الصف |
|---|---|---|---|
| ..... | / / ٢٠٢٢م | | / ع ١٢ |
| الموضوع | ..... | | |

## اختبار المشتقة الثانية للقيم القصوى المحلية

نظرية:

**a)** إذا كانت $f'(c) = 0$ , $f''(c) < 0$ ، فإن تكون لها قيمة عظمى محليّة عند $x = c$

**b)** إذا كانت $f'(c) = 0$ , $f''(c) > 0$ ، فإن تكون لها قيمة صغرى محليّة عند $x = c$

مثال (4) صفحة 146 : استخدم اختبار المشتقة الثانية لإيجاد القيم القصوى المحلية للدالة: $f(x) = x^3 - 12x - 5$ .

حاول أن تحل (4) صفحة 146 : استخدم اختبار المشتقة الثانية لإيجاد القيم القصوى المحلية للدالة: $f(x) = x^3 - 12x - 5$ .

## (4 – 3) تمارين متابعة رسم بيان دوال كثيرات الحدود

### خطوات دراسة تغير دالة ورسم بيانها

١) عيّن مجال الدالة.

٢) أوجد النهايات عند الحدود المفتوحة لمجال الدالة.

٣) عيّن النقاط الحرجة للدالة.

٤) كوّن جدولًا لدراسة إشارة المشتقة الأولى وتحديد فترات التزايد وفترات التناقص للدالة والقيم القصوى المحلية.

٥) كوّن جدولًا لدراسة إشارة المشتقة الثانية وتحديد فترات التقعر لمنحنى الدالة ثم نقاط الانعطاف إن وجدت.

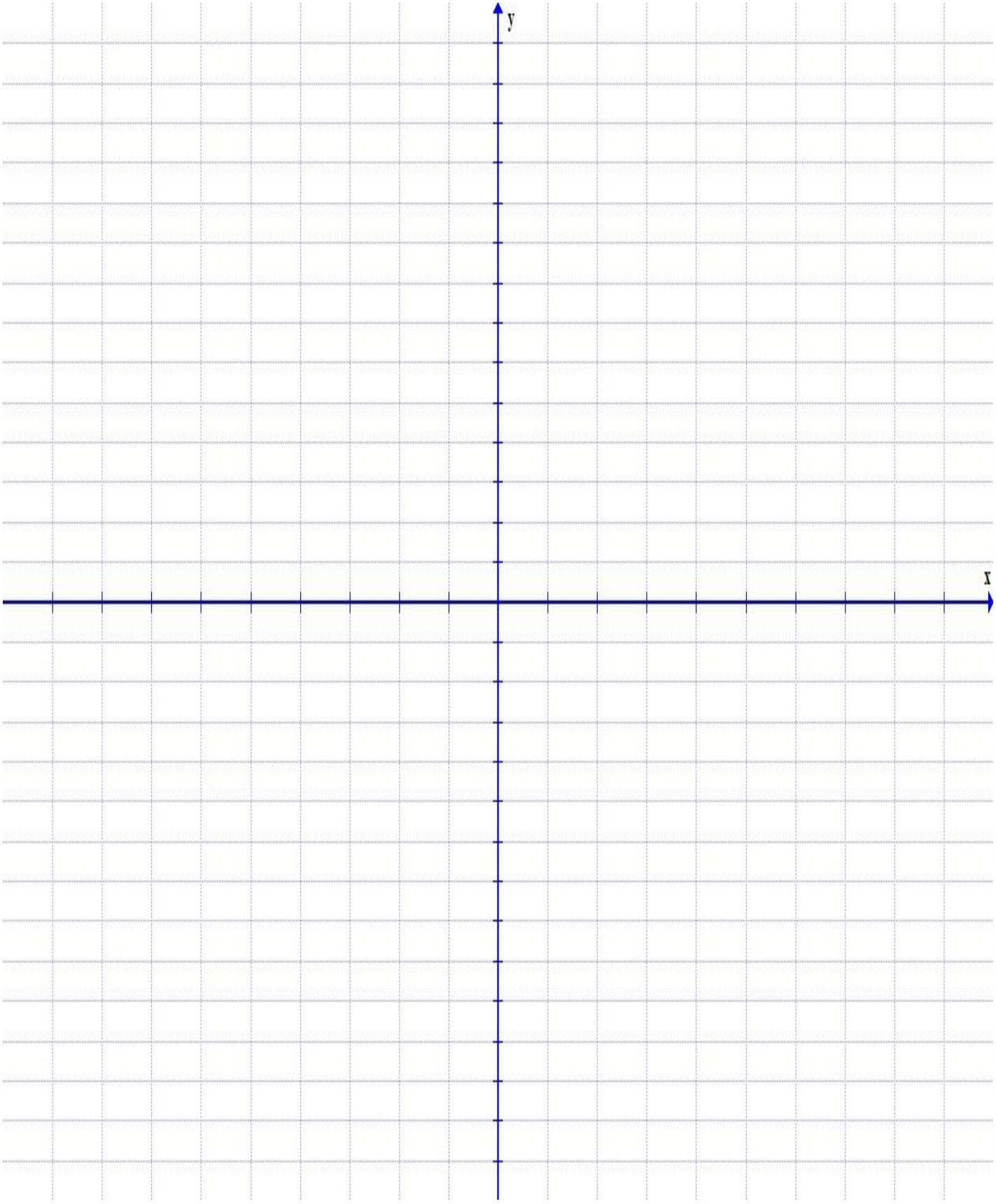
٦) أوجد نقاطًا إضافية لتساعد في الرسم "نقاط التقاطع مع المحاور إن لم تكن موجودة".

٧) ارسم بيان الدالة مستخدماً نتائج الخطوات السابقة في الرسم.

| اليوم | التاريخ | الحصة | الصف |
| --- | --- | --- | --- |
| ..... | / / ٢٠٢٢م | | ١٢ع / |
| الموضوع | ..... | | |

مثال (1) صفحة148 : ادرس تغير الدالة $f(x) = x^3 - 3x + 4$ وارسم بيانها.

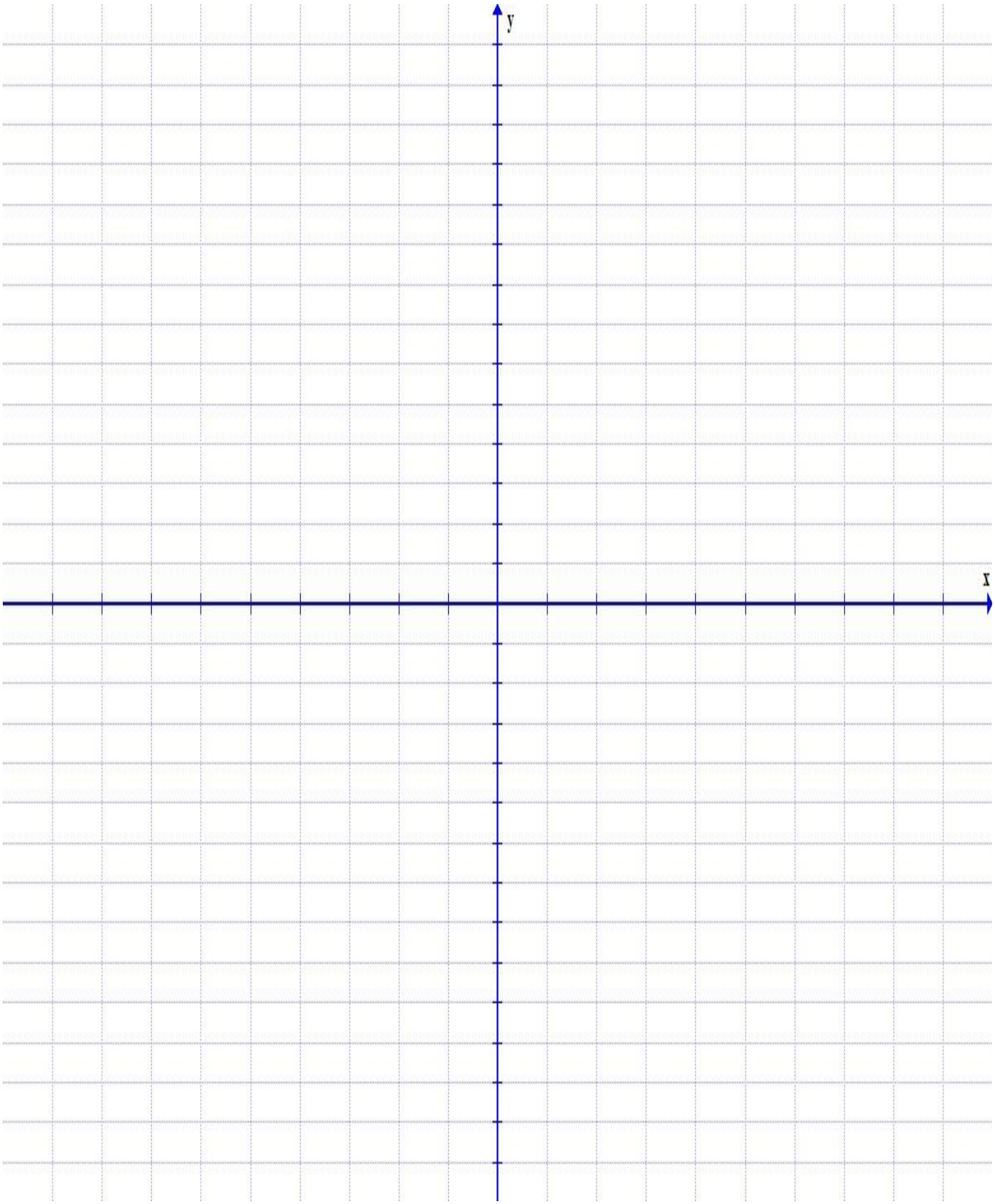
| اليوم | التاريخ | الحصة | الصف |
| --- | --- | --- | --- |
| ..... | / / ٢٠٢٢م | | ١٢ع / |
| الموضوع | ..... | | |



| اليوم | التاريخ | الحصة | الصف |
|---|---|---|---|
| ..... | / / ٢٠٢٢م | | ١٢ع / |
| الموضوع | ..... | | |

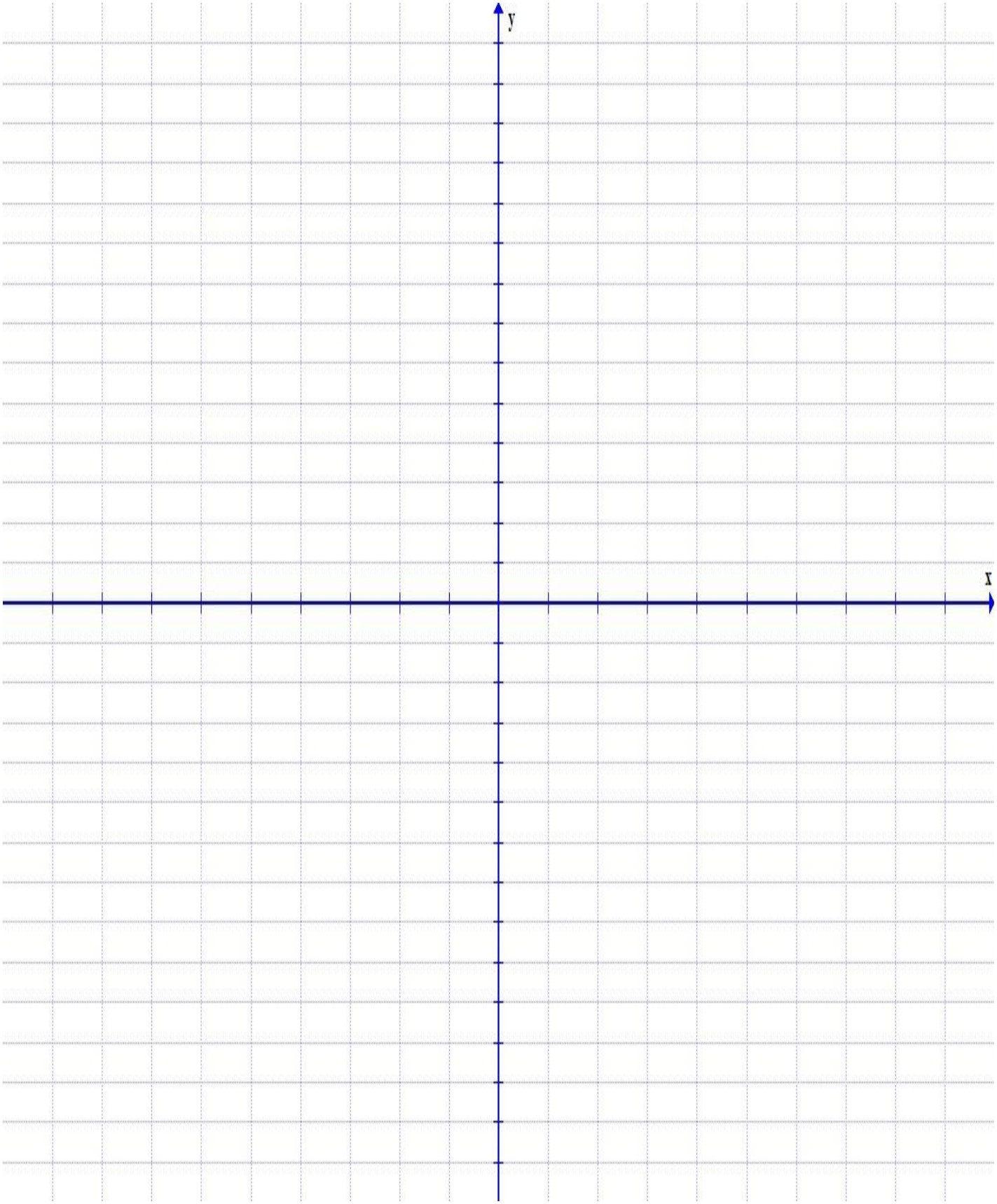
حاول أن تحل (1) صفحة 149 : ادرس تغير الدالة $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$ وارسم بيانها.

| اليوم | التاريخ | الحصة | الصف |
| --- | --- | --- | --- |
| ..... | / / ٢٠٢٢م | | ١٢ع / |
| الموضوع | ..... | | |



مثال (2) صفحة149 : ادرس تغير الدالة $f(x) = 1 - x^3$ وارسم بيانها.

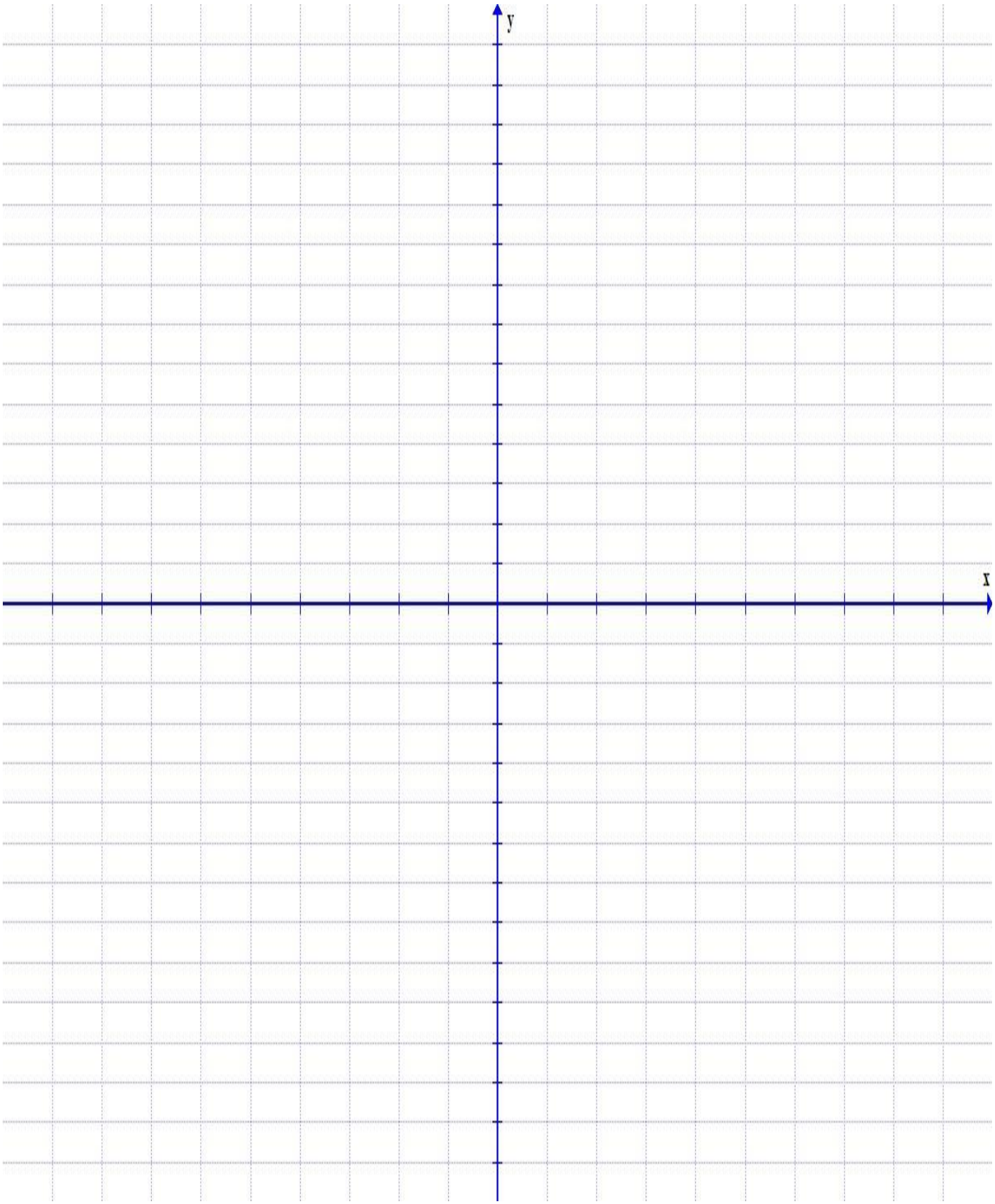
| اليوم | التاريخ | الحصة | الصف |
| --- | --- | --- | --- |
| ..... | / / ٢٠٢٢م | | ١٢ع / |
| الموضوع | ..... | | |



| اليوم | التاريخ | الحصة | الصف |
|---|---|---|---|
| ..... | / / ٢٠٢٢م | | ١٢ع / |
| الموضوع | ..... | | |

حاول أن تحل (2) صفحة 150 : ادرس تغير الدالة $f(x) = x - 2x^3$ وارسم بيانها.

| اليوم | التاريخ | الحصة | الصف |
| --- | --- | --- | --- |
| ..... | / / ٢٠٢٢م | | ١٢ع / |
| الموضوع | ..... | | |



| اليوم | التاريخ | الحصة | الصف |
| --- | --- | --- | --- |
| ..... | / / ٢٠٢٢م | | ١٢ع / |
| الموضوع | ..... | | |

## (5 – 3) تمارين متابعة تطبيقات على القيم القصوى

مثال (1) صفحة155 : عددان موجبان مجموعهما 100 ومجموع مربعيهما أصغر ما يمكن، ما العددان؟

| اليوم | التاريخ | الحصة | الصف |
| --- | --- | --- | --- |
| ..... | / / ٢٠٢٢م | | ١٢ع / |
| الموضوع | ..... | | |

حاول أن تحل (1) صفحة 156 : أوجد عددين مجموعهما 14 وناتج ضربهما أكبر ما يمكن.

| اليوم | التاريخ | الحصة | الصف |
| --- | --- | --- | --- |
| ..... | / / ٢٠٢٢م | | ١٢ع / |
| الموضوع | ..... | | |

كراسة التمارين (2) صفحة 63 : ما أكبر مساحة ممكنة لمثلث قائم الزاوية وطول وتره يساوي $6\ cm$ ؟ وما أبعاده ؟

| اليوم | التاريخ | الحصة | الصف |
|---|---|---|---|
| ..... | / / ٢٠٢٢م | | ١٢ع / |
| الموضوع | ..... | | |

كراسة التمارين (3) صفحة 63 : أثبت أن من بين المستطيلات التي محيطها $8\ cm$ . واحد منها يعطي أكبر مساحة ويكون مربعاً.

| اليوم | التاريخ | الحصة | الصف |
|---|---|---|---|
| ..... | / / ٢٠٢٢م | | ١٢ع / |
| الموضوع | ..... | | |

حاول أن تحل (3) صفحة 158 : تعطي الدالة: $v(h) = 2\pi\,(-h^3 + 36h)$ . حجم أسطوانة بدلالة ارتفاعها $h$ .

a) أوجد الارتفاع $h\ (cm)$ للحصول على أكبر حجم للأسطوانة.
b) ما قيمة هذا الحجم ؟.

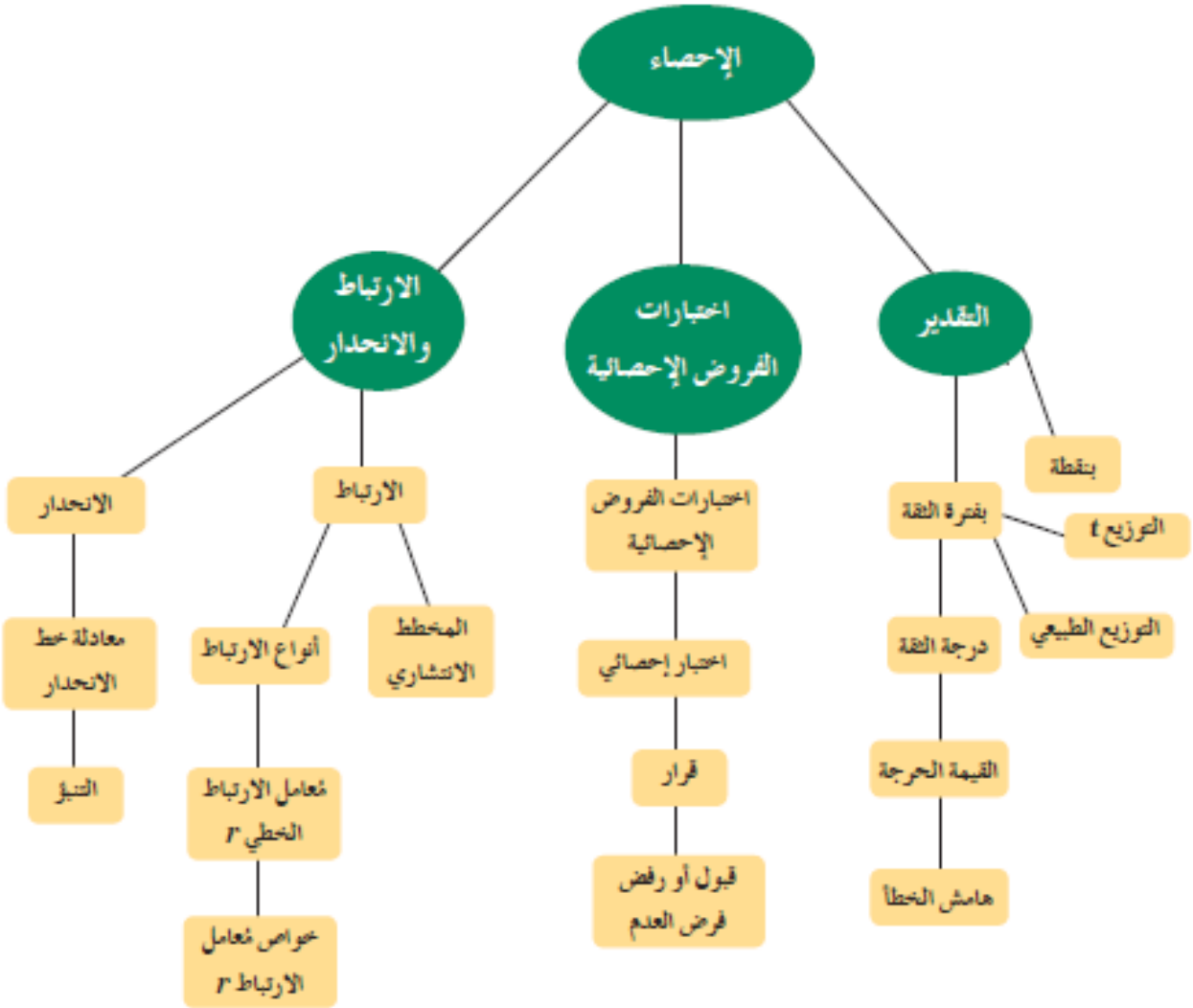
# الكتاب الاول

"مادة الرياضيات"

# الوحدة الرابعة

# الإحصاء

# Statistics




| التقدير | اختبارات الفروض الإحصائية | الارتباط والانحدار |
|---|---|---|
| 4–1 | 4–2 | 4–3 |

رئيس القسم: محمود حامد العلو

| اليوم | التاريخ | الحصة | الصف |
|---|---|---|---|
| ..... | / / ٢٠٢٢م | | ١٢ ع / |
| الموضوع | ..... | | |

# أوراق متابعة الوحدة الرابعة (الإحصاء)

## (1 – 4) تمارين متابعة التقدير بفترة ثقة

### تعاريف

**المعلمة:** هي ثابت يصف المجتمع أو يصف توزيع المجتمع كالمتوسط الحسابي $\mu$ أو الانحراف المعياري $\sigma$

**الإحصاءة:** هو اقتران تتعين قيمته من العينة كالمتوسط الحسابي $\bar{x}$ أو الانحراف المعياري $S$

**تقدير المعلمة:** هو إحصاءة تعتمد على قيم العينة وتعكس قيمة قريبة لمعلمة المجتمع ككلّ وتوزيعه.

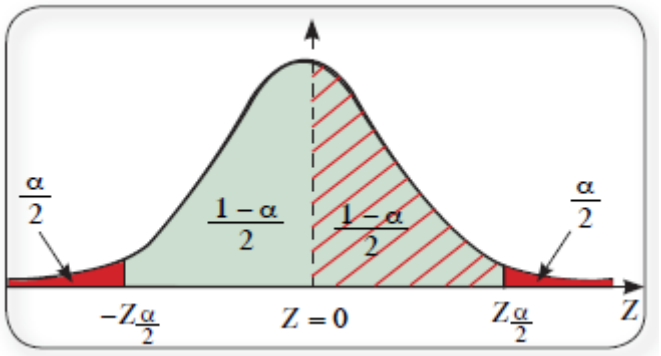
**فترة الثقة:** هي فترة طرفاها متغيران عشوائيان (أي أنها فترة عشوائية) تحوي إحدى معالم المجتمع بنسبة معينة تسمى درجة الثقة (مستوى الثقة).

**التقدير بفترة الثقة:** هو إيجاد فترة معينة يتوقع أن تقع معلمة المجتمع داخلها بنسبة معينة أو احتمال معيّن

**$\alpha$:** نسبة الخطأ في التقدير وتسمى **مستوى المعنوية** أو مستوى الدلالة.

**$1-\alpha$:** درجة الثقة أو مستوى الثقة

**القيمة الحرجة:** $Z_{\frac{\alpha}{2}}$ ملاحظة: $Z_{\frac{\alpha}{2}} = Z_{\frac{1-\alpha}{2}}$




| | العينة | المجتمع |
|---|---|---|
| المتوسط الحسابي | $\bar{x}$ | $\mu$ |
| الانحراف المعياري | $s$ | $\sigma$ |
| التباين | $s^2$ | $\sigma^2$ |

مثال (1) صفحة 171 : أوجد القيمة الحرجة $Z_{\frac{\alpha}{2}}$ المناظرة لمستوى الثقة **95 %** . باستخدام جدول التوزيع الطبيعي المعياري.

.....

.....

.....

.....

حاول أن تحل (1) صفحة 171 : أوجد القيمة الحرجة $Z_{\frac{\alpha}{2}}$ المناظرة لمستوى الثقة **97 %** . باستخدام جدول التوزيع الطبيعي المعياري.

.....

.....

.....

**هامش الخطأ $E$**

عند استخدام بيانات عيّنة لتقدير المتوسط الحسابي $\mu$ لمجتمع، يكون هامش الخطأ، يرمز إليه بـ $E$، القيمة العظمى الأكثر ترجيحًا عند درجة ثقة $(1-\alpha)$ للفرق بين المتوسط الحسابي $\bar{x}$ للعيّنة والمتوسط الحسابي $\mu$ للمجتمع.

## التقدير بفترة الثقة للمتوسط الحسابي $\mu$ للمجتمع الاحصائي

| الانحراف المعياري $\sigma$ | حجم العينة $n$ | هامش الخطأ $E$ | فترة الثقة |
|---|---|---|---|
| معلوم | $n > 30$<br>$n \leq 30$ | $E = Z_{\frac{\alpha}{2}} \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ | $(\bar{x} - E, \bar{x} + E)$ |
| غير معلوم | $n > 30$ | $E = Z_{\frac{\alpha}{2}} \times \frac{S}{\sqrt{n}}$ | |
| | $n \leq 30$<br>درجات الحرية<br>$(n-1)$ | $E = t_{\frac{\alpha}{2}} \times \frac{S}{\sqrt{n}}$ | |

**ملاحظة:** عند إيجاد فترة الثقة سنكتفي بدرجة الثقة 95% والتي تناظرها القيمة الحرجة $Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$ (من جدول التوزيع الطبيعي المعياري).

| اليوم | التاريخ | الحصة | الصف |
|---|---|---|---|
| ..... | / / ٢٠٢٢م | | ١٢ع / |
| الموضوع | ..... | | |

مثال (2) صفحة173 : أجريت دراسة لعينة من الإناث حول معدل النبض لديهن فإذا كان حجم عينة الإناث $n = 40$ والانحراف المعياري لمجتمع الاناث $\sigma = 12.5$ والمتوسط الحسابي للعينة $\bar{x} = 76.3$ باستخدام **مستوى ثقة** $95\%$.

1) أوجد هامش الخطأ.

2) أوجد فترة الثقة للمتوسط الحسابي للمجتمع الاحصائي $\mu$

3) فسر فترة الثقة.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

حاول أن تحل (2) صفحة 173 : أجريت دراسة لعينة على عينة أخرى من الإناث حجمها 25 ، والانحراف المعياري لمجتمع الاناث $\sigma = 3.6$ والمتوسط الحسابي للعينة $\bar{x} = 18.4$ باستخدام **مستوى ثقة** 95%.

1) أوجد هامش الخطأ.
2) أوجد فترة الثقة للمتوسط الحسابي للمجتمع الاحصائي μ
3) فسر فترة الثقة.

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

| اليوم | التاريخ | الحصة | الصف |
|---|---|---|---|
| ..... | / / ٢٠٢٢م | | ١٢ع / |
| الموضوع | ..... | | |

مثال (3) صفحة174 : عينة عشوائية حجمها **36** ، فإذا كان المتوسط الحسابي للعينة **60** وتباينها **16** ، باستخدام **مستوى ثقة 95%**.

1) أوجد هامش الخطأ.

2) أوجد فترة الثقة للمتوسط الحسابي للمجتمع الاحصائي $\mu$

3) فسر فترة الثقة.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

حاول أن تحل (3) صفحة 174 : أخذت عينة عشوائية من مجتمع طبيعي حجمها $n = 81$ ومتوسطها الحسابي $\bar{x} = 50$ ،

وانحرافها المعياري $S = 9$ ، باستخدام **مستوى ثقة** $95\%$.

1) أوجد هامش الخطأ.

2) أوجد فترة الثقة للمتوسط الحسابي للمجتمع الاحصائي $\mu$

3) فسر فترة الثقة.

| اليوم | التاريخ | الحصة | الصف |
|---|---|---|---|
| ..... | / / ٢٠٢٢م | | ١٢ع / |
| الموضوع | ..... | | |

---

مثال (4) صفحة176 : أخذت عينة عشوائية من مجتمع طبيعي حجمها $n = 25$ ، فإذا كان الانحراف المعياري للعينة $(s)$ يساوي **10** ومتوسطها الحسابي $(\bar{x})$ يساوي **15** ، استخدام **مستوى ثقة 95%**. لإيجاد:

1) أوجد هامش الخطأ.

2) أوجد فترة الثقة للمتوسط الحسابي للمجتمع الاحصائي $\mu$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

| اليوم | التاريخ | الحصة | الصف |
|---|---|---|---|
| ..... | / / ٢٠٢٢م | | ١٢ع / |
| الموضوع | ..... | | |

---

حاول أن تحل (4) صفحة 176 : أوجد فترة ثقة 95% للمتوسط الحسابي للمجتمع الاحصائي $\mu$ **علماً أن العينة أخذت من مجتمع طبيعي.**

إذا كان لدينا $n = 13$ ، $S = 0.3$ ، $\bar{x} = 8.4$ .

## (2 – 4) تمارين متابعة اختبار الفروض الاحصائية

### تعاريف

الفرض الإحصائي: هو ادعاء معيّن مبني على حيثيات معقولة حول معلمة من معالم المجتمع مثل المتوسط الحسابي $\mu$ أو الانحراف المعياري $\sigma$.

المقياس الإحصائي: هو قيمة وحيدة محسوبة من العينة تحت شروط معينة.

اختبارات الفروض الإحصائية (اختبار المعنوية): هي طريقة معيارية لاختبار ادعاء ما حول معلمة من معالم المجتمع.

ملاحظة: سنكتفي في هذا الموضوع بدراسة معلمة واحدة من معالم المجتمع وهي المتوسط الحسابي $\mu$

### الخطوات المتبعة لإجراء اختبار الفروض الإحصائية:

1) صياغة الفروض الإحصائية (فرض العدم $H_0$ والفرض البديل $H_1$).

2) التحقق من الانحراف المعياري $\sigma$ للمجتمع (معلوم أم غير معلوم) وتحديد حجم العينة ($n$) ومن ثم إيجاد المقياس الإحصائي للاختبار ( $Z$ أو $t$ ) كما في الجدول التالي:

| الانحراف المعياري $\sigma$ | حجم العينة $n$ | المقياس الاحصائي لاختبار الفروض ($Z$ أو $t$) |
|---|---|---|
| معلوم | $n \leq 30$<br>$n > 30$ | $Z = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ |
| غير معلوم | $n > 30$ | $Z = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$ |
| | $n \leq 30$ | $t = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$ |

3) تحديد مستوى المعنوية $\alpha$ وحساب القيمة الجدولية $Z_{\frac{\alpha}{2}}$ من جدول التوزيع الطبيعي المعياري ،

أو القيمة الجدولية من جدول $t_{\frac{\alpha}{2}}$ .

4) تحديد منطقة القبول: $\left(-Z_{\frac{\alpha}{2}}, Z_{\frac{\alpha}{2}}\right)$ أو $\left(-t_{\frac{\alpha}{2}}, t_{\frac{\alpha}{2}}\right)$ .

5) اتخاذ القرار الإحصائي (قبول فرض العدم) أو (رفض فرض العدم وقبول الفرض البديل) .

ملاحظة: ستقتصر دراستنا على مستوى ثقة 95 % .

مثال (1) صفحة179 : تزعم شركة أن متوسط رواتب موظفيها يساوي **4000** دينار كويتي. إذا اخذت عينة من **25** موظفاً ، ووجد أن متوسط رواتب العينة هو **3950** ديناراً كويتياً. فاذا علمت أن الانحراف المعياري للمجتمع ( ديناراً ) $\sigma = 125$. وضح كيفية اجراء الاختبار الاحصائي بمستوى ثقة **95%**.

حاول أن تحل (1) صفحة 179 : بيّنت الدراسة أن المتوسط الحسابي لقوة تحمل أسلاك معدنية هو $\mu = 1800\ \text{kg}$ مع انحراف معياري $\sigma = 150\ kg$ ، ويؤكد الأخصائيون في المصنع المنتج لهذه الاسلاك أن بإمكانهم زيادة قوة تحمل هذه الأسلاك، وتأكيدًا على ذلك تمّ اختبار عينة من 40 سلكاً . فتبيّن أن متوسط قوة تحمل هذه الأسلاك يساوي $1840\ \text{kg}$ .

هل يمكن قبول مثل هذا الفرض بمستوى معنوية $\alpha = 0.05$ .

مثال (2) صفحة 180 : إذا كانت $S = 1.79$ ، $\bar{x} = 37.2$ ، $n = 80$ .

اختبر الفرض بأن $\mu = 37$ ، عند مستوى معنوية $\alpha = 0.05$ .

حاول أن تحل (2) صفحة 180 : متوسط العمر بالساعات لعينة من 100 مصباح كهربائي مصنعة في أحد المصانع $\bar{x} = 1570$ بانحراف معياري $S = 120$ . يقول صاحب المصنع إن متوسط العمر بالساعات $\mu = 1600$ للمصابيح المصنعة في المصنع. اختبر صحة الفرض $\mu = 1600$ مقابل الفرض $\mu \neq 1600$ وباختيار مستوى معنوية $\alpha = 0.05$ .

| اليوم | التاريخ | الحصة | الصف |
|---|---|---|---|
| ..... | / / ٢٠٢٢م | | ١٢ع / |
| الموضوع | ..... | | |

---

مثال (3) صفحة181 : يعتقد مدير شركة دراسات إحصائية أن متوسط الإنفاق الشهري على الطعام في منازل مدينة معينة يساوي **290** ديناراً كويتياً. فإذا أخذت عينة عشوائية من **10** منازل تبيّن أن متوسطها الحسابي (ديناراً) $\bar{x} = 283$ وانحرافها المعياري (ديناراً) $S = 32$ . فهل يمكن الاعتماد على هذه العينة لتأكيد ما افترضه؟ استخدم مستوى ثقة **95%** .

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

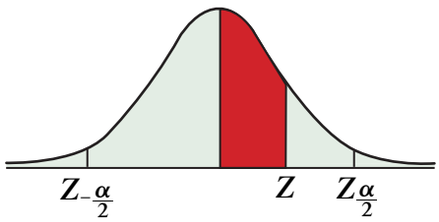
.....

.....

حاول أن تحل (3) صفحة 181 : إذا أجريت دراسة إحصائية أخرى على المدينة ذاتها وتبين من خلالها أن $S = 5$ ، $\bar{x} = 296$ .

لعينة من 10 منازل مع استخدام درجة الثقة نفسها . فهل يبقى افتراض المدير عند الشركة صحيحاً أم لا ؟ . وضح اجابتك.

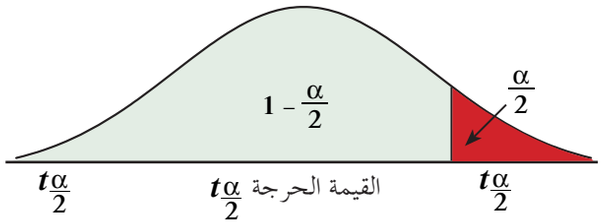
تمت بحمد الله




## جدول التوزيع الطبيعي المعياري (Z)

| $Z$ | 0.00 | 0.01 | 0.02 | 0.03 | 0.04 | 0.05 | 0.06 | 0.07 | 0.08 | 0.09 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.0 | 0.0000 | 0.0040 | 0.0080 | 0.0120 | 0.0160 | 0.0199 | 0.0239 | 0.0279 | 0.0319 | 0.0359 |
| 0.1 | 0.0398 | 0.0438 | 0.0478 | 0.0517 | 0.0557 | 0.0596 | 0.0636 | 0.0675 | 0.0714 | 0.0753 |
| 0.2 | 0.0793 | 0.0832 | 0.0871 | 0.0910 | 0.0948 | 0.0987 | 0.1026 | 0.1064 | 0.1103 | 0.1141 |
| 0.3 | 0.1179 | 0.1217 | 0.1255 | 0.1293 | 0.1331 | 0.1368 | 0.1406 | 0.1443 | 0.1480 | 0.1517 |
| 0.4 | 0.1554 | 0.1591 | 0.1628 | 0.1664 | 0.1700 | 0.1736 | 0.1772 | 0.1808 | 0.1844 | 0.1879 |
| 0.5 | 0.1915 | 0.1950 | 0.1985 | 0.2019 | 0.2054 | 0.2088 | 0.2123 | 0.2157 | 0.2190 | 0.2224 |
| 0.6 | 0.2257 | 0.2291 | 0.2324 | 0.2357 | 0.2389 | 0.2422 | 0.2454 | 0.2486 | 0.2517 | 0.2549 |
| 0.7 | 0.2580 | 0.2611 | 0.2642 | 0.2673 | 0.2704 | 0.2734 | 0.2764 | 0.2794 | 0.2823 | 0.2852 |
| 0.8 | 0.2881 | 0.2910 | 0.2939 | 0.2967 | 0.2995 | 0.3023 | 0.3051 | 0.3078 | 0.3106 | 0.3133 |
| 0.9 | 0.3159 | 0.3186 | 0.3212 | 0.3238 | 0.3264 | 0.3289 | 0.3315 | 0.3340 | 0.3365 | 0.3389 |
| 1.0 | 0.3413 | 0.3438 | 0.3461 | 0.3485 | 0.3508 | 0.3531 | 0.3554 | 0.3577 | 0.3599 | 0.3621 |
| 1.1 | 0.3643 | 0.3665 | 0.3686 | 0.3708 | 0.3729 | 0.3749 | 0.3770 | 0.3790 | 0.3810 | 0.3830 |
| 1.2 | 0.3849 | 0.3869 | 0.3888 | 0.3907 | 0.3925 | 0.3944 | 0.3962 | 0.3980 | 0.3997 | 0.4015 |
| 1.3 | 0.4032 | 0.4049 | 0.4066 | 0.4082 | 0.4099 | 0.4115 | 0.4131 | 0.4147 | 0.4162 | 0.4177 |
| 1.4 | 0.4192 | 0.4207 | 0.4222 | 0.4236 | 0.4251 | 0.4265 | 0.4279 | 0.4292 | 0.4306 | 0.4319 |
| 1.5 | 0.4332 | 0.4345 | 0.4357 | 0.4370 | 0.4382 | 0.4394 | 0.4406 | 0.4418 | 0.4429 | 0.4441 |
| 1.6 | 0.4452 | 0.4463 | 0.4474 | 0.4484 | 0.4495 | 0.4505 | 0.4515 | 0.4525 | 0.4535 | 0.4545 |
| 1.7 | 0.4554 | 0.4564 | 0.4573 | 0.4582 | 0.4591 | 0.4599 | 0.4608 | 0.4616 | 0.4625 | 0.4633 |
| 1.8 | 0.4641 | 0.4649 | 0.4656 | 0.4664 | 0.4671 | 0.4678 | 0.4686 | 0.4693 | 0.4699 | 0.4706 |
| 1.9 | 0.4713 | 0.4719 | 0.4726 | 0.4732 | 0.4738 | 0.4744 | 0.4750 | 0.4756 | 0.4761 | 0.4767 |
| 2.0 | 0.4772 | 0.4778 | 0.4783 | 0.4788 | 0.4793 | 0.4798 | 0.4803 | 0.4808 | 0.4812 | 0.4817 |
| 2.1 | 0.4821 | 0.4826 | 0.4830 | 0.4834 | 0.4838 | 0.4842 | 0.4846 | 0.4850 | 0.4854 | 0.4857 |
| 2.2 | 0.4861 | 0.4864 | 0.4868 | 0.4871 | 0.4875 | 0.4878 | 0.4881 | 0.4884 | 0.4887 | 0.4890 |
| 2.3 | 0.4893 | 0.4896 | 0.4898 | 0.4901 | 0.4904 | 0.4906 | 0.4909 | 0.4911 | 0.4913 | 0.4916 |
| 2.4 | 0.4918 | 0.4920 | 0.4922 | 0.4925 | 0.4927 | 0.4929 | 0.4931 | 0.4932 | 0.4934 | 0.4936 |
| 2.5 | 0.4938 | 0.4940 | 0.4941 | 0.4943 | 0.4945 | 0.4946 | 0.4948 | 0.4949 | 0.4951 | 0.4952 |
| 2.6 | 0.4953 | 0.4955 | 0.4956 | 0.4957 | 0.4959 | 0.4960 | 0.4961 | 0.4962 | 0.4963 | 0.4964 |
| 2.7 | 0.4965 | 0.4966 | 0.4967 | 0.4968 | 0.4969 | 0.4970 | 0.4971 | 0.4972 | 0.4973 | 0.4974 |
| 2.8 | 0.4974 | 0.4975 | 0.4976 | 0.4977 | 0.4977 | 0.4978 | 0.4979 | 0.4979 | 0.4980 | 0.4981 |
| 2.9 | 0.4981 | 0.4982 | 0.4982 | 0.4983 | 0.4984 | 0.4984 | 0.4985 | 0.4985 | 0.4986 | 0.4986 |
| 3.0 | 0.4987 | 0.4987 | 0.4987 | 0.4988 | 0.4988 | 0.4989 | 0.4989 | 0.4989 | 0.4990 | 0.4990 |
| 3.10 وأكثر | 0.4999 | | | | | | | | | |

**ملاحظة: استخدم 0.4999 عندما تزيد قيمة Z عن 3.09**




| جدول التوزيع $t$ | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | $\frac{\alpha}{2}$ | | | | | |
| درجات الحرية $(n-1)$ | 0.005 | 0.01 | 0.025 | 0.05 | 0.10 | 0.25 |
| 1 | 63.657 | 31.821 | 12.706 | 6.314 | 3.078 | 1.000 |
| 2 | 9.925 | 6.965 | 4.303 | 2.920 | 1.886 | 0.816 |
| 3 | 5.841 | 4.541 | 3.182 | 2.353 | 1.638 | 0.765 |
| 4 | 4.604 | 3.747 | 2.776 | 2.132 | 1.533 | 0.741 |
| 5 | 4.032 | 3.365 | 2.571 | 2.015 | 1.476 | 0.727 |
| 6 | 3.707 | 3.143 | 2.447 | 1.943 | 1.440 | 0.718 |
| 7 | 3.500 | 2.998 | 2.365 | 1.895 | 1.415 | 0.711 |
| 8 | 3.355 | 2.896 | 2.306 | 1.860 | 1.397 | 0.706 |
| 9 | 3.250 | 2.821 | 2.262 | 1.833 | 1.383 | 0.703 |
| 10 | 3.169 | 2.764 | 2.228 | 1.812 | 1.372 | 0.700 |
| 11 | 3.106 | 2.718 | 2.201 | 1.796 | 1.363 | 0.697 |
| 12 | 3.054 | 2.681 | 2.179 | 1.782 | 1.356 | 0.696 |
| 13 | 3.012 | 2.650 | 2.160 | 1.771 | 1.350 | 0.694 |
| 14 | 2.977 | 2.625 | 2.145 | 1.761 | 1.345 | 0.692 |
| 15 | 2.947 | 2.602 | 2.132 | 1.753 | 1.341 | 0.691 |
| 16 | 2.921 | 2.584 | 2.120 | 1.746 | 1.337 | 0.690 |
| 17 | 2.898 | 2.567 | 2.110 | 1.740 | 1.333 | 0.689 |
| 18 | 2.878 | 2.552 | 2.101 | 1.734 | 1.330 | 0.688 |
| 19 | 2.861 | 2.540 | 2.093 | 1.729 | 1.328 | 0.688 |
| 20 | 2.845 | 2.528 | 2.086 | 1.725 | 1.325 | 0.687 |
| 21 | 2.831 | 2.518 | 2.080 | 1.721 | 1.323 | 0.686 |
| 22 | 2.819 | 2.508 | 2.074 | 1.717 | 1.321 | 0.686 |
| 23 | 2.807 | 2.500 | 2.069 | 1.714 | 1.320 | 0.685 |
| 24 | 2.797 | 2.492 | 2.064 | 1.711 | 1.318 | 0.685 |
| 25 | 2.787 | 2.485 | 2.060 | 1.708 | 1.316 | 0.684 |
| 26 | 2.779 | 2.479 | 2.056 | 1.706 | 1.315 | 0.684 |
| 27 | 2.771 | 2.473 | 2.052 | 1.703 | 1.314 | 0.684 |
| 28 | 2.763 | 2.467 | 2.048 | 1.701 | 1.313 | 0.683 |
| 29 | 2.756 | 2.462 | 2.045 | 1.699 | 1.311 | 0.683 |
| 30 وأكثر | 2.575 | 2.327 | 1.960 | 1.645 | 1.282 | 0.675 |