دولة الكويت

وزارة التربية

الإدارة العامة لمنطقة الفروانية

قسم الرياضيات

دفتر متابعة الطالب
للصف الثاني عشر علمي
الفصل الدراسي الاول

٢٠١٨-٢٠١٩

أسم الطالب:

الصـــــف:

الجزء الأول

وزارة التربية
منطقة الفروانية التعليمية

العام الدراسي:........./.........
الفصل الدراسي:..............
المادة:...........

استمارة متابعة الطالب

أسم الطالب:.....................

الصف: .... / ......

التاريخ	الدفتر	الواجب	المشاركة	الملاحظات	التوقيع

بند 1-1 **<u>النهايات</u>**

<u>الجوار و الجوار الناقص</u>

عمل تعاوني : أولا : أكمل الجدول التالي كما في (1) :

	الفترة المفتوحة	العدد في منتصف الفترة	التمثيل على خط الاعداد	صورة أخرى للفترة المفتوحة	بعد العدد عن طرفي الفترة
1	$(3 ، 5)$	4	3 4 5	$(4-1 ، 4+1)$	1
2	$(\frac{1}{2} ، 1\frac{1}{2})$				
3	$(1\frac{3}{4} ، 2\frac{1}{4})$				
4	$(0 ، 1)$				

الفترة المفتوحة $(c-a ، c+a)$ تسمى جوارا للعدد c وفقا للمعيار a حيث $a > 0$

ملاحظات :

★ يمكن كتابة الجوار على صورة الفترة المفتوحة $(a ، b)$ و يسمى $a ، b$ بطرفي الجوار

★ الجوار دائما فترة مفتوحة

★ العدد في منتصف الجوار $\quad c = \frac{a+b}{2}$

★ بعد العدد (في منتصف الجوار) عن طرفي الجوار $\quad \frac{b-a}{2}$

★ إذا كان لدينا دالة معرفة على فترة مفتوحة I من الأعداد الحقيقية و تحوي العدد c
فإننا نقول أن هذه الدالة معرفة في جوار للعدد c (I تحوي جوارا للعدد c)

★ إما إذا كانت الدالة معرفة عند جميع عناصر I ولكنها غير معرفة عند العدد c نفسه
فإن الدالة تكون معرفة في جوار ناقص للعدد c

تعريف (1) : لتكن x كمية متغيرة ، c عدد حقيقيا .

نقول إن x تقترب من c باطراد إذا كان بالإمكان جعل الكمية $|x-c|$ أصغر من أي عدد حقيقي موجب .

$$|x-c| < a$$

$$-a < x-c < a$$

$$c-a < x < c+a$$

$$(c-a ، c+a)$$

التاريخ: /   /٢٠١٨

نهاية دالة عند نقطة

نشاط

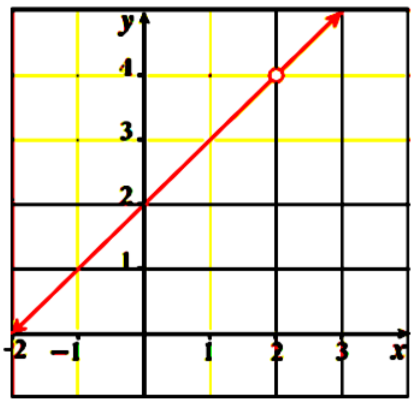
أولًا: لتكن الدالة f: $f(x)=\frac{x^2-4}{x-2}$

(a) أوجد مجال الدالة f.

(b) هل يمكن إيجاد $f(2)$ ؟

(c) أكمل الجدول التالي:

x	...	1.9	1.99	1.999	1.9999	$\xrightarrow{\ldots}$	2	$\xleftarrow{\ldots}$	2.0001	2.001	2.01	2.1	
$f(x)$							غير معرّف						



(d) ماذا تلاحظ على قيم x؟

(هل تقترب من عدد محدد؟)

(e) ماذا تلاحظ على قيم $f(x)$ ؟

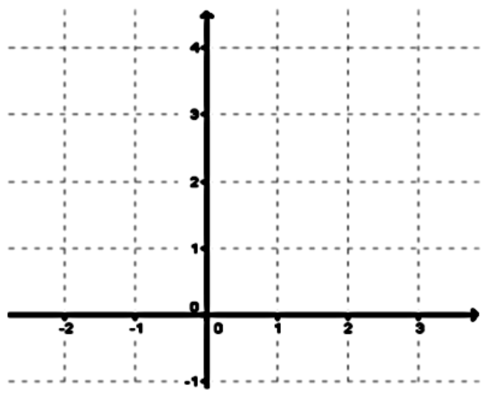
(هل تقترب من عدد محدد؟)

الشكل المقابل يمثل بيان f

ثانيًا:

(a) هل يمكن تبسيط الدالة السابقة f ؟ كيف؟

(b) ارسم بيان الدالة g حيث $g(x)=x+2$



ثالثًا: قارن بين الدالتين f , g.

تعريف(2)

ليكن c، L عددين حقيقين ، f دالة حقيقية معرفة في جوار أو جوار ناقص للعدد c

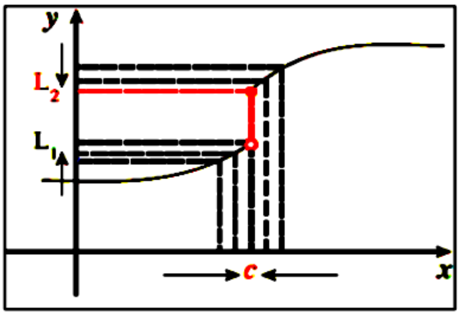
نكتب : $$\lim_{x\to 2} f(x)=4$$

و تعني أنه عندما تقترب x من c باطراد ، $x \neq c$ فإن قيم $f(x)$ تقترب باطراد من L

حقيقة هامة :

وجود نهاية عند نقطة لا تعتمد على كون الدالة معرفة أو غير معرفة عند هذه النقطة

النهاية من جهة واحدة أو جهتين



$\lim\limits_{x \to c^-} f(x) = L_1$ $\qquad$ $\lim\limits_{x \to c^+} f(x) = L_2$

$L_1 \neq L_2$

$\lim\limits_{x \to c^+} f(x) \neq \lim\limits_{x \to c^-} f(x)$

$\lim\limits_{x \to c} f(x)$ غير موجودة

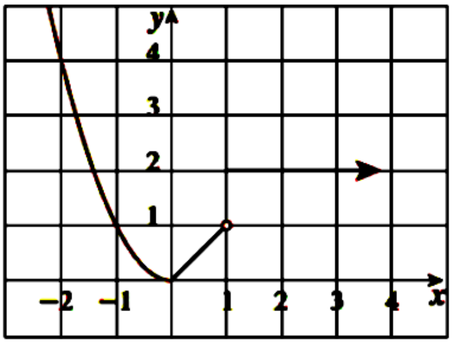
نظرية (1) :

بفرض أن c،L عددين حقيقين

يكون للدالة f نهاية عندما تقترب x من c إذا و فقط إذا كانت النهاية من جهة اليمين تساوي النهاية من جهة من اليسار و يعبر عن ذلك :

$$\lim_{x \to c} f(x) = L \iff \lim_{x \to c^+} f(x) = L = \lim_{x \to c^-} f(x)$$

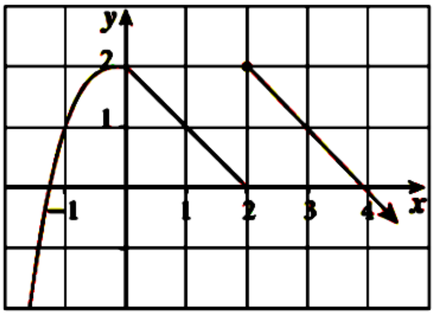
مثال (1) صـ 15 : الشكل المقابل يمثل بيان الدالة f



أوجد إن أمكن :

1. $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$
2. $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$
3. $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$
4. $\lim\limits_{x \to -2} f(x)$

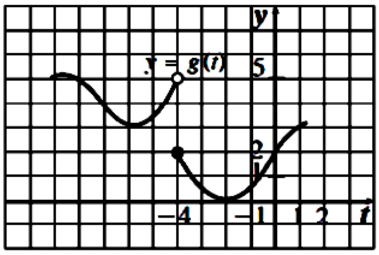
حاول أن تحل (1) صـ 16 : يمثل الشكل المقابل بيان دالة f



أوجد إن أمكن :

a. $\lim\limits_{x \to -1} f(x)$
b. $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$
c. $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$

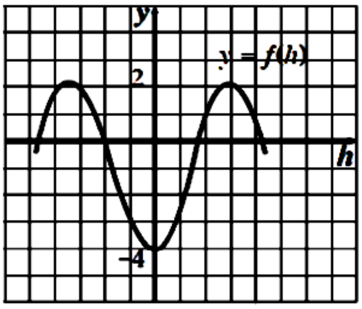
(1) الشكل المقابل، يمثّل بيان الدالة g . أوجد إن أمكن:



(a) $\lim_{t \to -4^-} g(t)$ (b) $\lim_{t \to -4^+} g(t)$

(c) $\lim_{t \to -4} g(t)$ (d) $g(-4)$

(2) الشكل المقابل، يمثّل بيان الدالة f. أوجد إن أمكن:



(a) $\lim_{h \to 0^-} f(h)$ (b) $\lim_{h \to 0^+} f(h)$

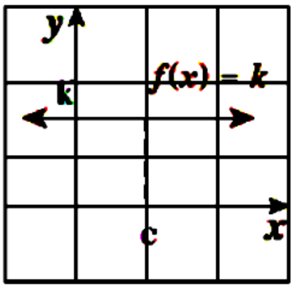
(c) $\lim_{h \to 0} f(h)$ (d) $f(0)$

حساب النهايات

نظرية (2)

إذا كانت f دالة : $f(x) = k$ و كانا k، c عددان حقيقيان فإن :

$$\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} k = k$$



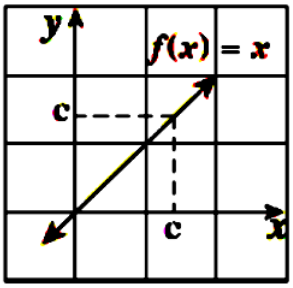
أمثلة :

(1) $\lim_{x \to 4} 3$

نظرية (3)

إذا كانت f دالة : $f(x) = x$ و كانا c عددا حقيقيا فإن :

$$\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} x = c$$



أمثلة :

(1) $\lim_{x \to -2} x$

التاريخ: / /٢٠١٨

نظرية (4)

إذا كان $k،c،M،L$ أعدادا حقيقية ، $\lim_{x\to c} f(x) = L$ ، $\lim_{x\to c} g(x) = M$

a) قاعدة الجمع : $\lim_{x\to c}(f(x)+g(x)) = \lim_{x\to c} f(x) + \lim_{x\to c} g(x) = L+M$

b) قاعدة الفرق : $\lim_{x\to c}(f(x)-g(x)) = \lim_{x\to c} f(x) - \lim_{x\to c} g(x) = L-M$

c) قاعدة الضرب : $\lim_{x\to c}(f(x)\,.\,g(x)) = \lim_{x\to c} f(x)\,.\,\lim_{x\to c} g(x) = L\,.\,M$

d) قاعدة الضرب في ثابت : $\lim_{x\to c}(k\,.\,f(x)) = k\,.\,\lim_{x\to c} f(x) = k\,.\,L$

e) قاعدة ناتج القسمة : $\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to c} f(x)}{\lim_{x\to c} g(x)} = \frac{L}{M}$, $M \neq 0$

حاول أن تحل (2) صـ 17 : بفرض أن $\lim_{x\to 2} g(x) = -3$ ، $\lim_{x\to 2} f(x) = 7$

$(c)\ \lim_{x\to 2}\left(\frac{8f(x).g(x)}{f(x)+g(x)}\right)$

$(b)\ \lim_{x\to 2}(f(x).g(x))$

$(a)\ \lim_{x\to 2}(f(x)+g(x))$

نظرية (5)

دوال كثيرات الحدود و دوال الحدوديات النسبية

(a) إذا كانت $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ دالة كثيرة الحدود ، c عددا حقيقيا ، فإن :

$$\lim_{x\to c} f(x) = f(c) = a_n c^n + a_{n-1}c^{n-1} + \cdots + a_0$$

(b) إذا كانت $f(x)$، $g(x)$ كثيرتي حدود ، c عددا حقيقيا ، فإن

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(c)}{g(c)},\quad g(c)\neq 0$$

حاول أن تحل (3) صـ 18

أوجد

$(b)\ \lim_{x\to 2}\frac{x^2+5x+6}{x+2}$

$(1)\ \lim_{x\to 1}(x^3+3x^2-17)$

مثال (4) صـ 19 : إذا كانت الدالة f :

$$f(x)=\begin{cases}3x+2 & x<1\\ 5 & x=1\\ \frac{5}{x} & x>1\end{cases}$$

فأوجد إن أمكن $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$

حاول أن تحل (4) صـ 19 : إذا كانت الدالة f :

$$f(x)=\begin{cases}x^2-3 & : \ x<2\\ x-1 & : \ x>2\end{cases}$$

فأوجد إن أمكن $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$

حاول أن تحل (5) صـ 19 : إذا كانت الدالة g :

$$g(x) = \begin{cases} x^3 + x & : \ x > 1 \\ \frac{x}{x^2+1} & : \ x \leq 1 \end{cases}$$

فأوجد إن أمكن $\lim\limits_{x \to 1} g(x)$

حاول أن تحل (6) صـ 20 :

لتكن : $f(x) = x^2 - |x + 2|$

(a) أكتب $f(x)$ دون استخدام رمز القيمة المطلقة .

(b) أوجد : $\lim\limits_{x \to -2^-} f(x)$ ، $\lim\limits_{x \to -2^+} f(x)$

(c) هل للدالة f نهاية عندما $x \to -2$ ؟

التاريخ: /   /٢٠١٨

قاعدة القوة

نظرية (6) : بفرض أن $\lim_{x \to c} f(x)$ موجودة و كانت n عددا صحيحيا موجبا فإن :

$(a) \lim_{x \to c}(f(x))^n = (\lim_{x \to c} f(x))^n$

$(b) \lim_{x \to c} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{c}$ في حالة n عددا زوجيا يشترط أن يكون $c > 0$

$(c) \lim_{x \to c} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to c} f(x)}$ في حالة n عددا زوجيا يشترط أن يكون $\lim_{x \to c} f(x) > 0$

مثال (7) صـ 21 : و **حاول أن تحل (7) صـ 22**

أوجد

1) $\lim_{x \to -1} (x^2 - 3x - 1)^5$

2) $\lim_{x \to 2} \sqrt[3]{x - 3}$

4) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{\sqrt[3]{x^3 - 4x + 5}}{x - 2}$

3) $\lim\limits_{x \to 5} \sqrt{x^2 - 5}$

5) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{\sqrt{3x^2 - 2}}{x - 2}$

التاريخ: / /٢٠١٨

إلغاء العامل الصفري

ملاحظات :

1) عند التعويض المباشر لقيمة x في كل من البسط و المقام و حصلنا على $\frac{0}{0}$ فإنها تسمى صيغة غير معينة

2) يمكن إستخدام التحليل أو القسمة أو الضرب بالمرافق أو غيرها لإيجاد الصيغة المبسطة

3) إذا كان a صفر من أصفار الحدودية $f(x)$ فإن $(x-a)$ عامل من عوامل $f(x)$

4) مرافق العدد الجذري هو عدد جذري بحيث يكون ناتج ضرب العددين عددا نسبيا

إلغاء العامل الصفري

التحليل | الضرب في المرافق | تعريف المطلق | القسمة التركيبية | توحيد المقام

مثال (8) صـ 22 : أوجد إن أمكن :

1) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2+x-2}{x^2-x}$

2) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(2+x)^3-8}{x}$

حاول أن تحل (9) صـ 25 : أوجد إن أمكن

4) $\lim_{x \to -1} \frac{\sqrt[3]{x^3+1}}{\sqrt[3]{x+1}}$

حاول أن تحل (9) صـ 23 أوجد إن أمكن

3) $\lim_{x \to -7} \frac{(x+4)^2-9}{x^2+7x}$

التاريخ: /   /٢٠١٨

أوجد

كراسة التمارين صـ 10 رقم 15

$$2)\ \lim_{x \to 3} \frac{\sqrt{x^2+7}-4}{x^2-4x+3}$$

حاول أن تحل (9) صـ 25 : أوجد إن أمكن

$$1)\ \lim_{x \to 9} \frac{x-9}{3-\sqrt{x}}$$

4) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^2 - 4}{\sqrt[3]{x + 2}}$

3) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x - 1}{\sqrt[3]{x} - 1}$

التاريخ: /   /٢٠١٨

كراسة التمارين صـ 10 رقم 14

2) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{|x+2|}{x^2+3x+2}$

حاول أن تحل 8 صـ 23 أوجد إن أمكن

1) $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{|x+2|-7}{x^2-25}$

التاريخ: /   /٢٠١٨

حاول أن تحل (10) صـ 26 :   أوجد إن أمكن :

1) $\lim_{x \to 3} \frac{x^3 - 2x^2 - 4x + 3}{x - 3}$

2) $\lim_{x \to 2} \frac{-x^5 + x^3 + x + 22}{x - 2}$

في التمارين (20–22)، أوجد كلاً مما يلي:

(20) $\lim_{x \to 1}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{2}{x^2-1}\right)$

(21) $\lim_{x \to 1}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{3}{x^3-1}\right)$

(22) $\lim_{x \to 2}\left(\frac{x}{x-2} - \frac{4x}{x^2-4}\right)$

بند 1-2

نهايات تشتمل على ∞ ، $-\infty$

أولا : نهايات محددة عندما $x \to \pm\infty$

إذا كانت x تأخذ قيما كبيرة جدا أي أن قيم x تكبر بلا حدود (تتحرك مبتعدة كثيرا جهة اليمين على خط الأعداد)

فإننا نقول $x \to \infty$

وإذا كانت x تأخذ قيما صغيرة جدا أي أن قيم x تصغر بلا حدود (تتحرك مبتعدة كثيرا جهة اليسار على خط الاعداد)

فإننا نقول $x \to -\infty$

تعريف (3) :

لتكن f دالة معرفة في الفترة $(a،\infty)$ فإن : $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = L$

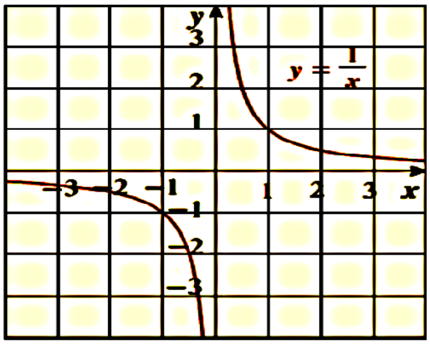
يعني أن قيم $f(x)$ تقترب باطراد من L عندما x تؤول إلى ∞

تعريف (4) :

لتكن f دالة معرفة في الفترة $(-\infty،a)$ فإن : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = L$

يعني أن قيم $f(x)$ تقترب باطراد من L عندما x تؤول إلى $-\infty$

نظرية (7) :



لتكن f : $f(x) = \frac{1}{x}$ فإن

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0 \quad ، \quad \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$$

نظرية (8) :

لتكن f : $k \in R$ ، $n \in z^+$ ، $f(x) = \frac{k}{x^n}$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{k}{x^n} = 0 \quad ، \quad \lim_{x \to \infty} \frac{k}{x^n} = 0$$

نظرية (9) :

$$\lim_{x \to c} f(x) = \infty \Leftrightarrow \left(\lim_{x \to c^+} f(x) = \infty \text{ ؛ } \lim_{x \to c^-} f(x) = \infty \right)$$

$$\lim_{x \to c} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \left(\lim_{x \to c^+} f(x) = -\infty \text{ ؛ } \lim_{x \to c^-} f(x) = -\infty \right)$$

نظرية (10) :

إذا كان n عدد زوجي موجب فإن : $\lim\limits_{x \to c} \frac{1}{(x-c)^n} = \infty$

إذا كان n عدد فردي موجب فإن :

$$1)\ \lim_{x \to c^+} \frac{1}{(x-c)^n} = \infty \qquad 2)\ \lim_{x \to c^-} \frac{1}{(x-c)^n} = -\infty$$

التاريخ: /   /٢٠١٨

حاول أن تحل (1) صـ 30   أوجد النهايات التالية إن أمكن

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x+2}{x^2+9}$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^3-3x+1}{x^3+5}$$

ملاحظات :

(1) إذا كان $\lim\limits_{x\to c} f(x) = \pm\infty$ وكان b عدد حقيقي فإن : $\lim\limits_{x\to c}(f(x)+b) = \pm\infty$

(2) إذا كان $\lim\limits_{x\to c} f(x) = \pm\infty$ وكان b عدد حقيقي موجب فإن : $\lim\limits_{x\to c}(b.f(x)) = \pm\infty$

وإذا كان b عدد حقيقي سالب فإن : $\lim\limits_{x\to c}(b.f(x)) = \mp\infty$

(3) إذا كان $\lim\limits_{x\to c} g(x) = \infty$ ، $\lim\limits_{x\to c} f(x) = \infty$ فإن :

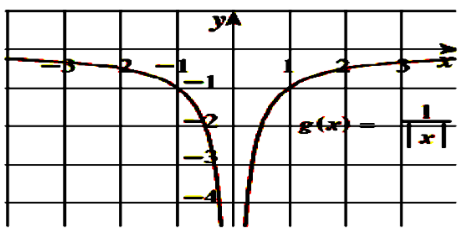
$\lim\limits_{x\to c}(f(x) . g(x)) = \infty$ ، $\lim\limits_{x\to c}(f(x)+g(x)) = \infty$

(4) إذا كان $\lim\limits_{x\to c} g(x) = -\infty$ ، $\lim\limits_{x\to c} f(x) = -\infty$ فإن :

$\lim\limits_{x\to c}(f(x) . g(x)) = \infty$ ، $\lim\limits_{x\to c}(f(x)+g(x)) = -\infty$

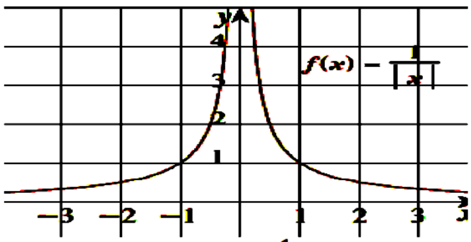
(5) إذا كان $\lim\limits_{x\to c} g(x) = \infty$ ، $\lim\limits_{x\to c} f(x) = -\infty$ فإن : $\lim\limits_{x\to c}(f(x) . g(x)) = -\infty$

ثانيا : نهايات غيرمحددة $(\pm\infty)$ عندما $x \to c$



$f(x) = \frac{-1}{|x|}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{-1}{|x|} = -\infty$$



$f(x) = \frac{1}{|x|}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{|x|} = \infty$$

تعريف (5) :

(1) إذا كان قيم $f(x)$ تتزايد بلا حدود عندما تؤول x إلى c فإننا نعبر عن ذلك رياضيا بالتالي

$$\lim_{x\to c} f(x) = \infty$$

(2) إذا كان قيم $f(x)$ تتناقص بلا حدود عندما تؤول x إلى c فإننا نعبر عن ذلك رياضيا بالتالي

$$\lim_{x\to c} f(x) = -\infty$$

مثال (2) صـ 32 :

أوجد إن أمكن

$$\lim_{x \to 2} \frac{1}{|X - 2|}$$

كراسة التمارين صـ 13

$$\lim_{x \to -2} \frac{-7}{|x + 2|}$$

بند 1-3

صيغ غير معينة

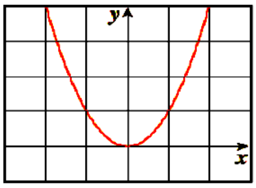
دعنا نفكر ونتناقش

إذا كانت f دالة قوى حيث: $f(x)=ax^n$ ، $n\in\mathbb{Z}^+$ ، $a\neq 0$

فإن بيان هذه الدالة يمكن أن يأخذ أحد الأشكال أدناه،

أكمل ما يلي:

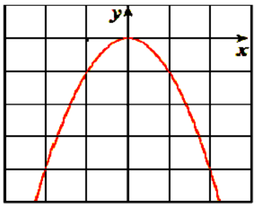
1 n عددًا زوجيًا , $a>0$



$\lim_{x\to\infty} f(x)=......$

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=......$

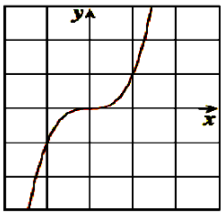
2 n عددًا زوجيًا , $a<0$



$\lim_{x\to\infty} f(x)=......$

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=......$

3 n عددًا فرديًا , $a>0$



$\lim_{x\to\infty} f(x)=......$

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=......$

4 n عددًا فرديًا , $a<0$

$\lim_{x\to\infty} f(x)=......$

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=......$

مما سبق نجد :

لتكن : $f(x)=ax^n$ ، $n\in z^+$ ، $a\in R^+$:

1) إذا كان n عدد زوجي فإن :

$$\lim_{x\to\pm\infty} ax^n=\begin{cases}\infty & ، a>0\\ -\infty & ، a<0\end{cases}$$

2) إذا كان n عدد فردي فإن :

$$\lim_{x\to\infty} ax^n=\begin{cases}\infty & ، a>0\\ -\infty & ، a<0\end{cases} \quad , \quad \lim_{x\to-\infty} ax^n=\begin{cases}-\infty & ، a>0\\ \infty & ، a<0\end{cases}$$

فمثلا :

$$\lim_{x\to-\infty} 5x^7=-\infty \quad ، \quad \lim_{x\to\infty} 2x^3=\infty \quad ، \quad \lim_{x\to\infty} -4x^4=-\infty \quad ، \quad \lim_{x\to\infty} 5x^6=\infty$$

ملاحظة : إذا كانت $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0$ ، $a_n\in R^*$

فإن : $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty} a_nx^n$

لحساب نهاية دالة على الصورة : $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}$ حيث : $\lim_{x\to\infty} g(x)=\pm\infty$, $\lim_{x\to\infty} f(x)=\pm\infty$

في هذه الحالة نحصل على إحدى الصور التالية : $\frac{-\infty}{-\infty}$ أو $\frac{\infty}{-\infty}$ أو $\frac{-\infty}{\infty}$ أو $\frac{\infty}{\infty}$ و تسمى صيغ غير معينة

كذلك إذا حسبنا $\lim_{x\to\infty}(f(x)-g(x))$ و حصلنا على الصورة $(\infty-\infty)$ تسمى أيضا صيغة غير معينة

و لحساب النهاية نلجأ لبعض الأساليب الجبرية :

مثال (1) صـ 37 :

أوجد : $\lim_{x\to\infty}(2x^2-3x+1)$

سؤال إضافي : $\lim_{x\to-\infty}(-4x^2+7x-2)$

حاول أن تحل (1) صـ 37

$\lim_{x\to\infty}(-3x^2+2x-4)$

$\lim_{x\to-\infty}(-2x^3-5x-1)$

نظرية (11)

إذا كانت كل من f، g دالة حدودية حيث :

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0$$

$$g(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_0$$

فإن : $n = m$: $(a)\ \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a_n}{b_m}$

$n < m$: $(b)\ \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$

النظرية صحيحة عندما $x \to -\infty$

حاول أن تحل (2) صـ 39 إستخدم النظرية السابقة في حساب كل من :

$(b)\ \lim_{x \to \infty} \frac{2x+1}{4x^3 - 2x + 3}$

$(a)\ \lim_{x \to \infty} \frac{-3x^2 + 5x + 1}{6x^2 - x + 1}$

مثال (3) صـ 39 : إذا كانت $\lim_{x \to \infty} \frac{ax^2+bx+3}{2x+5} = 3$ فأوجد قيمة كل من الثابتين a،b

حاول أن تحل (3) صـ 40 : أوجد قيمة كل من الثابتين a،b إذا كانت $\lim_{x \to \infty} \frac{x-2}{ax^2+bx-3} = -1$

التاريخ: / /٢٠١٨

حاول أن تحل (4) صـ 41 :

1) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\sqrt{2x^2 - x}}{x + 1}$

التاريخ: /   /٢٠١٨

حاول أن تحل (4) صـ 41 :

2) $\lim_{x \to \infty} \frac{3x-5}{\sqrt{x^2-9}}$

كراسة التمارين : صـ 15

3) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x+5}{\sqrt{x^2+2x+7}}$

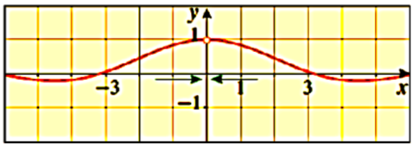
التاريخ: /   /٢٠١٨

بند 1-4

نهايات بعض الدوال المثلثية

نظرية (12) :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$ حيث x بالرراديان



$y = \frac{\sin x}{x}$

نتيجة (1) :

إذا كان a،b عددين حقيقين ، $a \neq 0$ ، $b \neq 0$ فإن :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin ax}{bx} = \frac{a}{b} \quad , \quad \lim_{x \to 0} \frac{bx}{\sin ax} = \frac{b}{a}$$

و من تعريف النهاية على الدوال المثلثية الأساسية نجد أن :

$$\lim_{x \to 0} \sin x = 0 \quad , \quad \lim_{x \to 0} \cos x = 1 \quad , \quad \lim_{x \to 0} \tan x = 0$$

نتيجة (2) :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$$

نتيجة (3) : إذا كان $a, b \in R^+$ فإن :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan ax}{bx} = \frac{a}{b}$$

مثال (1) صـ 43 : أوجد :

1) $$\lim_{x \to 0} \frac{x-3}{\cos x}$$

2) $$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{3x \cos x}$$

التاريخ: / /٢٠١٨

3) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin^2 x}{2x}$

4) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{2x^2 - x}$

5) $\lim_{x \to 0} \frac{x\sin x}{\cos x - 1}$

6) $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{\sin^2 x}$

التاريخ: /   /٢٠١٨

مثال (3) صـ 44 :

2) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos x \tan x - 2x \cos x}{3x}$

مثال (2) صـ 44 : أوجد

1) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{5\tan x - 3\sin x}{4x}$

حاول أن تحل (3) صـ 45 : أوجد :

4) $\lim_{x \to 0} \frac{\tan 2x + 3x \cos 4x}{5x}$

3) $\lim_{x \to 0} \frac{x \sin x - x^2}{3x^2}$

التاريخ: / /٢٠١٨

بند 1-5

الاتصال عند نقطة

تعريف (8) : الاتصال عند نقطة

تكون الدالة f متصلة عند $x = c$ في مجالها إذا كانت $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$

من التعريف نجد أن شروط إتصال الدالة عند $x = c$

1) الدالة f معرفة عند $x = c$ أي $f(c)$ موجودة

2) $\lim_{x \to c} f(x)$ موجودة

3) $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$

وإذا لم يتحقق أي شرط من الشروط فنقول إن f منفصلة (ليست متصلة) عند $x = c$

حاول أن تحل (1) صـ 50 :

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + x & : \quad x \leq 0 \\ \frac{x^2}{x+1} & : \quad x > 0 \end{cases}$$

ابحث اتصال f عند $x = 0$

حاول أن تحل (2) صـ 50 :

ابحث اتصال الدالة f عند $x = 2$ حيث

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1 & : \quad x < 2 \\ 1 & : \quad x = 2 \\ x^2+1 & : \quad x > 2 \end{cases}$$

مثال ٣ صـ٥١ـ

ابحث اتصال الدالة f عند $x = 2$ حيث

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-2}{|x-2|} & : \quad x \neq 2 \\ 1 & : \quad x = 2 \end{cases}$$

التاريخ: / /٢٠١٨

حاول أن تحل (3) صـ 51 :

ابحث اتصال الدالة f عند $x = -1$ حيث

$$f(x) = \begin{cases} \frac{|x+1|}{x+1} - 2x & : \quad x \neq -1 \\ 2 & : \quad x = -1 \end{cases}$$

الإنفصال الناتج من أن
النهاية لا تساوي قيمة الدالة عند النقطة
الدالة لها نهاية عند هذه النقطة و غير معرفة عندها

يمكن التخلص منه عن طريق (إعادة تعريف الدالة عند هذه النقطة)

الإنفصال الناتج من أن
النهاية من جهة اليمين لا تساوي النهاية من جهة اليسار (إنفصال نتيجة قفزة)
النهاية غير موجودة (إنفصال لا نهائي)
التخلص من الانفصال معلق بينما تعيين نقاط الانفصال مطلوب

كراسة التمارين صـ 19 ابحث إتصال كل من الدوال التالية عند $x = c$

9) $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2+3}-2}{x-1} & : \quad x \neq 1 \\ \frac{1}{2} & : \quad x = 1 \end{cases} \quad , x = 1$

8) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-3x}{|x|} & : \quad x \neq 0 \\ -3 & : \quad x = 0 \end{cases} \quad , x = 0$

أوجد قيمة a بحيث تصبح الدالة التالية متصلة عند $x = 3$

10) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & : \quad x < 3 \\ 2ax & : \quad x \geq 3 \end{cases}$

بند 6-1

نظريات الاتصال

نظرية (14) : خواص الدوال المتصلة

إذا كانت f،g دالتين متصلتين عند $x = c$ ، فإن الدوال التالية هي دوال متصلة عند $x = c$

الجمع $(1)\ f + g$

الطرح $(2)\ f - g$

الضرب في ثابت $(3)\ k.f$ ، $k \in R$

الضرب $(4)\ f.g$

القسمة $(5)\ \dfrac{f}{g}$ ، $g(c) \neq 0$

دوال متصلة :

(1) الدالة $f(x) = k$ حيث k ثابت متصلة عند كل $c \in R$

(2) الدالة كثيرة الحدود متصلة عند كل $c \in R$

(3) الدالة الحدودية النسبية $\frac{f}{g}$ متصلة عند كل عدد حقيقي c في مجالها أي $c \in D$

(4) الدالة : $f(x) = |x|$ متصلة عند كل $c \in R$

(5) الدوال المثلثية الأساسية متصلة عند كل عدد حقيقي c في مجالها أي $c \in D$

حاول أن تحل (1) صـ 55

ابحث اتصال الدالة f عند $x = c$ في كل مما يلي :

$1)\ f(x) = x^2 - 4x + 3 + |x|$ ، $c = 3$

$3)\ f(x) = \dfrac{\tan x}{x+1}$ ، $c = \dfrac{\pi}{4}$

مثال (1) صـ 55 :

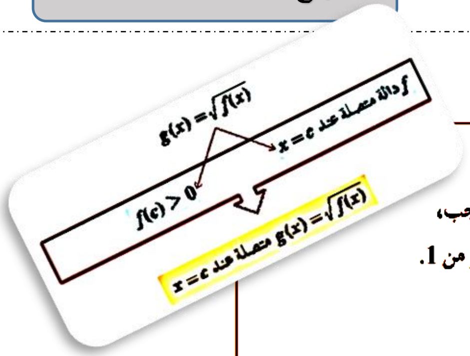
ابحث اتصال الدالة f عند $x = c$ في كل مما يلي :

$2)\ f(x) = \sin x - \cos x$ ، $c = \dfrac{\pi}{2}$

حاول أن تحل صـ 55 رقم 2

ابحث اتصال الدالة f : $4)\ f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2+1} - \dfrac{2x}{x-2}$ عند $x = 1$

اتصال الدوال الجذرية عند نقطة :



نظرية (15)

ⓐ الدالة الجذرية $y=\sqrt[n]{x}$ متصلة عند كل $x=c : c\in \mathbf{R}^{+}$ ، n عدد صحيح زوجي موجب،
ومتصلة عند كل $x=c : c\in \mathbf{R}$ ، n عدد صحيح فردي أكبر من 1.

ⓑ إذا كانت f دالة متصلة عند $x=c$ وكانت $f(c)>0$
فإن الدالة: $g(x)=\sqrt{f(x)}$ متصلة عند $x=c$

حاول أن تحل رقم (3) صـ 56

ابحث اتصال كل من الدالتين التاليتين عند العدد المبيّن:

ⓑ $f(x)=\sqrt{x^2-4x+3}$:x=2

ⓐ $f(x)=\dfrac{\sqrt[3]{x}}{x^2+4}$:x=2

التاريخ: / /٢٠١٨

الدالة المركبة :

إذا كانت كل من f , g دالتين حقيقيتين وكان مدى الدالة f مجموعة جزئية من مجال الدالة g فإنه يتعين دالة مركبة h:

$$h(x)=(g\circ f)(x)=g(f(x))$$

حاول أن تحل (4) صـ 58

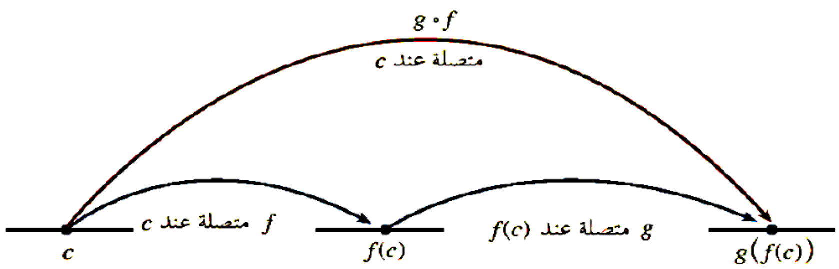
إذا كانت f , g معرّفتان على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x)=x^2+3$, $f(x)=2x+3$ أوجد:

a $(g\circ f)(x)$ | **b** $(g\circ f)(-1)$ | **c** $(f\circ g)(x)$ | **d** $(f\circ g)(-1)$

اتصال الدوال المركبة عند نقطة :

نظرية (16): اتصال الدوال المركّبة

إذا كانت f متّصلة عند c ، و g متّصلة عند $f(c)$ فإن الدالّة المركّبة $g\circ f$ متّصلة عند c.



مثال (6) صـ 59

لتكن: $f(x)=x^2+5$, $g(x)=\sqrt{x}$. ابحث اتصال الدالة $g\circ f$ عند $x=-2$

التاريخ: / /٢٠١٨

كراسة التمارين صـ٢٤ـ رقـ٩ـم

لتكن: $f(x) = 2x^2 - 3$ ، $g(x) = \sqrt{x+4}$.

ابحث اتصال الدالة $g \circ f$ عند $x = -2$

حاول أن تحل (6) صـ 59

لتكن: $g(x) = 2x + 3$ ، $f(x) = \frac{|x|}{x+2}$.

ابحث اتصال الدالة $f \circ g$ عند $x = 1$

التاريخ: /   /٢٠١٨

مثال (7) صـ 60

لتكن: $f(x)=|x^2-5x+6|$ ابحث اتصال الدالة f عند $x=2$

التاريخ: / /٢٠١٨

حاول أن تحل (7) صـ 60

لتكن: $f(x)=\left|x^2-3x+2\right|$ ابحث اتصال الدالة f عند $x=0$

الاتصال على فترة

بند 1-7

تعريف (9) الاتصال على فترة مفتوحة:

لتكن الدالة f معرّفة على الفترة $(a\ ,b)$ فإننا نقول أن الدالة f متصلة على الفترة المفتوحة $(a\ ,b)$

إذا كانت f متصلة عند كل x تنتمي إلى الفترة $(a\ ,b)$

تعريف (10) الاتّصال على فترة مغلقة:

لتكن الدالة f معرفة على الفترة $[a, b]$ فإنّنا نقول أن الدالة f متصلة على الفترة المغلقة $[a, b]$ إذا تحققت الشروط الثلاثة التالية:

1. **الدالة f متصلة على الفترة المفتوحة (a, b)**
2. **الدالة f متصلة عند $x = a$ من جهة اليمين أي أن: $\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$**
3. **الدالة f متصلة عند $x = b$ من جهة اليسار أي أن: $\lim_{x\to b^-} f(x) = f(b)$**

ملاحظات:

أوّلًا: إذا تحقق الشرطان 2 , 1 من التعريف (10) نقول إن **الدالة f متصلة على $[a\ ,b)$.**

ثانيًا: إذا تحقق الشرطان 3 , 1 من التعريف (10) نقول إن **الدالة f متصلة على $(a\ ,b]$.**

ثالثًا: تبقى النظرية (14) صحيحة إذا استبدلنا النقطة بفترة بحيث تكون هذه الفترة مجموعة جزئية من مجال الدالة.

رابعًا: إذا كانت الدالة متصلة على فترة ما فإنها متصلة على أي فترة جزئية منها.

خامسًا: إذا كانت الدالة متصلة على كل من الفترتين $[c\ ,b]$, $[a\ ,c]$ فإن الدالة متصلة على $[a\ ,b]$.

سادسًا: يبقى التعريف (10) صحيحًا في حالة الفترات على الصورة $[a\ ,\infty)$, $(-\infty\ ,b]$.

حاول أن تحل (1) صـ 62

ادرس اتصال f على الفترة المبيّنة:

ⓑ $f(x) = \dfrac{x}{x^2-1}\ ,\ [0\ ,2]$

ⓐ $f(x) = \dfrac{2x+1}{x^2+2}\ ,\ [0\ ,3]$

مثال ٢ صـ٦٢ـ

ادرس اتصال الدالة f على $[1, 3]$ حيث:

$$f(x) = \begin{cases} -2 & : x = 1 \\ x^2 - 3 & : 1 < x < 3 \\ 6 & : x = 3 \end{cases}$$

حاول ان تحل ١ صـ٦٢ـ

ادرس اتصال الدالة f على $[1, 5]$ حيث:

$$f(x) = \begin{cases} 2 & : x = 1 \\ \frac{x^2 + 1}{x} & : 1 < x < 5 \\ \frac{26}{5} & : x = 5 \end{cases}$$

مثال (3) صـ 63

ادرس اتصال الدالة f على مجالها حيث:

$$f(x)=\begin{cases} x+3 & : \quad x\leq -1 \\ \dfrac{4}{x+3} & : \quad x>-1 \end{cases}$$

حاول أن تحل (3) صـ 63

لتكن f : $f(x)=\begin{cases}2x-1 & , \quad x<1\\ -x+2 & , \quad 1\le x<3\\ 1 & , \quad x\ge 3\end{cases}$ **ادرس اتصال الدالة f على مجالها.**

التاريخ: /   /٢٠١٨

مثال (4) صـ 63

لتكن الدالة f :
$$f(x)=\begin{cases} x^2-a & : \quad x<0 \\ 2 & : \quad x=0 \\ ax+b & : \quad x>0 \end{cases}$$
متصلة على مجالها R

أوجد قيمة الثابتين a , b

حاول أن تحل (4) صـ 65

لتكن الدالة f :
$$f(x)=\begin{cases} 5 & : \quad x=1 \\ ax+b & : \quad 1<x<4 \\ b+8 & : \quad x=4 \end{cases}$$

متصلة على $[1,4]$. أوجد قيم الثابتين a , b

التاريخ: / /٢٠١٨

تعميم:

إذا كانت الدالة g متصلة على فترة ما، $g(x) \geqslant 0$ في هذه الفترة فإن الدالة $f(x)=\sqrt{g(x)}$ متصلة على هذه الفترة.

حاول أن تحل (6) صـ 66

لتكن f : $f(x)=\sqrt{-x^2+4x-3}$.

ادرس اتصال الدالة f على $[1,3]$.

حاول أن تحل (5) صـ 66

لتكن f: $f(x)=\sqrt{x^2-7x+10}$.

أوجد D_f (مجال الدالة f) ثم ادرس اتصال الدالة f على $[6,10]$.

التاريخ: / /٢٠١٨

ملاحظة:

ناتج تركيب دالتين كل منهما متصلة على $\mathbb{R}$ هو دالة متصلة على $\mathbb{R}$.

حاول أن تحل (7) صـ 67

لتكن: $f(x)=\sqrt[3]{-x^2+2x+5}$.

ادرس اتصال الدالة f على $\mathbb{R}$.