

نماذج أجابة أسئلة امتحان تقييمي أول

فصل أول 2023 / 2022

عمل / أ . أحمد نصار

(1)

بفرض أن: $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -2$, $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 5$

أوجد:

a $\lim_{x \rightarrow 1} (f(x) - g(x))$

b $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2f(x)}{g(x)}$

c $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x) + 4}{f(x) \cdot g(x)}$

الحل:

a
$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} (f(x) - g(x)) &= \lim_{x \rightarrow 1} f(x) - \lim_{x \rightarrow 1} g(x) \\ &= -2 - 5 \\ &= -7 \end{aligned}$$

b $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 5$, $5 \neq 0$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2f(x)}{g(x)} &= \frac{\lim_{x \rightarrow 1} 2f(x)}{\lim_{x \rightarrow 1} g(x)} = \frac{2 \lim_{x \rightarrow 1} f(x)}{\lim_{x \rightarrow 1} g(x)} \\ &= \frac{2(-2)}{5} \\ &= \frac{-4}{5} \\ &= -0.8 \end{aligned}$$

c
$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} (f(x) \cdot g(x)) &= \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow 1} g(x) \\ &= -2 \times 5 \\ &= -10 \quad , \quad -10 \neq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x) + 4}{f(x) \cdot g(x)} &= \frac{\lim_{x \rightarrow 1} (g(x) + 4)}{\lim_{x \rightarrow 1} (f(x) \cdot g(x))} \\ &= \frac{\lim_{x \rightarrow 1} g(x) + \lim_{x \rightarrow 1} 4}{\lim_{x \rightarrow 1} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow 1} g(x)} \\ &= \frac{5 + 4}{-10} \\ &= -\frac{9}{10} \\ &= -0.9 \end{aligned}$$

(2)

(a) أوجد

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+1)^2 - 9}{x^2 - 2x}$$

الحل :

عند التعويض المباشر عن x بـ 2 في كل من البسط والمقام نحصل على صيغة غير معينة

$$\begin{aligned} \frac{(x+1)^2 - 9}{x^2 - 2x} &= \frac{(x+1-3)(x+1+3)}{x(x-2)} \\ &= \frac{(x-2)(x+4)}{x(x-2)} \\ &= \frac{x+4}{x}, \quad x \neq 2 \end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+1)^2 - 9}{x^2 - 2x} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+4}{x}$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 2} x = 2, \quad 2 \neq 0$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+4}{x} = \frac{\lim_{x \rightarrow 2} (x+4)}{\lim_{x \rightarrow 2} x}$$

$$= \frac{2+4}{2} = 3$$

(3)

© عند التعويض المباشر عن x بـ 1 في كل من البسط والمقام نحصل على صيغة غير معيّنة.

$$\frac{|x-1|}{x^2-1} = \begin{cases} \frac{\cancel{x-1}}{(\cancel{x-1})(x+1)} & : x > 1 \\ \frac{\cancel{1-x}}{(\cancel{x-1})(x+1)} & : x < 1, x \neq -1 \end{cases}$$

اكتب البسط دون استخدام رمز القيمة المطلقة وحلّ المقام إلى عوامل $(x-1)$ عامل صفري مشترك بين البسط والمقام

$$= \begin{cases} \frac{1}{x+1} & : x > 1 \\ \frac{-1}{(x+1)} & : x < 1, x \neq -1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x-1|}{x^2-1} \quad \text{لإيجاد}$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1^+} (x+1) = 2, \quad 2 \neq 0 \quad \text{نتحقق من نهاية المقام } 0 \neq$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} \quad \text{استخدم الصيغة المبسطة وعوّض عن } x \text{ بـ } 1 \text{ (النهاية من جهة اليمين)}$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1^-} -(x+1) = -(1+1) = -2, \quad -2 \neq 0$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-1}{(x+1)} = \frac{-1}{(1+1)} = -\frac{1}{2} \quad \text{استخدم الصيغة المبسطة وعوّض عن } x \text{ بـ } 1 \text{ (النهاية من جهة اليسار)}$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{|x-1|}{x^2-1} \neq \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{|x-1|}{x^2-1}$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x-1|}{x^2-1} \quad \text{غير موجودة}$$

(4)

b عند التعويض المباشر عن x بـ 0 في كل من البسط والمقام نحصل على صيغة غير معيّنة.

$$\frac{(2+x)^3 - 8}{x} = \frac{(2+x-2)((2+x)^2 + 2(2+x) + (2)^2)}{x}$$

$$= \frac{x^1(4 + 4x + x^2 + 4 + 2x + 4)}{x^1}$$

x عامل صفري مشترك بين البسط والمقام

$$= x^2 + 6x + 12, \quad x \neq 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2+x)^3 - 8}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (x^2 + 6x + 12) = 12$$

استخدم الصيغة المبسطة

(5)

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt[3]{x}-1}$$

عند التعويض المباشر عن x بـ 1 في كل من البسط والمقام نحصل على صيغة غير معينة.

$$\frac{x-1}{\sqrt[3]{x}-1} = \frac{(\cancel{\sqrt[3]{x}-1})^1 (\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1)}{(\cancel{\sqrt[3]{x}-1})}$$

حلل البسط: الفرق بين مكعبين

$$= \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1, \quad x \neq 1$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt[3]{x}-1} = \lim_{x \rightarrow 1} (\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1)$$

استخدم الصيغة المبسطة

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \sqrt[3]{x^2} + \lim_{x \rightarrow 1} \sqrt[3]{x} + \lim_{x \rightarrow 1} 1$$

$$= \sqrt[3]{\lim_{x \rightarrow 1} x^2} + \sqrt[3]{\lim_{x \rightarrow 1} x} + 1$$

$$= 1 + 1 + 1 = 3$$

عوّض عن x بـ 1

(6)

c $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 4}{\sqrt[3]{x+2}}$

عند التعويض عن x بـ -2 في كل من البسط والمقام نحصل على صيغة غير معينة.

$$\frac{x^2 - 4}{\sqrt[3]{x+2}} = \frac{(x^2 - 4)}{\sqrt[3]{x+2}} \times \frac{\sqrt[3]{(x+2)^2}}{\sqrt[3]{(x+2)^2}}$$

مرافق $\sqrt[3]{a}$ هو $\sqrt[3]{a^2}$

$$= \frac{(x^2 - 4) \times \sqrt[3]{(x+2)^2}}{x+2}$$

$\sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt[3]{a} = a$

$$= \frac{\cancel{(x+2)}^1 (x-2) \sqrt[3]{(x+2)^2}}{\cancel{(x+2)}^1}$$

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

$$= (x-2) \sqrt[3]{(x+2)^2}, \quad x \neq -2$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 4}{\sqrt[3]{x+2}} = \lim_{x \rightarrow -2} ((x-2) \sqrt[3]{(x+2)^2})$$

استخدم الصيغة المبسطة

$$= \lim_{x \rightarrow -2} (x-2) \cdot \lim_{x \rightarrow -2} \sqrt[3]{(x+2)^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -2} (x-2) \cdot \sqrt[3]{\lim_{x \rightarrow -2} (x+2)^2}$$

$$= (-2-2) \cdot \sqrt[3]{(-2+2)^2}$$

$$= (-4) \times (0) = 0$$

(7)

عند التعويض المباشر عن x بـ 2 في كل من البسط والمقام نحصل على صيغة غير معينة

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{2x-3}-1}{x-2} &= \frac{\sqrt{2x-3}-1}{x-2} \times \frac{\sqrt{2x-3}+1}{\sqrt{2x-3}+1} \\ &= \frac{2x-3-1}{(x-2)(\sqrt{2x-3}+1)} \\ &= \frac{2(x-2)}{(x-2)(\sqrt{2x-3}+1)} \\ &= \frac{2}{\sqrt{2x-3}+1}, \quad x \neq 2 \end{aligned}$$



$$\lim_{x \rightarrow 2} (2x-3) = 1, \quad 1 > 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} (\sqrt{2x-3}+1) = \lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{2x-3} + \lim_{x \rightarrow 2} 1$$

$$= \sqrt{\lim_{x \rightarrow 2} (2x-3)} + 1 = 1 + 1 = 2, \quad 2 \neq 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{2x-3}-1}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2}{\sqrt{2x-3}+1}$$

$$= \frac{\lim_{x \rightarrow 2} 2}{\lim_{x \rightarrow 2} (\sqrt{2x-3}+1)} = \frac{2}{2} = 1$$



(8)

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^5 + 32}{x + 2}$$

$$\frac{x^5 + 32}{x + 2}$$

عند التعويض عن x بـ -2 في كل البسط والمقام نحصل على صيغة غير معينة.

$$x^5 + 32 = x^5 + 0x^4 + 0x^3 + 0x^2 + 0x + 32$$

$$\begin{array}{r|rrrrrr} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 32 \\ & & -2 & 4 & -8 & 16 & -32 \\ \hline & 1 & -2 & 4 & -8 & 16 & 0 \end{array}$$

أقسم البسط على المقام وأوجد الناتج باستخدام القسمة التركيبية

الناتج: $x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 8x + 16$ والباقي صفر

$$\frac{x^5 + 32}{x + 2} = x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 8x + 16, \quad x \neq -2$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^5 + 32}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow -2} (x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 8x + 16)$$

$$= (-2)^4 - 2(-2)^3 + 4(-2)^2 - 8(-2) + 16$$

عوض عن x بـ -2

$$= 16 + 16 + 16 + 16 + 16$$

$$= 80$$

بسط

(9)

(8 درجات)

(b) أوجد :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{3x^2 - 5x + 1}}{3x - 5}$$

الحل :

$$f(x) = \frac{\sqrt{3x^2 - 5x + 1}}{3x - 5} = \frac{\sqrt{x^2(3 - \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2})}}{x(3 - \frac{5}{x})} \quad [1]$$

$$= \frac{|x| \sqrt{3 - \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2}}}{x(3 - \frac{5}{x})} \quad , \quad |x| = -x \text{ يكون } x < 0 \text{ عندما} \quad [0.5]$$

$$= \frac{-x \sqrt{3 - \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2}}}{x(3 - \frac{5}{x})} = - \frac{\sqrt{3 - \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2}}}{3 - \frac{5}{x}} \quad , x \neq 0 \quad [1]$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(3 - \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2}\right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 3 - \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5}{x} + \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2} = 3 - 0 + 0 = 3 \quad , 3 > 0 \quad [1.5]$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{3 - \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2}} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(3 - \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2}\right)} = \sqrt{3} \quad [1]$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(3 - \frac{5}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 3 - \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5}{x} = 3 - 0 = 3 \quad , \quad 3 \neq 0 \quad [1.5]$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{3x^2 - 5x + 1}}{3x - 5} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\sqrt{3 - \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2}}}{3 - \frac{5}{x}}$$

$$= \frac{-\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{3 - \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2}}}{\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(3 - \frac{5}{x}\right)} = \frac{-\sqrt{3}}{3} = \frac{-1}{\sqrt{3}} \quad [1.5]$$



(10)

) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-2}{\sqrt{x^2+2x-4}}$ (a) أوجد

$f(x) = \frac{x-2}{\sqrt{x^2+2x-4}}$ بفرض أن الحل:

$$f(x) = \frac{x-2}{\sqrt{x^2+2x-4}} = \frac{x\left(1-\frac{2}{x}\right)}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{2}{x}-\frac{4}{x^2}\right)}}$$

$$= \frac{x\left(1-\frac{2}{x}\right)}{|x|\sqrt{1+\frac{2}{x}-\frac{4}{x^2}}}$$

$$= \frac{x\left(1-\frac{2}{x}\right)}{x\sqrt{1+\frac{2}{x}-\frac{4}{x^2}}} \quad \text{عندما } x > 0 \text{ يكون } |x| = x$$

$$= \frac{1-\frac{2}{x}}{\sqrt{1+\frac{2}{x}-\frac{4}{x^2}}} \quad \text{بشرط } x \neq 0$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x} - \frac{4}{x^2}\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} 1 + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{x} - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4}{x^2}$$

$$= 1 + 0 - 0 = 1, \quad 1 > 0$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{1 + \frac{2}{x} - \frac{4}{x^2}} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x} - \frac{4}{x^2}\right)} = \sqrt{1} = 1, \quad 1 \neq 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} 1 - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{x} = 1 - 0 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{2}{x}}{\sqrt{1 + \frac{2}{x} - \frac{4}{x^2}}} = \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{x}\right)}{\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{1 + \frac{2}{x} - \frac{4}{x^2}}}$$

$$= \frac{1}{1} = 1$$



(11)

(b) ابحث اتصال الدالة f عند $x = 0$ حيث :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 3x}{|x|} & : x \neq 0 \\ -3 & : x = 0 \end{cases}$$

الحل :

$$1 \quad \frac{x^2 - 3x}{|x|} = \begin{cases} \frac{x(x-3)}{x} & : x > 0 \\ \frac{x(x-3)}{-x} & : x < 0 \end{cases}$$

$$1 \quad \therefore f(x) = \begin{cases} x - 3 & : x > 0 \\ -x + 3 & : x < 0 \\ -3 & : x = 0 \end{cases}$$

$$f(0) = -3$$

$$1 \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x - 3) = -3$$

$$1 \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-x + 3) = 3$$

$$1 \quad \therefore \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$$

$$1 \quad \therefore \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \text{ ليست موجودة}$$

$$1 \quad \therefore \text{الدالة } f \text{ ليست متصلة عند } x = 0$$

(12)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 9}{x - 3} & : x > 3 \\ 7 & : x \leq 3 \end{cases} \quad : f \text{ لتكن (a)}$$

ابحث اتصال الدالة f عند $x = 3$

الحل :

$$f(3) = 7$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} 7 = 7$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^2 - 9}{x - 3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{(x - 3)(x + 3)}{x - 3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3^+} (x + 3) = 3 + 3 = 6$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 3} f(x) \text{ ليست موجودة}$$

\therefore الدالة f ليست متصلة عند $x = 3$

