رياضيات

الصف الثاني عشر

علمي

الترم الاول

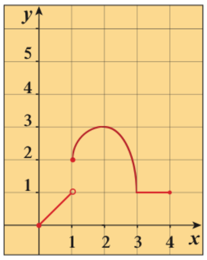
2022/2023

النهايات والاتصال

تدريب (1)

الشكل المقابل يمثّل بيان الدالة: $f:[0,4]\to\mathbb{R}$

أكمل ما يلي:

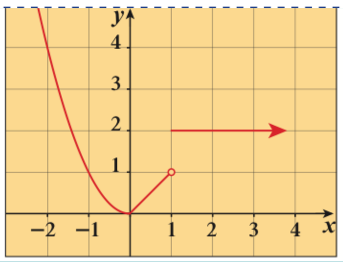


1. $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)\ldots$
2. $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)\ldots$
3. $\lim\limits_{x\to1} f(x)\ldots$
4. $\lim\limits_{x\to2^+} f(x)\ldots$
5. $\lim\limits_{x\to2^-} f(x)\ldots$
6. $\lim\limits_{x\to2} f(x)\ldots$
7. $\lim\limits_{x\to3^+} f(x)\ldots$
8. $\lim\limits_{x\to3^-} f(x)\ldots$
9. $\lim\limits_{x\to3} f(x)\ldots$
10. $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)\ldots$
11. $\lim\limits_{x\to4^-} f(x)\ldots$

مثال (1)

الشكل المقابل، يمثّل بيان الدالة f.

أوجد إن أمكن:

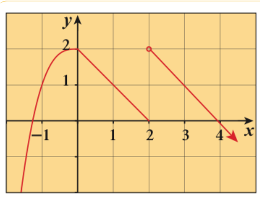


1. $\lim\limits_{x\to0} f(x)$
2. $\lim\limits_{x\to1} f(x)$
3. $\lim\limits_{x\to2} f(x)$
4. $\lim\limits_{x\to-2} f(x)$

حاول أن تحل

1. يمثّل الشكل المقابل بيان الدالة f.

أوجد إن أمكن:



a. $\lim\limits_{x\to-1} f(x)$
b. $\lim\limits_{x\to0} f(x)$
c. $\lim\limits_{x\to2} f(x)$
d. $\lim\limits_{x\to3} f(x)$

2 بفرض أنّ: $\lim_{x\to 2} g(x) = -3$, $\lim_{x\to 2} f(x) = 7$

أوجد:

a $\lim_{x\to 2}(f(x)+g(x))$

b $\lim_{x\to 2}(f(x)\cdot g(x))$

c $\lim_{x\to 2}\left(\frac{8\, f(x)\cdot g(x)}{f(x)+g(x)}\right)$

أوجد:

1 $\lim_{x\to 1}(x^3+3x^2-2x-17)$

2 $\lim_{x\to 2}\frac{x^2+5x+6}{x+2}$

مثال (4)

إذا كانت الدالة f:

$$f(x)=\begin{cases}3x+2 & : x<1\\ 5 & : x=1\\ \frac{5}{x} & : x>1\end{cases}$$

فأوجد إن أمكن $\lim_{x\to 1} f(x)$

حاول أن تحل

4 إذا كانت الدالة f:

$$f(x)=\begin{cases}x^2-3 & : x<2\\ x-1 & : x>2\end{cases}$$

فأوجد إن أمكن $\lim_{x\to 2} f(x)$

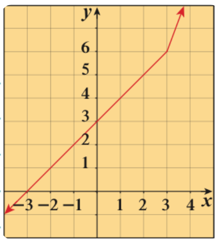
مثال (5) إذا كانت الدالة g : فأوجد إن أمكن $\lim_{x \to 0} g(x)$

$$g(x) = \begin{cases} x^2 - 2 & : x \leqslant 0 \\ 1 - 2x & : x > 0 \end{cases}$$

حاول أن تحل 5 إذا كانت الدالة g : فأوجد إن أمكن $\lim_{x \to 1} g(x)$

$$g(x) = \begin{cases} x^3 + x & : x > 1 \\ \dfrac{x}{x^2 + 1} & : x \leqslant 1 \end{cases}$$

مثال (6) لتكن: $f(x) = |x - 3| + 2x$ الممثلة بالشكل.



a اكتب $f(x)$ دون استخدام رمز القيمة المطلقة.

b أوجد $\lim_{x\to3^+} f(x)$ ، $\lim_{x\to3^-} f(x)$

c هل للدالة f نهاية عندما $x \to 3$؟

حاول أن تحل 6 لتكن f : $f(x) = x^2 - |x + 2|$

a اكتب $f(x)$ دون استخدام رمز القيمة المطلقة.

b أوجد: $\lim_{x\to-2^-} f(x)$ ، $\lim_{x\to-2^+} f(x)$

c هل للدالة f نهاية عندما $x \to -2$؟

حاول أن تحل 7 أوجد:

a $\lim_{x \to 5} \sqrt{x^2 - 5}$

b $\lim_{x \to 4} (x + \sqrt{x})^4$

c $\lim_{x \to -1} \frac{\sqrt[3]{x^3 - 4x + 5}}{x - 2}$

مثال (8) أوجد إن أمكن:

a $\lim_{x \to 1} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - x}$

b $\lim_{x \to 0} \frac{(2 + x)^3 - 8}{x}$

c $\lim_{x \to 1} \frac{|x-1|}{x^2-1}$

حاول أن تحل

a $\lim_{x \to -2} \frac{x^2+3x+2}{x^2-4}$

b $\lim_{x \to -7} \frac{(x+4)^2 - 9}{x^2 + 7x}$

c $\lim_{x \to 5} \frac{|x+2| - 7}{x^2 - 25}$

أوجد:

a $\lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{2x-3}-1}{x-2}$

b $\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{\sqrt[3]{x}-1}$

c $\lim_{x \to -2} \frac{x^2 - 4}{\sqrt[3]{x+2}}$

حاول أن تحل

9 أوجد إن أمكن:

a $\lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{x^2+5} - 3}{x^2 - 2x}$

b $\lim_{x \to -1} \frac{\sqrt[3]{x^3+1}}{\sqrt[3]{x+1}}$

c $\lim_{x \to 9} \frac{x-9}{3-\sqrt{x}}$

أوجد:

a $\lim_{x \to -1} \frac{x^3+6x^2+2x-3}{x+1}$

b $\lim_{x \to -2} \frac{x^5 + 32}{x + 2}$

حاول أن تحل **10** أوجد إن أمكن:

a $\lim_{x \to 3} \frac{x^3 - 2x^2 - 4x + 3}{x - 3}$

b $\lim_{x \to 2} \frac{-x^5 + x^3 + x + 22}{x - 2}$

نهايات تشتمل على ∞− ، ∞

نظرية (7)

لتكن f : $f(x)=\frac{1}{x}$ فإن:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0\ ,\ \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$$

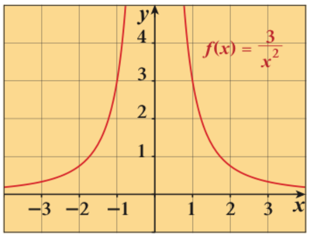
تدريب

الشكل يمثّل بيان الدالة f : $f(x)=\frac{3}{x^2}$

أكمل ما يلي:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3}{x^2}=\text{..........}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{3}{x^2}=\text{..........}$$



نظرية (8)

لتكن f : $k\in\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{Z}^+$, $f(x)=\frac{k}{x^n}$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{k}{x^n}=0\quad,\quad\lim_{x\to-\infty}\frac{k}{x^n}=0$$

أوجد النهايات التالية إن أمكن:

a $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x+4}$

b $\lim_{x \to -\infty} \frac{x+5}{x^2+25}$

c $\lim_{x \to \infty} \frac{6x^3}{5-7x^3}$

حاول أن تحل

1 أوجد النهايات التالية إن أمكن:

a $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x-2}$

b $\lim_{x\to-\infty} \frac{x+2}{x^2+9}$

c $\lim_{x\to\infty} \frac{x^3 - 3x + 1}{x^3 + 5}$

صيغ غير معينة

$\lim_{x\to\infty}(-x^5) = -\infty$, $\lim_{x\to\infty} 2x^3 = \infty$, $\lim_{x\to-\infty}(5x^7) = -\infty$

$\lim_{x\to\infty}(-4x^4) = -\infty$, $\lim_{x\to\infty}(5x^2) = \infty$, $\lim_{x\to-\infty}\frac{x^4}{3} = \infty$

$\lim_{x\to-\infty}(-4x) = \infty$, $\lim_{x\to\infty}(-3x^4) = -\infty$

أوجد: $\lim_{x\to\infty}(2x^2 - 3x + 1)$

حاول أن تحل

1 أوجد: $\lim_{x\to\infty}(-3x^2 + 2x - 4)$

نظرية (11)

إذا كانت كل من g , f دالة حدودية حيث:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0$$

$$g(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \dots + b_0$$ فإن:

a $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a_n}{b_m} \; : \; n = m$

b $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = 0 \; : \; n < m$

مثال (2)

استخدم النظرية السابقة في حساب كل من:

a $\lim_{x\to\infty}\frac{4 - 3x^3}{2x^3 + 5}$

b $\lim_{x\to-\infty} \frac{2x^2+x-1}{3x^4-x}$

c $\lim_{x\to-\infty} \frac{x^4-1}{7-2x^4}$

حاول أن تحل

2 استخدم النظرية السابقة في حساب كل من:

a $\lim_{x\to+\infty} \frac{-3x^2+5x+1}{6x^2-x+1}$

b $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x+1}{4x^3-2x+3}$

مثال (3)

إذا كانت $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{ax^2+bx+3}{2x+5} = 3$

فأوجد قيمة كل من الثابتين a , b

حاول أن تحل

3 أوجد قيمة كل من الثابتين b , a إذا كانت $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x-2}{ax^2+bx-3} = -1$

مثال (4)

أوجد: $\lim_{x \to \infty} \frac{x-2}{\sqrt{x^2+2x-4}}$

حاول أن تحل

4 أوجد:

a $\lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{2x^2 - x}}{x + 1}$

b $\lim_{x \to -\infty} \frac{3x - 5}{\sqrt{x^2 - 9}}$

نهايات بعض الدوال المثلثية

نظرية (12)

حيث x بالراديان ، $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

نتيجة (1)

إذا كان b , a عددين حقيقيين، $b \neq 0$, $a \neq 0$ فإن:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin ax}{bx} = \frac{a}{b} \quad , \quad \lim_{x\to 0} \frac{bx}{\sin ax} = \frac{b}{a}$$

$$\lim_{x\to 0} \sin x = 0 \quad , \quad \lim_{x\to 0} \cos x = 1 \quad , \quad \lim_{x\to 0} \tan x = 0$$

أوجد:

a) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{2x}$

b) $\lim_{x\to 0} \frac{x-3}{\cos x}$

c) $\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{1-\cos x}$

أوجد النهاية:

1 $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{2x^2 - x}$

2 $\lim_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{3x \cos x}$

3 $\lim_{x \to 0} \frac{x \sin x}{\cos x - 1}$

أوجد:

ⓐ $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan x}{x}$

ⓑ $\lim\limits_{x\to 0} \frac{5\tan x - 3\sin x}{4x}$

حاول أن تحل

2 أوجد:

ⓐ $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{2\tan x}$

ⓑ $\lim\limits_{x\to 0} \frac{3\tan x + x^2 \cos x}{5x}$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan ax}{bx} = \frac{a}{b}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$$

أوجد:

a $\lim_{x \to 0} \frac{5x + \sin x}{x}$

b $\lim_{x \to 0} \frac{\cos x \tan x - 2x \cos x}{3x}$

حاول أن تحل

3 أوجد:

a $\lim_{x \to 0} \frac{x \sin x - x^2}{3x^2}$

b $\lim_{x \to 0} \frac{\tan 2x + 3x \cos 4x}{5x}$

الاتّصال

مثال (1)

لتكن f :

$$f(x)=\begin{cases} x^2+3x & : x\geq 1 \\ 5x-1 & : x<1 \end{cases}$$

ابحث اتصال الدالة f عند $x=1$.

حاول أن تحل

1 لتكن الدالة f :

$$f(x)=\begin{cases} x^3+x & : x\leq 0 \\ \dfrac{x^2}{x+1} & : x>0 \end{cases}$$

ابحث اتصال f عند $x=0$

مثال (2)

لتكن f : $f(x)=\begin{cases}\frac{x^2-9}{x-3} & : x>3\\ 7 & : x\le 3\end{cases}$

ابحث اتصال الدالة f عند $x=3$.

حاول أن تحل

2 ابحث اتصال الدالة f عند $x=2$ حيث

$$f(x)=\begin{cases}2x+1 & : x<2\\ 1 & : x=2\\ x^2+1 & : x>2\end{cases}$$

مثال (3) ابحث اتصال الدالة f عند $x = 2$ حيث

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-2}{|x-2|} & : x \neq 2 \\ 1 & : x = 2 \end{cases}$$

حاول أن تحل

3 ابحث اتصال الدالة f عند $x = -1$ حيث

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x+1|}{x+1} - 2x & : x \neq -1 \\ 2 & : x = -1 \end{cases}$$

نظريات الاتصال

دوال متّصلة

1. الدالة f : $f(x) = k$ حيث k ثابت متصلة عند كل $c \in \mathbb{R}$.
2. الدالة كثيرة الحدود متصلة عند كل $c \in \mathbb{R}$.
3. الدالة الحدودية النسبية $\frac{f}{g}$ متصلة عند كل عدد حقيقي c في مجالها أي $c \in D$.
4. الدالة f : $f(x) = |x|$ متصلة عند كل $c \in \mathbb{R}$.
5. الدوال المثلثية الأساسية متصلة عند كل عدد حقيقي c في مجالها أي $c \in D$.

مثال (1) ابحث اتصال الدالة f عند $x = c$ في كل مما يلي:

a $f(x) = x^2 + |x| \quad , \quad c = -1$

b $f(x) = \sin x - \cos x \quad , \quad c = \frac{\pi}{2}$

حاول أن تحل

1 ابحث اتصال الدالة f عند $x = c$ في كل مما يلي:

a $f(x) = x^2 - 4x + 3 + |x| \quad , \quad c = 3$

b $f(x) = \dfrac{\tan x}{x+1}$, $c = \dfrac{\pi}{4}$

مثال (2)

ابحث اتصال الدالة f: $f(x) = \dfrac{x-2}{x^2+9} - \dfrac{1}{x}$ عند $x = 3$

حاول أن تحل

2 ابحث اتصال الدالة f: $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2+1} - \dfrac{2x}{x-2}$ عند $x = 1$

اتصال الدوال الجذرية عند نقطة

نظرية (15)

a الدالة الجذرية $y = \sqrt[n]{x}$ متصلة عند كل $x = c : c \in \mathbb{R}^+$ ، n عدد صحيح زوجي موجب،
ومتصلة عند كل $x = c : c \in \mathbb{R}$ ، n عدد صحيح فردي أكبر من 1.

b إذا كانت g دالة متصلة عند $x = c$ وكانت $g(c) > 0$
فإن الدالة: $f(x) = \sqrt{g(x)}$ متصلة عند $x = c$

مثال (3) ابحث اتصال كل من الدالتين التاليتين عند العدد المبيّن:

a $f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x}}{x^2 + 1} \quad , \quad x = 1$

b $f(x) = \sqrt{x + 3} \quad , \quad x = -1$

حاول أن تحل

3 ابحث اتصال كل من الدالتين التاليتين عند $x = -2$

a $f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x}}{x^2+4}$

b $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 3}$

الدالة المركبة

إذا كانت كل من f, g دالتين حقيقيتين وكان مدى الدالة f مجموعة جزئية من مجال الدالة g فإنه يتعين دالة مركبة h:

$$h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x))$$

مثال (4)

الدالتان f, g معرّفتان على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x) = x^2 - 1$, $f(x) = 1 + x$ أوجد:

a $(g \circ f)(x)$ b $(g \circ f)(2)$ c $(f \circ g)(x)$ d $(f \circ g)(2)$

حاول أن تحل 4 إذا كانت g , f معرّفتان على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = 2x + 3$, $g(x) = x^2 + 3$ أوجد:

a) $(g \circ f)(x)$ b) $(g \circ f)(-1)$ c) $(f \circ g)(x)$ d) $(f \circ g)(-1)$

مثال (5) لتكن: $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = x^4 + 2$ أوجد:

a) $(f \circ g)(x)$ b) $(f \circ g)(0)$ c) $(g \circ f)(x)$ d) $(g \circ f)(0)$

حاول أن تحل 5 لتكن: $g(x) = \frac{3}{x^2+4}$, $f(x) = \sqrt{1+x^2}$ أوجد:

b $(g \circ f)(\sqrt{3})$

a $(f \circ g)(x)$

اتصال الدوالّ المركّبة عند نقطة

نظرية (16): اتصال الدوال المركّبة

إذا كانت f متّصلة عند c ، وg متصلة عند $f(c)$ فإن الدالّة المركّبة $g \circ f$ متّصلة عند c.

مثال (6) لتكن: $f(x) = x^2 + 5$, $g(x) = \sqrt{x}$. ابحث اتصال الدالة $g \circ f$ عند $x = -2$

حاول أن تحل

6 لتكن: $g(x) = 2x + 3$, $f(x) = \frac{|x|}{x+2}$. ابحث اتصال الدالة $f \circ g$ عند $x = 1$

مثال (7) لتكن: $f(x) = |x^2 - 5x + 6|$ ابحث اتصال الدالة f عند $x = 2$

حاول أن تحل

7 لتكن: $f(x) = |x^2 - 3x + 2|$ ابحث اتصال الدالة f عند $x = 0$

الاتصال على فترة

تعريف (9) الاتّصال على فترة مفتوحة:

لتكن الدالة f معرّفة على الفترة $(a\,,b)$ فإننا نقول أن الدالة f متصلة على الفترة المفتوحة $(a\,,b)$ إذا كانت f متصلة عند كل x تنتمي إلى الفترة $(a\,,b)$

تعريف (10) الاتّصال على فترة مغلقة:

لتكن الدالة f معرّفة على الفترة $[a, b]$ فإنّنا نقول أن الدالة f متصلة على الفترة المغلقة $[a, b]$ إذا تحققت الشروط الثلاثة التالية:

1. الدالة f متّصلة على الفترة المفتوحة (a, b)
2. الدالة f متّصلة عند $x = a$ من جهة اليمين أي أن: $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = f(a)$
3. الدالة f متّصلة عند $x = b$ من جهة اليسار أي أن: $\lim\limits_{x\to b^-} f(x) = f(b)$

مثال (1)

ادرس اتصال الدالة f على $[1, 3]$ حيث:

$$f(x) = \begin{cases} -2 & : x = 1 \\ x^2 - 3 & : 1 < x < 3 \\ 6 & : x = 3 \end{cases}$$

حاول أن تحل 1 ادرس اتصال الدالة f على $[1, 5]$ حيث:

$$f(x) = \begin{cases} 2 & : \ x = 1 \\ \dfrac{x^2+1}{x} & : \ 1 < x < 5 \\ \dfrac{26}{5} & : \ x = 5 \end{cases}$$

مثال (2) ادرس اتصال كل من الدوال التالية على الفترة المبيّنة:

a $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1} \quad , \quad [-1, 5]$

b $f(x) = \frac{x}{x^2 - 4}$, $[0, 5]$

حاول أن تحل 2 ادرس اتصال f على الفترة المبيّنة:

a $f(x) = \frac{2x + 1}{x^2 + 2}$, $[0, 3]$

b $f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$, $[0, 2]$

مثال (3) ادرس اتصال الدالة f على مجالها حيث:

$$f(x)=\begin{cases} x+3 & : \quad x\le -1 \\ \dfrac{4}{x+3} & : \quad x>-1 \end{cases}$$

مثال (4) لتكن الدالة f :

$$f(x)=\begin{cases} x^2-a & : \quad x<0 \\ 2 & : \quad x=0 \\ ax+b & : \quad x>0 \end{cases}$$ متصلة على مجالها $\mathbb{R}$

أوجد قيمة الثابتين a , b

حاول أن تحل

4 لتكن الدالة f :

$$f(x)=\begin{cases} 5 & : \quad x=1 \\ ax+b & : \quad 1<x<4 \\ b+8 & : \quad x=4 \end{cases}$$

متصلة على $[1 , 4]$. أوجد قيم الثابتين a , b

مثال (5)

لتكن f: $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x}$.

أوجد D_f (مجال الدالة f) ثم ادرس اتصال الدالة f على $[-5, 0]$.

حاول أن تحل

5 لتكن f: $f(x) = \sqrt{x^2 - 7x + 10}$.

أوجد D_f (مجال الدالة f) ثم ادرس اتصال الدالة f على $[6, 10]$.

مثال (6)

لتكن f: $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$.

ادرس اتصال الدالة f على $[-3, 3]$.

حاول أن تحل

6 لتكن f : $f(x) = \sqrt{-x^2 + 4x - 3}$.

ادرس اتصال الدالة f على $[1, 3]$.

مثال (7)

لتكن: $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 5x + 4}$. ادرس اتصال الدالة f على $\mathbb{R}$.

حاول أن تحل

7 لتكن: $f(x) = \sqrt[3]{-x^2 + 2x + 5}$.

ادرس اتصال الدالة f على $\mathbb{R}$.

الوحدة الثانية

معدلات التغير وخطوط المماس

3 نحدّد ميل المماس للمنحنى عند النقطة $P(a\,,f(a))$ بالقيمة m إن وجد:

$$m=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

معدل التغير لدالة f عند النقطة $P(a\,,f(a))$ إن وجد هو:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

مثال (1) أوجد ميل المماسّ للقطع المكافئ $y=x^2$ عند النقطة $P(2\,,4)$.

حاول أن تحل

1 أوجد ميل المماس للقطع المكافئ $y = (x-2)^2 + 2$ عند النقطة $A(1,3)$

المشتقة

تعريف: المشتقّة عند نقطة nt

مشتقة الدالة f عند $x = a$ هي $f'(a)$:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

شرط وجود النهاية.

مثال (1)

باستخدام التعريف، أوجد مشتقة الدالة f : $f(x) = 2x^2 + 1$ عند $x = 1$

حاول أن تحل

1 باستخدام التعريف أوجد مشتقة الدالة f: $f(x) = 3x^2$ عند $x = -2$

تعريف (بديل): المشتقّة عند نقطة

مشتقّة دالّة f عند $x = a$ هي :

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

شرط وجود النهاية.

مثال (2)

باستخدام التعريف البديل. أوجد مشتقة الدالة f : $f(x) = \sqrt{x}$ عند $x = a$ حيث $a > 0$

حاول أن تحل

2 أوجد مشتقة الدالة f : $f(x) = \frac{1}{x}$ عند $b \neq 0$, $x = b$

مثال (3)

بيّن أن الدالة التالية لها مشتقّة لجهة اليمين ومشتقّة لجهة اليسار عند $x = 0$، لكن ليس لها مشتقّة عند $x = 0$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & : \quad x \le 0 \\ 2x & : \quad x > 0 \end{cases}$$

حاول أن تحل

3 لتكن f : $f(x) = |x - 2|$ ، ابحث قابلية الدالة f للاشتقاق عند $x = 2$.

حاول أن تحل

4 لتكن الدالة f :

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x} & : \quad x\le -1\\ \frac{1}{2}x^2-\frac{3}{2} & : \quad x>-1\end{cases}$$

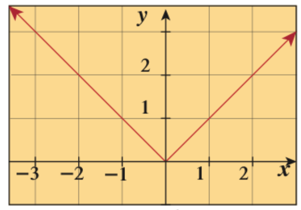
بيّن أن للدالة f مشتقّة لجهة اليمين مساوية للمشتقّة لجهّة اليسار عند $x=-1$.

متى تكون $f'(a)$ غير موجودة؟

الدالة f لن يكون لها مشتقّة عند نقطة $P(a\,,f(a))$ إذا كانت $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ غير موجودة.

وتوضّح الأشكال التالية أربع حالات تكون فيها هذه النهاية غير موجودة:

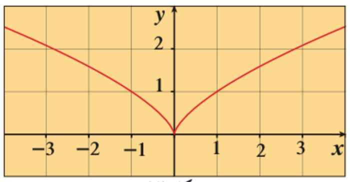
a **ركنًا (Corner):** تكون المشتقّتان من جهة اليمين ومن جهة اليسار عند التقاء الشعاعين غير متساويتين.
مثال: $f(x)=|x|$



شكل (3)

يوجد ركن عند $x=0$، $f'(0)$ غير موجودة

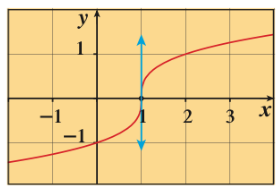
b **نابًا (Cusp):** يكون ميل المماس للمنحنى عند نقطة تقاطع محددة يقترب من ∞ في إحدى الجهات ويقترب من $-\infty$ في الجهة الثانية ويوجد مماس رأسي عندها. مثال: $f(x)=x^{\frac{2}{3}}$



شكل (4)

يوجد ناب عند $x=0$، $f'(0)$ غير موجودة ويوجد مماس رأسي عندها

c **مماسًا رأسيًّا:** يكون المماس للمنحنى عند نقطة محددة رأسيًّا.
مثال: $f(x)=\sqrt[3]{x-1}$

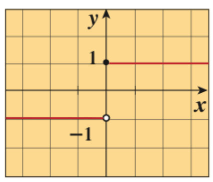


شكل (5)

يوجد مماس رأسي عند $x=1$، $f'(1)$ غير موجودة

d **عدم اتصال:** تكون المشتقّة من جهة واحدة أو كلّ من الجهتين غير موجودة. مثال:

$$f(x)=\begin{cases}-1 & ,x<0\\ 1 & ,x\geq 0\end{cases}$$

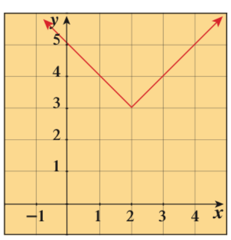


شكل (6)

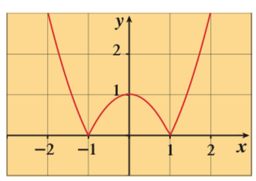
يوجد عدم اتصال عند $x=0$، $f'(0)$ غير موجودة

أوجد كل النقاط في مجال الدالة حيث تكون الدالة غير قابلة للاشتقاق في كل مما يلي:

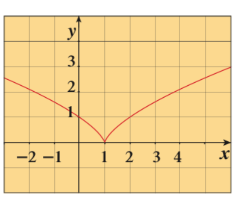
a $f(x)=|x-2|+3$



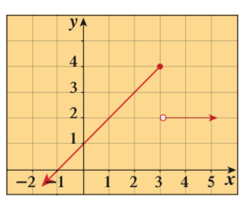
b $f(x)=|x^2-1|$



c $f(x)=(x-1)^{\frac{2}{3}}$



d $f(x)=\begin{cases}2 : x>3\\ x+1 : x\leq 3\end{cases}$



معلومة:

$$|x^2-1|=\begin{cases}x^2-1 & : \ x\leq -1\\ 1-x^2 & : \ -1<x<1\\ x^2-1 & : \ x\geqslant 1\end{cases}$$

مثال (6) لتكن f : $f(x) = \begin{cases} x^2 & , \quad x < 2 \\ 2x - 1 & , \quad x \geq 2 \end{cases}$ ابحث قابلية الاشتقاق للدالة f عند $x = 2$.

حاول أن تحل

6 لتكن f : $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & : \quad x \leq 2 \\ 3x - 2 & : \quad x > 2 \end{cases}$ ، ابحث قابلية الاشتقاق للدالة f عند $x = 2$.

مثال (9) لتكن الدالة f : أوجد إن أمكن $f'(3)$

$$f(x)=\begin{cases} x+5 & : \; x \leqslant 3 \\ x^2-1 & : \; x > 3 \end{cases}$$

حاول أن تحل

9 لتكن الدالة f :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x & : x \leqslant -1 \\ x^2 - x - 2 & : x > -1 \end{cases}$$

أوجد إن أمكن $f'(-1)$.

قواعد الاشتقاق

أوجد مشتقة $f(x) = \dfrac{x^3 - 1}{5x^2 + 1}$

حاول أن تحل 3 أوجد مشتقة $f(x) = \dfrac{4x^2 + 2x}{2x^3 + 5}$

معادلة المماس: $y - f(a) = f'(a)(x-a)$

والمستقيم العمودي (الناظم) على منحنى الدالة عند النقطة $(a, f(a))$ هو المستقيم العمودي على مماس المنحنى عند تلك النقطة ومعادلته:

$$y - f(a) = -\frac{1}{f'(a)}(x-a)$$

مثال (4)

أوجد معادلة المماس ومعادلة الناظم عند النقطة $\left(1, \frac{2}{3}\right)$ لمنحنى الدالة f حيث $f(x) = \frac{x^3+1}{x^2+2}$

حاول أن تحل

4 أوجد معادلة المماس ومعادلة الناظم على منحنى الدالة f حيث $f(x) = \frac{x-1}{x+2}$ عند النقطة $(1, 0)$

أوجد $f'(x)$ حيث $f(x) = \frac{3}{x^2 + 1}$

حاول أن تحل

5 أوجد $f'(x)$ حيث $f(x) = \frac{-4}{x^2 + 2x + 5}$

لتكن: $y = \frac{x^2 + 3}{2x}$. أوجد $\frac{dy}{dx}$ عند $x = 1$

حاول أن تحل

6 لتكن: $y = \frac{3x^2+7}{8x^2}$ ، أوجد $\frac{dy}{dx}$ عند $x = -1$

مثال (8)

لتكن الدالة f: $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & : x \leqslant 1 \\ 2x + 1 & : x > 1 \end{cases}$ دالة متصلة على مجالها.

أوجد $f'(x)$ إن أمكن

حاول أن تحل

8 أوجد المشتقة إن أمكن لكل من الدوال المتصلة التالية:

a $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & : \quad x \leqslant 2 \\ 4x - 3 & : \quad x > 2 \end{cases}$

b $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & : \quad x < 1 \\ 2\sqrt{x} & : \quad x \geqslant 1 \end{cases}$

مشتقات الدوال المثلثية

مثال (1) أوجد المشتقّات للدوال التالية:

a $y = x^2 \sin x$

b $u = \dfrac{\cos x}{1 - \sin x}$

c $f(x) = \sin^2 x$

حاول أن تحل

1 أوجد المشتقات للدوال التالية:

a $h(x) = \cos^2 x$

b $g(x) = \dfrac{x}{\cos x}$

c $y = \dfrac{\sin x}{\sin x + \cos x}$

أوجد مشتقات الدوال التالية:

a $f(x) = \tan x + \cot x$

b $g(x) = \sec x \cdot (1 + \sin x)$

b $g(x) = \sec x \cdot (1 + \sin x)$

حاول أن تحل 2 أوجد مشتقات الدوال التالية:

a $f(x) = \frac{1 + \tan x}{\tan x}$

b $g(x) = \sec x + \csc x$

c $h(x) = \frac{\sec x}{\csc x}$

مثال (3) أوجد معادلة المستقيم العمودي لمنحنى الدالة: $y = \tan x$ عند النقطة $P\left(\frac{\pi}{4}\ ,\ 1\right)$

حاول أن تحل

3 أوجد معادلة المستقيم العمودي لمنحنى الدالة: $y = \sec x$ عند النقطة $F\left(\frac{\pi}{3}, 2\right)$

قاعدة السلسلة

مثال (1) إذا كان $g(x) = x^{10}$, $f(x) = 3x^2 + 1$. فأوجد باستخدام قاعدة السلسلة

a $(f \circ g)'(x)$

b $(g \circ f)'(-1)$

حاول أن تحل لتكن: $g(x) = x^{13}$, $f(x) = -2x^3 + 4$ أوجد باستخدام قاعدة السلسلة $(f \circ g)'(x)$ ، $(g \circ f)'(0)$

مثال (2) لتكن: $g(x) = x^2 + 1$, $(x \neq 0)$ $f(x) = \dfrac{2x+1}{x}$ أوجد باستخدام قاعدة السلسلة $(f \circ g)'(x)$

حاول أن تحل

2 لتكن: $g(x) = \sqrt{x}$, $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x^2 + 4}$ أوجد باستخدام قاعدة السلسلة (1) $(f \circ g)'$.

صورة أخرى لقاعدة السلسلة

إذا كانت $y = f(u)$, $u = g(x)$ فإن:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

يتم حسابها عند $u = g(x)$

مثال (3)

إذا كانت: $y = u^3 - 3u + 1$, $u = 5x^2 + 2$

فأوجد: $\dfrac{dy}{dx}$ باستخدام قاعدة التسلسل

حاول أن تحل **3** لتكن: $y = u^2 + 4u - 3 \quad , \quad u = 2x^3 + x$ أوجد: $\frac{dy}{dx}$ باستخدام قاعدة التسلسل.

أوجد مشتقة الدالة: $f(x) = \sin^3 x$ باستخدام قاعدة السلسلة.

لتكن: $y=\sqrt[5]{(x^2+3x+5)^3}$ ، أوجد: y'

حاول أن تحل

6 لتكن: $y=\sqrt[4]{(2x^4-3x^2+4)^3}$ ، أوجد: y'

مثال (7) أوجد ميل مماس المنحنى $y = \sin^5 x$ عند $x = \frac{\pi}{3}$

حاول أن تحل

7 بيّن أن ميل أي مماس للمنحنى $y = \frac{1}{(-2x-1)^3}$ دائمًا يكون موجبًا حيث $x \neq -\frac{1}{2}$

المشتقات ذات الرتب العليا والاشتقاق الضمني

أوجد المشتقات حتى الرتبة الرابعة للدالة $y = 2x^7 - 4x^2 + 3x - 5$ بدلالة المتغير x.

حاول أن تحل **1** إذا كانت: $y = 4x^5 - 5x^3 + 7$ فأوجد المشتقات حتى الرتبة الثالثة.

إذا كانت $y = \sin x$. بيّن أن $y^{(4)} = y$.

حاول أن تحل

2 لتكن الدالة: $y = \cos x$. بيّن أن $y^{(4)} + y'' = 0$.

مثال (3)

أوجد y'' حيث $y = \dfrac{1}{\cos x}$

حاول أن تحل

3 أوجد y'' حيث $y = \dfrac{1}{\sin x}$

ثانيًا: الاشتقاق الضمنيّ

مثال (4) أوجد $y' = \frac{dy}{dx}$ في الحالات التالية:

a $y^2 + xy = 7x$

b $y = x + x^2y^5$

حاول أن تحل

4 لتكن: $y^2 = x^2 - 2x$ ، أوجد $y' = \frac{dy}{dx}$.

مثال (5)

أوجد ميل المماس للمنحنى (الدائرة) الذي معادلته $x^2 + y^2 = 25$ عند النقطة $(3, -4)$.

حاول أن تحل

5 أوجد ميل المماس للمنحنى الذي معادلته: $x^2 - y^2 + yx - 1 = 0$ عند $(1,1)$

مثال (6)

أوجد ميل المماس $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ للمنحنى الذي معادلته: $2y = x^2 + \sin y$ عند النقطة $(2\sqrt{\pi}\ ,\ 2\pi)$

حاول أن تحل

6 أوجد ميل المماس $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ للمنحنى الذي معادلته: $x^2+y^2-2xy=1$ حيث $x \neq y$ عند النقطة $(2\,,1)$

مثال (7)

للمنحنى الذي معادلته $x=y+2\sqrt{y}$ أوجد y' ثم أوجد ميل المماس لهذا المنحنى عند النقطة $(3\,,\,1)$

حاول أن تحل

7 للمنحنى الذي معادلته: $y^2 + \sqrt{y} + x^2 = 3$ أوجد y' ثم أوجد ميل المماس لهذا المنحنى عند النقطة $(1 , 1)$

إذا كانت $y = \sqrt{1 - 2x}$ فأثبت أن: $yy'' + (y')^2 = 0$

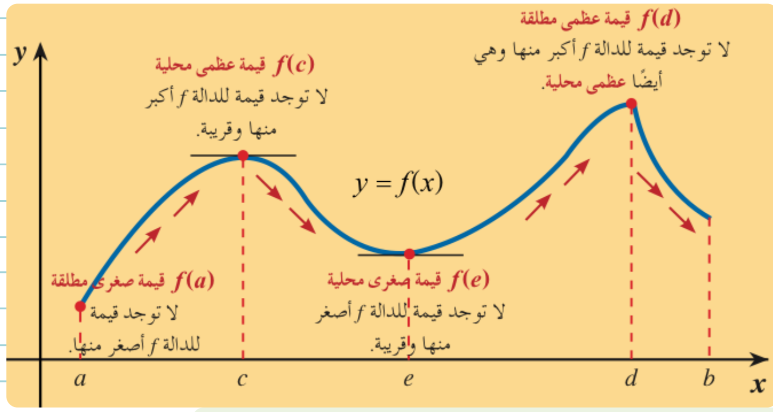
حاول أن تحل

8 إذا كانت $y = x \sin x$ فأثبت أن $y''' + y' + 2\sin x = 0$

الوحدة الثالثة

تطبيقات على الاشتقاق

القيم القصوى (العظمى/الصغرى) للدوال



تعريف (2): القيم القصوى المحليّة

لتكن $(c\,, f(c))$ نقطة داخلية للدالة f، D فترة مفتوحة تحوي c، تكون $f(c)$:

a قيمة عظمى محليّة عند c عندما: $\forall x \in D \quad , \quad f(c) \geqslant f(x)$

b قيمة صغرى محليّة عند c عندما: $\forall x \in D \quad , \quad f(c) \leqslant f(x)$

تعريف (3): النقطة الحرجة **Critical Point**

النقطة الداخليّة للدالّة f $(c\,, f(c))$ تسمى نقطة حرجة عندما $f'(c) = 0$ أو $f'(c)$ غير موجودة.

مثال (2)

أوجد النقاط الحرجة لكلّ من الدوال المتصلة التالية:

a $g(x) = x^3 - 3x^2 + 5$

حاول أن تحل

2 أوجد النقاط الحرجة لكل من الدوال المتصلة التالية: $f(x) = x^4 - 4x^3 - 8x^2 + 10$

مثال (3) أوجد القيم القصوى المطلقة للدالّة المتصلة f : $f(x) = x^3 - 3x + 1$ في الفترة $[0, 3]$.

حاول أن تحل

3 أوجد القيم القصوى المطلقة للدالّة f : $f(x) = x^3 - 3x + 1$ في الفترة $[-2, 1]$.

مثال (4)

أوجد القيم العظمى والصغرى المطلقة للدالة المتصلة f : $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$ في الفترة $[-2, 3]$

حاول أن تحل

4 أوجد القيم العظمى والصغرى المطلقة للدالة: $f(x) = \frac{1}{x^2}$ في الفترة $[1, 3]$

تزايد وتناقص الدوال

مثال (3) أوجد فترات التزايد وفترات التناقص للدالة f : $f(x) = x^2 - 5x + 6$

حاول أن تحل 3 أوجد فترات التزايد وفترات التناقص للدالة f : $f(x) = -x^2 + 4x - 3$

لتكن f: $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$ حدّد الفترات حيث تكون f متزايدة والفترات حيث تكون f متناقصة.

حاول أن تحل

4 إذا كانت f: $f(x) = x^3 - 6x$. حدّد فترات التزايد وفترات التناقص للدالة f.

مثال (5)

إذا كانت f الدالة: $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$.

حدّد فترات التزايد وفترات التناقص للدالة.

حاول أن تحل

5 حدّد فترات التزايد وفترات التناقص للدالة f : $f(x) = \dfrac{x^2}{2x-1}$

ربط المشتقة الأولى f' والمشتقة الثانية f'' بمنحنى الدالة f

مثال (1)

لتكن الدالّة f : $f(x) = x^3 - 12x - 5$

أوجد كلًّا مما يلي:

a النقاط الحرجة للدالّة.

b الفترات التي تكون الدالّة f متزايدة أو متناقصة عليها.

c القيم القصوى المحليّة.

حاول أن تحل

1 لتكن الدالّة $f: \ f(x) = -x^3 + 3x^2 - 4$. أوجد كلًّا مما يلي:

a النقاط الحرجة للدالة.

b الفترات التي تكون الدالة f متزايدة أو متناقصة عليها.

c القيم القصوى المحلية.

مثال (3)

أوجد فترات التقعّر ونقطة الانعطاف لمنحنى الدالة f: $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 1$

حاول أن تحل

3 أوجد فترات التقعّر ونقطة الانعطاف لمنحنى الدالة f: $f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$

رسم بيان دوال كثيرات الحدود

مثال (1)

ادرس تغير الدالة f : $f(x) = x^3 - 3x + 4$ وارسم بيانها.

حاول أن تحل

1 ادرس تغير الدالة $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$ وارسم بيانها.

مثال (2)

ادرس تغير الدالة f : $f(x) = 1 - x^3$ وارسم بيانها.

حاول أن تحل

2 ادرس تغير الدالة f : $f(x) = x - 2x^3$ وارسم بيانها.

تطبيقات على القيم القصوى

مثال (1) عددان موجبان مجموعهما 100 ومجموع مربعيهما أصغر ما يمكن، ما العددان؟

حاول أن تحل

3 تعطي الدالة $V(h) = 2\pi(-h^3 + 36h)$ حجم أسطوانة بدلالة ارتفاعها h.

a أوجد الارتفاع $h(\text{cm})$ للحصول على أكبر حجم للأسطوانة.

b ما قيمة هذا الحجم؟

التقدير

أوجد القيمة الحرجة $Z_{\frac{\alpha}{2}}$ المناظرة لمستوى ثقة 95% باستخدام جدول التوزيع الطبيعي المعياري.

أوجد القيمة الحرجة $Z_{\frac{\alpha}{2}}$ المناظرة لمستوى ثقة 97% باستخدام جدول التوزيع الطبيعي المعياري.

أوّلًا: إذا كان التباين σ^2 للمجتمع معلوم

الخطوات المتبعة لإيجاد فترة الثقة للمتوسط الحسابي μ

إذا كانت σ^2 معلومة و $n > 30$ أو $n \le 30$.

1. نوجد القيمة الحرجة $Z_{\frac{\alpha}{2}}$ المناظرة لدرجة ثقة 95% وهي 1.96
2. نوجد هامش الخطأ $E = Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$، حيث σ هي الانحراف المعياري للمجتمع.
3. نوجد فترة الثقة $(\overline{x} - E \ , \ \overline{x} + E)$.

تفسير فترة الثقة

عند اختيار عينات عشوائية مختلفة متساوية في الحجم (n) وحساب حدود فترة الثقة لكل عينة فإننا نتوقع أن 95% من فترات الثقة هذه تحوي القيمة الحقيقية للمتوسط الحسابي للمجتمع (μ).

فمثلًا عند اختيار 100 عينة عشوائية ذات الحجم نفسه (n) وفي كل مرة نحسب $\overline{x}$ وفترة الثقة فإننا نتوقع أن 95 فترة تحوي μ الحقيقية و5 فترات لا تحويها.

مثال (2)

أجريت دراسة لعينة من الإناث حول معدل النبض لديهن فإذا كان حجم عينة الإناث $n = 40$ والانحراف المعياري لمجتمع الإناث $\sigma = 12.5$ والمتوسط الحسابي للعينة $\bar{x} = 76.3$. باستخدام مستوى ثقة 95%

1. أوجد هامش الخطأ.
2. أوجد فترة الثقة للمتوسط الحسابي للمجتمع الإحصائي μ.
3. فسّر فترة الثقة.

حاول أن تحل

2 من المثال (2) إذا أجريت الدراسة على عينة أخرى من الإناث حجمها 25 والانحراف المعياري لمجتمع الإناث $\sigma = 3.6$
والمتوسط الحسابي للعينة $\overline{x} = 18.4$
باستخدام مستوى ثقة 95%

1 أوجد هامش الخطأ.

2 أوجد فترة الثقة للمتوسط الحسابي للمجتمع الإحصائي μ.

3 فسّر فترة الثقة.

ثانيًا: إذا كان التباين σ^2 للمجتمع غير معلوم وحجم العينة $n > 30$

الخطوات المتبعة لإيجاد فترة الثقة للمتوسط الحسابي μ

1. نوجد القيمة الحرجة $Z_{\frac{\alpha}{2}}$ المناظرة لدرجة ثقة 95% وهي 1.96
2. نوجد هامش الخطأ $E = Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}$ ، حيث S هي الانحراف المعياري للعينة.
3. نوجد فترة الثقة $(\bar{x} - E \ , \ \bar{x} + E)$.

مثال (3)

عينة عشوائية حجمها 36، فإذا كان المتوسط الحسابي للعينة 60 وتباينها 16، باستخدام مستوى ثقة 95%:

1. أوجد هامش الخطأ.
2. أوجد فترة الثقة للمتوسط الحسابي للمجتمع الإحصائي μ.
3. فسّر فترة الثقة.

حاول أن تحل

3 أخذت عينة عشوائية من مجتمع طبيعي حجمها $n = 81$ ومتوسطها الحسابي $\overline{x} = 50$، وانحرافها المعياري $S = 9$، باستخدام مستوى ثقة 95%.

1 أوجد هامش الخطأ.

2 أوجد فترة الثقة للمتوسط الحسابي للمجتمع الإحصائي μ.

3 فسّر فترة الثقة.

أ/ عبدالسلام بلال البيومي . ت: ٠٥٠٨٣٣٣٧٠

ثالثًا: إذا كان التباين σ^2 للمجتمع غير معلوم وحجم العينة $n \leqslant 30$

إذا أخذت عينة عشوائية حجمها n من مجتمع طبيعي تباينه σ^2 غير معلوم وحجم العينة $n \leqslant 30$ فإن توزيع العينة لا يؤول إلى التوزيع الطبيعي وفي هذه الحالة يلزمنا استخدام توزيع آخر هو توزيع t **للعينات الصغيرة** التي حجمها $n \leqslant 30$ ويكون تقدير فترة الثقة $(1-\alpha)$ للمتوسط الحسابي μ هو $(\bar{x}-E\ ,\ \bar{x}+E)$.

حيث $\bar{x}$ المتوسط الحسابي للعينة، E هامش الخطأ.

الخطوات المتبعة لإيجاد فترة الثقة للمتوسط الحساب μ إذا كانت σ^2 غير معلومة، $n \leq 30$:

1. نوجد درجات الحرية $(n-1)$.
2. نوجد القيمة الحرجة $t_{\frac{\alpha}{2}}$ المناظرة لدرجة ثقة 95% من جدول توزيع t.
3. نوجد هامش الخطأ $E = t_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}$
4. نوجد فترة الثقة $(\bar{x}-E\ ,\ \bar{x}+E)$.

مثال (4)

أخذت عينة عشوائية من مجتمع طبيعي حجمها $n = 25$، فإذا كان الانحراف المعياري للعينة (S) يساوي 10 ومتوسطها الحسابي $(\bar{x})$ يساوي 15، استخدم مستوى ثقة 95% لإيجاد:

1. **هامش الخطأ.**
2. **فترة الثقة للمتوسط الحسابي للمجتمع الإحصائي μ.**

حاول أن تحل

4 أوجد فترة ثقة 95% للمتوسط الحسابي للمجتمع الإحصائي μ علمًا أن العينة أخذت من مجتمع طبيعي.

إذا كان لدينا $n = 13$ ، $S = 0.3$ ، $\bar{x} = 8.4$

اختبارات الفروض الإحصائية

الخطوات المتبعة لإجراء اختبار الفروض الإحصائية:

1. صياغة الفروض الإحصائية (فرض العدم H_0 والفرض البديل H_1).
2. التحقق من الانحراف المعياري σ للمجتمع (معلوم أم غير معلوم) وتحديد حجم العينة (n) ومن ثم إيجاد المقياس الإحصائي للاختبار (Z أو t)، (مسترشدًا بالجدول التالي):

الانحراف المعياري (σ)	المقياس الإحصائي (Z أو t)	حجم العينة (n)
معلوم	$Z = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$	لا يشترط حجم معين للعينة
غير معلوم	$Z = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$	$n > 30$
	$t = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$	$n \leq 30$

3. تحديد مستوى المعنوية α وحساب القيمة الجدولية $Z_{\frac{\alpha}{2}}$ من جدول التوزيع الطبيعي المعياري أو القيمة الجدولية $t_{\frac{\alpha}{2}}$ من جدول t ذي درجات حرية.
4. تحديد منطقة القبول: $(-Z_{\frac{\alpha}{2}} , Z_{\frac{\alpha}{2}})$ أو $(-t_{\frac{\alpha}{2}} , t_{\frac{\alpha}{2}})$ كما هو موضّح بالشكل.
5. اتخاذ القرار الإحصائي (قبول فرض العدم) أو (رفض فرض العدم وقبول الفرض البديل).

مثال (1)

تزعم شركة أن متوسط رواتب موظفيها يساوي 4 000 دينار كويتي. إذا أخذت عينة من 25 موظفًا، ووجد أن متوسط رواتب العينة هو 3 950 دينارًا كويتيًا فإذا علمت أن الانحراف المعياري للمجتمع (دينارًا) $\sigma = 125$

وضّح كيفية إجراء الاختبار الإحصائي بمستوى ثقة 95%

حاول أن تحل

1 بيّنت الدراسة أن المتوسط الحسابي لقوة تحمل أسلاك معدنية هو

$\mu = 1\,800$ kg مع انحراف معياري $\sigma = 150$ kg

ويؤكد الأخصائيون في المصنع المنتج لهذه الاسلاك أن بإمكانهم زيادة قوة تحمل هذه الأسلاك، وتأكيدًا على ذلك تمّ اختبار عينة من 40 سلكًا فتبيّن أن متوسط قوة تحمل هذه الأسلاك يساوي 1 840 kg

هل يمكن قبول مثل هذا الفرض بمستوى معنوية $\alpha = 0.05$ ؟

مثال (2)

إذا كانت $S = 1.79$, $\overline{x} = 37.2$, $n = 80$

اختبر الفرض بأن $\mu = 37$ عند مستوى معنوية $\alpha = 0.05$

حاول أن تحل

2 متوسط العمر بالساعات لعينة من 100 مصباح كهربائي مصنعة في أحد المصانع $\overline{x} = 1\,570$ بانحراف معياري $S = 120$.

يقول صاحب المصنع إنّ متوسط العمر بالساعات $\mu = 1\,600$ للمصابيح المصنعة في المصنع.

اختبر صحة الفرض $\mu = 1\,600$ مقابل الفرض $\mu \neq 1\,600$ وباختيار مستوى معنوية $\alpha = 0.05$

مثال (3)

يعتقد مدير شركة دراسات إحصائية أن متوسط الإنفاق الشهري على الطعام في منازل مدينة معينة يساوي 290 دينارًا كويتيًا.

فإذا أخذت عينة عشوائية من 10 منازل تبيّن أن متوسطها الحسابي (دينارًا) $\overline{x} = 283$ وانحرافها المعياري (دينارًا) $S = 32$.

فهل يمكن الاعتماد على هذه العينة لتأكيد ما افترضه؟

استخدم مستوى ثقة 95% (علمًا بأن المجتمع يتبع توزيعًا طبيعيًا).

حاول أن تحل

3 في المثال (3)، إذا أجريت دراسة إحصائية أخرى على المدينة ذاتها وتبيّن من خلالها أن $S = 5$, $\overline{x} = 296$ لعينة من 10 منازل مع استخدام درجة الثقة نفسها.

فهل يبقى افتراض المدير عند الشركة صحيحًا أم لا؟ وضّح إجابتك.

جدول التوزيع الطبيعي المعياري (Z)

Z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0753
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
0.6	0.2257	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486	0.2517	0.2549
0.7	0.2580	0.2611	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2995	0.3023	0.3051	0.3078	0.3106	0.3133
0.9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340	0.3365	0.3389
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633
1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4699	0.4706
1.9	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750	0.4756	0.4761	0.4767
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
2.1	0.4821	0.4826	0.4830	0.4834	0.4838	0.4842	0.4846	0.4850	0.4854	0.4857
2.2	0.4861	0.4864	0.4868	0.4871	0.4875	0.4878	0.4881	0.4884	0.4887	0.4890
2.3	0.4893	0.4896	0.4898	0.4901	0.4904	0.4906	0.4909	0.4911	0.4913	0.4916
2.4	0.4918	0.4920	0.4922	0.4925	0.4927	0.4929	0.4931	0.4932	0.4934	0.4936
2.5	0.4938	0.4940	0.4941	0.4943	0.4945	0.4946	0.4948	0.4949	0.4951	0.4952
2.6	0.4953	0.4955	0.4956	0.4957	0.4959	0.4960	0.4961	0.4962	0.4963	0.4964
2.7	0.4965	0.4966	0.4967	0.4968	0.4969	0.4970	0.4971	0.4972	0.4973	0.4974
2.8	0.4974	0.4975	0.4976	0.4977	0.4977	0.4978	0.4979	0.4979	0.4980	0.4981
2.9	0.4981	0.4982	0.4982	0.4983	0.4984	0.4984	0.4985	0.4985	0.4986	0.4986
3.0	0.4987	0.4987	0.4987	0.4988	0.4988	0.4989	0.4989	0.4989	0.4990	0.4990
3.10 وأكثر	0.4999									

جدول التوزيع t

	$\frac{\alpha}{2}$					
درجات الحرية $(n-1)$	0.005	0.01	0.025	0.05	0.10	0.25
1	63.657	31.821	12.706	6.314	3.078	1.000
2	9.925	6.965	4.303	2.920	1.886	0.816
3	5.841	4.541	3.182	2.353	1.638	0.765
4	4.604	3.747	2.776	2.132	1.533	0.741
5	4.032	3.365	2.571	2.015	1.476	0.727
6	3.707	3.143	2.447	1.943	1.440	0.718
7	3.500	2.998	2.365	1.895	1.415	0.711
8	3.355	2.896	2.306	1.860	1.397	0.706
9	3.250	2.821	2.262	1.833	1.383	0.703
10	3.169	2.764	2.228	1.812	1.372	0.700
11	3.106	2.718	2.201	1.796	1.363	0.697
12	3.054	2.681	2.179	1.782	1.356	0.696
13	3.012	2.650	2.160	1.771	1.350	0.694
14	2.977	2.625	2.145	1.761	1.345	0.692
15	2.947	2.602	2.132	1.753	1.341	0.691
16	2.921	2.584	2.120	1.746	1.337	0.690
17	2.898	2.567	2.110	1.740	1.333	0.689
18	2.878	2.552	2.101	1.734	1.330	0.688
19	2.861	2.540	2.093	1.729	1.328	0.688
20	2.845	2.528	2.086	1.725	1.325	0.687
21	2.831	2.518	2.080	1.721	1.323	0.686
22	2.819	2.508	2.074	1.717	1.321	0.686
23	2.807	2.500	2.069	1.714	1.320	0.685
24	2.797	2.492	2.064	1.711	1.318	0.685
25	2.787	2.485	2.060	1.708	1.316	0.684
26	2.779	2.479	2.056	1.706	1.315	0.684
27	2.771	2.473	2.052	1.703	1.314	0.684
28	2.763	2.467	2.048	1.701	1.313	0.683
29	2.756	2.462	2.045	1.699	1.311	0.683
30 وأكثر	2.575	2.327	1.960	1.645	1.282	0.675