ثانوية سلمان الفارسي

قسم الرياضيات

الصف الثانى عشر علمى

الفصل الدراسى الثانى

الوحدة الخامسة

نسخة محلولة

M.ATA

مخطط ذهني للتكامل

انواع التكامل

- تكامل مباشر
- تكامل بالتبسيط
  - مربع حدانية
  - فك اقواس
  - ضرب
  - قسمة
  - تحليل ثم اختصار
  - توزيع
- تكامل بالتعويض
- تكامل بالتجزيء
- تكامل بالكسور الجزئية

الاقـواس

اقواس يمكن فكها

التبسيط

1) فك الاقواس

$$\int (2x-3)(x+4)\,dx$$

$$\int \left(x+\frac{1}{x}\right)^2 dx$$

2) توزيع بسط على مقام

$$\int \frac{x^2-3x}{\sqrt[3]{x}}\,dx$$

3)فك ثم توزيع البسط على المقام

$$\int \left(\frac{x^2-2}{x^2}\right)^2 dx$$

اقواس لا يمكن فكها

التعويض

$$\int \frac{5}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)^3}\,dx$$

$$\int \frac{\left(\frac{1}{x}+4\right)^5}{x^2}\,dx$$

$$\int \sqrt[3]{x^2-5x+2}\;(2x-5)\,dx$$

تعويضتين

u =...........

du =...........

$$\int x(2x-1)^3\,dx$$

$$\int x^5\sqrt[3]{x^3+1}\,dx$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{1+3x}}\,dx$$

ثلاث تعويضات

u =...........

du =...........

x =...........

M.ATA

الدوال المثلثية

مباشرة

- $\int \sin x \, dx$
- $\int \cos x \, dx$
- $\int (\sec x \tan x + \sin x) dx$
- $\int (\csc x \cot x + \sec^2 x) dx$

ملحوظة: كلا من

$\int \tan x \, dx$, $\int \cot x \, dx$

تحل بطريقة البسط مشتقة المقام

M.ATA

التعويض

- $\int x^2 \sin(x^3+1) dx$
- $\int (1+\cos x)^6 \sin x \, dx$
- $\int \sin^4 x \cos x \, dx$
- $\int \sec^3 x \tan x \, dx$
- $\int \cos^3(2x-3) \cdot \sin(2x-3) dx$
- $\int \frac{dx}{(\cos^2 x)\sqrt{1+\tan x}}$

تعويضتين

u =...........

du =...........

التجزئ

- $\int x \sin x \, dx$ ← مرة واحدة
- $\int x \cos(3x) dx$ ← مرة واحدة
- $\int x^2 \cos x \, dx$ ← مرتين
- $\int e^x \sin x \, dx$ ← دوري

تجزئ

u =...   dv =...

du =...   v = ...

$$\int f(x)\, e^{g(x)}\, dx$$

عائلة (e)

مباشرة

- $\int e^{ax+b}dx = \frac{e^{ax+b}}{a} + c$
- $\int e^{3x+7}dx$
- $\int 5e^{-2x+1}dx$

التعويض

- $\int x\, e^{x^2}\, dx$
- $\int (2x+1)e^{x^2+x+4}dx$
- $\int \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} dx$

تعويضتين
u =..........
du =..........

التجزئ

- $\int 3x\, e^{2x+1}\, dx$ ← مرة واحدة
- $\int (x-3)e^{x-3}\, dx$ ← مرة واحدة
- $\int 4x\, e^{-5x}\, dx$ ← مرة واحدة
- $\int x^2 e^{x+2}\, dx$ ← مرتين
- $\int e^x \sin x\, dx$ ← دورى

u =... dv =...
du =... v = ...

M.ATA

$$\int f(x)\, ln\, g(x)\; dx$$

عائلة (ln)

معظم المسائل تحل بالتجزئ

$$\int x\, lnx\, dx$$

$$\int \ln(x+1)\, dx$$

$$\int (2x+1)\ln(x+1)\, dx$$

$$\int x^2\, lnx^2\, dx$$

$$\int \frac{lnx}{x^2}\, dx$$

$\mathrm{u} = \ln \ldots \quad dv = \cdots$

$d\mathrm{u} = \ldots \quad v = \cdots$

حالات خاصة تحل بالتعويض

$$\int \frac{ln^6 x}{x}\, dx$$

$$\int \frac{dx}{x\, lnx}$$

$\mathrm{u} = \cdots \quad du = \cdots$

اذا وجد في التمرين $\frac{1}{x}$ و $ln(x)$

نستخدم التكامل بالتعويض

M.ATA

مخطط ذهني لتكامل بعض الحدوديات النسبية

حدودية نسبية (كسر كل من البسط والمقام علي صورة حدودية)

توزيع البسط علي المقام
- $\int \frac{x^2-5x+6}{x}dx$
- $\int \frac{x^3+4}{x}dx$

المقام حد واحد

تحليل و اختصار
- $\int \frac{x^2+5x+4}{x+1}dx$
- $\int \frac{x^4-27}{x^3-3x}dx$

درجة البسط اكبر من درجة المقام

البسط مشتقة المقام
- $\int \frac{2x+3}{x^2+3x+7}dx$
- $\int \frac{x^3-x}{x^4-2x^2}dx$

درجة البسط اصغر من درجة المقام بواحد

كسور جزئية
- $\int \frac{x^2+2x-1}{x^3+3x^2-2x}dx$
- $\int \frac{3+x+x^2}{x^3+2x^2}dx$

1) درجة البسط اصغر من درجة المقام
2) المقام يقبل التحليل

دالة نسبية (بسط ومقام)

توزيع البسط على المقام
- $\int \frac{x^2-5x+6}{x}dx$
- $\int \frac{x^3+4}{x}dx$
- $\int \frac{x-\sqrt{x}}{x}dx$
- $\int \frac{x^2-3x}{\sqrt[3]{x}}dx$

البسط مشتقة المقام
- $\int \frac{2x+3}{x^2+3x+7}dx$
- $\int \frac{x^3-x}{x^4-2x^2}dx$
- $\int \frac{e^x}{e^x+1}dx$
- $\int \tan x \, dx$
- $\int \cot x \, dx$

تحليل + اختصار
- $\int \frac{x^2+5x+4}{x+1}dx$
- $\int \frac{x^4-27x}{x^2-3x}dx$
- $\int \frac{x+1}{\sqrt[3]{x}+1}dx$

كسور جزئية (المقام يقبل التحليل الي عوامل خطية)
- $\int \frac{x^2+2x-1}{2x^3+3x^2-2x}dx$
- $\int \frac{3+x+x^2}{x^3+2x^2}dx$
- $\int \frac{x^2-3x+7}{x^2-4x+4}dx$

M.ATA

تكاملات بمجرد النظر

القاعدة (1)

$$\int k\, e^{ax+b}\, dx = \frac{k}{a}.e^{ax+b} + c$$

امثلة :

$$\int e^{2x-3}\, dx = \frac{1}{2}.e^{2x-3} + c$$

$$\int 2e^{3x}\, dx = \frac{2}{3}.e^{3x} + c$$

القاعدة (2)

$$\int \frac{k}{ax+b}\, dx = \frac{k}{a}.\ln|ax+b| + c$$

امثلة :

$$\int \frac{3}{2x+5}\, dx = \frac{3}{2}.\ln|2x+5| + c$$

$$\int \frac{-5}{3x-2}\, dx = \frac{-5}{3}.\ln|3x-2| + c$$

القاعدة (3)

$$\int (ax+b)^n\, dx = \frac{1}{a}.\frac{1}{n+1}(ax+b)^{n+1} + c \quad : n \in Q - \{-1\}$$

امثلة :

$$\int (1+x)^3\, dx = \frac{1}{4}(1+x)^4 + c$$

$$\int \left(1+\frac{9}{4}x\right)^{\frac{1}{2}} dx = \frac{4}{9}.\frac{2}{3}\left(1+\frac{9}{4}x\right)^{\frac{3}{2}} + c$$

التكامل المحدد

أوجد

- $\int_{-2}^{0} \frac{x}{e^x}\, dx$
- $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} x \sec^2 x\, dx$
- $\int_{2}^{5} x\sqrt{x-1}\, dx$
- $\int_{4}^{7} \frac{3x^2-17}{x^2-x-6}\, dx$

المطلق

- $\int_{0}^{5} |x-3|\, dx$
- $\int_{-2}^{3} (x|x|+3)\, dx$
- $\int_{-3}^{4} |2x-4|\, dx$

نصف الدائرة

- $\int_{-a}^{a} \sqrt{a^2-x^2}\, dx$
- $\int_{-2}^{2} \sqrt{4-x^2}\, dx$
- $\int_{-3}^{0} \sqrt{9-x^2}\, dx$
- $\int_{-5}^{5} \sqrt{25-x^2}\, dx$

دون حساب قيمة التكامل اثبت ان :

- $\int_{3}^{5} (x^2+x)\, dx \geq 0$
- $\int_{1}^{3} (2x-3)\, dx \leq \int_{1}^{3} (x^2+2)\, dx$
- $\int_{0}^{1} (x^2-3x+7)\, dx \geq \int_{0}^{1} (4x-5)\, dx$

التمارين الموجودة علي سبيل التوضيح وليست علي سبيل الحصر

بالتوفيق ان شاء الله

M.ATA

(1 - 5) التكامل غير المحدد

Senior
2020
المستقبل
لك
ان شاء
الله

دعنا نفكر ونتناقش

أكمل الجداول التالية.

a

المشتقة $F'(x) =$	الدالة $F(x) =$
	$x^2 - 1$
	$x^2 + 5$
	$x^3 + 4$
	$x^3 - 2$

b

المشتقة $F'(x) =$	الدالة $F(x) =$
$2x$	
$3x^2$	
5	
x^3	

c هل يمكن إيجاد $F(x)$ أخرى في الجزء **b** بحيث يكون لها المشتقة نفسها؟

تعريف: المشتقة العكسية **Antiderivative**

تسمى الدالة F مشتقة عكسية للدالة f المعرفة على مجالها I.

إذا كان: $F'(x) = f(x) \quad \forall x \in I$

ملاحظة: سنتعامل في دراستنا مع دوال متصلة على فترات معينة.

نظرية (1)

إذا كانت F مشتقة عكسية للدالة f على الفترة I، G مشتقة عكسية أيضاً للدالة f على الفترة I فإن:

$$G(x) = F(x) + C \quad \forall x \in I$$

حيث C ثابت.

نظرية (2)

إذا كانت F مشتقة عكسية لـ f على الفترة I فإن الصورة العامة للمشتقة العكسية لـ f على الفترة I هي:

$$F(x) + C$$

حيث C ثابت اختياري

كن طموحا لكي تصل الي اهدافك

مثال (1)

أثبت أن: $F(x) = x^3 + 5x + 3$ هي مشتقة عكسية للدالة: $f(x) = 3x^2 + 5$

ثم اكتب الصورة العامة للمشتقة العكسية.

الحل

$F'(x) = 3x^2 + 5$

$\therefore F'(x) = f(x)$

$\therefore$ F هي مشتقة عكسية للدالة f

الصورة العامة للمشتقة العكسية هي:

$F(x) + c = x^3 + 5x + c$

مثال (2)

أثبت أن: $F(x) = x^2 - \frac{1}{x}$ هي مشتقة عكسية للدالة: $f(x) = 2x + \frac{1}{x^2}$

الحل

$F'(x) = 2x + \frac{1}{x^2}$

$\boxed{\left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{-1}{x^2}}$ تذكر

$\therefore F'(x) = f(x)$

$\therefore$ F هي مشتقة عكسية للدالة f

حاول أن تحل

2 أثبت أن: $F(x) = \frac{x^3 + 1}{x^2}$ هي مشتقة عكسية للدالة: $f(x) = 1 - \frac{2}{x^3}$

الحل

تذكر

$$\boxed{\left(\frac{1}{x^2}\right)' = \left(x^{-2}\right)' = -2x^{-3} = \frac{-2}{x^3}}$$

$F(x) = \frac{x^3}{x^2} + \frac{1}{x^2} = x + \frac{1}{x^2}$

$F'(x) = 1 - \frac{2}{x^3}$

$\therefore F'(x) = f(x)$

$\therefore$ F هي مشتقة عكسية للدالة f

كن ايجابيا ولا تنظر خلفك

، تحقّق من أن F هي مشتقّة عكسيّة للدالّة f حيث:

$$F(x) = \sqrt{1+x^4}$$
$$f(x) = \frac{2x^3}{\sqrt{1+x^4}}$$

الحل

$$F'(x) = \frac{(1+x^4)'}{2\sqrt{1+x^4}} = \frac{4x^3}{2\sqrt{1+x^4}}$$

$$F'(x) = \frac{2x^3}{\sqrt{1+x^4}}$$

$$\therefore F'(x) = f(x)$$

$\therefore F$ هي مشتقة عكسية للدالة f

$$\boxed{(\sqrt{g(x)})' = \frac{g'(x)}{2\sqrt{g(x)}}}$$

تذكر

هل تريد النجاح والتفوق ؟؟

تعريف: التكامل غير المحدد **Indefinite Integral**

التكامل غير المحدد للدالّة f بالنسبة إلى x هو مجموعة كل المشتقّات العكسيّة F ، ويكتب على الصورة:

$$\int f(x)\,dx$$

الرمز $\int$ يعبّر عن علامة التكامل، الدالّة f هي الدالّة المكاملة في التكامل، x متغيّر التكامل.

أي أنّ،

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

وتقرأ،

التكامل غير المحدد للدالّة f بالنسبة إلى x هو $F(x)+C$.

حيث $F(x)+C$ هي مجموعة كل المشتقات العكسية F.

الثابت C هو ثابت التكامل وهو ثابت اختياري، وعندما نحصل على $F(x)+C$ نقول إنّنا كاملنا f أو أوجدنا تكامل f.

ملاحظة:

الدالة التي يجري تكاملها

$$\int f(x)\,dx$$

رمز التكامل — x متغير التكامل

قواعد التكامل غير المحدد **Rules of Indefinite Integral**

1. $\int k\,dx = kx + C$ k عدد ثابت
2. $\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad , \quad n \in Q - \{-1\}$ قاعدة القوى

خواص التكامل غير المحدد **Properties of Indefinite Integral**

1. $\int k\,f(x)\,dx = k\int f(x)\,dx \quad . \quad k \neq 0$ خاصية الضرب بعدد ثابت
2. $\int [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$ خاصية الجمع والطرح

ملاحظات:

a. $\int -f(x)\,dx = -\int f(x)\,dx$

b. $\int (f(x)+k)\,dx = \int f(x)\,dx + \int k\,dx$

قاعدة التكامل : نزيد الأس واحد ونضرب بمقلوب الأس الجديد

امثلة تمهيدية

نزيد الأس واحد

$\int x^2\,dx = \frac{1}{3}x^3 + c$

مقلوب الأس الجديد

$\int x^3\,dx = \frac{1}{4}x^4 + c$

مقلوب الأس الجديد

$\int x^4\,dx = \frac{1}{5}x^5 + c$

$\int 5\,dx = 5x + c$

$\int -2\,dx = -2x + c$

$\int 2x^3\,dx = 2\cdot\frac{1}{4}x^4 + c = \frac{1}{2}x^4 + c$

$\int 4x\,dx = 4\cdot\frac{1}{2}x^2 + c = 2x^2 + c$

$\int x^{-2}\,dx = \frac{1}{-1}x^{-1} + c = \frac{-1}{x} + c$ أبسط صورة (لا يوجد اسس سالبة في الناتج)

$\int x^{-3}\,dx = \frac{1}{-2}x^{-2} + c = \frac{-1}{2x^2} + c$

$\int \frac{1}{x^5}\,dx = \int x^{-5}\,dx = \frac{1}{-4}x^{-4} + c = \frac{-1}{4x^4} + c$

يفضل التخلص من المقام والجذر قبل بدء عملية التكامل

$\int \frac{1}{x^4}\, dx = \int x^{-4}\, dx = \frac{1}{-3} x^{-3} + c = \frac{-1}{3x^3} + c$ أبسط صورة

(الناتج لا يوجد به اسس سالبة)

$\int x^{\frac{2}{3}}\, dx = \frac{3}{5} x^{\frac{5}{3}} + c$

$= \frac{3}{5} \sqrt[3]{x^5} + c$ أبسط صورة

(الناتج في الصورة الجذرية)

$\int x^{\frac{1}{4}}\, dx = \frac{4}{5} x^{\frac{5}{4}} + c$

$= \frac{4}{5} \sqrt[4]{x^5} + c$

ملحوظة
يفضل وضع الناتج
في أبسط صورة

$\int \sqrt[3]{x}\, dx = \int x^{\frac{1}{3}}\, dx = \frac{3}{4} x^{\frac{4}{3}} + c$

$= \frac{3}{4} \sqrt[3]{x^4} + c$

$\int \sqrt{x}\, dx = \int x^{\frac{1}{2}}\, dx = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + c$

$= \frac{2}{3} \sqrt{x^3} + c$

$\int \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}}\, dx = \int x^{-\frac{2}{3}}\, dx = 3 x^{\frac{1}{3}} + c$

$= 3 \sqrt[3]{x} + c$

$\int \frac{1}{\sqrt[5]{x^2}}\, dx = \int \frac{1}{x^{\frac{2}{5}}}\, dx = \int x^{-\frac{2}{5}}\, dx = \frac{5}{3} x^{\frac{3}{5}} + c$

$= \frac{5}{3} \sqrt[5]{x^3} + c$

$\int \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx = \int \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}\, dx = \int x^{-\frac{1}{2}}\, dx = 2 x^{\frac{1}{2}} + c$

$= 2\sqrt{x} + c$

$\int x\sqrt{x}\, dx = \int x \cdot x^{\frac{1}{2}}\, dx = \int x^{\frac{3}{2}}\, dx = \frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} + c$

$= \frac{2}{5} \sqrt{x^5} + c$

امثلة وحاول ان تحل:

أوجد: $\int (x^2-2x+5)dx$

الحل

$= \frac{1}{3}x^3 - \cancel{2}\cdot\frac{1}{\cancel{2}}x^2+5x+c = \frac{1}{3}x^3-x^2+5x+c$

أوجد: $\int (3x^2-4x-1)dx$

الحل

$= \cancel{3}\cdot\frac{1}{\cancel{3}}x^3-4\cdot\frac{1}{2}x^2-x+c = x^3-2x^2-x+c$

أوجد: $\int (x^3-\sqrt[3]{x}+\frac{1}{x^3})\,dx$

الحل

$= \int (x^3-x^{\frac{1}{3}}+x^{-3})\,dx = \frac{1}{4}x^4-\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}+\frac{1}{-2}x^{-2}+c$

$= \frac{1}{4}x^4-\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}-\frac{1}{2x^2}+c$

أوجد: $\int x^2(2x-1)\,dx$

الحل

$= \int (2x^3-x^2)\,dx = 2\cdot\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3+c$

$= \frac{1}{2}x^4-\frac{1}{3}x^3+c$

أوجد: $\int (2x-3)(x+4)dx$

الحل

$= \int (2x^2+8x-3x-12)dx = \int (2x^2+5x-12)\,dx$

$= 2\cdot\frac{1}{3}x^3+5\cdot\frac{1}{2}x^2-12x+c = \frac{2}{3}x^3+\frac{5}{2}x^2-12x+c$

أوجد: $\int (2x-1)^2\,dx$

الحل

$= \int (4x^2-4x+1)\,dx = 4\cdot\frac{1}{3}x^3-4\cdot\frac{1}{2}x^2+x+c$

$= \frac{4}{3}x^3-2x^2+x+c$

أوجد: $\int \left(x+\frac{1}{x}\right)^2 dx$

$\boxed{2\cdot x\cdot\frac{1}{x}=2}$

الحل

$= \int (x^2+2+\frac{1}{x^2})dx = \int (x^2+2+x^{-2})\,dx$

$= \frac{1}{3}x^3+2x+\frac{1}{-1}x^{-1}+c = \frac{1}{3}x^3+2x-\frac{1}{x}+c$

فكرة الحل: توزيع البسط على المقام (المقام حد واحد)

أوجد: $\int \frac{x^2-3x}{\sqrt[3]{x}}\,dx$

الحل

$= \int \frac{x^2-3x}{x^{\frac{1}{3}}}\,dx = \int \left(\frac{x^2}{x^{\frac{1}{3}}} - \frac{3x}{x^{\frac{1}{3}}} \right) dx$

$= \int \left(x^{\frac{5}{3}} - 3x^{\frac{2}{3}} \right) dx$

$= \frac{3}{8} x^{\frac{8}{3}} - 3 \cdot \frac{3}{5} x^{\frac{5}{3}} + C$

$= \frac{3}{8} \sqrt[3]{x^8} - \frac{9}{5} \sqrt[3]{x^5} + C$

أوجد: $\int \left(\frac{3x^2-x}{x} \right)^2 dx$ $\boxed{\text{فكرة الحل: فك الأقواس + توزيع بسط على مقام}}$

الحل

$= \int \left(\frac{9x^4 - 6x^3 + x^2}{x^2} \right) dx = \int \left(\frac{9x^4}{x^2} - \frac{6x^3}{x^2} + \frac{x^2}{x^2} \right) dx$

$= \int (9x^2 - 6x + 1)\,dx = 9 \cdot \frac{1}{3} x^3 - 6 \cdot \frac{1}{2} x^2 + x + C$

$= 3x^3 - 3x^2 + x + C$

أوجد: $\int \left(\frac{x^2-2}{x^2} \right)^2 dx$

الحل

$= \int \left(\frac{x^4 - 4x^2 + 4}{x^4} \right) dx = \int \left(\frac{x^4}{x^4} - \frac{4x^2}{x^4} + \frac{4}{x^4} \right) dx$

$= \int \left(1 - \frac{4}{x^2} + \frac{4}{x^4} \right) dx = \int \left(1 - 4x^{-2} + 4x^{-4} \right) dx$

$= x - 4 \cdot \frac{1}{-1} x^{-1} + 4 \cdot \frac{1}{-3} x^{-3} + C$

$= x + \frac{4}{x} - \frac{4}{3x^3} + C$

هل اديت فروضك ؟؟

أوجد: $\int \frac{x^2+5x+4}{x+1}dx$

الحل

تحليل : mod53

$= \int \frac{(x+4)\cancel{(x+1)}}{\cancel{(x+1)}}dx$

اختصار :

$= \int (x+4)\,dx$

تكامل :

$= \frac{1}{2}x^2+4x+c$

أوجد: $\int \frac{x^2-4x+3}{x-1}dx$

الحل

$= \int \frac{(x-3)\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}}dx$

$= \int (x-3)\,dx$

$= \frac{1}{2}x^2-3x+c$

أوجد: $\int \frac{x^4-27x}{x^2-3x}dx$

الحل

عامل مشترك

$= \int \frac{\cancel{x}(x^3-27)}{\cancel{x}(x-3)}dx$

$= \int \frac{x^3-27}{x-3}dx$

$= \int \frac{\cancel{(x-3)}(x^2+3x+9)}{\cancel{(x-3)}}dx$

$= \int (x^2+3x+9)\,dx$

$= \frac{1}{3}x^3+3\cdot\frac{1}{2}x^2+9x+c$

تذكر أن :

$$\boxed{a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)}$$

أوجد: $\int \frac{x-1}{\sqrt{x}+1}dx$

الحل

تذكر أن: تحليل
$x-1=(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)$

$$\int \frac{(\sqrt{x}-1)\cancel{(\sqrt{x}+1)}}{\cancel{(\sqrt{x}+1)}}dx$$

$$=\int (\sqrt{x}-1)\,dx$$

$$=\int (x^{\frac{1}{2}}-1)\,dx$$

$$=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-x+c$$

$$=\frac{2}{3}\sqrt{x^3}-x+c$$

أوجد: $\int \frac{x+1}{\sqrt[3]{x}+1}dx$

الحل

تذكر أن: تحليل
$(x+1)=(\sqrt[3]{x}+1)(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}+1)$

$$=\int \frac{\cancel{(\sqrt[3]{x}+1)}(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}+1)}{\cancel{(\sqrt[3]{x}+1)}}dx$$

$$=\int (\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}+1)\,dx$$

$$=\int (x^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{1}{3}}+1)\,dx$$

$$=\frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}}-\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}+x+c$$

$$=\frac{3}{5}\sqrt[3]{x^5}-\frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4}+x+c$$

اذهب وقبل يدي والديك واشكرهم
او ادعى لهما بالمغفرة والرحمة

مثال (7)

إن كان: $F(x) = \int (2x-3)dx$ ، $F(3) = 2$ فأوجد $F(x)$

الحل

$F(x) = \int (2x-3)\,dx$

$F(x) = \cancel{2} \cdot \frac{1}{\cancel{2}} x^2 - 3x + c$

$F(x) = x^2 - 3x + c$

$\because F(3) = 2$

$(3)^2 - 3(3) + c = 2$

$c = 2$

$\therefore F(x) = x^2 - 3x + 2$

يمكن استخدام الآلة
لايجاد قيمة c
shift solve

حاول أن تحل

7 إذا كان: $F(x) = \int (2x+5)dx$ ، $F(-1) = 0$ فأوجد $F(x)$

الحل

$F(x) = \int (2x+5)\,dx$

$F(x) = 2 \cdot \frac{1}{2} x^2 + 5x + c$

$F(x) = x^2 + 5x + c$

$\because F(-1) = 0$

$(-1)^2 + 5(-1) + c = 0$ shift solve

$c = 4$

$\therefore F(x) = x^2 + 5x + 4$

لايوجد مستحيل

نستخدم التكامل بالتعويض في حالة وجود قوس لايمكن فكه (دالة ضرب مشتقتها)

(2 - 5) التكامل بالتعويض

Rule of Integration by Substitution — **قاعدة التكامل بالتعويض**

إذا كانت F هي مشتقة عكسية للدالة f فإن:

$$\int f(g(x))g'(x)dx = F(g(x)) + C$$

وإذا كان $u = g(x)$ ، $du = g'(x)dx$ فإن:

$$\int f(u)du = F(u) + C$$

تمكننا قاعدة التكامل بالتعويض من تعميم قاعدة القوى في التكامل غير المحدد كالتالي:

$$\int (g(x))^n g'(x)dx = \frac{(g(x))^{n+1}}{n+1} + C \quad , \quad n \in Q - \{-1\} \quad , \quad C \text{ ثابت}$$

مثال (1)

أوجد: $\int \underbrace{(x^2+2x+5)}_{\text{دالة}}{}^3 \underbrace{(2x+2)dx}_{\text{مشتقة الدالة}}$

الحل

إبدأ $u = x^2 + 2x + 5$

إشتقاق $du = (2x+2)\,dx$

بالتعويض

$I = \int u^3 \, du$

$= \frac{1}{4} u^4 + c$

$= \frac{1}{4}(x^2+2x+5)^4 + c$

$\boxed{u \text{ هي مابداخل القوس المرفوع لأس}}$

حاول أن تحل

أوجد: $\int (x^3+4x^2+x)^7 (3x^2+8x+1)dx$

الحل

إبدأ $u = x^3 + 4x^2 + x$

إشتقاق $du = (3x^2+8x+1)\,dx$

بالتعويض

$I = \int u^7 \, du$

$= \frac{1}{8} u^8 + c$

$= \frac{1}{8}(x^3+4x^2+x)^8 + c$

يفضل في بداية الحل التحويل من الصورة الجذرية إلى الأسية (إعادة صياغة)

حاول أن تحل

أوجد: $\int \sqrt[3]{x^2-5x+2}\ (2x-5)\,dx$

الحل

إعادة صياغة

$I = \int (x^2-5x+2)^{\frac{1}{3}}\ (2x-5)\,dx$

إبدأ $u = x^2-5x+2$

إشتقاق $du = (2x-5)\,dx$

بالتعويض

$= \int u^{\frac{1}{3}}\,du$

$= \frac{3}{4}u^{\frac{4}{3}} + c$

$= \frac{3}{4}(x^2-5x+2)^{\frac{4}{3}} + c$

$= \frac{3}{4}\sqrt[3]{(x^2-5x+2)^4} + c$

$\boxed{\int (\underline{\text{الدالة}})^n\ \underline{\text{مشتقة الدالة}}\ dx}$ ، u ، du

مثال (2)

أوجد: $\int \sqrt{4x-5}\,dx$

الحل

إعادة صياغة

$I = \int (4x-5)^{\frac{1}{2}}\,dx$

إبدأ $u = 4x-5$

إشتقاق $du = 4\,dx$

مقلوب

$\frac{1}{4}du = dx$

بالتعويض

$= \int u^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{4}\,du$

$= \frac{1}{4}\int u^{\frac{1}{2}}\,du$

$= \frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} + c$

$= \frac{1}{6}u^{\frac{3}{2}} + c$

$= \frac{1}{6}(4x-5)^{\frac{3}{2}} + c$

$= \frac{1}{6}\sqrt{(4x-5)^3} + c$

تستطيع ان تفعلها مهما كانت

يفضل التخلص من الجذر والمقام في بداية الحل (إعادة صياغة)

حاول أن تحل

أوجد: $\int \sqrt[5]{(3x+7)}\,dx$

الحل

$I = \int (3x+7)^{\frac{1}{5}}\,dx$ ← إعادة صياغة

إبدأ

$u = 3x+7$

إشتقاق

$du = 3\,dx$

$\frac{1}{3}du = dx$

بالتعويض

$= \int u^{\frac{1}{5}} \cdot \frac{1}{3}\,du$

$= \frac{1}{3}\int u^{\frac{1}{5}}\,du$

$= \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{6} u^{\frac{6}{5}} + c$

$= \frac{5}{18}(3x+7)^{\frac{6}{5}} + c = \frac{5}{18}\sqrt[5]{(3x+7)^6} + c$

كراسة التمارين

أوجد: $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{2-3x}}$

الحل

$I = \int \frac{dx}{(2-3x)^{\frac{1}{3}}}$

$= \int (2-3x)^{-\frac{1}{3}}\,dx$ ← إعادة صياغة

إبدأ

$u = 2-3x$

إشتقاق

$du = -3\,dx$

$-\frac{1}{3}du = dx$

بالتعويض

$= -\frac{1}{3}\int u^{-\frac{1}{3}}\,du$

$= -\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} u^{\frac{2}{3}} + c$

$= -\frac{1}{2} u^{\frac{2}{3}} + c$

$= -\frac{1}{2}(2-3x)^{\frac{2}{3}} + c$

$= -\frac{1}{2}\sqrt[3]{(2-3x)^2} + c$

فكرة الحل: عامل مشترك

كراسة التمارين

أوجد: $\int (x+2)\sqrt[3]{x^2+4x-1}\,dx$

الحل

$I = \int (x^2+4x-1)^{\frac{1}{3}}\ (x+2)\ dx$ ← اعادة صياغة

إبدأ

$u = x^2+4x-1$

إستقاق

$du = (2x+4)\,dx$

عامل مشترك

$du = 2(x+2)\,dx$

$\frac{1}{2}du = (x+2)\,dx$

بالتعويض

$= \int u^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{1}{2}\,du$

$= \frac{1}{2}\int u^{\frac{1}{3}}\,du$

$= \frac{1}{2}\cdot \frac{3}{4}u^{\frac{4}{3}} + c$

$= \frac{3}{8}u^{\frac{4}{3}} + c$

$= \frac{3}{8}(x^2+4x-1)^{\frac{4}{3}} + c$

$= \frac{3}{8}\sqrt[3]{(x^2+4x-1)^4} + c$

كراسة التمارين

أوجد: $\int (x^2-1)\sqrt{x^3-3x+5}\,dx$

الحل

$= \int (x^3-3x+5)^{\frac{1}{2}}\ (x^2-1)\ dx$ ← إعادة صياغة

إبدأ

$u = x^3-3x+5$

إستقاق

$du = (3x^2-3)\,dx$

عامل مشترك

$du = 3(x^2-1)\,dx$

$\frac{1}{3}du = (x^2-1)\,dx$

بالتعويض

$= \int u^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{3}\,du$

$= \frac{1}{3}\int u^{\frac{1}{2}}\,du$

$= \frac{1}{3}\cdot \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} + c$

$= \frac{2}{9}u^{\frac{3}{2}} + c$

$= \frac{2}{9}(x^3-3x+5)^{\frac{3}{2}} + c$

$= \frac{2}{9}\sqrt{(x^3-3x+5)^3} + c$

مثال (1)

أوجد: $\int \frac{\left(\frac{1}{x}+4\right)^5}{x^2}\,dx$

الحـــل

$I = \int (x^{-1}+4)^5 \cdot \underline{\underline{x^{-2}\,dx}}$ ← اعادة صياغة

$u = \underline{x^{-1}+4}$

$du = -x^{-2}\,dx$

$-du = \underline{\underline{x^{-2}\,dx}}$

$= -\int u^5\,du$

$= -\frac{1}{6}u^6 + C$

$= -\frac{1}{6}(x^{-1}+4)^6 + C$

$= -\frac{1}{6}\left(\frac{1}{x}+4\right)^6 + C$

مثال (2)

أوجد: $\int \frac{5}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)^3}\,dx$

الحـــل

$I = \int \frac{5}{x^{\frac{1}{2}}(x^{\frac{1}{2}}+2)^3}\,dx$

$= 5\int (x^{\frac{1}{2}}+2)^{-3} \cdot \underline{\underline{x^{-\frac{1}{2}}\,dx}}$ ← اعادة صياغة

$u = \underline{x^{\frac{1}{2}}+2}$

$du = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\,dx$

$2\,du = \underline{\underline{x^{-\frac{1}{2}}\,dx}}$

$= 5 \int u^{-3} \cdot 2\,du$ ضرب

$= 10\int u^{-3}\,du$

$= 10 \cdot \frac{1}{-2} \cdot u^{-2} + C$

$= -5u^{-2} + C$

$= \frac{-5}{u^2} + C$

$= \frac{-5}{(\sqrt{x}+2)^2} + C$

حاول أن تحل

2 أوجد:

$$\int \frac{3(\sqrt[3]{x}-5)dx}{\sqrt[3]{x^2}}$$

الحل

$$I = 3\int \frac{(x^{\frac{1}{3}}-5)}{x^{\frac{2}{3}}}\,dx$$

$$= 3\int (x^{\frac{1}{3}}-5)\cdot \underline{x^{-\frac{2}{3}}dx}$$ ← اعادة صياغة

$u = x^{\frac{1}{3}} - 5$

$du = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}dx$

$3\,du = \underline{x^{-\frac{2}{3}}dx}$

مضروب

$$= 3\int u\cdot 3du$$

$$= 9\int u\,du$$

$$= 9\cdot\frac{1}{2}u^2 + C$$

$$= \frac{9}{2}(x^{\frac{1}{3}}-5)^2 + C$$

$$= \frac{9}{2}(\sqrt[3]{x}-5)^2 + C$$

يمكن حل التمرين السابق بتوزيع البسط على المقام لأن القوس مرفوع للأس واحد

نستخدم هذه الطريقة في الحالة التالية

$\int x^{\underline{n}}(x^{\underline{m}} \pm a)^k\,dx \longrightarrow n \geq m$ (أس الس خارج القوس أكبر أو يساوي داخل القوس)

مثال (3)

أوجد: $\int x(x+1)^5\,dx$

الحل

$I = \int (x+1)^5 \cdot \boxed{x}\,dx$ ← اعادة صياغة

إبدأ

$u = x+1$

$du = dx$

$u = x+1$

$x+1 = u$

$\boxed{x} = u-1$

$= \int u^5 (u-1)\,du$ بالتعويض

$= \int (u^6 - u^5)\,du$

$= \frac{1}{7}u^7 - \frac{1}{6}u^6 + C$

$= \frac{1}{7}(x+1)^7 - \frac{1}{6}(x+1)^6 + C$

حاول أن تحل

أوجد: $\int x(2x-1)^3\,dx$

الحل

$I = \int (2x-1)^3 \cdot \boxed{x}\,dx$ ← اعادة صياغة

إبدأ

$u = 2x-1$

$du = 2\,dx$

$\frac{1}{2}\,du = dx$

$u = 2x-1$

$2x-1 = u$

$2x = u+1$

$\boxed{x} = \frac{1}{2}(u+1)$

$= \int u^3 \cdot \frac{1}{2}(u+1) \cdot \frac{1}{2}\,du$

$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \int u^3(u+1)\,du$

$= \frac{1}{4} \int (u^4 + u^3)\,du$

$= \frac{1}{4}\left[\frac{1}{5}u^5 + \frac{1}{4}u^4\right] + C$

$= \frac{1}{20}u^5 + \frac{1}{16}u^4 + C$

$= \frac{1}{20}(2x-1)^5 + \frac{1}{16}(2x-1)^4 + C$

أوجد: $\int x(3x+2)^6 dx$

الحل

$I = \int (3x+2)^6 \cdot \boxed{x}\, dx$ ← إعادة صياغة

$= \int u^6 \cdot \frac{1}{3}(u-2) \cdot \frac{1}{3} du$

ضرب

$= \frac{1}{9} \int u^6 (u-2)\, du$

$= \frac{1}{9} \int (u^7 - 2u^6)\, du$

$= \frac{1}{9} \left[\frac{1}{8}u^8 - 2 \cdot \frac{1}{7}u^7 \right] + c$

$= \frac{1}{72} u^8 - \frac{2}{63} u^7 + c$

$= \frac{1}{72}(3x+2)^8 - \frac{2}{63}(3x+2)^7 + c$

إبدأ

$u = 3x+2$

$du = 3\, dx$

$\frac{1}{3} du = dx$

$u = 3x+2$

$3x+2 = u$

$3x = u-2$

$\frac{3x}{3} = \frac{u-2}{3}$

$\boxed{x} = \frac{1}{3}(u-2)$

كن طموح وحقق اهدافك

أوجد: $\int \frac{x}{\sqrt{1+3x}}dx$

الحل

$$I = \int \frac{x}{(1+3x)^{\frac{1}{2}}}\, dx$$

$$= \int (1+3x)^{-\frac{1}{2}} \cdot \boxed{x}\, dx$$ ← اعادة صياغة

$$= \int u^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{3}(u-1) \cdot \frac{1}{3}\, du$$

ضرب

$$= \frac{1}{9}\int u^{-\frac{1}{2}}(u-1)\, du$$

$$= \frac{1}{9}\int \left(u^{\frac{1}{2}} - u^{-\frac{1}{2}}\right) du$$

$$= \frac{1}{9}\left[\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} - 2u^{\frac{1}{2}}\right] + C$$

$$= \frac{2}{27}u^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{9}u^{\frac{1}{2}} + C$$

$$= \frac{2}{27}(1+3x)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{9}(1+3x)^{\frac{1}{2}} + C$$

ابدأ

$u = 1+3x$

$du = 3\,dx$

$\frac{1}{3}du = dx$

$u = 1+3x$

$1+3x = u$

$3x = u-1$

$\boxed{x} = \frac{1}{3}(u-1)$

لاتنسى
في حالة ضرب الأساسات المتشابهة نجمع الأسس

$u^{-\frac{1}{2}} \cdot u = u^{\frac{1}{2}}$

$u^{-\frac{1}{2}} \cdot 1 = u^{-\frac{1}{2}}$

انار الله دربك ووفقك لما يحب ويرضاه

أوجد: $\int x^3\sqrt{x^2-2}\,dx$

الحل

$$I = \int (x^2-2)^{\frac{1}{2}} \cdot x^3\,dx$$

$$= \int (x^2-2)^{\frac{1}{2}} \cdot \boxed{x^2} \cdot x\,dx$$ اعادة صياغة

$$= \int u^{\frac{1}{2}} \cdot (u+2) \cdot \frac{1}{2}\,du$$

$$= \frac{1}{2}\int u^{\frac{1}{2}}(u+2)\,du$$

$$= \frac{1}{2}\int \left(u^{\frac{3}{2}} + 2u^{\frac{1}{2}}\right)du$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{2}{5}u^{\frac{5}{2}} + 2\cdot\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\right] + C$$

$$= \frac{1}{5}u^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} + C$$

$$= \frac{1}{5}(x^2-2)^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3}(x^2-2)^{\frac{3}{2}} + C$$

$$= \frac{1}{5}\sqrt{(x^2-2)^5} + \frac{2}{3}\sqrt{(x^2-2)^3} + C$$

$u = x^2-2$

$du = 2x\,dx$

$\frac{1}{2}du = x\,dx$

$u = x^2-2$

$x^2-2 = u$

$\boxed{x^2} = u+2$

شرح لبعض الخطوات

إذا كان الأس خارج القوس أكبر من الأس داخل القوس

فك $x^3 = x^2 \cdot x$

كما في داخل القوس

نجمع الأسس $u^{\frac{1}{2}} \cdot u = u^{\frac{3}{2}}$

ضرب $u^{\frac{1}{2}} \cdot 2 = 2u^{\frac{1}{2}}$

النجاح
ملك من
يدفع
ثمنه

أوجد: $\int x^5 \sqrt[3]{x^3+1}\, dx$

الحل

$$I = \int (x^3+1)^{\frac{1}{3}} \cdot x^5\, dx$$

$$= \int (x^3+1)^{\frac{1}{3}} \cdot \boxed{x^3} \cdot x^2\, dx$$ ← اعادة صياغة

$$= \int u^{\frac{1}{3}} \cdot (u-1) \cdot \frac{1}{3} du$$

$$= \frac{1}{3} \int (u^{\frac{4}{3}} - u^{\frac{1}{3}})\, du$$

$$= \frac{1}{3} \left[\frac{3}{7} u^{\frac{7}{3}} - \frac{3}{4} u^{\frac{4}{3}} \right] + C$$

$$= \frac{1}{7} u^{\frac{7}{3}} - \frac{1}{4} u^{\frac{4}{3}} + C$$

$$= \frac{1}{7} (x^3+1)^{\frac{7}{3}} - \frac{1}{4} (x^3+1)^{\frac{4}{3}} + C$$

$$= \frac{1}{7} \sqrt[3]{(x^3+1)^7} - \frac{1}{4} \sqrt[3]{(x^3+1)^4} + C$$

إبدأ

$u = x^3 + 1$

$du = 3x^2\, dx$

$\frac{1}{3} du = x^2\, dx$

$u = x^3 + 1$

$x^3 + 1 = u$

$\boxed{x^3} = u - 1$

شرح لبعض الخطوات

إذا كان الأس خارج القوس أكبر من الأس داخل القوس

$x^5 = x^3 \cdot x^2$

كما في داخل القوس

$u^{\frac{1}{3}} \cdot u = u^{\frac{4}{3}}$ نجمع الأسس

$u^{\frac{1}{3}} \cdot 1 = u^{\frac{1}{3}}$ ضرب

لا نحقق الاعمال بالامنيات وانما بالارادة نصنع المعجزات

أوجد: $\int x^2 \sqrt{x-1}\, dx$

الحل

$I = \int (x-1)^{\frac{1}{2}} \cdot \boxed{x^2}\, dx$ ← اعادة صياغة

$= \int u^{\frac{1}{2}} (u^2+2u+1) \cdot du$

$= \int (u^{\frac{5}{2}} + 2u^{\frac{3}{2}} + u^{\frac{1}{2}})\, du$

$= \frac{2}{7}u^{\frac{7}{2}} + 2 \cdot \frac{2}{5}u^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} + c$

$= \frac{2}{7}u^{\frac{7}{2}} + \frac{4}{5}u^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} + c$

$= \frac{2}{7}(x-1)^{\frac{7}{2}} + \frac{4}{5}(x-1)^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}} + c$

$= \frac{2}{7}\sqrt{(x-1)^7} + \frac{4}{5}\sqrt{(x-1)^5} + \frac{2}{3}\sqrt{(x-1)^3} + c$

إبدأ

$u = x-1$

$du = dx$

$u = x-1$

$x-1 = u$

$x = u+1$

بالتربيع

$x^2 = (u+1)^2$

$\boxed{x^2} = u^2+2u+1$

شرح لبعض الخطوات

إذا كان الأس خارج القوس

أكبر من الأس داخل القوس

$x^2 = x \cdot x = x^2$

كما في داخل القوس

نقوم بتربيع x للحصول على x^2

في خطوة جانبية لسهولة الحل

جمع أسس

$u^{\frac{1}{2}} \cdot u^2 = u^{\frac{5}{2}}$

$u^{\frac{1}{2}} \cdot 2u = 2u^{\frac{3}{2}}$

$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$

تربيع

قد تتعثر احيانا

وتسقط احيانا اخري

انهض وواصل الطريق

حاول أن تحل

أوجد: $\int x^5 \sqrt{3+x^2}\, dx$

الحل

$$I = \int (3+x^2)^{\frac{1}{2}} \cdot x^5\, dx$$
$$= \int (3+x^2)^{\frac{1}{2}} \cdot x^2 \cdot x^2 \cdot x\, dx$$
$$= \int (3+x^2)^{\frac{1}{2}} \cdot \boxed{x^4} \cdot x\, dx \quad \leftarrow \text{إعادة صياغة}$$
$$= \int u^{\frac{1}{2}} \cdot (u^2 - 6u + 9) \cdot \frac{1}{2}\, du$$
$$= \frac{1}{2} \int u^{\frac{1}{2}} (u^2 - 6u + 9)\, du$$
$$= \frac{1}{2} \int \left(u^{\frac{5}{2}} - 6u^{\frac{3}{2}} + 9u^{\frac{1}{2}}\right) du$$
$$= \frac{1}{2} \left[\frac{2}{7} u^{\frac{7}{2}} - 6 \cdot \frac{2}{5} u^{\frac{5}{2}} + 9 \cdot \frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}}\right] + C$$
$$= \frac{1}{7} u^{\frac{7}{2}} - \frac{6}{5} u^{\frac{5}{2}} + 3u^{\frac{3}{2}} + C$$
$$= \frac{1}{7}(3+x^2)^{\frac{7}{2}} - \frac{6}{5}(3+x^2)^{\frac{5}{2}} + 3(3+x^2)^{\frac{3}{2}} + C$$
$$= \frac{1}{7}\sqrt{(3+x^2)^7} - \frac{6}{5}\sqrt{(3+x^2)^5} + 3\sqrt{(3+x^2)^3} + C$$

$$u = 3 + x^2$$
$$du = 2x\, dx$$
$$\frac{1}{2} du = x\, dx$$

$$u = 3 + x^2$$
$$3 + x^2 = u$$
$$x^2 = u - 3$$
بالتربيع
$$x^4 = (u-3)^2$$
$$\boxed{x^4} = u^2 - 6u + 9$$

شرح

$$x^5 = x^2 \cdot x^2 \cdot x = x^4 \cdot x$$
كما في داخل القوس

نقوم بتربيع x^2 للحصول على x^4 في خطوة جانبية لسهولة الحل

$$u^{\frac{1}{2}} \cdot u^2 = u^{\frac{5}{2}}$$
$$u^{\frac{1}{2}} \cdot 6u = 6u^{\frac{3}{2}}$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

بدل ان تلعن الظلام اوقد شمعة

مثال (4)

أوجد: $\int x^5 \sqrt{4-x^2}\, dx$

الحل

$$I = \int (4-x^2)^{\frac{1}{2}} \cdot x^5\, dx$$

$$= \int (4-x^2)^{\frac{1}{2}} \cdot \underbrace{x^2 \cdot x^2}_{x^4} \cdot x\, dx$$

$$= \int (4-x^2)^{\frac{1}{2}} \cdot \boxed{x^4} \cdot x\,dx$$ ⟵ اعادة صياغة

$$= \int u^{\frac{1}{2}} \cdot (u^2 - 8u + 16) \cdot -\frac{1}{2}\, du$$

$$= -\frac{1}{2} \int u^{\frac{1}{2}} (u^2 - 8u + 16)\, du$$

$$= -\frac{1}{2} \int \left(u^{\frac{5}{2}} - 8u^{\frac{3}{2}} + 16u^{\frac{1}{2}}\right) du$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\frac{2}{7}u^{\frac{7}{2}} - 8 \cdot \frac{2}{5}u^{\frac{5}{2}} + 16 \cdot \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\right] + C$$

$$= -\frac{1}{7}u^{\frac{7}{2}} + \frac{8}{5}u^{\frac{5}{2}} - \frac{16}{3}u^{\frac{3}{2}} + C$$

$$= -\frac{1}{7}(4-x^2)^{\frac{7}{2}} + \frac{8}{5}(4-x^2)^{\frac{5}{2}} - \frac{16}{3}(4-x^2)^{\frac{3}{2}} + C$$

$$= -\frac{1}{7}\sqrt{(4-x^2)^7} + \frac{8}{5}\sqrt{(4-x^2)^5} - \frac{16}{3}\sqrt{(4-x^2)^3} + C$$

$u = 4 - x^2$
$du = -2x\,dx$
$-\frac{1}{2}du = x\,dx$

$u = 4 - x^2$
$4 - x^2 = u$
$-x^2 = u - 4$
بالتربيع
$(-x^2)^2 = (u-4)^2$
$\boxed{x^4} = u^2 - 8u + 16$

شرح
$x^5 = x^2 \cdot x^2 \cdot x = x^4 \cdot x$
كما في داخل القوس
نقوم بتربيع x^2 للحصول على x^4
في خطوة جانبية لسهولة الحل

$u^{\frac{1}{2}} \cdot u^2 = u^{\frac{5}{2}}$
$u^{\frac{1}{2}} \cdot 8u = 8u^{\frac{3}{2}}$

يقول اينشتاين : ليس الامر اني عبقري ،كل ماهنالك اني اجاهد مع المشاكل لفترة اطول

(3 – 5) تكامل الدوال المثلثية

Senior
2020
المستقبل
لك
ان شاء
الله

تذكر:

$\frac{d}{dx}(-\cos x) = \sin x$

$\frac{d}{dx}\left(-\frac{\cos kx}{k}\right) = \sin kx$

$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$

$\frac{d}{dx}\left(\frac{\sin kx}{k}\right) = \cos kx$

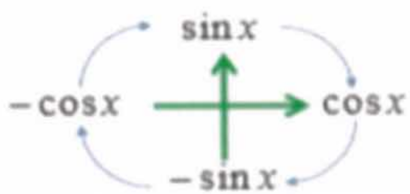
$\frac{d}{dx}\tan x = \sec^2 x$

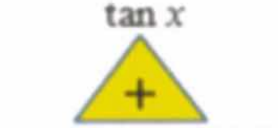
$\frac{d}{dx}(-\cot x) = \csc^2 x$

$\frac{d}{dx}\sec x = \sec x \tan x$

$\frac{d}{dx}(-\csc x) = \csc x \cot x$

التكامل غير المحدد
1 $\int \sin x\, dx = -\cos x + C$
2 $\int \sin kx\, dx = -\frac{\cos kx}{k} + C$
3 $\int \cos x\, dx = \sin x + C$
4 $\int \cos kx\, dx = \frac{\sin kx}{k} + C$
5 $\int \sec^2 x\, dx = \tan x + C$
6 $\int \csc^2 x\, dx = -\cot x + C$
7 $\int \sec x \tan x\, dx = \sec x + C$
8 $\int \csc x \cot x\, dx = -\csc x + C$





تبسيط الدوال المثلثية

$\frac{1}{\sin x} = \csc x$ $\qquad$ $\frac{1}{\cos x} = \sec x$ $\qquad$ $\frac{1}{\tan x} = \cot x$

$\frac{1}{\csc x} = \sin x$ $\qquad$ $\frac{1}{\sec x} = \cos x$ $\qquad$ $\frac{1}{\cot x} = \tan x$

فكرة الحل : تكامل مباشر (لا يوجد تكامل مباشر sec , csc , tan , cot) ملحوظة

مثال (1) أوجد: $\int (\sin x + \sec^2 x)dx$

الحل

$I = -\cos x + \tan x + c$

حاول أن تحل أوجد: $\int (\cos x + \csc^2 x)dx$

الحل

$I = \sin x - \cot x + c$

مثال (1) أوجد: $\int \csc x(\cot x + \csc x)dx$

الحل

$I = \int (\csc x \cot x + \csc^2 x)\, dx = -\csc x - \cot x + c$

حاول أن تحل أوجد: $\int \sec x(\tan x + \sec x)dx$

الحل

$I = \int (\sec x \tan x + \sec^2 x)\, dx = \sec x + \tan x + c$

مثال (1) أوجد: $\int \frac{dx}{\cos^2 x}$

الحل

$I = \int \sec^2 x\, dx = \tan x + c$

حاول أن تحل أوجد: $\int \frac{dx}{\sin^2 x}$

الحل

$I = \int \csc^2 x\, dx = -\cot x + c$

مثال (2) أوجد: $\int \cos 4x\, dx$

الحل

$I = \frac{\sin 4x}{4} + c = \frac{1}{4}\sin 4x + c$

حاول أن تحل أوجد: $\int \sin 5x\, dx$

الحل

$I = -\frac{1}{5}\cos 5x + c$

مثال (2) أوجد: $\int (2x - \sin 3x)dx$

الحل

$= 2 \cdot \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{3}\cos 3x + c = x^2 + \frac{1}{3}\cos 3x + c$

حاول أن تحل أوجد: $\int (x^2 + \cos 2x)dx$

الحل

$= \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}\sin 2x + c$

فكرة الحل : التكامل بالتعويض

على الصورة : $\int$ (دالة مثلثية + عدد)^n . مشتقة الدالة المثلثية dx

مثال (4)

أوجد: $\int (1+\cos x)^6 \sin x \, dx$

الحل

$u = 1+\cos x$

استقاق

$du = -\sin x \, dx$

لاتنسى الاشارة

$-du = \sin x \, dx$

$I = -\int u^6 . \, du$

يمكن وضع الاشارة داخل أو خارج التكامل

$= -\frac{1}{7} u^7 + c$

$= -\frac{1}{7}(1+\cos x)^7 + c$

حاول أن تحل

أوجد: $\int (3+\sin 2x)^5 \cos 2x \, dx$

الحل

$u = 3+\sin 2x$

استقاق

$du = \cos 2x \, . \, 2dx$

$\frac{1}{2} du = \cos 2x \, dx$

$I = \int u^5 . \frac{1}{2} du$

يمكن وضع العدد داخل أو خارج التكامل

$= \frac{1}{2}\int u^5 \, du$

$= \frac{1}{2} . \frac{1}{6} u^6 + c$

ضرب

$= \frac{1}{12}(3+\sin 2x)^6 + c$

كراسة التمارين

أوجد: $\int \sqrt{1+\sin x} \cos x \, dx$

الحل

$I = \int (1+\sin x)^{\frac{1}{2}} . \cos x \, dx$ ← اعادة صياغة

$u = 1+\sin x$

استقاق

$du = \cos x \, dx$

$= \int u^{\frac{1}{2}} \, du$

$= \frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} + c$

$= \frac{2}{3}(1+\sin x)^{\frac{3}{2}} + c$

$= \frac{2}{3}\sqrt{(1+\sin x)^3} + c$

كراسة التمارين

أوجد:

$$\int \frac{dx}{(\cos^2 x)\sqrt{1+\tan x}}$$

الحل

$$I = \int \frac{dx}{\cos^2 x\,(1+\tan x)^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \int (1+\tan x)^{-\frac{1}{2}} \cdot \sec^2 x\,dx$$ ← اعادة صياغة

$$= \int u^{-\frac{1}{2}} \cdot du$$

$u = 1+\tan x$

اشتقاق

$du = \sec^2 x\,dx$

$$= 2u^{\frac{1}{2}} + C$$

$$= 2(1+\tan x)^{\frac{1}{2}} + C$$

$$= 2\sqrt{(1+\tan x)} + C$$

$$\boxed{\frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x}$$

كراسة التمارين

أوجد:

$$\int \frac{dx}{(\sin^2 x)\sqrt{1+\cot x}}$$

الحل

$$I = \int \frac{dx}{\sin^2 x\,(1+\cot x)^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \int (1+\cot x)^{-\frac{1}{2}} \cdot \csc^2 x\,dx$$ ← إعادة صياغة

$$= \int u^{-\frac{1}{2}} \cdot -du$$

$u = 1+\cot x$

اشتقاق

$du = -\csc^2 x\,dx$

$-du = \csc^2 x\,dx$

$$= -2u^{\frac{1}{2}} + C$$

$$= -2(1+\cot x)^{\frac{1}{2}} + C$$

$$= -2\sqrt{(1+\cot x)} + C$$

$$\boxed{\frac{1}{\sin^2 x} = \csc^2 x}$$

ان الاجابة الوحيدة علي الهزيمة علي الانتصار

فكرة الحل: تكامل بالتعويض

على الصورة: $\int (\text{دالة مثلثية})^n$ مشتقة الدالة المثلثية dx

مثال (3)

أوجد: $\int \cos^4 t \cdot \sin t \, dt$

الحل

$u = \cos t$

استقاق

$du = -\sin t \, dt$

$-du = \sin t \, dt$

$I = -\int u^4 \, du$

$= -\frac{1}{5} u^5 + c$

$= -\frac{1}{5} (\cos t)^5 + c$

غالبا وليس دائما

تكون u هي الدالة المرفوعة لأس

من لا يشكر الناس لا يشكر الله

حاول أن تحل

أوجد: $\int \sin^3 x \cdot \cos x \, dx$

الحل

$u = \sin x$

استقاق

$du = \cos x \, dx$

$I = \int u^3 \, du$

$= \frac{1}{4} u^4 + c$

$= \frac{1}{4} (\sin x)^4 + c$

اشكر ثلاث اشخاص غدا

كراسة التمارين

أوجد: $\int \sin^4 x \cos x \, dx$

الحل

$u = \sin x$

$du = \cos x \, dx$

$$I = \int u^4 \, du$$
$$= \frac{1}{5} u^5 + c$$
$$= \frac{1}{5} (\sin x)^5 + c$$

كراسة التمارين

أوجد: $\int \cos^5 x \sin x \, dx$

الحل

$u = \cos x$

$du = -\sin x \, dx$

$-du = \sin x \, dx$

$$I = -\int u^5 \, du$$
$$= -\frac{1}{6} u^6 + c$$
$$= -\frac{1}{6} (\cos x)^6 + c$$

مثال (3)

أوجد: $\int \sec^2 x \cdot \tan x \, dx$

الحل

$$I = \int \underline{\sec x} \cdot \underline{\sec x \tan x dx}$$
$$= \int u \quad du$$
$$= \frac{1}{2} u^2 + c$$
$$= \frac{1}{2} (\sec x)^2 + c$$

$u = \sec x$

$du = \sec x \tan x dx$

لاتنسى يحب فك

$\sec^2 . \tan x$

$= \underbrace{\sec x}_{\text{الدالة}} . \underbrace{\sec x \tan x}_{\text{مشتقة الدالة}}$

حاول أن تحل

أوجد: $\int \csc^2 x \cdot \cot x \, dx$

الحل

$$I = \int \underline{\csc x} \cdot \underline{\csc x \cot x dx}$$
$$= -\int u \quad du$$
$$= -\frac{1}{2} u^2 + c$$
$$= -\frac{1}{2} (\csc x)^2 + c$$

$u = \csc x$

$du = -\csc x \cot x dx$

$-du = \csc x \cot x \, dx$

لاتنسى يحب فك

$\csc^2 x . \cot x$

$= \underbrace{\csc x}_{\text{الدالة}} . \underbrace{\csc x \cot x}_{\text{مشتقة الدالة}}$

مثال (5)

أوجد: $\int \sec^4 x \tan x \, dx$

الحل

$I = \int \sec^3 x \cdot \sec x \tan x \, dx$

$= \int u^3 \cdot du$

$= \frac{1}{4} u^4 + c$

$= \frac{1}{4} (\sec x)^4 + c$

$u = \sec x$

$du = \sec x \tan x \, dx$

لاتنسى يجب فك

$\sec^4 x \cdot \tan$

$= \underbrace{\sec^3 x}_{\text{الدالة}} \cdot \underbrace{\sec x \tan x}_{\text{مشتقة الدالة}}$

حاول أن تحل

أوجد: $\int \csc^5 x \cot x \, dx$

الحل

$I = \int \csc^4 x \cdot \csc x \cot x \, dx$

$= \int u^4 \cdot -du$

$= -\frac{1}{5} u^5 + c$

$= -\frac{1}{5} (\csc x)^5 + c$

$u = \csc x$

$du = -\csc x \cot x \, dx$

$-du = \csc x \cot x \, dx$

كراسة التمارين

أوجد: $\int \frac{\sin x}{\cos^3 x}\,dx$

الحل

$I = \int \cos^{-3}x \cdot \sin x\, dx$

$= -\int u^{-3} \cdot du$

$= -\cdot \frac{1}{-2} u^{-2} + c$

$= \frac{1}{2}(\cos x)^{-2} + c$

$= \frac{1}{2(\cos x)^2} + c$

$u = \cos x$

$du = -\sin x\, dx$

$-du = \sin x\, dx$

كراسة التمارين

أوجد: $\int \sqrt{\tan x}\,\sec^2 x\, dx$

الحل

$I = \int (\tan x)^{\frac{1}{2}} \cdot \sec^2 x\, dx$

$= \int u^{\frac{1}{2}} \cdot du$

$= \frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} + c$

$= \frac{2}{3}(\tan x)^{\frac{3}{2}} + c$

$= \frac{2}{3}\sqrt{(\tan x)^3} + c$

$u = \tan x$

$du = \sec^2 x\, dx$

كراسة التمارين

أوجد: $\int \sqrt{\cot x}\,\csc^2 x\, dx$

الحل

$I = \int (\cot x)^{\frac{1}{2}} \cdot \csc^2 x\, dx$

$= -\int u^{\frac{1}{2}} \cdot du$

$= -\frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} + c$

$= -\frac{2}{3}(\cot x)^{\frac{3}{2}} + c$

$= -\frac{2}{3}\sqrt{(\cot x)^3} + c$

$u = \cot x$

$du = -\csc^2 x\, dx$

$-du = \csc^2 x\, dx$

في لفظ القمة شيء يقول لك قم

مثال (4)

أوجد: $\int \sin^5(x+1)\cdot\cos(x+1)\,dx$

الحل

$u = \sin(x+1)$

$du = \cos(x+1)\,dx$

$I = \int u^5 \cdot du$

$= \frac{1}{6}u^6 + C$

$= \frac{1}{6}(\sin(x+1))^6 + C$

حاول أن تحل

أوجد: $\int \cos^3(2x-3)\cdot\sin(2x-3)\,dx$

الحل

$u = \cos(2x-3)$

$du = -\sin(2x-3)\cdot 2dx$

$-\frac{1}{2}du = \sin(2x-3)\,dx$

$I = \int u^3 \cdot -\frac{1}{2}\,du$

$= -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}u^4 + C$

$= -\frac{1}{8}(\cos(2x-3))^4 + C$

تذكر

$(\cos(2x-3))' = -\sin(2x-3)\cdot 2$

معامل x

تعود علي العادات الحسنة وهي سوف تصنعك

$g(x)$ حدودية
$g'(x)$ مشتقة الحدودية

$\int g'(x) \cdot$ دالة مثلثية $(g(x))\, dx$ الزاوية

فكرة الحل: تكامل بالتعويض على الصورة:

مثال (2)

أوجد: $\int x\csc^2(x^2-1)dx$

الحل

$I = \int \csc^2(x^2-1) \cdot x\,dx$

$= \int \csc^2 u \cdot \frac{1}{2} du$

$= \frac{1}{2} \cdot -\cot u + c$

$= -\frac{1}{2} \cot(x^2-1) + c$

$u = x^2-1$

استقاق

$du = 2x\,dx$

$\frac{1}{2} du = x\,dx$

حاول أن تحل

أوجد: $\int x\sec^2(x^2+2)dx$

الحل

$I = \int \sec^2(x^2+2) \cdot x\,dx$

$= \int \sec^2 u \cdot \frac{1}{2} du$

$= \frac{1}{2} \cdot \tan u + c$

$= \frac{1}{2} \tan(x^2+2) + c$

$u = x^2+2$

$du = 2x\,dx$

$\frac{1}{2} du = x\,dx$

كراسة التمارين

أوجد: $\int x^2\sin(x^3+1)dx$

الحل

$I = \int \sin(x^3+1) \cdot x^2 dx$

$= \int \sin u \cdot \frac{1}{3} du$

$= \frac{1}{3} \cdot -\cos u + c$

$= -\frac{1}{3} \cos(x^3+1) + c$

$u = x^3+1$

$du = 3x^2\,dx$

$\frac{1}{3} du = x^2 dx$

نتعلم من الفشل اكثر من النجاح

القانون المستخدم : $\frac{d}{dx}(a^{g(x)}) = a^{g(x)} . \ln a . g'(x)$

(4 - 5) الدوال الأسية

اشتقاق الدوال الأسية Derivative of Exponential Functions

قاعدة (1)

$$\frac{d}{dx} a^x = a^x \ln a$$

إذا كانت u دالة في x قابلة للاشتقاق فإن:

$$\frac{d}{dx} a^u = a^u \ln a \frac{du}{dx}$$

مثال (1)

أوجد مشتقة كل من الدوال التالية:

a $f(x) = 3^x$

الحل

$f'(x) = 3^x . \ln 3 . (x)' = 3^x . \ln 3$

b $f(x) = 6^{\sqrt{x}}$

الحل

$f'(x) = 6^{\sqrt{x}} . \ln 6 . (\sqrt{x})' = 6^{\sqrt{x}} . \ln 6 . \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$\boxed{(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}}$

c $f(x) = 10^{\sin x}$

الحل

$f'(x) = 10^{\sin x} . \ln 10 . (\sin x)' = 10^{\sin x} . \ln 10 . \cos x$

حاول أن تحل

1 أوجد مشتقة كل من الدوال التالية:

a $f(x) = 10^x$

الحل

$f'(x) = 10^x . \ln 10 . (x)' = 10^x . \ln 10$

b $f(x) = 3^{\frac{1}{x}}$

الحل

$f'(x) = 3^{\frac{1}{x}} . \ln 3 . (\frac{1}{x})' = 3^{\frac{1}{x}} . \ln 3 . \frac{-1}{x^2}$

$\boxed{(\frac{1}{x})' = \frac{-1}{x^2}}$

c $f(x) = 5^{\cos x}$

الحل

$f'(x) = 5^{\cos x} . \ln 5 . (\cos x)' = -5^{\cos x} . \ln 5 . \sin x$

الفوز هو ان تتقدم لا ان يتراجع منافسوك

القانون المستخدم : $\frac{d}{dx}\left(e^{g(x)}\right) = g'(x) \cdot e^{g(x)}$

في القاعدة (1) وبوضع $a = e$ نحصل على القاعدة التالية:

قاعدة (2)

$$\frac{d}{dx}e^x = e^x$$

وفي حالة u دالة في x قابلة للاشتقاق فإن:

$$\frac{d}{dx}(e^u) = e^u \frac{du}{dx}$$

مثال (2)

أوجد مشتقة كل من الدوال التالية:

a $f(x) = e^{\frac{2x}{3}}$

الحل

$f'(x) = e^{\frac{2x}{3}} \cdot \ln e \cdot \left(\frac{2x}{3}\right)' = \frac{2}{3} e^{\frac{2}{3}x}$

$\boxed{\ln e = 1}$

b $g(x) = e^{x^2+3x-1}$

الحل

$g'(x) = (x^2+3x-1)' \cdot e^{x^2+3x-1} = (2x+3) \cdot e^{x^2+3x-1}$

c $h(x) = e^{\sec x}$

الحل

$h'(x) = (\sec x)' \cdot e^{\sec x} = \sec x \tan x \cdot e^{\sec x}$

حاول أن تحل

2 أوجد مشتقة كل من الدوال التالية:

a $f(x) = e^{\sqrt{x}}$

الحل

$f'(x) = (\sqrt{x})' \cdot e^{\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot e^{\sqrt{x}}$

b $g(x) = e^{x^2-4}$

الحل

$g'(x) = (x^2-4)' \cdot e^{x^2-4} = 2x \cdot e^{x^2-4}$

c $h(x) = e^{\tan x}$

الحل

$h'(x) = (\tan x)' \cdot e^{\tan x} = \sec^2 x \cdot e^{\tan x}$

$\int e^u\, du = e^u + c$

فكرة الحل : التكامل بالتعويض

تكامل بعض الدوال الأسية

التكامل غير المحدد	قاعدة المشتقة
$\int e^x\, dx = e^x + C$	$\frac{d}{dx} e^x = e^x$
$\int u' e^u\, dx = e^u + C$	$\frac{d}{dx} e^u = e^u \frac{du}{dx} = u' e^u$

مثال (4)

أوجد: $\int 2x \cdot e^{x^2+3}\, dx$

الحل

$I = \int e^{x^2+3} \cdot 2x\, dx$ ← اعادة صياغة

$= \int e^u \cdot du$

$= e^u + c$

$= e^{x^2+3} + c$

$u = x^2 + 3$

اشتقاق

$du = 2x\, dx$

نستخدم هذه الطريقة إذا كانت على الصورة $\int g'(x) \cdot e^{g(x)}\, dx$ حيث $g'(x)$ مشتقة $g(x)$

حاول أن تحل

4 أوجد: $\int (2x-1) e^{x^2-x+3}\, dx$

الحل

$I = \int e^{x^2-x+3} \cdot (2x-1)\, dx$

$= \int e^u \cdot du$

$= e^u + c$

$= e^{x^2-x+3} + c$

$u = x^2 - x + 3$

اشتقاق

$du = (2x-1)\, dx$

ساصير يوما ما اريد

كراسة التمارين

أوجد: $\int (x^2-2)e^{x^3-6x}\,dx$

الحل

$I = \int e^{x^3-6x}\cdot(x^2-2)\,dx$

$= \int e^{u}\cdot \frac{1}{3}\,du$

$= \frac{1}{3}e^{u} + c$

$= \frac{1}{3}e^{x^3-6x} + c$

$u = x^3-6x$

$du = (3x^2-6)\,dx$

$du = 3(x^2-2)\,dx$

$\frac{1}{3}du = (x^2-2)\,dx$

كراسة التمارين

أوجد: $\int \frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}\,dx$

الحل

$I = \int e^{\frac{1}{x}}\cdot\frac{1}{x^2}\,dx$

$= -\int e^{u}\cdot du$

$= -e^{u} + c = -e^{\frac{1}{x}} + c$

$u = \frac{1}{x}$

$du = -\frac{1}{x^2}\,dx$

$-du = \frac{1}{x^2}\,dx$

حالة خاصة

$\int \ell^{ax+b}\,dx = \frac{1}{a}\cdot \ell^{ax+b} + c$

الأس من الدرجة الأولى

يمكن استخدام القانون بشكل مباشر (مجهود النظر)

أوجد: $\int \ell^{2x-3}\,dx =$

الحل

مقلوب معامل x

$I = \frac{1}{2}e^{2x-3} + c$

أوجد: $\int 2e^{x}\,dx$

الحل

$I = 2e^{x} + c$

أوجد: $\int e^{3x}\,dx$

الحل

$I = \frac{1}{3}e^{3x} + c$

الجميع يفكر في تغيير العالم ،لكن لا احد يفكر في تغيير نفسه

(4 - 5) الدوال اللوغاريتمية

اشتقاق دوال اللوغاريتمات الطبيعية

قاعدة (3)

$$\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}$$

إذا كانت u دالة في x قابلة للاشتقاق:

$$\frac{d}{dx}(\ln u) = \frac{1}{u}\frac{du}{dx}$$

لاحظ أن: $\frac{d}{dx}(\ln g(x)) = \frac{g'(x)}{g(x)}$

مثال (3)

أوجد مشتقات كل من الدوال التالية:

$f(x) = \ln(2x + x^3)$

الحل

$$f'(x) = \frac{(2x+x^3)'}{2x+x^3} = \frac{2+3x^2}{2x+x^3}$$

$h(x) = \ln(1 + \sqrt{3}x)$

الحل

$$h'(x) = \frac{(1+\sqrt{3}x)'}{1+\sqrt{3}x} = \frac{\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}x}$$

$k(x) = \ln(\cos x)$

الحل

$$k'(x) = \frac{(\cos x)'}{\cos x} = \frac{-\sin x}{\cos x} = -\tan x$$

$h(x) = \ln(\sin x)$

الحل

$$h'(x) = \frac{(\sin x)'}{\sin x} = \frac{\cos x}{\sin x} = \cot x$$

تستطيع ان تفعلها

إذا كان : $f(x) = \ln x^n$ $\xleftarrow{\text{إشتقاق}}$ فإن : $f'(x) = \frac{n}{x}$

$$\boxed{(\ln x^n)' = \frac{n}{x}}$$

حاول أن تحل

3 أوجد مشتقات كلّ من الدوال التالية:

$f(x) = \ln x^2$

الحل

$f'(x) = \frac{2}{x}$

$h(x) = \ln \sqrt{x}$

$h(x) = \ln x^{\frac{1}{2}}$

الحل

$h'(x) = \frac{1}{2x}$

$g(x) = \ln\left(\frac{1}{x}\right)$

$g(x) = \ln x^{-1}$

الحل

$g'(x) = \frac{-1}{x}$

$g(x) = \ln \frac{1}{2x+1}$

الحل

$g(x) = \ln (2x+1)^{-1} = -\ln(2x+1)$

$g'(x) = -\frac{2}{2x+1}$

كراسة التمارين

$y = \ln(\ln x)$

الحل

$y' = \frac{\frac{1}{x}}{\ln x} = \frac{1}{x \cdot \ln x}$

كراسة التمارين

$y = \ln\left(\frac{1}{x^2}\right)$

$y = \ln x^{-2}$

الحل

$y' = \frac{-2}{x}$

قاعدة (4)

$$\frac{d}{dx}(\ln|x|) = \frac{1}{x}$$

فكرة الحل : التكامل بالتعويض $\int \frac{1}{u} du = \ln|u| + c$

تكامل بعض الدوال اللوغاريتمية

التكامل غير المحدد	قاعدة المشتقة
$\int \frac{1}{x} dx = \ln\|x\| + C$	$\frac{d}{dx} \ln\|x\| = \frac{1}{x}$
$\int \frac{u'}{u} dx = \ln\|u\| + C$	$\frac{d}{dx} \ln\|u\| = \frac{1}{u}\frac{du}{dx} = \frac{u'}{u}$

لاحظ أن: $\int \frac{g'(x)dx}{g(x)} = \ln|g(x)| + C$

مثال (5)

أوجد: $\int \frac{2x+3}{x^2+3x+7} dx$

الحل

$u = x^2 + 3x + 7$

$du = (2x+3)\, dx$

$I = \int \frac{1}{u} du$

$= \ln|u| + c$

$= \ln|x^2 + 3x + 7| + c$

ملحوظة
البسط مشتقة المقام

حاول أن تحل

5 أوجد: $\int \frac{3t^2 - 6t}{t^3 - 3t^2 + 8} dt$

الحل

$u = t^3 - 3t^2 + 8$

$du = (3t^2 - 6t)\, dt$

$I = \int \frac{1}{u} du$

$= \ln|u| + c$

$= \ln|t^3 - 3t^2 + 8| + c$

ابتسم للحياة

كراسة التمارين

أوجد: $\int \frac{x^3 - x}{x^4 - 2x^2} dx$

الحل

$u = x^4 - 2x^2$

$du = (4x^3 - 4x)\,dx$

$du = 4(x^3 - x)\,dx$

$\frac{1}{4} du = (x^3 - x)\,dx$

$I = \frac{1}{4}\int \frac{1}{u}\,du$

$= \frac{1}{4}\ln|u| + c$

$= \frac{1}{4}\ln|x^4 - 2x^2| + c$

كراسة التمارين

أوجد: $\int \frac{x+1}{x^2 + 2x + 5} dx$

الحل

$u = x^2 + 2x + 5$

$du = (2x+2)\,dx$

$du = 2(x+1)\,dx$

$\frac{1}{2} du = (x+1)\,dx$

$I = \frac{1}{2}\int \frac{1}{u}\,du$

$= \frac{1}{2}\ln|u| + c$

$= \frac{1}{2}\ln|x^2 + 2x + 5| + c$

كراسة التمارين

أوجد: $\int \frac{e^x}{e^x + 1} dx$

الحل

$u = e^x + 1$

$du = e^x\,dx$

$I = \int \frac{1}{u}\,du$

$= \ln|u| + c$

$= \ln|e^x + 1| + c$

احد اسرار النجاح في الصبر والمثابره

مثال (5)

أوجد: $\int \frac{x^2-5x+6}{x}dx$

الحل

$$I = \int \left(\frac{x^2}{x} - \frac{5x}{x} + \frac{6}{x} \right) dx$$

$$= \int \left(x - 5 + \frac{6}{x} \right) dx$$

$$= \frac{1}{2}x^2 - 5x + 6\ln|x| + c$$

$$\boxed{\left(\frac{1}{x}\right)' = \ln|x|}$$

حاول أن تحل

5 أوجد: $\int \frac{x^3+4}{x}dx$

الحل

$$I = \int \left(\frac{x^3}{x} + \frac{4}{x} \right) dx$$

$$= \int \left(x^2 + \frac{4}{x} \right) dx$$

$$= \frac{1}{3}x^3 + 4\ln|x| + c$$

ملحوظة
المقام حد واحد
نستخدم
توزيع البسط على المقام

كراسة التمارين

أوجد: $\int \frac{x^2+1}{x}dx$

الحل

$$I = \int \left(\frac{x^2}{x} + \frac{1}{x} \right) dx$$

$$= \int \left(x + \frac{1}{x} \right) dx$$

$$= \frac{1}{2}x^2 + \ln|x| + c$$

رايك في نفسك اهم من راي الاخريين فيك

مثال (6)

أوجد: $\int \tan x \, dx$

الحل

$$I = \int \frac{\sin x}{\cos x} \, dx$$

$$= -\int \frac{1}{u} \, du$$

$$= -\ln|u| + c$$

$$= -\ln|\cos x| + c$$

$$= \ln|\sec x| + c$$

$u = \cos x$

اشتقاق

$du = -\sin x \, dx$

$-du = \sin x \, dx$

$$\boxed{(\cos x)^{-1} = \frac{1}{\cos x} = \sec x}$$

حاول أن تحل

6 أوجد: $\int \cot x \, dx$

الحل

$$I = \int \frac{\cos x}{\sin x} \, dx$$

$$= \int \frac{1}{u} \, du$$

$$= \ln|u| + c$$

$$= \ln|\sin x| + c$$

$u = \sin x$

اشتقاق

$du = \cos x \, dx$

نحن من نصنع مصائرنا

كراسة التمارين

أوجد: $\int (\cot x + x^2)\,dx$

الحل

أولاً: $\int \cot x\,dx$

$I_1 = \int \frac{\cos x}{\sin x}\,dx$

$= \int \frac{1}{u}\,du$

$= \ln|u| + c_1$

اشتقاق $u = \sin x$ ، $du = \cos x\,dx$

$= \ln|\sin x| + c_1$

ثانياً: $\int (\cot x + x^2)\,dx$

$= \ln|\sin x| + \frac{1}{3}x^3 + c$

حالة خاصة

$\int \frac{1}{\underbrace{ax+b}_{\text{المقام من الدرجة الأولى}}}\,dx = \overbrace{\frac{1}{a}}^{\text{مقلوب معامل } x} \cdot \ln|ax+b| + c$

$\boxed{\text{بمجود الفضل}}$

مثال (5)

أوجد: $\int \frac{3}{2x+5}\,dx$

الحل

$I = 3 \cdot \frac{1}{2} \ln|2x+5| + c = \frac{3}{2}\ln|2x+5| + c$

حاول أن تحل

5 أوجد: $\int \frac{-5}{3x-2}\,dx$

الحل

$I = -5 \cdot \frac{1}{3}\ln|3x-2| + c = \frac{-5}{3}\ln|3x-2| + c$

كراسة التمارين

أوجد: $\int \frac{2}{3x+1}\,dx$

الحل

$I = 2 \cdot \frac{1}{3}\ln|3x+1| + c = \frac{2}{3}\ln|3x+1| + c$

قمة النجاح ليست في عدم الفشل، بل في القيام بعد كل عثرة

(5 - 5) التكامل بالتجزئ

قاعدة التكامل بالتجزيء

Integration by Parts Formula

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

مثال (1)

أوجد: $\int \underset{u}{x} \sin x \, \underset{dv}{dx}$

الحل

جزء من المسألة — باقي المسألة

استقاق $u = x$ — $dv = \sin x \, dx$ تكامل

$du = dx$ — $\int v = -\cos x$

المسألة — السهم الأول — السهم الثاني

قانون $\int u\,dv = uv - \int v\,du$

$$I = x \cdot -\cos x - \int -\cos x \, dx$$
$$= -x\cos x + \int \cos x \, dx$$
$$= -x\cos x + \sin x + c$$

يمكن تتبع الأسهم دون كتابة القانون

حاول أن تحل

1 أوجد: $\int x \cos x \, dx$

الحل

استقاق $u = x$ — $dv = \cos x \, dx$ تكامل

$du = dx$ — $\int$ $v = \sin x$

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

$$I = x \cdot \sin x - \int \sin x \, dx$$
$$= x \cdot \sin x - (-\cos x) + c$$
$$= x \cdot \sin x + \cos x + c$$

خذ الوقت الكافي لاختيار مناسب لـ u و dv

كراسة التمارين

أوجد: $\int x\cos(3x)\,dx$

الحل

$u = x \qquad dv = \cos(3x)\,dx$

$du = dx \qquad v = \frac{1}{3}\sin(3x)$

مقلوب معامل x

$\int u\,dv = uv - \int v\,du$

$I = x \cdot \frac{1}{3}\sin(3x) - \int \frac{1}{3}\sin(3x)\,dx$

$= \frac{1}{3} \cdot x \cdot \sin(3x) - \frac{1}{3}\int \sin(3x)\,dx$

$= \frac{1}{3} \cdot x \cdot \sin(3x) - \frac{1}{3} \cdot -\frac{1}{3}\cos(3x) + C$

مضروب

$I = \frac{1}{3} \cdot x \cdot \sin(3x) + \frac{1}{9}\cos(3x) + C$

كراسة التمارين

أوجد: $\int x\sin(5x)\,dx$

الحل

$u = x \qquad dv = \sin(5x)\,dx$

$du = dx \qquad v = -\frac{1}{5}\cos(5x)$

$\int u\,dv = uv - \int v\,du$

$I = x \cdot -\frac{1}{5}\cos(5x) - \int -\frac{1}{5}\cos(5x)\,dx$

$= -\frac{1}{5} \cdot x \cdot \cos(5x) + \frac{1}{5}\int \cos(5x)\,dx$

$= -\frac{1}{5} \cdot x \cdot \cos(5x) + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5}\sin(5x) + C$

مضروب

$I = -\frac{1}{5} \cdot x \cdot \cos(5x) + \frac{1}{25}\sin(5x) + C$

لا يأس مع الحياة ولا حياة مع اليأس

فكرة الحل: تجزيء مرتين

مثال (5)

أوجد: $\int x^2 \cos x \, dx$

الحل

$u = x^2 \qquad dv = \cos x \, dx$

$du = 2x\,dx \qquad v = \sin x$

$$\int u\,dv = u\,v - \int v\,du$$

$I = x^2 . \sin x - \int \sin x . 2x\,dx$

$I = x^2 . \sin x - 2\underbrace{\int x \sin x \, dx}_{I_1}$

تجزيء مرة أخرى

باستخدام التكامل بالتجزيء لايجاد:

$I_1 = \int x . \sin x \, dx$

$u = x \qquad dv = \sin x\,dx$

$du = dx \qquad v = -\cos x$

$I_1 = x . -\cos x - \int -\cos x \, dx$

$= -x . \cos x + \int \cos x \, dx$

$I_1 = -x \cos x + \sin x + c_1$

بالتعويض عن I_1 في I

$I = x^2 . \sin x - 2\left[-x \cos x + \sin x + c_1\right]$

$I = x^2 . \sin x + 2x \cos x - 2\sin x + c$

لاحظ وركز:

$\int \cos x \, dx$ تحل بالتكامل المباشر

$\int x \cos x^2 \, dx$ تحل بالتكامل بالتعويض

$\int x \cos x \, dx$ تحل بالتكامل بالتجزيء

$\int x^2 \cos x \, dx$ تحل بالتكامل بالتجزيء مرتين

هل اديت فروضك ؟؟

حاول أن تحل

5 أوجد: $\int x^2 \sin x \, dx$

الحل

$u = x^2 \qquad dv = \sin x \, dx$

$du = 2x\,dx \qquad \xleftarrow{\int} \qquad v = -\cos x$

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

$$I = x^2 \cdot -\cos x - \int -\cos x \cdot 2x\,dx$$

$$I = -x^2 \cdot \cos x + 2\underbrace{\int x \cdot \cos x \, dx}_{I_1}$$

ايجاد: $I_1 = \int x \cdot \cos x \, dx$

$u = x \qquad dv = \cos x\,dx$

$du = dx \qquad \xleftarrow{\int} \qquad v = \sin x$

$$I_1 = x \cdot \sin x - \int \sin x \, dx$$

$$I_1 = x \cdot \sin x + \cos x + C_1$$

تعويض:

$$I = -x^2 \cdot \cos x + 2\left[x \cdot \sin x + \cos x + C_1\right]$$

$$I = -x^2 \cdot \cos x + 2x \cdot \sin x + 2\cos x + C$$

اشتقاق		تكامل
x^2	نعكس الإشارة	$\sin x$
$2x$	عكس الإشارة	$-\cos x$
2	نعكس الإشارة	$-\sin x$
0		$\cos x$

نتبع الأسهم لاستنتاج الحل مباشرة
نستخدم هذه الطريقة للتأكد من الحل أو الأسئلة الموضوعية

بالسؤال يتعلم الانسان

أوجد: $\int (x^2+3x)\sin x\,dx$

الحل

$u = x^2+3x \qquad dv = \sin x\,dx$

$du = (2x+3)\,dx \qquad \int \quad v = -\cos x$

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

$I = (x^2+3x)\cdot -\cos x - \int -\cos x\cdot(2x+3)\,dx$

$I = -(x^2+3x)\cdot\cos x + \underbrace{\int (2x+3)\cdot\cos x\,dx}_{I_1}$

ايجاد: $I_1 = \int (2x+3)\cdot\cos x\,dx$

$u = (2x+3) \qquad dv = \cos x\,dx$

$du = 2\,dx \qquad \int \quad v = \sin x$

$I_1 = (2x+3)\sin x - \int \sin x\cdot 2dx$

$I_1 = (2x+3)\sin x - 2\int \sin x\,dx$

$I_1 = (2x+3)\sin x + 2\cos x + C_1$

تعويض:

$I = -(x^2+3x)\cdot\cos x + \left[(2x+3)\sin x + 2\cos x + C_1\right]$

$I = -(x^2+3x)\cdot\cos x + (2x+3)\sin x + 2\cos x + C$

اذهب وقبل يدي والديك واشكرهم
او ادعى لهما بالمغفرة والرحمة

مثال (2)

أوجد: **a** $\int x e^{x}\, dx$

الحل

$u = x \qquad dv = e^{x}\, dx$

$du = dx \qquad v = e^{x}$

$$\int u\, dv = uv - \int u\, dv$$

$$I = x \cdot e^{x} - \int e^{x}\, dx$$

$$I = x \cdot e^{x} - e^{x} + c$$

تذكر:

$\boxed{\int e^{x}\, dx = e^{x} + c}$

مثال (2)

أوجد: **b** $\int 3x\, e^{2x+1}\, dx$

الحل

$u = 3x \qquad dv = e^{2x+1}\, dx$

$du = 3dx \qquad v = \frac{1}{2} e^{2x+1}$

$$\int u\, dv = uv - \int v\, du$$

$$I = 3x \cdot \frac{1}{2} e^{2x+1} - \int \frac{1}{2} e^{2x+1} \cdot 3dx$$

$$I = \frac{3}{2} x \cdot e^{2x+1} - \frac{3}{2} \int e^{2x+1}\, dx$$

تذكر: مقلوب

$\boxed{\int e^{2x+1}\, dx = \frac{1}{2} e^{2x+1} + c}$

$$I = \frac{3}{2} x \cdot e^{2x+1} - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} e^{2x+1} + c$$

$$I = \frac{3}{2} x \cdot e^{2x+1} - \frac{3}{4} e^{2x+1} + c$$

كل عسير اذااستعنت بالله فهو يسير

حاول أن تحل

2 أوجد:

a $\int (x-3)e^{x-3}\,dx$

الحل

$u = (x-3) \qquad dv = e^{x-3}\,dx$

$du = dx \qquad \int \quad v = e^{x-3}$

$\int u\,dv = uv - \int v\,du$

$I = (x-3).e^{x-3} - \int e^{x-3}\,dx$

$I = (x-3).e^{x-3} - e^{x-3} + C$

حاول أن تحل

2 أوجد:

b $\int 4x\,e^{-5x}\,dx$

الحل

$u = 4x \qquad dv = e^{-5x}\,dx$

$du = 4\,dx \qquad \int \quad v = -\frac{1}{5}e^{-5x}$

$\int u\,dv = uv - \int v\,du$

$I = 4x \cdot -\frac{1}{5}e^{-5x} - \int -\frac{1}{5}e^{-5x} \cdot 4\,dx$

$I = -\frac{4}{5}xe^{-5x} + \frac{4}{5}\int e^{-5x}\,dx$

تذكر

$\int e^{-5x}\,dx = -\frac{1}{5}e^{-5x} + C$

$I = -\frac{4}{5}xe^{-5x} + \frac{4}{5} \cdot -\frac{1}{5}e^{-5x} + C$

$I = -\frac{4}{5}xe^{-5x} - \frac{4}{25}e^{-5x} + C$

تستيطيع ان تفعلها مهما كانت

فكرة الحل: تجزيء مرتين

مثال (6)

أوجد: $\int x^2 e^x \, dx$

الحل

$u = x^2 \qquad dv = e^x dx$

$du = 2x\,dx \qquad \int \; v = e^x$

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

$I = x^2 \cdot e^x - \int e^x \cdot 2x \, dx$

$I = x^2 \cdot e^x - 2\int x \cdot e^x dx$

ايجاد: $I_1 = \int x \cdot e^x dx$

$u = x \qquad dv = e^x dx$

$du = dx \qquad \int \; v = e^x$

$I_1 = x \cdot e^x - \int e^x \, dx$

$I_1 = x \cdot e^x - e^x + c_1$

تعويض:

$I = x^2 \cdot e^x - 2\left[x \cdot e^x - e^x + c_1\right]$

$I = x^2 \cdot e^x - 2x \cdot e^x + 2e^x + c$

لاحظ وركز:

$\int e^x \, dx$ تحل بالتكامل المباشر

$\int x \, e^{x^2} dx$ تحل بالتكامل بالتعويض

$\int x \, e^x \, dx$ تحل بالتكامل بالتجزيء

$\int x^2 e^x dx$ تحل بالتكامل بالتجزيء مرتين

لا تبحث عن الاخطاء بل ابحث عن الصواب

حاول أن تحل

6 أوجد: $\int x^2 e^{x+2}\, dx$

الحل

$u = x^2 \qquad dv = e^{x+2}\, dx$

$du = 2x\, dx \qquad \int \quad v = e^{x+2}$

$$\int u\, dv = uv - \int v\, du$$

$I = x^2 \cdot e^{x+2} - \int e^{x+2} \cdot 2x\, dx$

$I = x^2 \cdot e^{x+2} - 2\int x \cdot e^{x+2}\, dx$

ايجاد: $I_1 = \int x e^{x+2}\, dx$

$u = x \qquad dv = e^{x+2}\, dx$

$du = dx \qquad \int \quad v = e^{x+2}$

$I_1 = x \cdot e^{x+2} - \int e^{x+2}\, dx$

$I_1 = x \cdot e^{x+2} - e^{x+2} + c_1$

تعويض:

$I = x^2 \cdot e^{x+2} - 2\left[x e^{x+2} - e^{x+2} + c_1\right]$

$I = x^2 \cdot e^{x+2} - 2x\, e^{x+2} + 2e^{x+2} + c$

استقاق u	تكامل dv
x^2	e^{x+2}
$2x$	e^{x+2}
2	e^{x+2}
0	e^{x+2}

نفس الاشارة

عكس الاشارة

نفس الاشارة

تأكد من الناتج ←

تعلم ان تكون حليما صبورا

مثال (7)

أوجد: $\int e^x \sin x \, dx$

الحل

$u = e^x \qquad\qquad dv = \sin x \, dx$

$du = e^x d$ معلق $v = -\cos x$

$\int u \, dv = uv - \int v \, du$

$I = e^x \cdot -\cos x - \int -\cos x \cdot e^x dx$

$I = -e^x \cdot \cos x + \int e^x \cdot \cos x \, dx$

ايجاد: $I_1 = \int e^x \cdot \cos x \, dx$

$u = e^x \qquad dv = \cos x \, dx$

$du = e^x dx \qquad \int \quad v = \sin x$

$I_1 = e^x \cdot \sin x - \int \sin x \cdot e^x dx$

$I_1 = e^x \cdot \sin x - \boxed{I}$

تعويض:

$\boxed{I} = -e^x \cdot \cos x + [e^x \cdot \sin x - \boxed{I}]$

$2\boxed{I} = -e^x \cdot \cos x + e^x \cdot \sin x$

$\boxed{I} = \frac{1}{2}(-e^x \cdot \cos x + e^x \cdot \sin x) + C$

وفقك الله دائما

7 أوجد: $\int e^x \cos x \, dx$

الحل

$u = e^x \qquad dv = \cos x \, dx$

$du = e^x dx \qquad$ معلق $\qquad$ inx

$\int u \, dv = uv - \int v \, du$

$I = e^x \cdot \sin x - \int \sin x \cdot e^x \, dx$

$I = e^x \cdot \sin x - \int e^x \cdot \sin x \, dx$

$I_1 = \int e^x \cdot \sin x \, dx$

$u = e^x \qquad dv = \sin x \, dx$

$du = e^x dx \qquad \int v = -\cos x$

$I_1 = e^x \cdot -\cos x - \int -\cos x \cdot e^x dx$

$I_1 = -e^x \cdot \cos x + \int e^x \cos x \, dx$

$I_1 = -e^x \cdot \cos x + \boxed{I}$

تعويض:

$\boxed{I} = e^x \sin x - [-e^x \cdot \cos x + \boxed{I}]$

$\boxed{I} = e^x \cdot \sin x + e^x \cdot \cos x - \boxed{I}$

$2\boxed{I} = e^x \cdot \sin x + e^x \cdot \cos x$

$\boxed{I} = \frac{1}{2}(e^x \cdot \sin x + e^x \cdot \cos x) + C$

المنافسة الحقيقية بينك وبين نفسك

يستخدم التكامل بالتجزئ لحل هذا النوع من التمارين حيث يتم اختيار : $u = \ln x$ غالبا

حاول أن تحل

3 أوجد: $\int \ln x \, dx$

الحل

$u = \ln x \qquad dv = dx$

$du = \frac{1}{x} dx \qquad v = x$

$\int u \, dv = uv - \int v \, du$

$I = \ln x . x - \int x . \frac{1}{x} dx$

$I = x . \ln x - \int dx$

$I = x . \ln x - x + C$

غالبا وليس دائما
$u = \ln x$

مثال (4)

أوجد: $\int x \ln x \, dx$

الحل

$u = \ln x \qquad dv = x \, dx$

$du = \frac{1}{x} dx \qquad v = \frac{1}{2} x^2$

$\int u \, dv = uv - \int v \, du$

$I = \ln x . \frac{1}{2} x^2 - \int \frac{1}{2} x^2 . \frac{1}{x} dx$

$I = \frac{1}{2} x^2 . \ln x - \frac{1}{2} \int x \, dx$

$I = \frac{1}{2} x^2 . \ln x - \frac{1}{2} . \frac{1}{2} x^2 + C$

ضرب

$I = \frac{1}{2} x^2 . \ln x - \frac{1}{4} x^2 + C$

لايوجد مستحيل

تذكر: $\int \frac{1}{ax+b}\,dx = \frac{1}{a}\ln|ax+b| + C$

مثال: $\int \frac{1}{x+1}\,dx = \ln|x+1| + C$

مثال (3)

أوجد: $\int \ln(x+1)\,dx$

الحل

تعويض: معلق

$$I = \int \ln t \cdot dt$$

تجزئ:
$$u = \ln t \qquad dv = dt$$
$$du = \frac{1}{t}\,dt \qquad v = t$$

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

$$I = \ln t \cdot t - \int t \cdot \frac{1}{t}\,dt$$
$$I = t \cdot \ln t - \int dt$$
$$I = t \cdot \ln t - t + C$$
$$I = (x+1)\ln(x+1) - (x+1) + C$$

أوجد: $\int \ln(x+1)\,dx$

الحل

حل آخر

$$u = \ln(x+1) \qquad dv = dx$$
$$du = \frac{1}{(x+1)}\,dx \qquad v = x$$

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

$$I = \ln(x+1) \cdot x - \int x \cdot \frac{1}{x+1}\,dx$$
$$I = x \cdot \ln(x+1) - \int \frac{x+1-1}{x+1}\,dx$$
$$I = x \cdot \ln(x+1) - \int \left(1 - \frac{1}{x+1}\right)dx$$
$$I = x \cdot \ln(x+1) - x + \ln|x+1| + C$$

اننا نصنع مصائرنا،اننا نصبح مانفعله

تذكر: $\int (ax+b)^n dx = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{a} (ax+b)^{n+1} + c$

مثال: $\int (x+1)\, dx = \frac{1}{2}(x+1)^2 + c$

حاول أن تحل

4 أوجد: $\int (x+1)\ln(x+1)dx$

الحل

تعويض: $t = x+1$

$I = \int t \ln t \, d$

معلق

تجزئة: $u = \ln t \qquad dv = t\,dt$

$du = \frac{1}{t} dt \qquad v = \frac{1}{2} t^2$

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

$$I = \ln t \cdot \frac{1}{2} t^2 - \int \frac{1}{2} t^2 \cdot \frac{1}{t} dt$$

$$I = \frac{1}{2} t^2 \cdot \ln t - \frac{1}{2} \int t\, dt$$

$$I = \frac{1}{2} t^2 \cdot \ln t - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} t^2 + C$$

$$I = \frac{1}{2}(x+1)^2 \cdot \ln(x+1) - \frac{1}{4}(x+1)^2 + C$$

أوجد: $\int (x+1) \ln(x+1)\, dx$

الحل

$u = \ln(x+1) \qquad dv = (x+1)dx$

$du = \frac{1}{(x+1)} dx \qquad \int v = \frac{1}{2}(x+1)^2$

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

حل آخر

$$I = \ln(x+1) \cdot \frac{1}{2}(x+1)^2 - \int \frac{1}{2}(x+1)^2 \cdot \frac{1}{(x+1)} dx$$

$$I = \frac{1}{2}(x+1)^2 \cdot \ln(x+1) - \frac{1}{2} \int (x+1) dx$$

$$I = \frac{1}{2}(x+1)^2 \cdot \ln(x+1) - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}(x+1)^2 + C$$

$$I = \frac{1}{2}(x+1)^2 \cdot \ln(x+1) - \frac{1}{4}(x+1)^2 + C$$

مالم تبداه اليوم لن يكتمل الغد

تذكر: $\int \frac{1}{ax+b}\,dx = \frac{1}{a}\ln|ax+b| + C$

مثال: $\int \frac{1}{2x-1}\,dx = \frac{1}{2}\ln|2x-1| + C$

كراسة التمارين

أوجد: $\int \ln(2x-1)\,dx$

الحل

تعويض: $t = 2x-1$

$I = \int \ln t \cdot \frac{1}{2}\,dt$ معلق dx

dx

تجزيء: $u = \ln t \qquad dv = \frac{1}{2}\,dt$

$du = \frac{1}{t}\,dt \qquad \int v = \frac{1}{2}t$

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

$$I = \ln t \cdot \frac{1}{2}t - \int \frac{1}{2}t \cdot \frac{1}{t}\,dt$$

$$I = \frac{1}{2}t \cdot \ln t - \frac{1}{2}\int dt$$

$$I = \frac{1}{2}t \cdot \ln t - \frac{1}{2}t + C$$

$$I = \frac{1}{2}(2x-1)\ln(2x-1) - \frac{1}{2}(2x-1) + C$$

أوجد: $\int \ln(2x-1)\,dx$

الحل

$u = \ln(2x-1) \qquad dv = dx$

$du = \frac{2}{2x-1}\,dx \qquad \int v = x$

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$ $\boxed{\text{حل أخر}}$

$$I = \ln(2x-1) \cdot x - \int x \cdot \frac{2}{2x-1}\,dx$$

$$I = x \cdot \ln(2x-1) - \int \frac{\boxed{2x-1}\boxed{+1}}{\boxed{2x-1}}\,dx$$

$$I = x \cdot \ln(2x-1) - \int \left(1 + \frac{1}{2x-1}\right)dx$$

$$I = x \cdot \ln(2x-1) - x - \frac{1}{2}\ln|2x-1| + C$$

الفشل ليس عند الخسارة الفشل عند الانسحاب

أوجد: $\int (2x+1)\ln(x+1)\,dx$

الحل

$u = \ln(x$ … $\quad dv = (2x+1)\,dx$

$du = \frac{1}{(x+1)}$ … $\quad v = \cancel{2}\cdot\frac{1}{\cancel{2}}x^2 + x$

معلق

$v = x^2 + x$

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

$$I = \ln(x+1)\cdot(x^2+x) - \int (x^2+x)\cdot\frac{1}{(x+1)}\,dx$$

$$I = (x^2+x)\cdot\ln(x+1) - \int x\cancel{(x+1)}\cdot\frac{1}{\cancel{(x+1)}}\,dx$$

$$I = (x^2+x)\cdot\ln(x+1) - \int x\,dx$$

$$I = (x^2+x)\cdot\ln(x+1) - \frac{1}{2}x^2 + C$$

في حالة إذا كانت الأقواس مختلفة
يفضل عدم استخدام طريقة
التعويض ثم التجزيء
(يفضل استخدام الحل المباشر)

الطموح هو الوقود للوصول الي النجاح

أوجد: $\int \frac{\ln(x)}{x^2}dx$

الحل

$I = \int \ln x \cdot \frac{1}{x^2}\, dx$

$u = \ln x \qquad dv = \frac{1}{x^2}\, dx$

$du = \frac{1}{x}\, dx \qquad \int \quad v = \frac{-1}{x}$

$\int u\,dv = uv - \int v\,du$ $\boxed{\int \frac{1}{x^2} dx = \frac{-1}{x} + c}$ تذكر

$I = \ln x \cdot \frac{-1}{x} - \int -\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x}\, dx$

$I = -\frac{1}{x} \cdot \ln x + \int \frac{1}{x^2}\, dx$

$I = \frac{-1}{x} \cdot \ln x - \frac{1}{x} + c$

أوجد: $\int \frac{\ln(x)}{x^2}\, dx$

الحل

$I = \int \ln(x) \cdot x^{-2}\, dx$

$u = \ln x \qquad dv = x^{-2}\, dx$

$du = \frac{1}{x}\, dx \qquad \int \quad v = -x^{-1}$

حل آخر

$\int u\,dv = uv - \int v\,du$

$I = \ln x \cdot -x^{-1} - \int -x^{-1} \cdot \frac{1}{x}\, dx$

$I = -x^{-1} \cdot \ln x + \int x^{-2}\, dx$

$I = -\frac{1}{x} \cdot \ln x - x^{-1} + c$

$I = -\frac{1}{x} \cdot \ln x - \frac{1}{x} + c$

انت قادر ان تفعلها

أوجد: $\int x^2 \ln x^2 dx$

الحل

$u = \ln x^2 \qquad dv = x^2 dx$

$du = \frac{2}{x} dx \qquad v = \frac{1}{3}x^3$

تذكر:

$(\ln x^n)' = \frac{n}{x}$

$(\ln x^2)' = \frac{2}{x}$

$\int u\,dv = uv - \int v\,du$

$I = \ln x^2 \cdot \frac{1}{3}x^3 - \int \frac{1}{3}x^{\cancel{3}\,2} \cdot \frac{2}{\cancel{x}} dx$

$I = \frac{1}{3}x^3 \cdot \ln x^2 - \frac{2}{3}\int x^2 dx$

$I = \frac{1}{3}x^3 \cdot \ln x^2 - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3}x^3 + C$

$I = \frac{1}{3}x^3 \cdot \ln x^2 - \frac{2}{9}x^3 + C$

أوجد: $\int x^2 \ln x^2 \, dx$

الحل

حل آخــــــــر

$I = \int 2x^2 \cdot \ln x \, dx$

$u = \ln x \qquad dv = 2x^2 dx$

$du = \frac{1}{x} dx \qquad v = \frac{2}{3}x^3$

$\int u\,dv = uv - \int v\,du$

$I = \ln x \cdot \frac{2}{3}x^3 - \int \frac{2}{3}x^{\cancel{3}\,2} \cdot \frac{1}{\cancel{x}} dx$

$I = \frac{2}{3}x^3 \cdot \ln x - \frac{2}{3}\int x^2 dx$

$I = \frac{2}{3}x^3 \cdot \ln x - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3}x^3 + C$

$I = \frac{2}{3}x^3 \cdot \ln x - \frac{2}{9}x^3 + C$

الفرق بين الاغبياء والاذكياء،الاغبياء يملكون حلما ، الاذكياء يملكون هدفا

أوجد: $\int \ln\sqrt[4]{x}\,dx$

الحل

$$I = \int \ln x^{\frac{1}{4}}\,dx$$

تذكر

$$(\ln x^n)' = \frac{n}{x}$$

$$(\ln x^{\frac{1}{4}})' = \frac{1}{4x}$$

$$u = \ln x^{\frac{1}{4}} \qquad dv = dx$$

$$du = \frac{1}{4x}\,dx \qquad \int \quad v = x$$

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

$$I = \ln x^{\frac{1}{4}} . x - \int x . \frac{1}{4x}\,dx$$

$$I = x . \ln x^{\frac{1}{4}} - \frac{1}{4}\int dx$$

$$I = x . \ln x^{\frac{1}{4}} - \frac{1}{4}x + C$$

أوجد: $\int \ln\sqrt[4]{x}\,dx$

الحل

حل آخر

$$I = \int \ln x^{\frac{1}{4}}\,dx = \int \frac{1}{4}\ln x\,dx$$

$$u = \ln x \qquad dv = \frac{1}{4}\,dx$$

$$du = \frac{1}{x}\,dx \qquad \int \quad v = \frac{1}{4}x$$

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

$$I = \ln x . \frac{1}{4}x - \int \frac{1}{4}x . \frac{1}{x}\,dx$$

$$I = \frac{1}{4}x . \ln x - \frac{1}{4}\int dx$$

$$I = \frac{1}{4}x . \ln x - \frac{1}{4}x + C$$

وفقك الله دائما

أوجد: $\int \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}dx$

الحل

$I = \int \ln x . x^{-\frac{1}{3}} dx$

$u = \ln x \qquad dv = x^{-\frac{1}{3}} dx$

$du = \frac{1}{x} dx \qquad \int v = \frac{3}{2} x^{\frac{2}{3}}$

$\int u\,dv = uv - \int v\,du$

$I = \ln x . \frac{3}{2} x^{\frac{2}{3}} - \int \frac{3}{2} x^{\frac{2}{3}} . \frac{1}{x} dx$

$I = \frac{3}{2} x^{\frac{2}{3}} . \ln x - \frac{3}{2} \int x^{-\frac{1}{3}} dx$

$I = \frac{3}{2} x^{\frac{2}{3}} . \ln x - \frac{3}{2} . \frac{3}{2} x^{\frac{2}{3}} + c$

$I = \frac{3}{2} x^{\frac{2}{3}} . \ln x - \frac{9}{4} . x^{\frac{2}{3}} + c$

تذكر

$x^{\frac{2}{3}} . \frac{1}{x} = x^{-\frac{1}{3}}$

طرح الأسس $\frac{2}{3} - 1 = -\frac{1}{3}$

كل عسير اذااستعنت بالله فهو يسير

كراسة التمارين

أوجد: $\int (\ln(x))^2\, dx$

الحل

$u = (\ln x)^2$ $\qquad$ $dv = dx$

$du = 2 \cdot \ln x \cdot$ ... $\qquad$ ... x

معلق

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

$$I = (\ln x)^2 \cdot x - \int \cancel{x} \cdot 2 \cdot \ln x \cdot \frac{1}{\cancel{x}}\, dx$$

$$I = x \cdot (\ln x)^2 - 2 \int \ln x\, dx$$

إيجاد: $I_1 = \int \ln x\, dx$

$u = \ln x$ $\qquad$ $dv = dx$

$du = \frac{1}{x} dx$ $\qquad$ $\int$ $\quad v = x$

$$I_1 = \ln x \cdot x - \int \cancel{x} \cdot \frac{1}{\cancel{x}}\, dx$$

$$I_1 = x \cdot \ln x - \int dx$$

$$I_1 = x \cdot \ln x - x + C_1$$

تعويض:

$$I = x \cdot (\ln x)^2 - 2\left[x \cdot \ln x - x + C_1\right]$$

$$I = x \cdot (\ln x)^2 - 2x \cdot \ln x + 2x + C$$

المنافسة الحقيقية بينك وبين نفسك

أوجد: $\int \sin(\ln x)dx$

الحل

تعويض:

$I = \int \sin(t) \cdot e$ معلق x

استقاق $e^t dt = dx$

تجزئة:

$u = e^t \qquad dv = \sin t\, dt$

$du = e^t dt \qquad v = -\cos t$

$\int u\,dv = uv - \int v\,du$

$I = e^t \cdot -\cos t - \int -\cos t \cdot e^t dt$

$I = -e^t \cdot \cos t + \int e^t \cdot \cos t\, dt$

ايجاد: $I_1 = \int e^t \cdot \cos t\, dt$

$u = e^t \qquad dv = \cos t\, dt$

$du = e^t dt \qquad v = \sin t$

$I_1 = e^t \sin t - \int \sin t \cdot e^t dt$

$I_1 = e^t \cdot \sin t - I$

تعويض:

$I = -e^t \cdot \cos t + [e^t \cdot \sin t - I]$

$2I = -e^t \cdot \cos t + e^t \cdot \sin t$

$I = \frac{1}{2}\left(-e^{\ln x} \cdot \cos(\ln x) + e^{\ln x} \cdot \sin(\ln x)\right) + C$

حاول ثم حاول لكي تحقق هدفك

لتنسى: $t = \ln x$

فكرة الحل: تكامل بالتعويض

حالة خاصة

كراسة التمارين

أوجد: $\int \frac{dx}{x\ln x}$

الحل

$I = \int \frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1}{x}\,dx$ ← اعادة صياغة

$= \int \frac{1}{u} \cdot du$

$= \ln|u| + c$

$= \ln|\ln x| + c$

$u = \ln x$

$du = \frac{1}{x}\,dx$

كراسة التمارين

أوجد: $\int \frac{\ln^6 x}{x}\,dx$

الحل

$I = \int \ln^6 x \cdot \frac{1}{x}\,dx$

$= \int u^6 \cdot du$

$= \frac{1}{7}u^7 + c$

$= \frac{1}{7}(\ln x)^7 + c$

$u = \ln x$

$du = \frac{1}{x}\,dx$

غالباً:
إذا وجد $\ln x$ و $\frac{1}{x}$ في المسألة
نستخدم التكامل بالتعويض

حقق حلمك وحلم من احبوك

(6 – 5) التكامل باستخدام الكسور الجزئية

أولًا: المقام يمكن تحليله إلى عوامل خطية (عوامل من الدرجة الأولى) غير مكررة

مثال (1)

لتكن الدالة f : $f(x) = \dfrac{5x-1}{x^2-2x-15}$

فأوجد:

a الكسور الجزئية

b $\int f(x)\,dx$

الحل

درجة البسط < درجة المقام

① تحليل المقام:

$x^2 - 2x - 15 = (x-5)(x+3)$ ⑤ ⊖3

② نفرض أن:

$f(x) = \dfrac{5x-1}{(x-5)(x+3)} = \dfrac{A}{(x-5)} + \dfrac{B}{(x+3)}$

③ معادلة التعويض:

$\boxed{5x-1 = A(x+3) + B(x-5)}$

④ بالتعويض عن $x=5$:

$5(5)-1 = A(5+3) + \cancel{B(5-5)}$

$\boxed{\text{shift solve}}$ $A = 3$

عن $x=-3$:

$5(-3)-1 = \cancel{A(-3+3)} + B(-3-5)$

$\boxed{\text{shift solve}}$ $B = 2$

⑤ الكسور الجزئية:

$f(x) = \dfrac{3}{(x-5)} + \dfrac{2}{(x+3)}$

⑥ التكامل:

$\int f(x)\,dx = \int \left(\dfrac{3}{(x-5)} + \dfrac{2}{(x+3)} \right) dx$

$= 3 \cdot \ln|x-5| + 2 \cdot \ln|x+3| + C$

يمكن استخدام الحاسبة لإيجاد قيمة A و B
$\boxed{\text{shift solve}}$

بدل ان تلعن الظلام اوقد شمعة

حاول أن تحل

1 لتكن الدالة f : $f(x) = \frac{2x-1}{x^2-4x+3}$

فأوجد:

a الكسور الجزئية

b $\int f(x)\,dx$

الحل

درجة البسط < درجة المقام

① تحليل المقام : $x^2-4x+3 = (x-1)(x-3)$

② نفرض أن : $f(x) = \frac{2x-1}{(x-1)(x-3)} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x-3)}$

③ معادلة التعويض : $\boxed{2x-1 = A(x-3) + B(x-1)}$

④ بالتعويض عن $x=3$: $2(3)-1 = \cancel{A(3-3)} + B(3-1)$

$\boxed{B = \frac{5}{2}}$

عن $x=1$: $2(1)-1 = A(1-3) + \cancel{B(1-1)}$

$\boxed{A = -\frac{1}{2}}$

⑤ الكسور الجزئية : $f(x) = \frac{-\frac{1}{2}}{(x-1)} + \frac{\frac{5}{2}}{(x-3)}$

⑥ التكامل : $\int f(x)\,dx = \int \left(\frac{-\frac{1}{2}}{(x-1)} + \frac{\frac{5}{2}}{(x-3)} \right) dx$

$= -\frac{1}{2} \ln|x-1| + \frac{5}{2} \ln|x-3| + C$

لا احد يبدا من القمة ،عليك ان تشق طريقك اليها

مثال (2)

أوجد: $\int \frac{x^2+2x-1}{2x^3+3x^2-2x}dx$

الحل

درجة البسط أصغر من درجة المقام

① تحليل المقام:

$2x^3+3x^2-2x = x(2x^2+3x-2)$

$= x(2x-1)(x+2)$

② نفرض أن:

$f(x) = \frac{x^2+2x-1}{x(2x-1)(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{(2x-1)} + \frac{C}{(x+2)}$

③ معادلة التعويض:

$\boxed{x^2+2x-1 = A(2x-1)(x+2)+Bx(x+2)+Cx(2x-1)}$

④ بالتعويض عن $x=0$:

$(0)^2+2(0)-1 = A(2(0)-1)(0+2)$

$\boxed{A=\frac{1}{2}}$

عن $x=\frac{1}{2}$:

$(\frac{1}{2})^2+2(\frac{1}{2})-1 = B(\frac{1}{2})(\frac{1}{2}+2)$

$\boxed{B=\frac{1}{5}}$

عن $x=-2$:

$(-2)^2+2(-2)-1 = C(-2)(2(-2)-1)$

$\boxed{C=\frac{-1}{10}}$

⑤ الكسور الجزئية:

$f(x) = \frac{\frac{1}{2}}{x} + \frac{\frac{1}{5}}{(2x-1)} + \frac{-\frac{1}{10}}{(x+2)}$

⑥ التكامل:

$\int f(x)dx = \int\left(\frac{\frac{1}{2}}{x} + \frac{\frac{1}{5}}{(2x-1)} + \frac{-\frac{1}{10}}{(x+2)}\right)dx$

$= \frac{1}{2}\ln|x| + \underbrace{\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2}}_{\frac{1}{10}}\ln|2x-1| - \frac{1}{10}\ln|x+2| + C$

تذكر:

$\int \frac{x^2+2x-1}{2x^3+3x^2-2x}dx$ كسور جزئية	$\int \frac{x^2+5x+4}{x+1}dx$ تحليل + اختصار	$\int \frac{x^3-x}{x^4-2x^2}dx$ البسط مشتقة المقام	$\int \frac{x^2-3x}{x}dx$ توزيع بسط على مقام

احسن استغلال وقتك

خذ وقتك للتمييز بين هذه الأنواع

حاول أن تحل

2 أوجد: $\int \frac{x^2-2}{2x^3-5x^2-3x}\,dx$

الحل

درجة البسط < درجة المقام

① تحليل المقام: $2x^3-5x^2-3x = x(2x^2-5x-3)$

$= x(x-3)(2x+1)$

② نفرض أن: $f(x) = \frac{x^2-2}{x(x-3)(2x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{(x-3)} + \frac{C}{(2x+1)}$

③ معادلة التعويض:

$\boxed{x^2-2 = A(x-3)(2x+1) + Bx(2x+1) + Cx(x-3)}$

④ بالتعويض عن $x=0$: $(0)^2-2 = A(0-3)(2(0)+1)$

$\boxed{A = \frac{2}{3}}$

$x=3$: $(3)^2-2 = B(3)(2(3)+1)$

$\boxed{B = \frac{1}{3}}$

$x=-\frac{1}{2}$: $(-\frac{1}{2})^2-2 = C(-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}-3)$

$\boxed{C=-1}$

⑤ الكسور الجزئية: $f(x) = \frac{\frac{2}{3}}{x} + \frac{\frac{1}{3}}{(x-3)} + \frac{-1}{(2x+1)}$

⑥ التكامل: $\int f(x)\,dx = \int \left(\frac{\frac{2}{3}}{x} + \frac{\frac{1}{3}}{(x-3)} + \frac{-1}{(2x+1)}\right) dx$

$= \frac{2}{3}\cdot \ln|x| + \frac{1}{3}\ln|x-3| - 1\cdot\frac{1}{2}\ln|2x+1| + c$

$= \frac{2}{3}\ln|x| + \frac{1}{3}\ln|x-3| - \frac{1}{2}\ln|2x+1| + c$

ان الاجابة الوحيدة علي الهزيمة هي الانتصار

ثانيًا: المقام يمكن تحليله إلى عوامل خطية بعضها متكرر

مثال (3)

أوجد: $\int \frac{-x^2+2x+4}{x^3-4x^2+4x}\,dx$

الحل

درجة البسط < درجة المقام

① تحليل المقام:
$$x^3-4x^2+4x = x(x^2-4x+4)$$
$$= x\,(x-2)^2$$

② نفرض أن:
$$f(x)=\frac{-x^2+2x+4}{x(x-2)^2} = \frac{A}{x}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{(x-2)^2}$$

③ معادلة التعويض:
$$\boxed{-x^2+2x+4 = A(x-2)^2+Bx(x-2)+Cx}$$

④ بالتعويض عن $x=0$:
$$-(0)^2+2(0)+4 = A(0-2)^2$$
$$\boxed{A=1}$$

$x=2$:
$$-(2)^2+2(2)+4 = C(2)$$
$$\boxed{C=2}$$

$x=1$:
$$-(1)^2+2(1)+4 = \overset{1}{\cancel{A}}(1-2)^2+B(1)(1-2)+\overset{2}{\cancel{C}}(1)$$
$$\boxed{B=-2}$$

⑤ الكسور الجزئية:
$$f(x)=\frac{1}{x}+\frac{-2}{x-2}+\frac{2}{(x-2)^2}$$

⑥ التكامل:
$$\int f(x)\,dx = \int\left(\frac{1}{x}+\frac{-2}{x-2}+\frac{2}{(x-2)^2}\right)dx$$
$$= \ln|x| - 2\ln|x-2| + 2\cdot\frac{-1}{(x-1)} + c$$
$$= \ln|x| - 2\ln|x-2| - \frac{2}{(x-1)} + c$$

انار الله
دربك
ووفقك
لما يحب
ويرضاه

حاول أن تحل

3 أوجد: $\int \frac{4x^2-4x+1}{x^3-2x^2+x}\,dx$

الحل

درجة البسط < درجة المقام

① تحليل المقام: $x^3-2x^2+x = x(x^2-2x+1)$

$= x(x-1)^2$

② نفرض أن: $f(x) = \frac{4x^2-4x+1}{x(x-1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{(x-1)} + \frac{C}{(x-1)^2}$

③ معادلة التعويض:

$\boxed{4x^2-4x+1 = A(x-1)^2 + Bx(x-1) + Cx}$

④ بالتعويض عن $x=0$:

$4(0)^2-4(0)+1 = A(0-1)^2$

$\boxed{A=1}$

$x=1$:

$4(1)^2-4(1)+1 = C(1)$

$\boxed{C=1}$

$x=2$:

$4(2)^2-4(2)+1 = \cancel{A}(2-1)^2 + B(2)(2-1) + \cancel{C}(2)$

$\boxed{B=3}$

⑤ الكسور الجزئية: $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{3}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}$

⑥ التكامل: $\int f(x)\,dx = \int \left(\frac{1}{x} + \frac{3}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}\right)dx$

$= \ln|x| + 3\ln|x-1| - \frac{1}{(x-1)} + C$

النجاح ملك من يدفع ثمنه

مثال (4)

أوجد: $\int \frac{3+x+x^2}{x^3+2x^2}\,dx$

الحل

درجة البسط < درجة المقام

① تحليل المقام: $x^3+2x^2 = x^2(x+2)$

② نفرض أن: $f(x) = \frac{3+x+x^2}{x^2(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{(x+2)}$

③ معادلة التعويض: $\boxed{3+x+x^2 = Ax(x+2) + B(x+2) + Cx^2}$

④ بالتعويض عن $x = 0$:

$3+(0)+(0)^2 = B(0+2)$

$\boxed{B = \frac{3}{2}}$

$x = -2$:

$3+(-2)+(-2)^2 = C(-2)^2$

$\boxed{C = \frac{5}{4}}$

$x = 1$:

$3+(1)+(1)^2 = A(1)(1+2) + \overset{\frac{3}{2}}{B}(1+2) + \overset{\frac{5}{4}}{C}(1)^2$

$\boxed{A = \frac{-1}{4}}$

⑤ الكسور الجزئية: $f(x) = \frac{-\frac{1}{4}}{x} + \frac{\frac{3}{2}}{x^2} + \frac{\frac{5}{4}}{(x+2)}$

⑥ التكامل: $\int f(x)\,dx = \int \left(\frac{-\frac{1}{4}}{x} + \frac{\frac{3}{2}}{x^2} + \frac{\frac{5}{4}}{(x+2)} \right) dx$

$= -\frac{1}{4}\ln|x| + \frac{3}{2}\cdot\frac{-1}{x} + \frac{5}{4}\ln|x+2| + C$

تذكر:

$\int \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x} + C$

لن تسقط السماء ذهبا فلا تنتظر

حاول أن تحل

4 أوجد: $\int \frac{x^2+1}{x^3+4x^2}\,dx$

الحل

درجة البسط < درجة المقام

① تحليل المقام: $x^3+4x^2 = x^2(x+4)$

② نفرض أن: $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2(x+4)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{(x+4)}$

③ معادلة التعويض: $\boxed{x^2+1 = Ax(x+4)+B(x+4)+Cx^2}$

④ بالتعويض عن $x=0$: $(0)^2+1 = B(0+4)$

$\boxed{B = \frac{1}{4}}$

$x=-4$: $(-4)^2+1 = C(-4)^2$

$\boxed{C = \frac{17}{16}}$

$x=1$: $(1)^2+1 = A(1)(1+4)+\overset{\frac{1}{4}}{\cancel{B}}(1+4)+\overset{\frac{17}{16}}{\cancel{C}}(1)^2$

$\boxed{A = \frac{-1}{16}}$

⑤ الكسور الجزئية: $f(x) = \frac{\frac{-1}{16}}{x} + \frac{\frac{1}{4}}{x^2} + \frac{\frac{17}{16}}{(x+4)}$

⑥ التكامل: $\int f(x)\,dx = \int\left(\frac{\frac{-1}{16}}{x} + \frac{\frac{1}{4}}{x^2} + \frac{\frac{17}{16}}{(x+4)}\right)dx$

$= \frac{-1}{16}\ln|x| + \frac{1}{4}\cdot\frac{-1}{x} + \frac{17}{16}\ln|x+4| + c$

لا نحقق الاعمال بالامنيات وانما بالارادة نصنع المعجزات

عندما تكون درجة البسط في الحدودية النسبية $f(x) = \frac{r(x)}{h(x)}$ مساوية أو أكبر من درجة المقام، نوجد أولًا ناتج القسمة $q(x)$ باستخدام القسمة المطولة ثم نكتب الدالة على الصورة: $f(x) = q(x) + \frac{p(x)}{h(x)}$ حيث $p(x)$ هو الباقي.

مثال (5)

أوجد: $\int \frac{x^2 - 3x + 7}{x^2 - 4x + 4}\, dx$

الحل

درجة البسط = درجة المقام

قسمة مطولة:

$$\begin{array}{r|l} & 1 \\ x^2 - 4x + 4 & x^2 - 3x + 7 \\ & -x^2 + 4x - 4 \\ \hline & x + 3 \end{array}$$

$f(x) = \text{الناتج} + \frac{\text{الباقي}}{\text{المقسوم عليه}} = 1 + \frac{x+3}{x^2 - 4x + 4}$

① تحليل المقام: $x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$

② نفرض أن: $g(x) = \frac{x+3}{(x-2)^2} = \frac{A}{(x-2)} + \frac{B}{(x-2)^2}$

③ معادلة التعويض: $\boxed{x + 3 = A(x-2) + B}$

④ بالتعويض عن $x = 2$: $(2) + 3 = B$

$\boxed{B = 5}$

$x = 1$: $(1) + 3 = A(1-2) + \cancel{B}^{5}$

$\boxed{A = 1}$

⑤ الكسور الجزئية: $g(x) = \frac{1}{(x-2)} + \frac{5}{(x-2)^2}$

⑥ التكامل: $\int f(x)\, dx = \int (1 + g(x))\, dx$

$= \int \left(1 + \frac{1}{(x-2)} + \frac{5}{(x-2)^2}\right) dx$

$= x + \ln|x-2| + 5 \cdot \frac{-1}{(x-2)} + C$

الصعب ليس في الوصول الي القمة الصعب في الحفاظ عليها

حاول أن تحل

أوجد: $\int \frac{x^3-2x^2-4}{x^3-2x^2}\,dx$

الحل

درجة البسط = درجة المقام

قسمة مطولة:

$$\begin{array}{r|l} & 1 \\ \hline x^3-2x^2 & x^3-2x^2-4 \\ & -(x^3-2x^2) \\ \hline & -4 \end{array}$$

$$f(x) = \text{الناتج} + \frac{\text{الباقي}}{\text{المقسوم عليه}} = 1 + \frac{-4}{x^3-2x^2}$$

① تحليل المقام: $x^3-2x^2 = x^2(x-2)$

② نفرض أن: $g(x) = \frac{x^3-2x^2-4}{x^2(x-2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{(x-2)}$

③ معادلة التعويض: $\boxed{x^3-2x^2-4 = Ax(x-2)+B(x-2)+Cx^2}$

④ بالتعويض عن $x=0$: $-4 = B(0-2)$

$\boxed{B=2}$

$x=2$: $-4 = C(2)^2$

$\boxed{C=-1}$

$x=1$: $-4 = A(1)(1-2)+\overset{2}{\cancel{B}}(1-2)+\overset{-1}{\cancel{C}}(1)^2$

$\boxed{A=1}$

⑤ الكسور الجزئية: $g(x) = \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{-1}{(x-2)}$

⑥ التكامل: $\int f(x)\,dx = \int (1+g(x))\,dx$

$$= \int \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{-1}{(x-2)}\right) dx$$

$$= x + \ln|x| + 2\cdot\frac{-1}{x} - \ln|x-2| + C$$

قد تكون افضل الطرق اصعبها لكن عليك دائما اتباعها

مثال (6)

أوجد: $\int \frac{2x^3-9x^2+25}{x^2-6x+8}\,dx$

الحل

درجة ال ... المقا

معلق

قسمة مطولة:

$$\begin{array}{r|l} & 2x+3 \\ \hline x^2-6x+8 & 2x^3-9x \ldots \\ & -(2x^3-12x^2+16x) \\ \hline & 3x^2-16x+25 \\ & -(3x^2-18x+24) \\ \hline & 2x+1 \end{array}$$

$f(x) =$ الناتج $+ \frac{\text{الباقي}}{\text{المقسوم عليه}} = 2x+3+\frac{2x+1}{x^2-6x+8}$

① تحليل المقام: $x^2-6x+8=(x-4)(x-2)$

② بفرض أن: $g(x)=\frac{2x+1}{(x-4)(x-2)}=\frac{A}{(x-4)}+\frac{B}{(x-2)}$

③ معادلة التعويض: $\boxed{2x+1=A(x-2)+B(x-4)}$

④ بالتعويض عن $x=4$: $2(4)+1=A(4-2)+\cancel{B(4-4)}$

$\boxed{A=\frac{9}{2}}$

بالتعويض عن $x=2$: $2(2)+1=\cancel{A(2-2)}+B(2-4)$

$\boxed{B=\frac{-5}{2}}$

⑤ الكسور الجزئية: $g(x)=\frac{\frac{9}{2}}{(x-4)}+\frac{\frac{-5}{2}}{(x-2)}$

⑥ التكامل: $\int f(x)\,dx=\int\left(2x+3+\frac{\frac{9}{2}}{(x-4)}+\frac{\frac{-5}{2}}{(x-2)}\right)dx$

$=\cancel{2}\cdot\frac{1}{\cancel{2}}x^2+3x+\frac{9}{2}\ln|x-4|-\frac{5}{2}\ln|x-2|+C$

الحكمة هي ان تعرف ما الذي يجب ان تفعله

حاول أن تحل

6 أوجد: $\int \frac{x^3-7x+9}{x^2-3x+2}\,dx$

الحل

در... معلق ...ـة المقام

قسمة مطولة:

$$
\begin{array}{r|l}
 & x+3 \\
\hline
x^2-3x+2 & x^3 \qquad -7x+9 \\
 & \ominus\, x^3 \overset{\oplus}{-}3x^2 \overset{\ominus}{+}2x \\
\hline
 & 3x^2-9x+9 \\
 & \ominus\, 3x^2 \overset{\oplus}{-}9x \overset{\ominus}{+}6 \\
\hline
 & +3
\end{array}
$$

$f(x) = \text{الناتج} + \frac{\text{الباقي}}{\text{المقسوم عليه}} = x+3+\frac{3}{x^2-3x+2}$

① تحليل المقام: $x^2-3x+2=(x-2)(x-1)$

② نفرض أن: $g(x)=\frac{3}{x^2-3x+2}=\frac{A}{(x-2)}+\frac{B}{(x-1)}$

③ معادلة التعويض: $\boxed{3=A(x-1)+B(x-2)}$

④ بالتعويض عن $x=2$: $3=A(2-1)+\cancel{B(2-2)}$

$\boxed{A=3}$

عن $x=1$: $3=\cancel{A(1-1)}+B(1-2)$

$\boxed{B=-3}$

⑤ الكسور الجزئية: $g(x)=\frac{3}{(x-2)}+\frac{-3}{(x-1)}$

⑥ التكامل: $\int f(x)\,dx=\int\left(x+3+\frac{3}{(x-2)}+\frac{-3}{(x-1)}\right)dx$

$= \frac{1}{2}x^2+3x+3\ln|x-2|-3\ln|x-1|+C$

يقول اينشتاين : ليس الامر اني عبقري ،كل ماهنالك اني اجاهد مع المشاكل لفترة اطول

(5 - 7) التكامل المحدد

وفي هذا البند سوف تتعلم التكامل المحدد للدالة f من a إلى b وهو العدد الحقيقي: $F(b)-F(a)$

حيث:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \left[\int f(x)\,dx\right]_a^b$$
$$= \left[F(x)\right]_a^b$$
$$= F(b) - F(a)$$

ويسمّى a, b حدّي التكامل، والقواعد التي سبق ذكرها في التكامل غير المحدد تطبق على التكامل المحدد.

مثال (1)

أوجد التكامل المحدد للدالة: $f(x) = 3x^2 - x + 4$ من $x = -2$ إلى $x = 3$.

الحل

$$\int_{-2}^{3} f(x)\,dx = \int_{-2}^{3} (3x^2 - x + 4)\,dx$$

$$= \left[3\cdot\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 4x\right]_{-2}^{3} = \left[x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 4x\right]_{-2}^{3}$$

$$= \left((3)^3 - \frac{1}{2}(3)^2 + 4(3)\right) - \left((-2)^3 - \frac{1}{2}(-2)^2 + 4(-2)\right)$$

$$= 34.5 - (-18) = 52.5$$

حاول أن تحل

1 أوجد: $\int_2^7 (x^3 - 2x^2 + 2)\,dx$

الحل

$$= \left[\frac{1}{4}x^4 - 2\cdot\frac{1}{3}x^3 + 2x\right]_2^7 = \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + 2x\right]_2^7$$

$$= \left(\frac{1}{4}(7)^4 - \frac{2}{3}(7)^3 + 2(7)\right) - \left(\frac{1}{4}(2)^4 - \frac{2}{3}(2)^3 + 2(2)\right)$$

$$= \frac{4627}{12} - \frac{8}{3} = \frac{4595}{12}$$

إذا كانت f دالة متصلة على الفترة I ، $k \in \mathbb{R}$ ، $a, b, c \in I$ فإن:

1. $\int_a^a f(x)dx = 0$
2. $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$
3. $\int_a^b k\,dx = k(b-a)$
4. $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$
5. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

لاحظ في خاصية 3 أنه: **إذا كان $k = 1$ فإن: $\int_a^b dx = b - a$**

مثال (2)

أوجد:

a $\int_{-8}^{-4} dx$

الحل

$= [x]_{-8}^{-4} = -4 - (-8) = 4$

أوجد:

b $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (2\cos x)dx$

الحل

$= 0$

أوجد:

c $\int_2^{-1} (\sqrt{x+1} - 3)dx$

الحل

$= \int_2^{-1} ((x+1)^{\frac{1}{2}} - 3)\,dx = \left[\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} - 3x\right]_2^{-1}$

تعويض

$= \left(\frac{2}{3}((-1)+1)^{\frac{3}{2}} - 3(-1)\right) - \left(\frac{2}{3}((2)+1)^{\frac{3}{2}} - 3(2)\right) = 3 - (-2.5) = 5.53$

أوجد:

d $\int_1^2 \left(3e^x + \frac{e}{x}\right)dx$

الحل

$= \left[3e^x + e.\ln|x|\right]_1^2$

تعويض

$= (3e^2 + e.\ln|2|) - (3e^1 + e.\ln|1|)$

$= 3e^2 + e\ln|2| - 3e$

$= 15.89$

حاول أن تحل

2 أوجد:

a $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2}\sin 2x - \csc^2 x\right)dx$

الحل

$= \left[\frac{1}{2} \cdot -\frac{\cos 2x}{2} + \cot x\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \left[-\frac{1}{4}\cos 2x + \cot x\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$

تعويض

$= \left(-\frac{1}{4}\cos 2(\frac{\pi}{2}) + \cot(\frac{\pi}{2})\right) - \left(-\frac{1}{4}\cos 2(\frac{\pi}{4}) + \cot(\frac{\pi}{4})\right)$

$= \frac{1}{4} - 1 = \frac{-3}{4}$

أوجد:

b $\int_{2}^{-3} 5\,dx$

الحل

$= \left[5x\right]_{2}^{-3} = (5(-3)) - (5(2)) = -25$

أوجد:

c $\int_{3}^{3} (-2x^3 + x^2)dx$

الحل

$= 0$

أوجد:

d $\int_{2}^{4} \frac{dx}{x-1}$

الحل

$= \left[\ln|x-1|\right]_{2}^{4}$

تعويض

$= (\ln|(4)-1|) - (\ln|(2)-1|)$

$= \ln|3| - \ln|1| = \ln|3| = 1.09$

العلم هو الخير والجهل هو الشر

مثال (9)

أوجد: **a** $\int_{-1}^{1}(x^2+2x-3)^2(x+1)\,dx$

الحل

أولاً:

$I=\int (x^2+2x-3)^2\,(x+1)\,dx$

$=\int u^2\cdot\frac{1}{2}\,du$

$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}u^3+C$

$=\frac{1}{6}(x^2+2x-3)^3+C$

$u=x^2+2x-3$

$du=(2x+2)\,dx$

$\frac{1}{2}du=(x+1)\,dx$

ثانياً: $\int_{-1}^{1}(x^2+2x-3)^2(x+1)\,dx=\left[\frac{1}{6}(x^2+2x-3)^3\right]_{-1}^{1}$

تعويض

$=\left(\frac{1}{6}((1)^2+2(1)-3)^3\right)-\left(\frac{1}{6}((-1)^2+2(-1)-3)^3\right)$

$=0-\left(-\frac{32}{3}\right)=\frac{32}{3}$

حاول أن تحل

9 أوجد: **a** $\int_{-1}^{1}\left((x+1)\sqrt{x^2+2x+5}\right)dx$

الحل

أولاً:

$I=\int (x^2+2x+5)^{\frac{1}{2}}\cdot(x+1)\,dx$ ← اعادة صياغة

$=\int u^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{2}\,du$

$=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}+C$

$=\frac{1}{3}(x^2+2x+5)^{\frac{3}{2}}+C$

$u=x^2+2x+5$

$du=(2x+2)\,dx$

$\frac{1}{2}du=(x+1)\,dx$

ثانياً: $\int_{-1}^{1}(x+1)\sqrt{x^2+2x+5}\,dx=\left[\frac{1}{3}(x^2+2x+5)^{\frac{3}{2}}\right]_{-1}^{1}$

تعويض

$=\left(\frac{1}{3}((1)^2+2(1)+5)^{\frac{3}{2}}\right)-\left(\frac{1}{3}((-1)^2+2(-1)+5)^{\frac{3}{2}}\right)$

$=7.54-\frac{8}{3}=4.87$

يمكن التأكد من الناتج باستخدام الآلة الحاسبة مباشرة

مثال (9)

أوجد:

b $\int_0^3 x\sqrt{x+1}\,dx$

الحل

أولاً: اعادة صياغة

$I = \int (x+1)^{\frac{1}{2}} \cdot \boxed{x}\, dx$

$= \int u^{\frac{1}{2}} \cdot (u-1) \cdot du$

$= \int (u^{\frac{3}{2}} - u^{\frac{1}{2}})\, du$

$= \frac{2}{5}u^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} + C$

$= \frac{2}{5}(x+1)^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} + C$

$u = x+1$
$du = dx$

$u = x+1$
$x + 1 = u$
$\boxed{x} = u-1$

ثانياً: $\int_0^3 x\sqrt{x+1}\,dx = \left[\frac{2}{5}(x+1)^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}\right]_0^3$

$= \left(\frac{2}{5}((3)+1)^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}((3)+1)^{\frac{3}{2}}\right) - \left(\frac{2}{5}((0)+1)^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}((0)+1)^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{116}{15}$

حاول أن تحل

9 أوجد:

b $\int_2^5 x\sqrt{x-1}\,dx$

الحل

أولاً:

$I = \int (x-1)^{\frac{1}{2}} \cdot \boxed{x}\, dx$

$= \int u^{\frac{1}{2}} \cdot (u+1) \cdot du$

$= \int (u^{\frac{3}{2}} + u^{\frac{1}{2}})\, du$

$= \frac{2}{5}u^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} + C$

$= \frac{2}{5}(x-1)^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}} + C$

$u = x-1$
$du = dx$

$u = x-1$
$x - 1 = u$
$\boxed{x} = u+1$

ثانياً: $\int_2^5 x\sqrt{x-1}\,dx = \left[\frac{2}{5}(x-1)^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}}\right]_2^5$

$= \left(\frac{2}{5}((5)-1)^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3}((5)-1)^{\frac{3}{2}}\right) - \left(\frac{2}{5}((2)-1)^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3}((2)-1)^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{256}{15}$

كن طموحا لكي تصل الي اهدافك

كراسة التمارين

أوجد: $\int_0^3 \frac{dx}{(1+x)^2}$

الحل

أولاً: $I = \int (1+x)^{-2}\, dx$

$= \int u^{-2} \cdot du$ || $u = 1+x$, $du = dx$

$= \frac{1}{-1} u^{-1} + C$

$= \frac{-1}{u} + C$

$= \frac{-1}{(1+x)} + C$

حل أحسن:

$\int_0^3 \frac{dx}{(1+x)^2} = \int_0^3 (1+x)^{-2}\, dx$

$= \left[\frac{1}{-1}(1+x)^{-1}\right]_0^3 = \frac{-1}{4} - (-1) = \frac{3}{4}$

ثانياً: $\int_0^3 \frac{dx}{(1+x)^2} = \left[\frac{-1}{(1+x)}\right]_0^3$

$= \left(\frac{-1}{1+(3)}\right) - \left(\frac{-1}{1+(0)}\right) = \frac{3}{4}$

كراسة التمارين

أوجد: $\int_{-1}^3 \frac{x\,dx}{x^2+1}$

الحل

أولاً: $I = \int \frac{x\,dx}{x^2+1}$

$= \frac{1}{2} \int \frac{du}{u}$ || $u = x^2+1$

$= \frac{1}{2} \ln|u| + C$ || $du = 2x\,dx$

$= \frac{1}{2} \ln|x^2+1| + C$ || $\frac{1}{2} du = x\,dx$

ثانياً: $\int_{-1}^3 \frac{x\,dx}{x^2+1} = \left[\frac{1}{2}\ln|x^2+1|\right]_{-1}^3$

$= \left(\frac{1}{2}\ln|(3)^2+1|\right) - \left(\frac{1}{2}\ln|(-1)^2+1|\right)$

$= \frac{1}{2}\ln|10| - \frac{1}{2}\ln|2| = 0.804$

تذكر: (راديان R) shift mod 4 ⟸ $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x \cdot \left(\frac{1}{\cos x}\right)^2 dx = \frac{1}{2}$

تكتب على الحاسبة بهذا الشكل

مثال (8)

أوجد: $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x \sec^2 x \, dx$

الحل

أولاً: $I = \int \tan x \cdot \sec^2 x \, dx$

$= \int u \cdot du$

$= \frac{1}{2} u^2 + c$

$= \frac{1}{2} (\tan x)^2 + c$

$u = \tan x$

$du = \sec^2 x \, dx$

$\boxed{\text{يمكن استخدام: } u = \sec x}$

ثانياً: $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x \sec^2 x \, dx = \left[\frac{1}{2}(\tan x)^2\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$

$= \left(\frac{1}{2}\left(\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)^2\right) - \left(\frac{1}{2}(\tan(0))^2\right)$

$= \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}$

حاول أن تحل

8 b أوجد: $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sin 2x \cos 2x \, dx$

الحل

أولاً: $I = \int \sin 2x \cdot \cos 2x \, dx$

$= \frac{1}{2} \int u \cdot du$

$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} u^2 + c$

$= \frac{1}{4} (\sin 2x)^2 + c$

$u = \sin 2x$

$du = \cos 2x \cdot 2dx$

$\frac{1}{2} du = \cos 2x \, dx$

ثانياً: $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sin 2x \cos 2x \, dx = \left[\frac{1}{4}(\sin 2x)^2\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}$

$= \frac{1}{4}\left(\sin 2\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)^2 - \frac{1}{4}\left(\sin 2\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)^2$

$= \frac{3}{16} - \frac{3}{16} = 0$

احد اسرار النجاح في الصبر والمثابره

مثال (10)

أوجد: $\int_{-2}^{0} \frac{x}{e^x}\,dx$

الحل

أولاً: $I = \int x \cdot e^{-x}\,dx$

$u = x \qquad dv = e^{-x}dx$

$du = dx \qquad -\int \qquad v = -e^{-x}$

$\int u\,dv = uv - \int v\,du$

$I = x \cdot -e^{-x} - \int -e^{-x}\,dx$

$I = -x \cdot e^{-x} + \int e^{-x}\,dx$

$I = -x \cdot e^{-x} - e^{-x} + C$

ثانياً: $\int_{-2}^{0} \frac{x}{e^x}\,dx = \left[-x \cdot e^{-x} - e^{-x}\right]_{-2}^{0}$

تعويض

$= \left(-(0) \cdot e^{-(0)} - e^{-(0)}\right) - \left(-(-2) \cdot e^{-(-2)} - e^{-(-2)}\right)$

$= -1 - e^{2} = -8.38$

حاول أن تحل

10 أوجد: $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} x\sec^2 x\,dx$

تكتب على الحاسبة بهذا الشكل

لاتنسى : SHIFT mod 4

$\boxed{\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} x\left(\frac{1}{\cos(x)}\right)^2 dx}$

الحل

أولاً: $I = \int x\sec^2 x\,dx$

$u = x \qquad dv = \sec^2 x\,dx$

$du = dx \qquad \int \qquad v = \tan x$

$\int u\,dv = uv - \int v\,du$

$I = x \cdot \tan x - \int \tan x\,dx$

خطوة جانبية لايجاد: $\int \tan x\,dx$

$\int \tan x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx$

$= -\int \frac{1}{u}\,du \qquad u = \cos x$

$= -\ln|u| + c \qquad -du = \sin x\,dx$

$= -\ln|\cos x| + c$

$I = x \cdot \tan x + \ln|\cos x| + c$

ثانياً: $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} x\sec^2 x\,dx = \left[x\tan x + \ln|\cos x|\right]_{0}^{\frac{\pi}{4}}$

$= \left(\frac{\pi}{4}\tan\frac{\pi}{4} + \ln\left|\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right|\right) - \left((0)\tan(0) + \ln|\cos(0)|\right) = 0.43$

في لفظ القمة شيء يقول لك قم

مثال (11)

أوجد: $\int_1^5 \frac{2x+8}{x^2+4x+3}\,dx$

الحل

أولا: $I = \int \frac{2x+8}{x^2+4x+3}\,dx$

درجة البسط < درجة المقام

① تحليل المقام: $x^2+4x+3 = (x+1)(x+3)$ (−1) (−3)

② نفرض أن: $f(x) = \frac{2x+8}{(x+1)(x+3)} = \frac{A}{(x+1)} + \frac{B}{(x+3)}$

③ معادلة التعويض: $\boxed{2x+8 = A(x+3) + B(x+1)}$

④ بالتعويض عن $x=-1$: $2(-1)+8 = A(-1+3) + \cancel{B(-1+1)}$

$\boxed{A=3}$

عن $x=-3$: $2(-3)+8 = \cancel{A(-3+3)} + B(-3+1)$

$\boxed{B=-1}$

⑤ الكسور الجزئية: $f(x) = \frac{3}{(x+1)} + \frac{-1}{(x+3)}$

⑥ التكامل: $\int f(x)\,dx = \int \left(\frac{3}{(x+1)} + \frac{-1}{(x+3)}\right)dx$

$= 3\ln|x+1| - \ln|x+3| + C$

ثانياً: $\int_1^5 \frac{2x+8}{x^2+4x+8}\,dx = \Big[3\ln|x+1| - \ln|x+3|\Big]_1^5$

$= \left(3\ln|(5)+1| - \ln|(5)+3|\right) - \left(3\ln|(1)+1| - \ln|(1)+3|\right)$

$= 2.602$

يمكن التأكد من الناتج باستخدام الحاسبة مباشرة: $\int_1^5 \frac{2x+8}{x^2+4x+3}\,dx = 2.6$

تعود علي العادات الحسنة وهي سوف تصنعك

حاول أن تحل

11 أوجد: $\int_4^7 \frac{3x^2-17}{x^2-x-6}\,dx$

الحل

أولاً: $I = \int \frac{3x^2-17}{x^2-x-6}\,dx$

∵ درجة البسط = درجة المقام

قسمة مطولة:

$$\begin{array}{r|l} & 3 \\ \hline x^2-x-6 & 3x^2 \quad\quad -17 \\ & \ominus 3x^2 \oplus 3x \oplus 18 \\ \hline & 3x+1 \end{array}$$

$f(x) =$ الناتج $+ \frac{\text{الباقي}}{\text{المقسوم عليه}} = 3 + \frac{3x+1}{x^2-x-6}$

① تحليل المقام: $x^2-x-6 = (x-3)(x+2)$

② نفرض أن: $g(x) = \frac{3x+1}{(x-3)(x+2)} = \frac{A}{(x-3)} + \frac{B}{(x+2)}$

③ معادلة التعويض: $\boxed{3x+1 = A(x+2) + B(x-3)}$

④ بالتعويض عن $x=-2$: $3(-2)+1 = A\cancel{(-2+2)} + B(-2-3)$

$\boxed{B = 1}$

عن $x = 3$: $3(3)+1 = A(3+2) + \cancel{B(3-3)}$

$\boxed{A = 2}$

⑤ الكسور الجزئية: $g(x) = \frac{2}{(x-3)} + \frac{1}{(x+2)}$

⑥ التكامل: $\int f(x)\,dx = \int \left(3 + \frac{2}{(x-3)} + \frac{1}{(x+2)}\right)dx$

$= 3x + 2\ln|x-3| + \ln|x+2| + C$

ثانياً: $\int_4^7 \frac{3x^2-17}{x^2-x-6}\,dx = \Big[3x + 2\ln|x-3| + \ln|x+2|\Big]_4^7$

$= \big(3(7) + 2\ln|(7)-3| + \ln|(7)+2|\big) - \big(3(4) + 2\ln|(4)-3| + \ln|(4)+2|\big)$

$= 12.178$

نتعلم من الفشل اكثر من النجاح

أوجد: $\int_{-1}^{1} \frac{4}{x^2-4}\,dx$

الحل

أولاً: $I = \int \frac{4}{x^2-4}\,dx$

درجة البسط < درجة المقام

① تحليل المقام: $x^2-4 = (x-2)(x+2)$

② نفرض أن: $f(x) = \frac{4}{(x-2)(x+2)} = \frac{A}{(x-2)} + \frac{B}{(x+2)}$

③ معادلة التعويض: $4 = A(x+2) + B(x-2)$

④ بالتعويض عن $x = 2$: $4 = A(2+2) + B(2-2)$

$A = 1$

$x = -2$: $4 = A(-2+2) + B(-2-2)$

$B = -1$

⑤ الكسور الجزئية: $f(x) = \frac{1}{(x-2)} + \frac{-1}{(x+2)}$

⑥ التكامل: $\int f(x)\,dx = \int \left(\frac{1}{(x-2)} + \frac{-1}{(x+2)} \right) dx$

$= \ln|x-2| - \ln|x+2| + C$

ثانياً: $\int_{-1}^{1} \frac{4}{x^2-4}\,dx = \Big[\ln|x-2| - \ln|x+2|\Big]_{-1}^{1}$

$= \big(\ln|(1)-2| - \ln|(1)+2|\big) - \big(\ln|(-1)-2| - \ln|(-1)+2|\big)$

$= -2.197$

ثق بنفسك ، فانت تعرف اكثر مما تعتقد

القيمة المطلقة

مثال (3)

أوجد:

a $\int_{-2}^{3}|x|dx$

الحل

صفر المطلق :

$x=0 \in (-2,3)$

$|x|$: $-x$ ، x ؛ -2 ، 0 ، 3

$I=\int_{-2}^{0}|x|\,dx + \int_{0}^{3}|x|\,dx$

$=\int_{-2}^{0}-x\,dx + \int_{0}^{3}x\,dx$

$=\left[-\frac{1}{2}x^2\right]_{-2}^{0} + \left[\frac{1}{2}x^2\right]_{0}^{3}$

$=\left(-\frac{1}{2}(0)^2-\frac{1}{2}(-2)^2\right) + \left(\frac{1}{2}(3)^2-\frac{1}{2}(0)^2\right)=\frac{13}{2}$

أوجد:

b $\int_{0}^{5}|x-3|dx$

الحل

$x-3=0$

$x=3 \in (0,5)$

$|x-3|$: $-x+3$ ، $x-3$ ؛ 0 ، 3 ، 5

$I=\int_{0}^{3}|x-3|\,dx + \int_{3}^{5}|x-3|\,dx$

$=\int_{0}^{3}(-x+3)\,dx + \int_{3}^{5}(x-3)\,dx$

$=\left[-\frac{1}{2}x^2+3x\right]_{0}^{3} + \left[\frac{1}{2}x^2-3x\right]_{3}^{5}$

$=\left(\left(-\frac{1}{2}(3)^2+3(3)\right)-\left(-\frac{1}{2}(0)^2+3(0)\right)\right) + \left(\left(\frac{1}{2}(5)^2-3(5)\right)-\left(\frac{1}{2}(3)^2-3(3)\right)\right)=\frac{13}{2}$

حاول أن تحل

3 أوجد:

a $\int_{-3}^{4}|2x-4|dx$

الحل

$2x-4=0 \rightarrow 2x=4$

$x=2 \in (-3,4)$

$|2x-4|$: $-2x+4$ ، $2x-4$ ؛ -3 ، 2 ، 4

$I=\int_{-3}^{2}(-2x+4)\,dx + \int_{2}^{4}(2x-4)\,dx$

$=\left[-2\cdot\frac{1}{2}x^2+4x\right]_{-3}^{2} + \left[2\cdot\frac{1}{2}x^2-4x\right]_{2}^{4}$

$=\left[-x^2+4x\right]_{-3}^{2} + \left[x^2-4x\right]_{2}^{4}$

$=\left(\left(-(2)^2+4(2)\right)-\left(-(-3)^2+4(-3)\right)\right) + \left(\left((4)^2-4(4)\right)-\left((2)^2-4(2)\right)\right)=29$

الفوز هو ان تتقدم لا ان يتراجع منافسوك

أوجد: **b** $\int_1^3 |x+2|dx$

الحل

$x+2=0$
$x=-2 \notin (1,3)$
$|x+2|$
$-x-2 \quad -2 \quad 1 \quad x+2 \quad 3$

$I = \int_1^3 (x+2)\,dx$

$= \left[\frac{1}{2}x^2+2x\right]_1^3$

$= \left(\frac{1}{2}(3)^2+2(3)\right)-\left(\frac{1}{2}(1)^2+2(1)\right)$

$= 8$

لاحظ:
صفر المطلق لا ينتمي إلى الفترة المطلوبة
$-2 \notin (1,3)$

كراسة التمارين

أوجد: $\int_{-2}^{3} (x|x|+3)\,dx$

الحل

$x=0 \in (-2,3)$
$|x|$
$-2 \quad -x \quad 0 \quad x \quad 3$

$I = \int_{-2}^{0} (x(-x)+3)\,dx + \int_0^3 (x(x)+3)\,dx$

$= \int_{-2}^{0} (-x^2+3)\,dx + \int_0^3 (x^2+3)\,dx$

$= \left[-\frac{1}{3}x^3+3x\right]_{-2}^{0} + \left[\frac{1}{3}x^3+3x\right]_0^3$

$= \left(\left(-\frac{1}{3}(0)^3+3(0)\right)-\left(-\frac{1}{3}(-2)^3+3(-2)\right)\right) + \left(\left(\frac{1}{3}(3)^3+3(3)\right)-\left(\frac{1}{3}(0)^3+3(0)\right)\right)$

$= \frac{64}{3}$

كن طموحا لكي تصل الي اهدافك

تذكر: مساحة الدائرة = πr^2

معادلة نصف دائرة

مثال (7)

أوجد:

a $\int_{-2}^{2} \sqrt{4-x^2}\, dx$

الحل

نفرض: $y = \sqrt{4-x^2}$

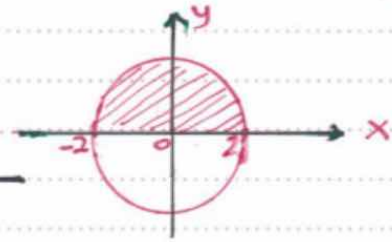
$y^2 = 4 - x^2 \rightarrow x^2 + y^2 = 4$

هي معادلة دائرة مركزها نقطة الأصل

ونصف قطرها: $r = \sqrt{4} = 2$

الدالة: $y = \sqrt{4-x^2}$

تمثل معادلة النصف العلوي للدائرة



$\int_{-2}^{2} \sqrt{4-x^2}\, dx =$ مساحة المنطقة المظللة

= نصف مساحة الدائرة

$= \frac{1}{2}(\pi r^2)$

$= \frac{1}{2}\pi (2)^2$

$= 2\pi$

b $\int_{0}^{3} -\sqrt{9-x^2}\, dx$

أوجد:

الحل

نفرض: $y = -\sqrt{9-x^2}$

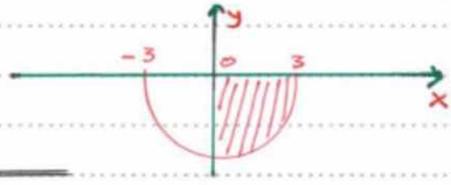
$y^2 = 9 - x^2 \rightarrow x^2 + y^2 = 9$

هي معادلة دائرة مركزها نقطة الأصل

ونصف قطرها: $r = \sqrt{9} = 3$

الدالة: $y = -\sqrt{9-x^2}$

تمثل معادلة النصف السفلي للدائرة



$\int_{0}^{3} -\sqrt{9-x^2}\, dx = -$ مساحة المنطقة المظللة

= − ربع مساحة الدائرة

$= -\frac{1}{4}(\pi r^2)$

$= -\frac{1}{4}\pi (3)^2$

$= -\frac{9}{4}\pi$

$\int_{-a}^{a} -\sqrt{a^2-x^2}\, dx =$ − نصف مساحة الدائرة

الناتج سالب

من لم يتعلم في صغره لم يتقدم في كبره

يمكن تمييز هذا النوع إذا كان التكامل على الصورة : $\int_{-a}^{a} \sqrt{\underset{\text{عدد موجب}}{a^2} - x^2}\, dx$

حاول أن تحل

7 أوجد:

a) $\int_{-5}^{5} \sqrt{25 - x^2}\, dx$

الحل

نفرض : $y = \sqrt{25-x^2}$

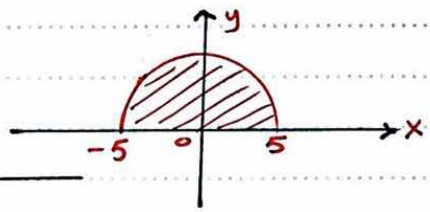
$y^2 = 25 - x^2 \rightarrow x^2 + y^2 = 25$

هي معادلة دائرة مركزها نقطة الأصل

ونصف قطرها : $r = \sqrt{25} = 5$

الدالة : $y = \sqrt{25-x^2}$

تمثل معادلة النصف العلوي للدائرة



$\int_{-5}^{5} \sqrt{25-x^2}\, dx =$ مساحة المنطقة المظللة

$=$ نصف مساحة الدائرة

$= \frac{1}{2}(\pi r^2)$

$= \frac{1}{2}\pi (5)^2$

$= \frac{25}{2}\pi$

b) أوجد: $\int_{0}^{4} -\sqrt{16 - x^2}\, dx$

الحل

نفرض : $y = -\sqrt{16-x^2}$

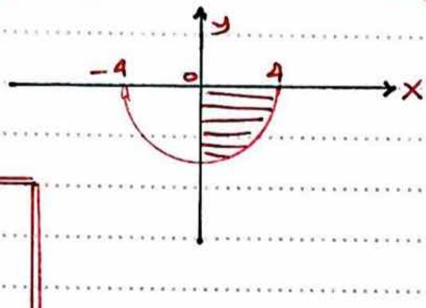
$y^2 = 16 - x^2 \rightarrow x^2 + y^2 = 16$

هي معادلة دائرة مركزها نقطة الأصل

ونصف قطرها : $r = \sqrt{16} = 4$

الدالة : $y = -\sqrt{16-x^2}$

تمثل معادلة النصف السفلي للدائرة



$\int_{0}^{4} -\sqrt{16-x^2}\, dx = -$ مساحة المنطقة المظللة

$= -$ ربع مساحة الدائرة

$= -\frac{1}{4}(\pi r^2)$

$= -\frac{1}{4}\pi (4)^2$

$= -4\pi$

$\int_{-a}^{a} \sqrt{a^2-x^2}\, dx =$ نصف مساحة الدائرة

$\int_{-a}^{0} \sqrt{a^2-x^2}\, dx =$ ربع مساحة الدائرة

لا يأس مع الحياة ولا حياة مع اليأس

دون حساب قيمة التكامل

لتكن f دالة متصلة على $[a,b]$

6 إذا كانت: $f(x) \geqslant 0 \quad \forall \quad x \in [a,b]$

فإن: $\int_a^b f(x)dx \geqslant 0$

7 إذا كانت: $f(x) \leqslant 0 \quad \forall \quad x \in [a,b]$

فإن: $\int_a^b f(x)dx \leqslant 0$

مثال (4)

دون حساب قيمة التكامل أثبت أن: $\int_3^5 (\overset{f}{x^2+x})dx \geqslant 0$ الكبر (موجب)

الحل

بفرض : $f(x) = x^2 + x$ دالة متصلة على R

بوضع : $f(x) = 0$

mode53 $x^2 + x = 0$ موجب

$x_1 = -1$ او $x_2 = 0$

x² نفس إشارة معامل $\oplus$ عكس $\ominus$ نفس $\oplus$

$-1 \qquad 0$

$\because f(x) \geqslant 0 \quad \forall x \in (-\infty,-1] \cup [0,\infty)$

$\therefore f(x) \geqslant 0 \quad \forall x \in [3,5]$

$\therefore \int_3^5 f(x)\,dx \geqslant 0$

$\therefore \int_3^5 (x^2+x)\,dx \geqslant 0$

لاحظ أن علامة المتباين لا تتغير من بداية حل المسألة إلى نهايتها

تستطيع ان تفعلها

حاول أن تحل

4 دون حساب قيمة التكامل أثبت أن: $\int_{-1}^{0}(x^2+x)dx \leqslant 0$

الحل

نفرض : $f(x)=x^2+x$ دالة متصلة على R

نضع : $f(x)=0$

mod53

$x^2+x=0$ موجب

$x_1=-1$ أو $x_2=0$

$\oplus \quad -1 \quad \ominus \quad 0 \quad \oplus$

$\because f(x)\leqslant 0 \quad \forall x\in[-1,0]$

$\therefore \int_{-1}^{0} f(x)\,dx \leqslant 0$

$\therefore \int_{-1}^{0}(x^2+x)\,dx \leqslant 0$

كراسة التمارين

دون حساب قيمة التكامل أثبت أن: $\int_{-1}^{0}(x^3-5x^2-6x)dx \geq 0$

الحل

نفرض : $f(x)=x^3-5x^2-6x$ دالة متصلة على R

نضع : $f(x)$ ...

mod54

معلق

x^3- ...

$x_1=6$ أو $x_2=-1$ أو $x_3=0$

$\ominus \quad -1 \quad \oplus \quad 0 \quad \ominus \quad 6 \quad \oplus$

يمكن تعيين الاشارة عن طريق التعويض بقيمة اختيارية تنتمي إلى الفترة

$\because f(x)\geqslant 0 \quad \forall x\in[-1,0]\cup[6,\infty)$

$\therefore f(x)\geqslant 0 \quad \forall x\in[-1,0]$

$\therefore \int_{-1}^{0} f(x)\,dx \geqslant 0$

$\therefore \int_{-1}^{0}(x^3-5x^2-6x)\,dx \geqslant 0$

هل اديت فروضك ؟؟

8 لتكن الدالتين f, g متصلتين على $[a, b]$ وكانت: $f(x) \leqslant g(x) \quad \forall x \in [a, b]$

فإن: $\int_a^b f(x)dx \leqslant \int_a^b g(x)dx$

مثال (5)

دون حساب قيمة التكامل أثبت أن: $\int_1^3 (2\overset{f}{x} - 3)dx \leqslant \int_1^3 (x^{\overset{g}{2}} + 2)dx$

الحل

نفرض: $f(x) = 2x - 3$ دالة متصلة على R

معلق $+2$ دالة متصلة على R

نوجد: $f(x) - g(x) = 2x - 3 - (x^2 + 2)$

$= 2x - 3 - x^2 - 2$

$= -x^2 + 2x - 5$

نوضع: $\underset{\text{سالب}}{-}x^2 + 2x - 5 = 0$

$a = -1$	المميز: $\Delta = b^2 - 4ac$
$b = 2$	$= (2)^2 - 4(-1)(-5) = -16 < 0$
$c = -5$	∴ لا توجد جذور حقيقية
	∴ $f(x) - g(x)$ وحيدة الاشارة (سالبة)

$\because f(x) - g(x) \leqslant 0 \quad \forall x \in R$

$\therefore f(x) - g(x) \leqslant 0 \quad \forall x \in [1, 3]$

$\therefore f(x) \leqslant g(x) \quad \forall x \in [1, 3]$

$\therefore \int_1^3 f(x)dx \leqslant \int_1^3 g(x)dx$

$\therefore \int_1^3 (2x - 3)dx \leqslant \int_1^3 (x^2 + 2)dx$

لاحظ:
عند استخدام الحاسبة (mod53) وينتج عدد يحتوي على (i)
∴ لا توجد جذور حقيقية

ثق في نفسك

حاول أن تحل

5 دون حساب قيمة التكامل أثبت أن: $\int_{-1}^{2}(x^2+1)dx \geqslant \int_{-1}^{2}(x-1)dx$

الحل

نفرض : f ... معلق ... دالة متصلة على $\mathbb{R}$

g ... دالة متصلة على $\mathbb{R}$

نوجد :
$$f(x)-g(x) = x^2+1-(x-1)$$
$$= x^2+1-x+1$$
$$= x^2-x+2$$

نوضع : $x^2-x+2=0$ موجب

المميز:
$$\Delta = b^2-4ac$$
$$= (-1)^2-4(1)(2) = -7<0$$

| $a=1$ |
| $b=-1$ |
| $c=2$ |

$\therefore$ لا توجد جذور حقيقية

$\therefore$ $f(x)-g(x)$ وحيدة الاشارة (موجبة)

$\therefore f(x)-g(x) \geqslant 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$\therefore f(x)-g(x) \geqslant 0 \quad \forall x \in [-1,2]$

$\therefore f(x) \geqslant g(x)$

$\therefore \int_{-1}^{2} f(x)\,dx \geqslant \int_{-1}^{2} g(x)\,dx$

$\therefore \int_{-1}^{2} (x^2+1)\,dx \geqslant \int_{-1}^{2} (x-1)\,dx$

تذكر
علاقة التباين $>$ أو $\geqslant$ لا تتغير من بداية المسألة إلى نهايتها

احسن استغلال وقتك

دون حساب قيمة التكامل أثبت أن: $\int_0^1 (x^2 - 3x + 7)dx \geq \int_0^1 (4x - 5)dx$

الحل

نفرض : معلق $x+7$ دالة متصلة على R

دالة متصلة على R 5

نوجب : $f(x) - g(x) = x^2 - 3x + 7 - (4x - 5)$

$= x^2 - 3x + 7 - 4x + 5$

$= x^2 - 7x + 12$

نوضع : $x^2 - 7x + 12 = 0$ موجب

$x_1 = 3$ أو $x_2 = 4$ mod53

$\oplus$ 3 $\ominus$ 4 $\oplus$

$\therefore f(x) - g(x) \geqslant 0 \quad \forall x \in (-\infty, 3] \cup [4, \infty)$

$\therefore f(x) - g(x) \geqslant 0 \quad \forall x \in [0, 1]$

$\therefore f(x) \geqslant g(x) \quad \forall x \in [0, 1]$

$\therefore \int_0^1 f(x)\,dx \geqslant \int_0^1 g(x)\,dx$

$\therefore \int_0^1 (x^2 - 3x + 7)\,dx \geqslant \int_0^1 (4x - 5)\,dx$

الفشل ليس عند الخسارة الفشل عند الانسحاب

(5 - 1) التكامل غير المحدد

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (1—5)، ظلّل الدائرة (a) إذا كانت العبارة صحيحة و(b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) $F(x) = x^{-3}$ هي مشتقة العكسية للدالة: $f(x) = -3x^{-4}$ — (b)

(2) $\int (-x^{-3} + x - 1)dx = \frac{1}{2}x^{-2} + \frac{1}{2}x^{2} - x + C$ — (b)

(3) $\int \frac{1}{x^2}dx = \frac{1}{x} + C$ — (a)

(4) إذا كانت: $f'(x) = \frac{1}{x^2} + x$ ، $f(2) = 1$ ، فإن $f(x) = -\frac{1}{x} + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}$ — (a)

(5) إذا كانت: $F(0) = 400$ ، $F(x) = \int (3x^2 - 12x + 15)dx$ ، فإن $F(x) = x^3 + 6x^2 + 15x + 400$ — (a)

في التمارين (6—12)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(6) $\int \frac{4}{3}\sqrt[3]{t^2}\,dt =$

(a) $\frac{3t^{\frac{5}{3}}}{5} + C$

$\frac{4t^{\frac{5}{3}}}{5} + C$

(c) $\frac{4}{3}\sqrt[3]{t^5} + C$

(d) $4\sqrt[3]{t^5} + C$

(7) $\int \left(\sqrt[3]{x^2} + \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)dx =$

$\frac{3}{5}\sqrt[3]{x}(x^{\frac{4}{3}} + 5) + C$

(b) $\frac{3}{5}x^{\frac{2}{3}}(x^{-\frac{2}{3}} + 5) + C$

(c) $\frac{5}{3}\sqrt[3]{x}(x^{\frac{4}{3}} + 5) + C$

(d) $\frac{5}{3}x^{\frac{4}{3}}(x^{\frac{2}{3}} + 5) + C$

(8) إذا كان: $x = -1$ ، $y = -5$ ، $\frac{dy}{dx} = x^{-\frac{2}{3}}$ فإنّ y تساوي:

(a) $-\frac{x^2}{3} - \frac{14}{3}$

(b) $3x^{\frac{1}{3}} + 2$

$3x^{\frac{1}{3}} - 2$

(d) $3x^{\frac{1}{3}}$

(9) $\int \frac{2x + 3}{\sqrt{x}}dx =$

(a) $\frac{3}{4}x^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} + C$

(b) $\frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}} + 6x^{\frac{1}{2}} + C$

$\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} + 6x^{\frac{1}{2}} + C$

(d) $\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{6}x^{\frac{1}{2}} + C$

(10) $\int \sqrt{x}(2 + x^2)dx =$

$\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}} + C$

(b) $\frac{3}{4}x^{\frac{3}{2}} + \frac{7}{2}x^{\frac{7}{2}} + C$

(c) $\frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{7}{2}x^{\frac{7}{2}} + C$

(d) $\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{7}{2}x^{\frac{7}{2}} + C$

(11) $\int \frac{2 + \sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{x}}dx =$

(a) $x^{\frac{1}{2}} + \frac{6}{7}x^{\frac{7}{6}} + C$

$4x^{\frac{1}{2}} + \frac{6}{7}x^{\frac{7}{6}} + C$

(c) $x^{\frac{1}{2}} + \frac{7}{6}x^{\frac{7}{6}} + C$

(d) $4x^{\frac{1}{2}} + \frac{7}{6}x^{\frac{7}{6}} + C$

(12) $\int \left(\frac{x^2 - 4x + 4}{x - 2} + 2\right)^2 dx =$

(a) $x^2 + C$

(b) $2x + C$

(c) $\frac{x^2}{2} + 2x + C$

$\frac{1}{3}x^3 + C$

M.ATA

(2 – 5) التكامل بالتعويض

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (5—1)، ظلّل الدائرة (a) إذا كانت العبارة صحيحة و(b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) $\int x(x^2-1)^{10}dx = \frac{1}{18}(x^2-1)^9 + C$ (a) 🙂

(2) $\int (x+1)\sqrt[3]{x^2+2x+3}\,dx = \frac{3}{8}\sqrt[3]{(x^2+2x+3)^4} + C$ 🙂 (b)

(3) $\int \frac{dx}{\sqrt{3x-2}} = 2\sqrt{3x-2} + C$ (a) 🙂

(4) $\int (2x^2-1)(2x^3-3x+4)^5dx = \frac{1}{18}(2x^3-3x+4)^6 + C$ 🙂 (b)

(5) $\int x\sqrt[3]{x+2}\,dx = \frac{3}{7}(x+2)^{\frac{7}{3}} - \frac{3}{2}(x+2)^{\frac{4}{3}} + C$ 🙂 (b)

في التمارين (12—6)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(6) $\int x(x^2+2)^7dx =$

🙂 $\frac{1}{16}(x^2+2)^8 + C$ (b) $\frac{1}{4}(x^2+2)^8 + C$

(c) $\frac{1}{12}(x^2+2)^6 + C$ (d) $\frac{1}{3}(x^2+2)^6 + C$

(7) $\int \frac{x-1}{\sqrt{x-1}}dx =$

(a) $\frac{1}{3}(x-1)^{\frac{2}{3}} + C$ 🙂 $\frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}} + C$

(c) $\frac{2}{3}(x-1)^{\frac{2}{3}} + C$ (d) $\frac{3}{2}(x-1)^{\frac{2}{3}} + C$

(8) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{3x+1}} =$

(a) $\frac{2}{9}(3x+1)^{\frac{2}{3}} + C$ (b) $\frac{2}{3}(3x+1)^{\frac{2}{3}} + C$

(c) $2(3x+1)^{\frac{2}{3}} + C$ 🙂 $\frac{1}{2}(3x+1)^{\frac{2}{3}} + C$

(9) $\int \frac{(2+\sqrt{x})^{12}}{\sqrt{x}}dx =$

(a) $\frac{13}{2}(2+\sqrt{x})^{13} + C$ 🙂 $\frac{2}{13}(2+\sqrt{x})^{13} + C$

(c) $\frac{1}{26}(2+\sqrt{x})^{13} + C$ (d) $\frac{1}{22}(2+\sqrt{x})^{11} + C$

(10) $\int \frac{(x+1)}{\sqrt[3]{x^2+2x+3}}dx =$

🙂 $\frac{3}{4}\sqrt[3]{(x^2+2x+3)^2} + C$ (b) $\frac{3}{2}\sqrt[3]{(x^2+2x+3)^2} + C$

(c) $3\sqrt[3]{(x^2+2x+3)^2} + C$ (d) $\frac{3}{4}\sqrt[3]{x^2+2x+3} + C$

(11) $\int \frac{x}{\sqrt{x+1}}dx =$

(a) $\frac{3}{2}\sqrt{(x+1)^3} - 2\sqrt{x+1} + C$ (b) $\frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3} - \frac{1}{2}\sqrt{x+1} + C$

🙂 $\frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3} - 2\sqrt{x+1} + C$ (d) $\frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3} + 2\sqrt{x+1} + C$

(12) إذا $F(x) = \int (x+1)(2x^2+4x-1)dx$ ، $F(-2) = \frac{9}{8}$ ، فإن: $F(x)$ تساوي:

(a) $\frac{1}{8}(2x^2+4x-1)^2 + \frac{5}{4}$ 🙂 $\frac{1}{8}(2x^2+4x-1)^2 + 1$

(c) $\frac{1}{4}(2x^2+4x-1)^2 + 1$ (d) $4(2x^2+4x-1)^2 - 1$

M.ATA

(3 – 5) تكامل الدوال المثلثية

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (1—5)، ظلّل الدائرة (a) إذا كانت العبارة صحيحة و(b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) $\int \sec^2 x\, dx = \tan x + C$ — (b)

(2) $\int \csc^2 x\, dx = \cot x + C$ — (a)

(3) $\left(F'(x) = \sec^2 x\ ,\ F\left(\frac{\pi}{4}\right) = -1\right) \Longrightarrow F(x) = \tan x + 2$ — (a)

(4) $\left(F'(x) = \cos x + \sin x\ ,\ F(\pi) = 1\right) \Longrightarrow F(x) = \sin x - \cos x$ — (b)

(5) $\left(F'(x) = \sec(x)\tan(x)\ ,\ F(0) = 4\right) \Longrightarrow F(x) = \sec x + 3$ — (b)

في التمارين (6—12)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(6) الصورة العامة للمشتقة العكسية للدالة f حيث $f(x) = 8 + \csc x \cot x$ هي:

(a) $F(x) = 8x + \csc x + C$ (b) $F(x) = 8x - \cot x + C$

$F(x) = 8x - \csc x + C$ (d) $F(x) = 8x + \cot x + C$

(7) $\int \csc(5x)\cot(5x)\, dx =$

(a) $\frac{1}{5}\csc(5x) + C$ (b) $\csc(5x) + C$

(c) $\frac{1}{5}\cot(5x) + C$ $-\frac{1}{5}\csc(5x) + C$

(8) $\int \sqrt[3]{\cot x}\, \csc^2 x\, dx =$

(a) $\frac{3}{4}\sqrt[3]{(\cot x)^4} + C$ $-\frac{3}{4}\sqrt[3]{(\cot x)^4} + C$

(c) $-\frac{3}{4}\sqrt[4]{(\cot x)^3} + C$ (d) $3\sqrt[3]{(\cot x)^4} + C$

(9) إذا كانت $\frac{dy}{d\theta} = \sin\theta\ ,\ y(\theta = 0) = -3$ فإنّ y تساوي:

(a) $-\cos\theta$ (b) $2 - \cos\theta$

$-2 - \cos\theta$ (d) $4 - \cos\theta$

(10) $\int \sec^5 x \tan x\, dx =$

(a) $\frac{5}{3}\sec^5 x + C$ (b) $\frac{1}{5}\sec^6 x + C$

$\frac{1}{5}\sec^5 x + C$ (d) $-\frac{5}{3}\sec^5 x + C$

(11) $\int \frac{\csc^2 x}{\sqrt[3]{2 + \cot x}}\, dx =$

(a) $\frac{3}{2}(2 + \cot x)^{\frac{2}{3}} + C$ $-\frac{3}{2}(2 + \cot x)^{\frac{2}{3}} + C$

(c) $-2\sqrt{2 + \cot x} + C$ (d) $\frac{4}{3}(2 + \cot x)^{\frac{4}{3}} + C$

(12) $\int \frac{\sin(4x)}{\cos^5(4x)}\, dx =$

(a) $-\frac{1}{16}\cos^{-4}(4x) + C$ $\frac{1}{16}\cos^{-4}(4x) + C$

(c) $-\cos^{-4}(4x) + C$ (d) $\cos^{-4}(4x) + C$

M.ATA

(4 – 5) الدوال الأسية واللوغاريتمية

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (6—1)، ظلّل الدائرة (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) إذا كانت: $y = 4^{x-2}$ فإن: $\frac{dy}{dx} = 4x$ — (a) (b)

(2) إذا كانت: $f(x) = e^{x^2}$ فإن: $f'(x) = 2xe^{2x}$ — (a) (b)

(3) إذا كانت: $g(x) = \ln(2x+2)$ فإن: $g'(x) = \frac{1}{2x+2}$ — (a) (b)

(4) إذا كانت: $y = x\ln x - x$ فإن: $y' = \ln x$ — (a) (b)

(5) $\int \frac{1}{2x}dx = \frac{\ln x}{2} + C$ — (a) (b)

(6) $\int \frac{1}{3x+1}dx = \ln(3x+1) + C$ — (a) (b)

في التمارين (14—7)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(7) إذا كانت $y = e^{-5x}$، فإنّ $\frac{dy}{dx}$ تساوي:

(a) e^{-5x} (b) $-e^{-5x}$ (c) $-5e^{-5x}$ (d) $5e^{-5x}$

(8) إذا كانت $y = x^2e^x - x\,e^x$، فإنّ $\frac{dy}{dx}$ تساوي:

(a) $e^x(x^2 + x - 1)$ (b) $e^x(x^2 - x)$ (c) $2x\,e^x - e^x$ (d) $e^x(x^2 + 2x + 1)$

(9) إذا كانت $y = (\ln x)^2$، فإنّ $\frac{dy}{dx}$ تساوي:

(a) $\frac{\ln x}{x}$ (b) $\frac{2\ln x}{x}$ (c) $\frac{x\ln x}{2}$ (d) $\frac{2\ln^2 x}{x}$

(10) إذا كانت $y = \ln\left(\frac{10}{x}\right)$، فإنّ $\frac{dy}{dx}$ تساوي:

(a) $-\frac{10}{x}$ (b) $\frac{10}{x}$ (c) $\frac{1}{x}$ (d) $-\frac{1}{x}$

(11) إذا كانت $y = \ln(x^2 + 1)$، فإنّ $\frac{dy}{dx}$ تساوي:

(a) $\frac{x}{x^2+1}$ (b) $\frac{2}{x^2+1}$ (c) $\frac{2x}{x^2+1}$ (d) $-\frac{2x}{x^2+1}$

(12) $\int \frac{2x}{x^2+1}dx =$

(a) $2\ln(x^2+1) + C$ (b) $\ln(x^2+1) + C$ (c) $\frac{x^2}{x^2+1} + C$ (d) $\frac{x}{\frac{1}{3}x^2+1} + C$

(13) $\int \frac{e^x + e^{-x}}{2}dx =$

(a) $\frac{e^x - e^{-x}}{2} + C$ (b) $\frac{e^x + e^{-x}}{2} + C$ (c) $\frac{e^{-x} - e^x}{2} + C$ (d) $\frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2} + C$

(14) $\int \frac{e^x}{e^x - 4}dx =$

(a) $-\frac{1}{2}(e^x - 4) + C$ (b) $\ln|e^x - 4| + C$ (c) $-\ln|e^x - 4| + C$ (d) $\frac{1}{2}\ln|e^x - 4| + C$

M.ATA

(5 - 5) التكامل بالتجزئ

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (5—1)، ظلّل الدائرة (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) $\int x\cos(2x)\,dx = \frac{1}{2}x\sin(2x) + \frac{1}{4}\cos 2x + C$ — (a) (b)

(2) $\int x\sin(\pi x)\,dx = -\frac{x}{\pi}\cos(\pi x) + \frac{1}{\pi^2}\sin(\pi x) + C$ — (a) (b)

(3) $\int x e^{6x}\,dx = \frac{1}{6}x e^{6x} - \frac{1}{36}e^{6x} + C$ — (a) (b)

(4) $\int x e^{-x}\,dx = -x e^{-x} + e^{-x} + C$ — (a) (b)

(5) $\int x\sec^2 x\,dx = x\tan x - \ln|\sec x| + C$ — (a) (b)

في التمارين (11—6)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(6) $\int (2x+1)\sin x\,dx$

(a) $(2x+1)\cos x + 2\sin x + C$
(b) $-(2x+1)\cos x + 2\sin x + C$
(c) $-(x+1)\cos x - 2\sin x + C$
(d) $(2x+1)\cos x - \sin x + C$

(7) $\int x^2\ln(x)\,dx =$

(a) $\frac{1}{3}x^3\ln(x) - \frac{x^3}{3} + C$
(b) $\frac{1}{3}x^3\ln(x) - \frac{x^3}{9} + C$
(c) $\frac{1}{3}x^3\ln(x) + \frac{x^3}{9} + C$
(d) $-\frac{1}{3}x^3\ln(x) - \frac{x^3}{9} + C$

في التمرينين (9—8)، إذا كان $\int (2x+1)\ln x\,dx = uv - \int v\,du$ فإن:

(8) $uv =$

(a) $(2x+1)\ln x$
(b) $2x\ln x$
(c) $\frac{2x+1}{2}\ln x$
(d) $x(x+1)\ln x$

(9) $\int v\,du =$

(a) $\frac{1}{2}x\ln x + C$
(b) $\frac{1}{2}x^2 + x + C$
(c) $(2x+1)\ln x + C$
(d) $\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + C$

في التمرينين (11—10)، إذا كان $\int (3x-1)e^{3x+2}\,dx = uv - \int v\,du$ فإن:

(10) $uv =$

(a) $(3x-1)e^{3x+2}$
(b) $\frac{1}{3}(3x-1)e^{3x+2}$
(c) $(3x-1)e^{x+2}$
(d) $\frac{1}{3}(x-1)e^{3x+2}$

(11) $\int v\,du =$

(a) $-\frac{1}{3}e^{3x+2} + C$
(b) $-e^{3x+2} + C$
(c) $\frac{1}{3}e^{3x+2} + C$
(d) $e^{3x+2} + C$

M.ATA

(6 - 5) التكامل باستخدام الكسور الجزئية

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (1—4)، ظلّل الدائرة (a) إذا كانت العبارة صحيحة و(b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) $\int \frac{4dx}{(x+3)(x+7)} = \ln|x+3| + \ln|x+7| + C$ (a)

(2) $\int \frac{-6dx}{x^2+3x} = -2\ln|x+3| + 2\ln|x| + C$ (a)

(3) الدالة: $f(x) = \frac{4x-11}{2x^2-x-3}$ على صورة كسور جزئية هي: $f(x) = \frac{3}{x+1} - \frac{2}{2x-3}$ (b)

(4) للحدودية النسبية: $\frac{x^2-x+2}{x^3-2x^2+x}$ ثلاثة كسور جزئية. (b)

في التمارين (5—10)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(5) $\int \frac{6}{x^2-9}dx =$

(a) $\ln|x+3| - \ln|x-3| + C$
(b) $\ln(x-3) - \ln(x+3) + C$
(c) $\ln|x+3| + \ln|x-3| + C$
$\ln|x-3| - \ln|x+3| + C$

(6) $\int \frac{7x-7}{x^2-3x-10}dx =$

(a) $4\ln|x+2| + 3\ln|x-5| + C$
(b) $3\ln|x+2| + 2\ln|x-5| + C$
$4\ln|x-5| + 3\ln|x+2| + C$
(d) $4\ln|x-5| - 3\ln|x+2| + C$

(7) الدالة النسبية: $f(x) = \frac{x}{x^2-4}$ على صورة كسور جزئية هي $f(x)$ تساوي:

(a) $\frac{1}{x-2} + \frac{1}{x+2}$
$\frac{1}{2(x-2)} + \frac{1}{2(x+2)}$
(c) $\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2}$
(d) $\frac{1}{2(x-2)} - \frac{1}{2(x+2)}$

(8) $\int \frac{2x^2-4x+3}{x^2-1}dx =$

(a) $2 + 2\ln|x-1| - \frac{9}{2}\ln|x+1| + C$
(b) $\frac{1}{2}\ln|x-1| - \frac{9}{2}\ln|x+1| + C$
$2x + \frac{1}{2}\ln|x-1| - \frac{9}{2}\ln|x+1| + C$
(d) $x + \frac{1}{2}\ln|x-1| - 9\ln|x+1| + C$

(9) $\int \frac{3x^2+2x}{x^2-4}dx =$

(a) $4\ln|x-2| - 2\ln|x+2| + C$
(b) $3x + 2\ln|x-2| - 2\ln|x-2| + C$
$3x + 4\ln|x-2| - 2\ln|x+2| + C$
(d) $3x + 4\ln|x-2| + 2\ln|x+2| + C$

(10) $\int \frac{x^3+2}{x^2-x}dx =$

(a) $\frac{x^2}{2} + 3\ln|x-1| + 2\ln|x| + C$
(b) $\frac{x^2}{2} - x + 3\ln|x-1| + 2\ln|x| + C$
(c) $\frac{x^2}{2} - 3\ln|x-1| + 2\ln|x| + C$
معلق
$\frac{x^2}{2} + x + 3\ln|x-1| - 2\ln|x| + C$

M.ATA

(7 – 5) التكامل المحدد

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (1—7)، ظلّل الدائرة (a) إذا كانت العبارة صحيحة و(b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\,dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \cos^2 x\,dx = \frac{\pi}{2}$ (b)

(2) $\int_{-3}^{-2} (|x| + x + 5)dx = -2$ (a)

(3) $\int_{-1}^{1} (|x|)^3 dx = -\frac{1}{2}$ (a)

(4) $\int_0^{1} 12(3x-2)^3 dx = -15$ (b)

(5) $\int_{-1}^{1} \frac{1}{\pi}\sqrt{1-x^2}\,dx = 1$ (a)

(6) $\int_2^{3} f(x)dx + \int_3^{5} f(x)dx - \int_5^{2} f(x)dx = 0$ (a)

(7) $\int_2^{4} f(x)dx + \int_4^{2} g(x)dx = 0$ (a)

في التمارين (8—12)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(8) إذا كان: $\int_3^{-1} g(x)dx = 2$, $\int_{-1}^{3} f(x)dx = 4$ فإن $\int_{-1}^{3} (2f(x) + 3g(x) + 1)dx$ تساوي:

(a) 18 (b) -6 6 (d) 12

(9) $\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{18}} \sqrt{2}\,dx =$

(a) 2 (b) $2\sqrt{2}$ 4 (d) 8

(10) $\int_{-1}^{1} (1 - |x|)dx =$

1 (b) -1 (c) 0 (d) $\frac{1}{2}$

(11) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin x + \cos x)dx =$

(a) 4 2 (c) 0 (d) π

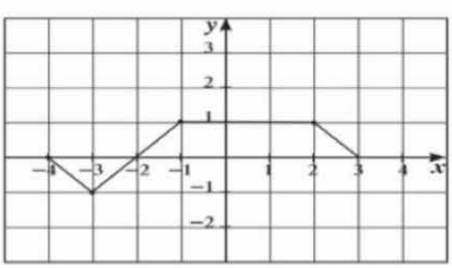
(12) لتكن: $f(x) = x^2 + 5$ فإن: $\int_{-a}^{a} f(x)dx > 0$ لكل قيم a تنتمي إلى:

(a) $\mathbb{R} - \mathbb{R}^-$ (b) $\mathbb{R} - \mathbb{R}^+$ (c) $\mathbb{R}^-$ $\mathbb{R}^+$

في التمارين (13—15)، لديك قائمتان، اختر من القائمة (2) ما يناسب كل تمرين من القائمة (1) لتحصل على عبارة صحيحة.

إذا كان بيان الدالة f كما في الشكل المقابل، فإن:

(2)	(1)
(a) 6	(13) $\int_{-4}^{3} f(x)\,dx$ يساوي:
(b) 5	(14) مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f ومحور السينات هي:
(c) 0	
(d) 3	(15) $\int_{-4}^{-1} \left(f(x) + \frac{1}{6}\right)dx$ يساوي:



M.ATA

نطمح
نحلم
نتامل
نحاول
نجتهد
ننجح
ننال
المستحيل