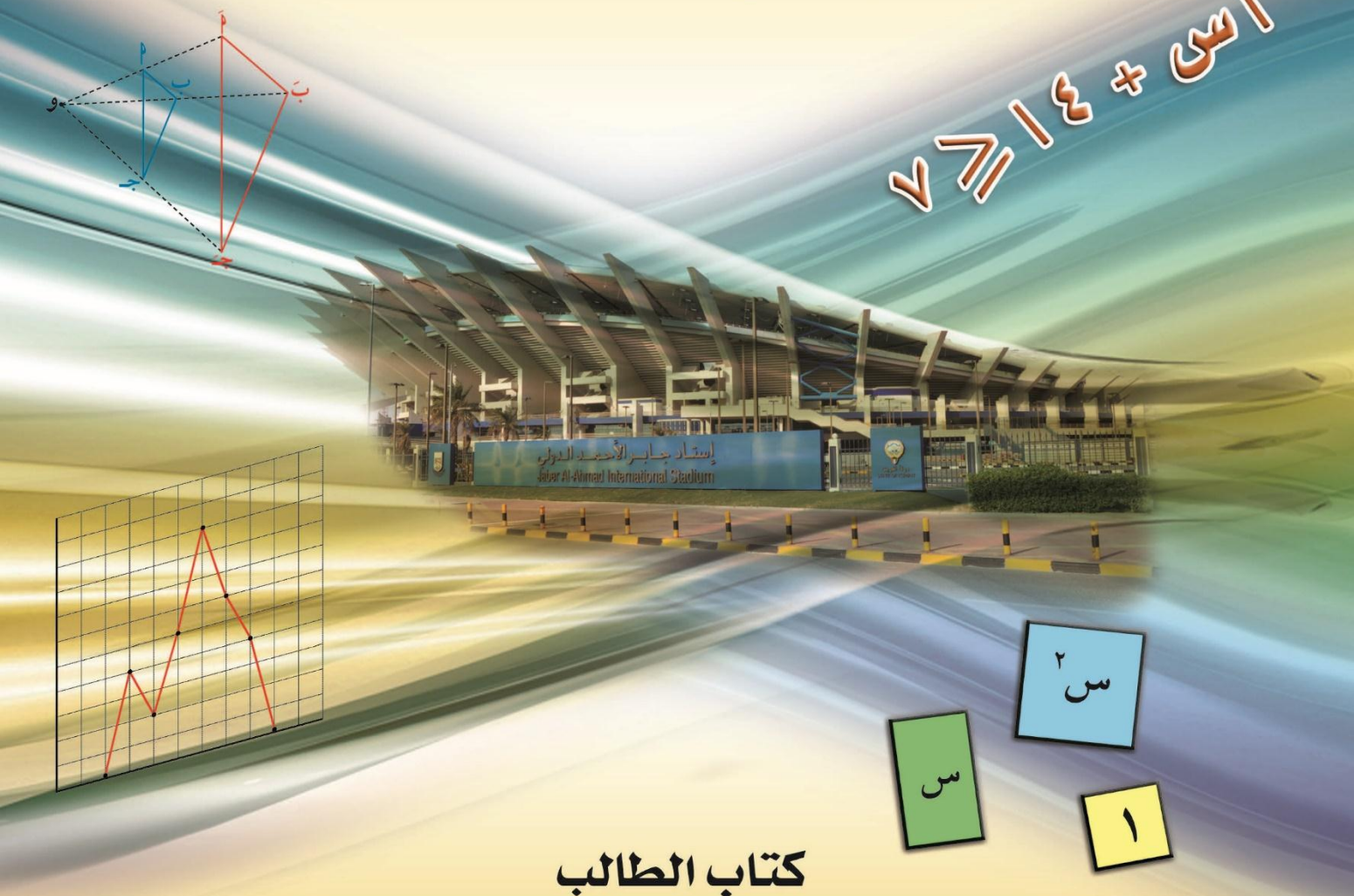
وزارة التربية

كويت جديدة
NEWKUWAIT

الرياضيات

الصف التاسع - الجزء الأوّل



كتاب الطالب

الطبعة الأولى

٩

المرحلة المتوسطة

وزارة التربية

الرياضيات

الصف التاسع - الجزء الأوّل

كتاب الطالب

لجنة تأليف كتاب الرياضيات للصف التاسع

أ. سارة مهدي براك هادي (رئيسًا)

أ. جمال عبد الناصر أحمد السبال
أ. عماد إبراهيم عبد القادر عامر
أ. جيهان عبد الشافي محمد أحمد
أ. محاسن حسين نوري عطية
أ. فهيد سعود ناصر العجمي
أ. مريم عفّاس سعود الشحومي
أ. عيد عشوي عايد الكهيدي
أ. عائشة سالم عبدالله البالول

الطبعة الأولى

١٤٤٢ - ١٤٤٣ هـ

٢٠٢١ - ٢٠٢٢ م

حقوق التأليف والطبع والنشر محفوظة لوزارة التربية - قطاع البحوث التربوية والمناهج
إدارة تطوير المناهج

الطبعة الأولى : ٢٠١٩ / ٢٠٢٠م
٢٠٢٠ / ٢٠٢١م
٢٠٢١ / ٢٠٢٢م

المراجعة العلمية

أ. مريم عفّاس سعود الشحومي

المتابعة الفنية

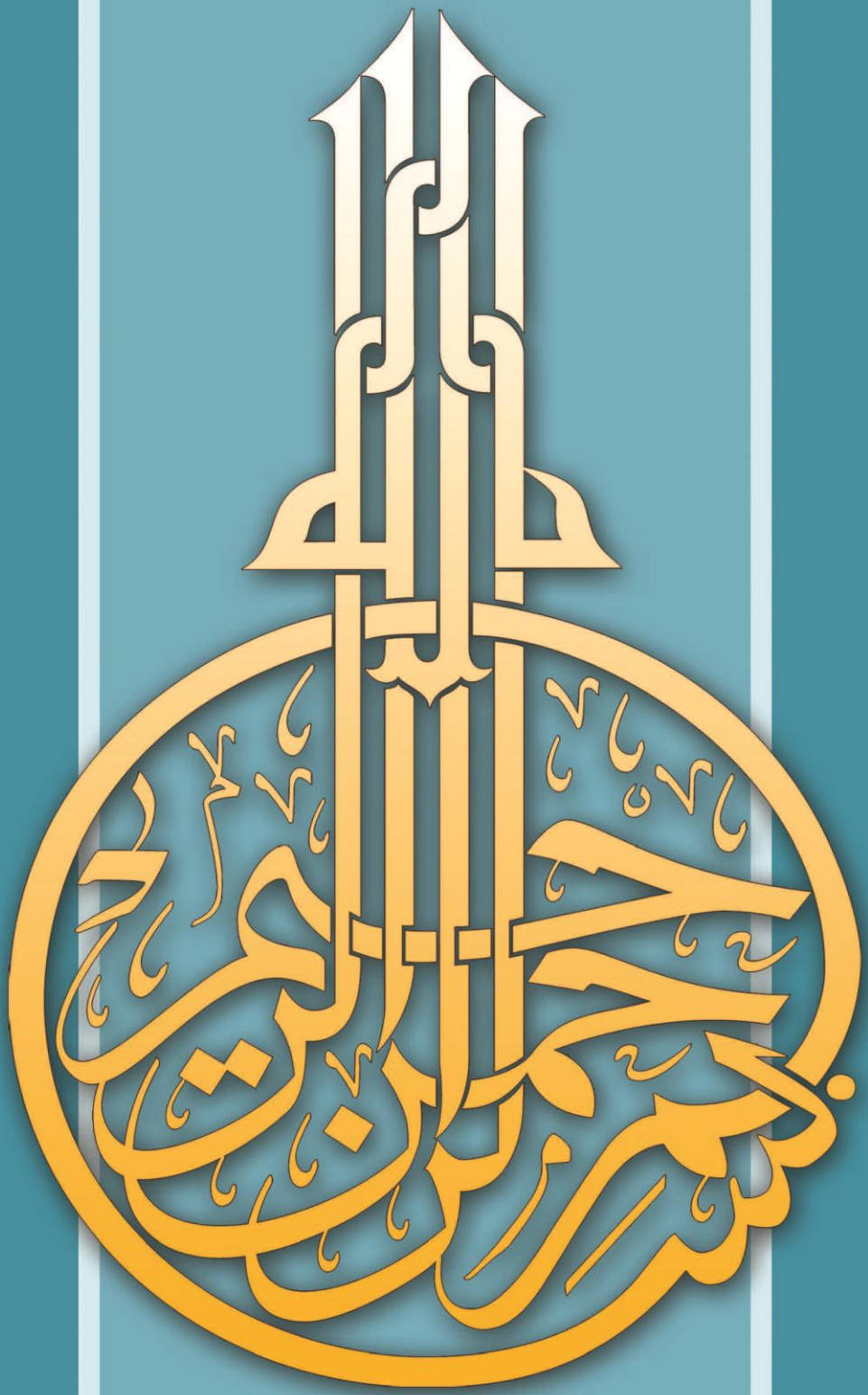
قسم إعداد وتجهيز الكتب المدرسية

الكتاب كاملًا

شاركنا بتقييم مناهجنا

ذات السلاسل - الكويت

أودع في مكتبة الوزارة تحت رقم (٤٦) بتاريخ ١٦ / ٧ / ٢٠١٩م



حضرة صاحب السمو الشيخ نواف الأحمد الجابر الصباح
أمير دولة الكويت

H.H. Sheikh Nawaf AL-Ahmad Al-Jaber Al-Sabah
The Amir Of The State Of Kuwait

سمو الشيخ مشعل الأحمد الجابر الصباح
ولي عهد دولة الكويت
H.H. Sheikh Meshal AL-Ahmad Al-Jaber Al-Sabah
The Crown Prince Of The State Of Kuwait

المحتويات

الجزء الأول :

الوحدة الأولى : الأعداد الحقيقية والعمليات عليها

الوحدة الثانية : التحليل والمعادلات

الوحدة الثالثة : الحدوديات النسبية

الوحدة الرابعة : الهندسة الإحداثية وهندسة التحويلات

الوحدة الخامسة : الإحصاء والاحتمال

الجزء الثاني :

الوحدة السادسة : المجموعات والدوال

الوحدة السابعة : المعادلات الخطية والمتباينات الخطية

الوحدة الثامنة : هندسة المثلث

الوحدة التاسعة : النسبة المئوية

الوحدة العاشرة : الهندسة والقياس

محتوى الجزء الأوّل

الوحدة الأولى : الأعداد الحقيقية والعمليات عليها
الموضوع : العلوم في حياتنا

مشروع الوحدة الأولى ١٦

مخطَّط تنظيمي للوحدة الأولى ١٧

استعد للوحدة الأولى ١٨

١-١ الجذور التربيعية والأعداد غير النسبية ٢٠

١-٢ الأعداد الحقيقية (مقارنة - ترتيب) ٢٤

١-٣ العمليات على الأعداد الحقيقية ٣٢

١-٤ القيمة المطلَقة ٣٦

١-٥ حلّ متباينة من الدرجة الأولى في متغير واحد ٤٤

١-٦ الصورة العلمية باستخدام الأسس الصحيحة ٥٤

١-٧ مراجعة الوحدة الأولى ٦٢

الوحدة الثانية : التحليل والمعادلات
الموضوع : عالم الصناعة

مشروع الوحدة الثانية ٦٨

مخطَّط تنظيمي للوحدة الثانية ٦٩

استعد للوحدة الثانية ٧٠

٢-١ تحليل الفرق بين مكعّبين أو مجموعهما ٧٢

٢-٢ تحليل المربّع الكامل ٧٦

٢-٣ تحليل الحدودية الثلاثية : $س^{٢} + ب س + جـ$ ٨٢

٢-٤ تحليل الحدودية الثلاثية : $أ س^{٢} + ب س + جـ$ ٨٦

٢-٥ تحليل الحدودية الرباعية ٩٠

٢-٦ حلّ معادلة من الدرجة الثانية في متغيّر واحد ٩٤

٢-٧ مراجعة الوحدة الثانية ١٠٠

الوحدة الثالثة : الحدوديات النسبية
الموضوع : الرياضة

مشروع الوحدة الثالثة ١٠٦

مخطَّط تنظيمي للوحدة الثالثة ١٠٧

استعد للوحدة الثالثة ١٠٨

٣-١ الحدوديات النسبية وتبسيطها ١١٠

٣-٢ ضرب الحدوديات النسبية ١١٤

٣-٣ قسمة الحدوديات النسبية ١١٨

٣-٤ جمع الحدوديات النسبية وطرحها ١٢٢

٣-٥ مراجعة الوحدة الثالثة ١٣٢

الوحدة الرابعة: الهندسة الإحداثية وهندسة التحويلات
الموضوع: معالم حضارية

مشروع الوحدة الرابعة ١٣٨

مخطَّط تنظيمي للوحدة الرابعة ١٣٩

استعد للوحدة الرابعة ١٤٠

٤-١ المسافة بين نقطتين في المستوى الإحداثي ١٤٢

٤-٢ إحداثيا نقطة منتصف قطعة مستقيمة في المستوى الإحداثي ١٥٠

٤-٣ الدوران ١٥٦

٤-٤ التكبير ١٦٦

٤-٥ مراجعة الوحدة الرابعة ١٧٦

الوحدة الخامسة : الإحصاء والاحتمال
الموضوع : عالم البيانات

مشروع الوحدة الخامسة ١٨٠

مخطَّط تنظيمي للوحدة الخامسة ١٨١

استعد للوحدة الخامسة ١٨٢

الإحصاء

٥-١ المدرَّج التكراري ١٨٤

٥-٢ المضلَّع التكراري ١٨٨

٥-٣ مخطَّط الصندوق ذي العارضتين ١٩٨

الاحتمال

٥-٤ الترجيح والعدالة - الاحتمال ٢٠٤

٥-٥ مراجعة الوحدة الخامسة ٢١٢

الوحدة الأولى

الأعداد الحقيقية والعمليات عليها

Real Numbers & Operations on Real Numbers

العلوم في حياتنا

Science in our lives

تهتمّ دولة الكويت بتطوّر العلوم والثقافة لزيادة الوعي لدى مواطنيها ، ومن مظاهر هذا الاهتمام إنشاء المراكز العلمية والثقافية ، ومنها مركز الشيخ عبدالله السالم الثقافي ، وهو أحد أكبر معالم التطوّر الثقافي من نوعه حول العالم والذي تمّ افتتاحه في مايو ٢٠١٧ م . يضمّ المركز عدّة متاحف ومنشآت ، منها : متحف التاريخ الطبيعي ومتحف العلوم والتكنولوجيا ومركز الفنون الجميلة ومتحف العلوم العربية الإسلامية ومتحف الفضاء ومسرح .

مشروع الوحدة : (الذهب الأسود)

مَنَّ الله على دولة الكويت بنعم كثيرة ومنها نعمة النفط (البترول) والذي يُسمّى بالذهب الأسود . تقول إحدى النظريات الخاصّة بأصل النفط إنّه قد تكوّن من النباتات الميتة ، ومن أجسام مخلوقات دقيقة لا حصر لها . وأنّ هذه البقايا ذات الأصل الحيواني أو النباتي قد ترسّبت في قيعان البحار القديمة ، وترسّب فوقها المزيد من الصخور ، وبفعل الوزن تولّد الضغط والحرارة الهائلان ، فضلًا عن النشاط الإشعاعي والتمثيل الكيميائي والبكتيري ، فتحوّلت المادّة العضوية في النهاية إلى المادّة التي تُعرَف باسم النفط ، والتي تُستخدَم في إنتاج الطاقة ، وبلدنا الكويت من أغنى دول العالم بهذه الثروة ، فنحمد الله على نعمه الكثيرة .

خطّة العمل :

- يبيّن الجدول التالي ترتيب أكبر الدول المنتِجة للنفط في العام ٢٠١٦ م :

الترتيب	الدولة	كمّية الإنتاج (برميل باليوم الواحد)	الصورة العلمية لكمّية الإنتاج
١	المملكة العربية السعودية	١٠ ٢٥٠ ٠٠٠	
٢	روسيا	١٠ ٠٥٠ ٠٠٠	
٣	الولايات المتّحدة الأمريكية	٨ ٧٤٤ ٠٠٠	
٤	العراق	٤ ١٣٦ ٠٠٠	
٥	الصين	٣ ٦٣٨ ٠٠٠	
٦	الكويت	٣ ٢٢٠ ٠٠٠	
٧	كندا	٣ ١٩٣ ٠٠٠	
٨	إيران	٣ ١٨٨ ٠٠٠	
٩	الإمارات العربية المتّحدة	٣ ٨٢٠ ٠٠٠	
١٠	البرازيل	٢ ٤٢٤ ٠٠٠	

خطوات تنفيذ المشروع :

- يُقسِّم المعلّم المتعلّمين إلى مجموعات .
- تقوم كلّ مجموعة بالخطوات التالية :
  - تسجّل كلّ مجموعة كمّية الإنتاج في الجدول بالصورة العلمية .
  - إيجاد الفرق بين كمّية إنتاج النفط في اليوم الواحد لكلّ من المملكة العربية السعودية والإمارات العربية المتّحدة بالصورة العلمية.
  - إيجاد إجمالي كمّية إنتاج النفط في اليوم الواحد للدول العربية الموجودة في الجدول أعلاه بالصورة العلمية.
  - المقارنة بين إنتاج النفط في اليوم الواحد لدولتي الكويت والإمارات معًا وكمّية إنتاج النفط في اليوم الواحد للولايات المتّحدة الأمريكية .

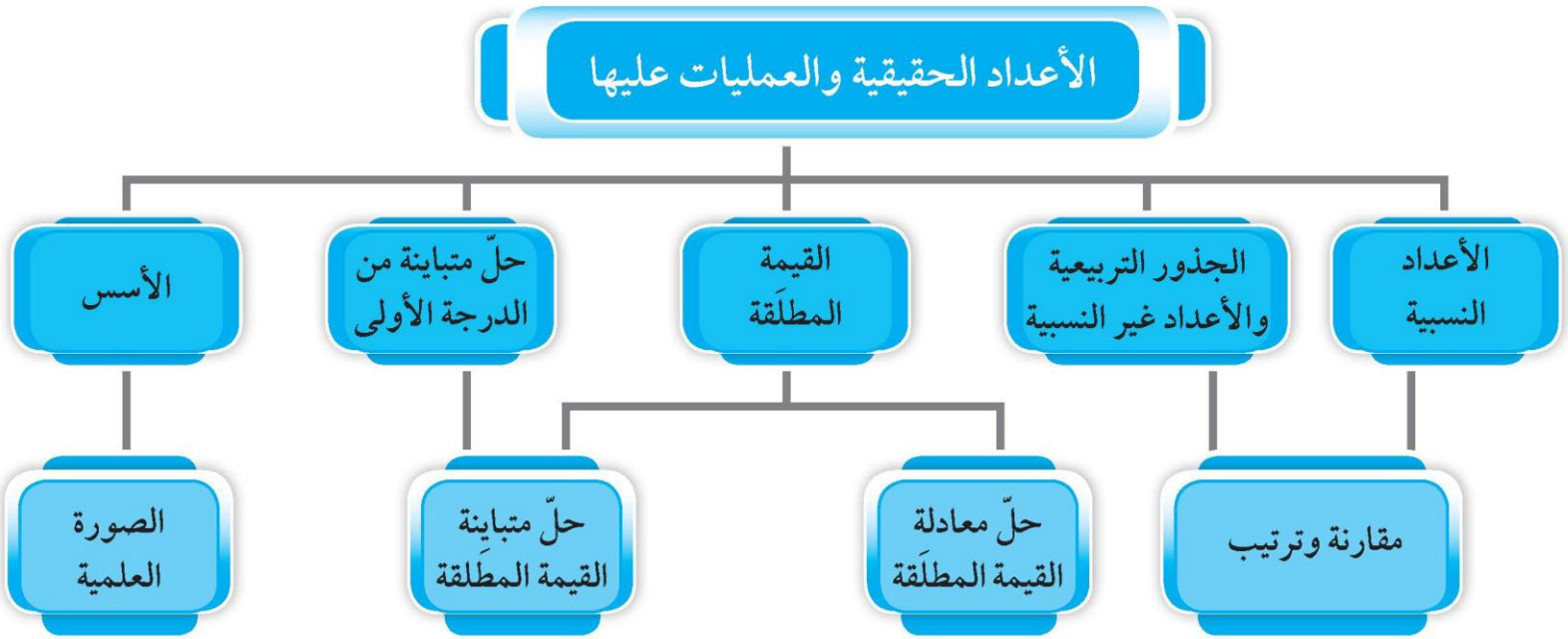
علاقات وتواصل :

- تتبادل المجموعات الحلول وتتأكّد من صحّة العمل .

عرض العمل :

- تعرض كلّ مجموعة عملها وتناقش خطوات تنفيذ العمل .

مخطَّط تنظيمي للوحدة الأولى



اِستعِدَّ للوحدة الأولى

١ أوجد ناتج ما يلي :

أ) $\sqrt{٤}$ = ...

ب) $-\sqrt{٢٥}$ = ...

جـ) $\sqrt[٣]{٢٧}$ = ...

د) $\sqrt[٣]{-٦٤}$ = ...

هـ) $٦^{٢}$ = ...

و) $(-٥)^{٢}$ = ...

ز) $٢^{٣}$ = ...

ح) $-٥^{٢}$ = ...

٢ أكمِل الجدول التالي :

الصورة العشرية		٥,٩		$٣,\overline{٥}$
الصورة الكسرية	$\frac{٩}{٢٠}$		$\frac{٣}{٨}$	

٣ ضَع الرمز < أو > أو = فيما يلي لتحصل على عبارة صحيحة :

أ) $٣,\overline{٩}$ ◯ ٣,٩٥

ب) $\frac{٢}{٥}$ ◯ ٠,٧

جـ) ٠,٦ ◯ $\frac{٣}{٥}$

٤ أوجِد ناتج كلّ ممّا يلي :

أ) $(-٩)+(-٤)$ = ...

ب) $١١+(-٦)$ = ...

جـ) $(-١٨)+١٥$ = ...

د) $(-٦)\times(-٥)$ = ...

هـ) $(-٨)\times٧$ = ...

و) $(-٣٦)\div٩$ = ...

٥ أوجِد ناتج ما يلي ثم ضعه في أبسط صورة :

أ) $٥\frac{١}{٤}+٣\frac{٥}{٦}$

.....

.....

.....

ب) $٧\frac{٢}{٣}-٤\frac{٢}{٥}$

.....

.....

.....

جـ) $٢\frac{٤}{٧}\times٢\frac{٥}{٨}$

.....

.....

.....

د) $١\frac{٥}{٩}\div٢\frac{١}{٣}$

.....

.....

.....

٦ أوجِد ناتج ما يلي :

أ $٩ + ٣ \times ٨$

ب $١٥ \div (٨ - ٥)$

جـ $٦^{٢} \div (٧ + ٢)$

د $٨ \times \sqrt{٤٩} - ١٠$

٧ بسط كل من التعابير التالية :

أ $س^{٤} \times س^{٥}$

ب $\frac{ب^{٦}}{ب^{٢}}$

جـ $س^{-٤}$

د $(ص^{٥})^{٧}$

هـ $(ل^{٢} ع^{٤})^{٣}$

و $\left(\frac{س^{٢}}{ص^{٣}}\right)^{٤}$

٨ أوجِد قيمة : ٥ س – ٣

إذا كانت س = ٢

٩ حلَّ المعادلة التالية :

٢س + ١ = ٧

١-١ الجذور التربيعية والأعداد غير النسبية
Square Roots and Irrational Numbers

سوف تتعلّم : الأعداد غير النسبية .

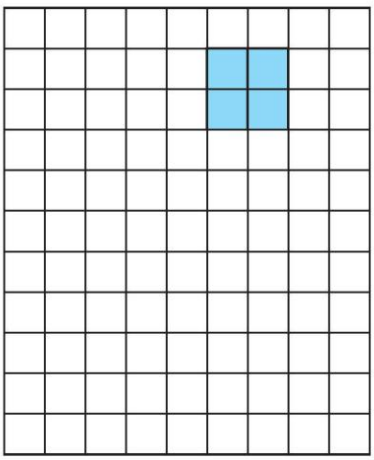
العبارات والمفردات :

جذر تربيعي
Square Roots

جذر تربيعي أساسي
Principal Square Root

عدد غير نسبي
Irrational Number

نشاط :



أرادت شركة للإنشاءات اختيار قطعة أرض مربعة الشكل لإنشاء معمل للأبحاث العلمية (مخطط قطعة الأرض موضحاً على الشبكة المقابلة) ، فإذا كانت مساحة قطعة الأرض المتاحة ٤ كم^{٢} .

فاحسب طول ضلعها ؟ .....

١ لنفرض أن مساحة قطعة الأرض ٩ كم^{٢} .

فما طول ضلعها ؟ .....

(استعن بالشبكة المقابلة لرسم مخطط قطعة الأرض الجديدة)

٢ لنفرض أن مساحة قطعة الأرض ٥ كم^{٢} .

فما طول ضلعها ؟ .....

هل يمكنك تمثيل مخطط قطعة الأرض على الشبكة ؟

تذكَّرْ أنّ :

الجذر التربيعي للعدد النسبي الموجب س :
هو العدد الذي إذا ضرب في نفسه كان الناتج س .

الجذور التربيعية

تعلم أن $(-٣)^{٢} = ٩$ ، $(٣)^{٢} = ٩$ ،

وأنه يوجد جذران تربيعيان للعدد ٩ هما :

$+\sqrt{٩} = ٣$ (الجذر التربيعي الموجب) ،

$-\sqrt{٩} = -٣$ (الجذر التربيعي السالب)

ويعرف الجذر التربيعي الموجب **بالجذر التربيعي الأساسي** .

من خواص الجذور التربيعية

إذا كان أ ، ب عددين نسبيين موجبين فإن :

- $\sqrt[٢]{أ \times ب} = \sqrt[٢]{أ} \times \sqrt[٢]{ب}$
- $\sqrt[٢]{\frac{أ}{ب}} = \frac{\sqrt[٢]{أ}}{\sqrt[٢]{ب}}$
- $\sqrt[٢]{أ} \times \sqrt[٢]{أ} = أ$

> **تذكَّرْ أنّ :**
> الأعداد النسبية هي الأعداد التي يمكن كتابتها على صورة $\frac{أ}{ب}$ حيث أ ، ب عددان صحيحان ، ب ≠ ٠

بالعودة إلى النشاط السابق :

$\sqrt[٢]{٥}$ لا ينتمي إلى مجموعة الأعداد النسبية ن ولذلك فهو ينتمي إلى مجموعة أخرى جديدة تسمى مجموعة **الأعداد غير النسبية** $\overline{ن}$.

> **تذكَّرْ أنّ :**
> $٠,\overline{٥} = \frac{٥}{٩}$
> $٠,\overline{١٧} = \frac{١٧}{٩٩}$

الأعداد غير النسبية هي الأعداد التي لا يمكن كتابتها على الصورة $\frac{أ}{ب}$ حيث أ ، ب عددان صحيحان ، ب ≠ ٠

وفي ما يلي بعض الأمثلة لأعداد غير نسبية :

- $\sqrt[٢]{٥}$ ، $-\sqrt[٢]{٢}$ ، $\frac{١}{\sqrt[٢]{٧}}$ ، $\sqrt[٣]{٥}$ ، ...
- الأعداد العشرية التي أرقامها العشرية لا تنتهي ولا تتكرر مثل π = ... ٣,١٤١٥٩
- كسور عشرية ذات نمط في كتابتها مثل ... ٠,٠٢٠٢٢٠٢٢٢٠٢٢٢٢

> **اللوازم :**
> آلة حاسبة

تدرّب (١) :

قدِّر $\sqrt[٢]{١٤}$:

نبحث عن عددين مربعين كاملين متتاليين يقع بينهما العدد ١٤ وهما ..... ، .....

..... < ١٤ < .....

$\sqrt[٢]{.....} < \sqrt[٢]{١٤} < \sqrt[٢]{.....}$

..... < $\sqrt[٢]{١٤}$ < .....

بالتالي فإن $\sqrt[٢]{١٤}$ يقع بين ..... ، .....

١٤ أقرب إلى العدد .....

$\sqrt[٢]{١٤} \approx$ .....

(تحقق من إجابتك باستخدام الآلة الحاسبة)

تدرّب (٢) :

أوجِد ناتج كلٍّ مما يلي موظفًا خواص الجذور التربيعية :

أ $\sqrt{٥} \times \sqrt{٥} =$ .....

ب $\sqrt{٤٩ \times ٩} =$ $\sqrt{\quad} \times \sqrt{\quad} =$ ..... $\times$ ..... $=$ .....

جـ $\sqrt{\frac{٢٥}{٦٤}} =$ $\frac{\sqrt{\quad}}{\sqrt{\quad}} =$ $\frac{\quad}{\quad}$

د $\sqrt{٢} \times \sqrt{٨} =$ $\sqrt{\quad} =$ ..... $\times$ ..... $=$ $\sqrt{\quad} =$ .....

هـ $\frac{\sqrt{٢٤}}{\sqrt{٦}} =$ $\sqrt{\quad} =$ ..... $=$ .....

و $-\sqrt{٠,٨١} =$ $-\sqrt{\quad} =$ $-\frac{\sqrt{\quad}}{\sqrt{\quad}} =$ $-\frac{\quad}{\quad} =$ .....

ز $\sqrt{٣٦٠٠} =$ $\sqrt{\quad \times ٣٦} =$ $\sqrt{\quad} \times \sqrt{\quad} =$ ..... $\times$ ..... $=$ .....

ح $٢\sqrt{٣} \times \sqrt{٣} =$ ..... $\times$ ..... $=$ .....

تدرّب (٣) :

ضع الأعداد التالية في مكانها المناسب في الجدول :

$\sqrt{١٥}$ ، $-\sqrt{٢}$ ، $\frac{١}{\sqrt{٦٤}}$ ، π ، $\frac{٧}{٩}$ ،

$-٠,١٧$ ، $٠,\overline{٣}$ ، $٠,٣٥٣٣٥٣٣٣٥ \ldots$ ،

عدد نسبي	عدد غير نسبي

فكّر وناقِش

هل الجذر التربيعي للعدد ٢٠٠ يساوي ضعف الجذر التربيعي للعدد ١٠٠ ؟ وضح إجابتك .

تمـــرَّنْ :

١ حدد ما إذا كان كل عدد مما يلي عددًا نسبيًّا أم غير نسبي :

أ $\sqrt{٢٥}$	ب $\sqrt{٢٠}$	جـ $١,\overline{٢٧}$	د $-٠,٧٧$
هـ $\frac{٨}{٣}$	و $\sqrt{\frac{٩}{١٦}}$	ز π	ح $٠,١٣١٣٣١٣٣٣...$

٢ قدِّر كلًّا مما يلي ثم تحقق من صحة تقديرك باستخدام الآلة الحاسبة :

أ $\sqrt{٣٥}$ .....

ب $\sqrt{٦٨}$ .....

٣ أوجِد ناتج كلٍّ مما يلي موظفًا خواص الجذور التربيعية :

أ $-\sqrt{\frac{١}{٨١}}$ = ...

ب $\sqrt{١١} \times \sqrt{١١}$ = ...

جـ $\sqrt{٤٩ \times ٤}$ = ...

د $\sqrt{٢} \times \sqrt{١٨}$ = ...

هـ $\frac{\sqrt{٢٧}}{\sqrt{٣}}$ = ...

و $\sqrt{٢٥٠٠}$ = ...

ز $\sqrt{٠,٦٤}$ = ...

ح $\sqrt{٣} \times \sqrt{٥}٢$ = $\sqrt{٥}$ .....

٤ قاعة عرض في أحد المعارض أرضيتها مربعة الشكل مقسمة إلى أربعة أجزاء متطابقة ، وكانت مساحة الجزء الواحد ٤٠٠ م^٢ . ما طول ضلع أرضية القاعة ؟

.....

.....

.....

١-٢ الأعداد الحقيقية (مقارنة – ترتيب)
Real Numbers (Comparing – Ordering)

سوف تتعلّم : الأعداد الحقيقية ومقارنتها وترتيبها وتمثيلها .

العبارات والمفردات :

الأعداد الحقيقية
Real Numbers

الفترات
Intervals

فترات محدودة
Bounded Intervals

فترات غير محدودة
Unbounded Intervals

فترة مغلقة
Closed Interval

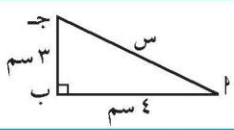
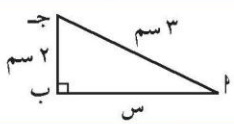
فترة مفتوحة
Open Interval

فترة نصف مغلقة
Half-Closed Interval

فترة نصف مفتوحة
Half-Open Interval

نشاط :

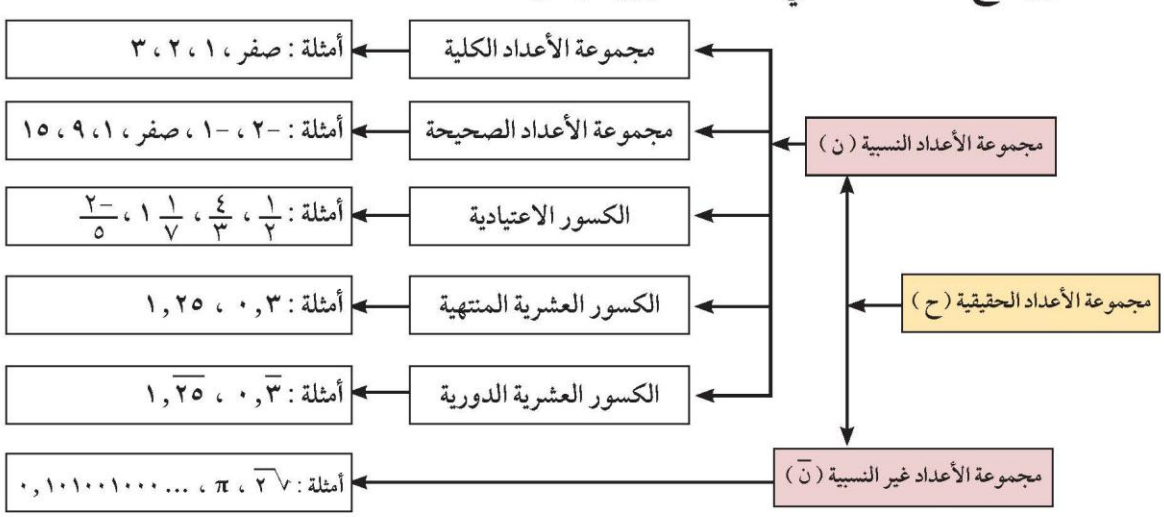
أكمل الجدول التالي :

المثلث القائم	طول الضلع المجهول	طول الضلع يمثل	
		عدد نسبي	عدد غير نسبي
	س = ...		
	س = ...		

اتحاد مجموعة الأعداد النسبية (ن) ومجموعة الأعداد غير النسبية ($\bar{ن}$) يشكل مجموعة تسمّى **مجموعة الأعداد الحقيقية (ح)** .

أي أن : $ن \cup \bar{ن} = ح$

يوضح المخطط التالي العلاقات بين مجموعات الأعداد :



مثال :

قارن بين العددين : $\overline{٣,١٤}$ ، π

الحل :

$\overline{٣,١٤} = ٣,١٤١٤١٤١٤ \ldots$

$\pi \approx ٣,١٤١٥٩$

$\therefore \overline{٣,١٤} > \pi$

تدرّب (١) :

قارن بين العددين :

أ $\overline{٠,٦}$ ، $\frac{٣}{٥}$

.....

.....

.....

ب $\overline{٠,٤}$ ، $\frac{١}{٢}$

.....

.....

.....

تدرّب (٢) :

رتب تصاعديًّا الأعداد التالية : π ، $\sqrt{\overline{١٧}}$ ، $٣\frac{٥}{٨}$

$\pi \approx$ .....

$\sqrt{\overline{١٧}} \approx$ .....

$٣\frac{٥}{٨} =$ .....

$\therefore$ الترتيب التصاعدي : ..... ، ..... ، .....

تدرّب (٣) :

أ رتب تصاعديًّا الأعداد التالية :

٢π ، $\sqrt{٢٧}$ ، $\overline{٦,٥}$

.....

.....

.....

.....

ب رتب تنازليًّا الأعداد التالية :

$٣\frac{١}{٨}$ ، $-\overline{٣,١٣}$ ، $-\pi$ ، $\sqrt{٨}$

.....

.....

.....

.....

الفترات

الفترة : هي مجموعة جزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية ويوجد نوعان من الفترات : فترات محدودة وفترات غير محدودة .

أوّلًا : الفترات المحدودة

يوضح الجدول التالي أنواع الفترات المحدودة : ليكن أ ، ب عددين حقيقيين .

رمز الفترة	نوع الفترة	رمز المتباينة	التمثيل البياني	التعبير اللفظي
[أ ، ب]	مغلقة	أ ≤ س ≤ ب		مجموعة الأعداد الحقيقية الأكبر من أو تساوي أ والأصغر من أو تساوي ب
(أ ، ب)	مفتوحة	أ < س < ب		مجموعة الأعداد الحقيقية الأكبر من أ والأصغر من ب
[أ ، ب)	نصف مغلقة أو نصف مفتوحة	أ ≤ س < ب		مجموعة الأعداد الحقيقية الأكبر من أو تساوي أ والأصغر من ب
(أ ، ب]	نصف مفتوحة أو نصف مغلقة	أ < س ≤ ب		مجموعة الأعداد الحقيقية الأكبر من أ والأصغر من أو تساوي ب

تدرّب (٤) :

أكمل الجدول التالي :

رمز الفترة	نوع الفترة	رمز المتباينة	التمثيل البياني	التعبير اللفظي
[١ ، ٣]		١ ≤ س ≤ ٣		مجموعة الأعداد الحقيقية الأكبر من أو تساوي ١ والأصغر من أو تساوي ٣
(-١ ، ٤)	مفتوحة			
	نصف مغلقة أو نصف مفتوحة			مجموعة الأعداد الحقيقية الأكبر من أو تساوي -٤ والأصغر من ٠
	نصف مفتوحة أو نصف مغلقة	-٥ < س ≤ -٢		

فكّر وناقِش

هل كل مجموعة جزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية تمثل فترة ؟

ثانيًا : الفترات غير المحدودة

يوضح الجدول التالي أنواع الفترات غير المحدودة : ليكن ا ، ب عددين حقيقيين .

ملاحظة :
الرمز ∞ يقرأ ما لا نهاية .

رمز الفترة	نوع الفترة	رمز المتباينة	التمثيل البياني	التعبير اللفظي
[ا ، ∞)	نصف مغلقة وغير محدودة من أعلى	س ≥ ا		مجموعة الأعداد الحقيقية الأكبر من أو تساوي ا
(ا ، ∞)	مفتوحة وغير محدودة من أعلى	س > ا		مجموعة الأعداد الحقيقية الأكبر من ا
(− ∞ ، ب]	نصف مغلقة وغير محدودة من أسفل	س ≤ ب		مجموعة الأعداد الحقيقية الأصغر من أو تساوي ب
(− ∞ ، ب)	مفتوحة وغير محدودة من أسفل	س < ب		مجموعة الأعداد الحقيقية الأصغر من ب

تدرّب (٥) :

أكمل الجدول التالي :

رمز الفترة	نوع الفترة	رمز المتباينة	التمثيل البياني	التعبير اللفظي
[٤ ، ∞)	نصف مغلقة وغير محدودة من أعلى			مجموعة الأعداد الحقيقية الأكبر من أو تساوي ٤
	مفتوحة وغير محدودة من أعلى			مجموعة الأعداد الحقيقية الأكبر من صفر
		س ≥ − ٢		
(− ∞ ، − ٢)				مجموعة الأعداد الحقيقية الأصغر من − ٢

تمــرَّنْ :

١ قارن بين العددين في كلٍّ مما يلي :

أ $0,\overline{3}$ ، $\frac{1}{3}$

ب -2π ، $-6,2$

جـ $0,\overline{25}$ ، $\frac{1}{4}$

د $1\frac{2}{5}$ ، $\sqrt{57}$

٢ أ رتب تصاعديًّا الأعداد التالية :

$\frac{3}{5}$ ، $0,\overline{6}$ ، $\frac{1}{2}$

ب رتب تنازليًّا الأعداد التالية :

$3\frac{3}{8}$ ، $-3,\overline{37}$ ، $\sqrt{15}$

جـ رتب تصاعديًّا الأعداد التالية :

$\overline{0,0}$ ، $\frac{\pi}{4}$ ، $\frac{3}{7}$

د رتب تنازليًّا الأعداد التالية :

$\pi 2$ ، $\sqrt{48}$ ، $-\overline{6,25}$ ، $-6\frac{7}{20}$

٣

أ اكتب الفترة التي تمثل الأعداد الحقيقية الأكبر من أو تساوي ١ والأصغر من ٦

ب اكتب الفترة التي تمثل الأعداد الحقيقية الأكبر من ١ والأصغر من أو تساوي ٦

جـ اكتب الفترة التي تمثل الأعداد الحقيقية الأكبر من -4

د اكتب الفترة التي تمثل الأعداد الحقيقية الأصغر من أو تساوي -4

٤ أكمل الجدول التالي :

رمز الفترة	نوع الفترة	رمز المتباينة	التمثيل البياني	التعبير اللفظي
[٢ ، ٥]				
				مجموعة الأعداد الحقيقية الأكبر من أو تساوي -٤
		س > ٥		

١-٣ العمليات على الأعداد الحقيقية
Operations on Real Numbers

سوف تتعلّم : إجراء عمليات على الأعداد الحقيقية .

معلومات مفيدة :
مركز الشيخ عبدالله السالم الثقافي هو أكبر معالم التطور الثقافي من نوعه حول العالم . يضم المركز عدة متاحف ، منها : متحف التاريخ الطبيعي ومتحف العلوم والتكنولوجيا ، كذلك يضم عدة مختبرات مخصصة للتجارب العلمية وعلوم الفضاء

نشاط :

يضم مركز الشيخ عبدالله السالم الثقافي ، عدة مختبرات منها : مختبر التجارب ، مختبر الأبحاث ومختبر الديناميكا الهوائية . لنفترض أن الجدول المقابل يوضح عدد التجارب خلال سنة ، احسب العدد الكلّي للتجارب ؟

عدد التجارب خلال سنة	
اسم المختبر	العدد
التجارب	١٢٩
الأبحاث	١٣٧
الديناميكا الهوائية	١٣٧

لمعرفة العدد الكلّي للتجارب عليك أن توجد ناتج :

$١٢٩ + ١٣٧ \times ٢$

ادخل على الآلة الحاسبة كلًّا ممّا يلي ثمّ اكتب الناتج :

١) $١٢٩ + (١٣٧ \times ٢) =$ ---

٢) $(١٢٩ + ١٣٧) \times ٢ =$ ---

٣) $١٢٩ + ١٣٧ \times ٢ =$ ---

اللوازم :
آلة حاسبة

- قارن النواتج .
- ما العملية التي ستبدأ بها الآلة الحاسبة في كل مرة ؟

ترتيب العمليات على الأعداد الحقيقية

تذكَّرْ أنّ :
أولويات ترتيب العمليات :
(١) ما داخل الأقواس
(٢) الأسس والجذور
(٣) الضرب والقسمة من اليمين
(٤) الجمع والطرح من اليمين

تدرّب (١) :

حدّد الإجراء الذي يتم أولًا :

أ) $\sqrt{٢٥} - ٢ \times ٨$

ب) $-١٥ (٨٠ + ٣٠)$

جـ) $٤٨ \div ٢^{٣} \times ٢$

د) $\frac{(٢٤ + ٤)}{-٤}$

فكِّر وناقِش

بأي العمليات نبدأ : $\frac{٣+٩}{٤} - ٥$.

خواص العمليات على الأعداد الحقيقية

إذا كانت أ ، ب ، جـ أعدادًا حقيقية فإنّ :

- أ + ب = ب + أ — خاصية الإبدال لعملية الجمع
- أ × ب = ب × أ — خاصية الإبدال لعملية الضرب
- أ + (ب + جـ) = (أ + ب) + جـ — خاصية التجميع لعملية الجمع
- أ × (ب × جـ) = (أ × ب) × جـ — خاصية التجميع لعملية الضرب
- أ × (ب + جـ) = أب + أجـ — خاصية توزيع الضرب على الجمع
- أ × (ب − جـ) = أب − أجـ — خاصية توزيع الضرب على الطرح

تدرّب (٢) :

اذكر الخاصية المستخدمة .

أ) $\pi + \frac{١}{٢} = \frac{١}{٢} + \pi$ خاصية .....

ب) $\sqrt[٧]{٢} \times \sqrt[٧]{٥} \times \sqrt[٧]{٤} = (\sqrt[٧]{٢} \times \sqrt[٧]{٥}) \times \sqrt[٧]{٤}$ خاصية .....

جـ) $\frac{٤}{٣} \times (\frac{٣}{٤} + \frac{٦}{٤}) = (\frac{٤}{٣} \times \frac{٣}{٤}) + (\frac{٤}{٣} \times \frac{٦}{٤})$ خاصية .....

مثال :

أوجِد الناتج في أبسط صورة : $٣ \times \overline{٠,٦} - \sqrt[٧]{٣} \times \sqrt[٧]{٢٧}$

الحل :

$$٣ \times \overline{٠,٦} - \sqrt[٧]{٣} \times \sqrt[٧]{٢٧}$$
$$= ٣ \times \frac{٦}{٩} - \sqrt[٧]{٨١}$$
$$= ٣^{١} \times \frac{٢}{\cancel{٣}_{١}} - ٩$$
$$= ٢ - ٩$$
$$= -٧$$

تدرّب (٣) :

أوجِد الناتج في أبسط صورة :

أ) $٥ \times \sqrt{١٦} \div ٠,\overline{٣} - ٧ \times ٢$

ب) $\sqrt{\frac{١٠٠}{١٦}} \times ٨ - ٥^{٢}$

فكّر وناقِش

ضع أقواسًا لتصبح العبارة صحيحة : ١٠٠ + ٢٤ ÷ ٣ + ١ = ٣١

تمـــرَّنْ :

١) أوجِد قيمة كلّ مما يلي بطريقتين مختلفتين :

أ) $٥ \times (٨ + ١٠)$

ب) $٨ \times (٢ - ١١)$

---

٢) أوجِد قيمة كلّ مما يلي :

أ) $١٦ \div ٤ \times (-٢) + ٦$

ب) $١٤ - (-٨) + ٦ \div (-٣)$

جـ) $\frac{١٨ - ٩}{٩} + (-٣)$

د) $\frac{-٣(٩ + ٢)}{-١١} + (-٢)$

---

٣ أوجِد الناتج في أبسط صورة :

أ $٢ \times \frac{٣}{٨} - \frac{\sqrt{٨}}{\sqrt{٢}}$

ب $\frac{٣}{٥} \times ٠,\overline{٥} + \sqrt{٨} \times \sqrt{٢}$

جـ $٨ \times \sqrt{٢٥} \div ٠,\overline{٦} + ٤ \times ٩$

د $٦ \times ٩ - ٠,\overline{٧} \div \sqrt{٤٩} \times \sqrt{٦}$

٤ نظمت إحدى المدارس رحلة للمركز العلمي وكانت أسعار التذاكر على الشكل التالي :
زيارة المركز ٣,٥ دينار ، زيارة قاعة الاستكشاف ٤,٥ دينار . احسب المبلغ الإجمالي للرحلة مستعينًا بالجدول الموضح فيه عدد المتعلّمين المشاركين ؟

أنواع التذاكر	زيارة المركز	زيارة قاعة الاستكشاف
عدد المتعلّمين	٢٠	١٠

٥ إذا أنتجت كلًّا من الكويت والإمارات العربية المتحدة والصين نفس الكمية من النفط في أحد الأيام ولتكن ٣,٦ مليون برميل ، وأنتجت المملكة العربية السعودية في نفس اليوم ١٠ مليون برميل . احسب إجمالي إنتاج الدول الأربعة في هذا اليوم .

١-٤ القيمة المطلَقة
Absolute Value

سوف تتعلّم : إيجاد القيمة المطلَقة وحلّ معادلات تتضمن القيمة المطلَقة .

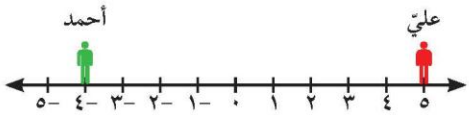
العبارات والمفردات :
معادلة
Equation
قيمة مطلَقة
Absolute value
متغيّر
Variable

نشاط :

يقف كلّ من عليّ وأحمد على خطّ للأعداد كما هو موضَّح في الشكلّ أدناه :

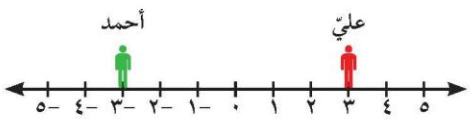
في كلتا الحالتين ، اُكتب أيّهما الأقرب إلى الصفر على خطّ الأعداد .

الحالة الأولى :



.....

الحالة الثانية :



.....

القيمة المطلقة

القيمة المطلَقة لعدد حقيقي هي المسافة على خطّ الأعداد بين هذا العدد والصفر .

تذكَّرْ أنّ :
$|\pm أ| = أ$
لكل $أ \in ح$.

تدرّب (١) :

أوجِد كلًّا ممّا يلي :

أ) $|-٠,٦| =$ ..... ب) $|٠,\overline{٣}| =$ ..... جـ) $\left|\frac{-٤}{٧}\right| =$ ..... د) $|\sqrt{٥٧}| =$ .....

من خواصّ القيمة المطلَقة

(١) $|س \times ص| = |س| \times |ص|$

(٢) $\left|\frac{س}{ص}\right| = \frac{|س|}{|ص|}$ ، حيث $ص \neq ٠$

(٣) $|س - ص| = |ص - س|$

تدرّب (٢) :

أوجِد ناتج كلّ ممّا يلي مستخدِمًا خواصّ القيمة المطلَقة :

أ) $|٥ \times ٤|$

$= |\text{.....}| \times |\text{.....}|$

$= \text{.....} \times \text{.....}$

$= \text{.....}$

ب) $\left|\frac{-٥}{٧}\right|$

$= \frac{|\text{.....}|}{|\text{.....}|}$

$= \text{.....}$

جـ) $|٠,٥ - ٢٣,٥|$

$= |٢٣,٥ - \text{.....}|$

$= |\text{.....}|$

$= \text{.....}$

فكّر وناقِش

هل $|٥ + (-٣)| = |٥| + |-٣|$ ؟ ولماذا ؟

إيجاد قيمة مقدار جبري

مثال (١) :

أوجِد قيمة : $|س + ٤| + |-٠,٥|$ إذا كانت س = -٦

الحل :

$|س + ٤| + |-٠,٥|$

$= |-٦ + ٤| + |-٠,٥|$ بالتعويض عن قيمة س

$= |-٢| + ٠,٥$

$= ٢ + ٠,٥$

$= ٢,٥$

تدرّب (٣) :

أوجِد قيمة كلٍّ ممّا يلي :

أ) $|س \times ٥ + ٣|$

إذا كانت س = ٢

.....

.....

.....

.....

ب) $|س - ٥| + |-٣,٢|$

إذا كانت س = -٤

.....

.....

.....

.....

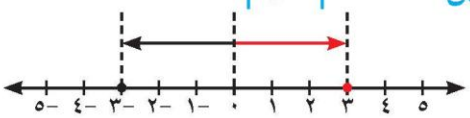
حلّ معادلات تتضمّن قيمة مطلَقة

لكلّ عدد حقيقي س يكون :

$$|س| = \begin{cases} س & \text{إذا كان } س > ٠ \\ ٠ & \text{إذا كان } س = ٠ \\ -س & \text{إذا كان } س < ٠ \end{cases}$$

يمكن استخدام خطّ الأعداد لحلّ معادلات تتضمن قيمة مطلَقة .

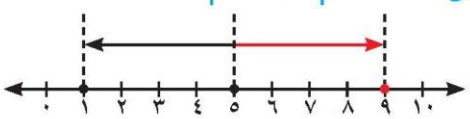
يوضّح التمثيل البياني المقابِل على خطّ الأعداد حلّين للمعادلة $|س| = ٣$



ونعني بها أنّ المسافة بين س و الصفر تساوي ٣ وحدات .

∴ للمعادلة $|س| = ٣$ حلّان هما ٣ ، -٣

يوضّح التمثيل البياني المقابِل على خطّ الأعداد حلين للمعادلة $|س - ٥| = ٤$



ونعني بها أنّ المسافة بين س والعدد ٥ تساوي ٤ وحدات .

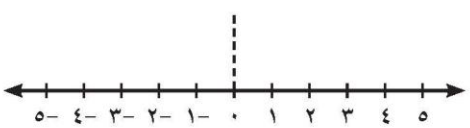
∴ للمعادلة $|س - ٥| = ٤$ حلّان هما ٩ ، ١

تدرّب (٤) :

أكمِل لتوجد حلّ المعادلات التالية مستعينًا بالتمثيل الموضَّح على خطّ الأعداد :

أ $|س| = ٤$

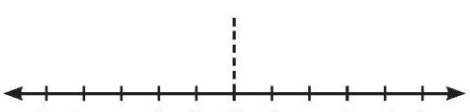
للمعادلة حلّان هما :



س = ... أو س = ...

ب $|س - ٣| = ٥$

للمعادلة حلّان هما :



س = ... أو س = ...

(١) إذا كان ﺃ عددًا حقيقيًّا موجَبًا ، فإنّ المعادلة :

| س | = ﺃ

لها حلّان هما س = ﺃ أو س = − ﺃ ومجموعة الحلّ هي {ﺃ ، − ﺃ}

(٢) إذا كان ﺃ عددًا حقيقيًّا سالبًا ، فإنّ المعادلة :

| س | = ﺃ ليس لها حلّ في ح ومجموعة حلّها هي ∅

(٣) إذا كان ﺃ = ٠ ، فإنّ المعادلة :

| س | = ﺃ لها حلّ وحيد هو س = ٠ ومجموعة حلّها هي {٠}

تذكَّرْ أنّ :

- المجموعة الخالية نعبّر عنها : { } أو ∅
- النظير الجمعي للعدد ﺃ هو (− ﺃ) بحيث :
  ﺃ + (− ﺃ) = (− ﺃ) + ﺃ = صفر
- النظير الضربي للعدد ﺃ هو $\frac{١}{ﺃ}$ بحيث :
  ﺃ × $\frac{١}{ﺃ}$ = $\frac{١}{ﺃ}$ × ﺃ = ١ ، حيث ﺃ ≠ ٠

مثال (٢) :

أوجد مجموعة حلّ المعادلة : | ٢ س + ١ | = ٣ في ح .

الحل :

٢ س + ١ = ٣

٢ س + ١ − ١ = ٣ − ١

٢ س = ٢

$\frac{١}{٢}$ × ٢ س = $\frac{١}{٢}$ × ٢

س = ١

أو

٢ س + ١ = − ٣

٢ س + ١ − ١ = − ٣ − ١

٢ س = − ٤

$\frac{١}{٢}$ × ٢ س = $\frac{١}{٢}$ × − ٤

س = − ٢

∴ مجموعة الحلّ = {١ ، − ٢}

تدرّب (٥) :

أوجد مجموعة حل المعادلة : | ٣ س − ٢ | = ٧ في ح .

٣ س − ٢ = ٧

٣ س − ٢ + ... = ٧ .....

٣ س = ...

..... × ٣ س = ... × .....

س = ...

أو

٣ س − ٢ = − ٧

٣ س − ٢ + ... = ... − = − ٧ .....

٣ س = ...

..... × ٣ س = ... × .....

س = ...

∴ مجموعة الحلّ = {٣ ، − $\frac{٥}{٣}$}

تدرّب (٦) :

أوجد مجموعة حل كلٍّ من المعادلات التالية في ح :

أ $|٥ص - ٢| + ٩ = ٩$

$|٥ص - ٢| + ٩ - ٩ = ٩$ .....

$|٥ص - ٢| = ٠$

ب $|٤س + ١| + ٧ = ١$

جـ $٢|٣ - س| = ٦$

تمــرَّنْ :

١ أوجِد قيمة كلٍّ ممّا يلي :

أ $|٣س| - ٦$ إذا كانت س = ٣

ب $|س + ٢| + |٦|$ إذا كانت س = − ٢

جـ $|س \times ٧ - ٦|$ إذا كانت س = ٧

د $|س - ٨| + |-٦,٤|$ إذا كانت س = ٢

٢ أوجِد مجموعة حل كلّ من المعادلات التالية في ح :

أ | ٥ س – ٣ | = ٨

ب | ٢ س | = ٠

جـ | ١ – ص | = ٤

د | ٣ س + ٧ | = ٠

هـ $|٥س - ٤| = -٣$

و $٢|س - ٣| = ١٠$

ز $|س| - ١ = ٣$

ح $٣|٤س + ١| - ٩ = ٠$

١-٥ حلّ متباينة من الدرجة الأولى في متغيّر واحد
Solving First Degree Inequality in One Variable

سوف تتعلّم : كيفية حلّ متباينة من الدرجة الأولى في متغيّر واحد .

العبارات والمفردات :
المتباينة
Inequality

نشاط :

يُعَدّ مرض السكّري من المشاكلّ الصحّية الشديدة الانتشار في عصرنا الحالي ، وطبقًا للإحصائيات الطبّية العالمية ، فإنّه يوجد ما يُقدَّر عددهم بـ (٣٥٠) مليون مريض بالسكّري حول العالم ، ولا تزال هذه الأعداد في تزايد مستمرّ على الرغم من التقدّم الطبّي الهائل .

يوضّح الجدول التالي نسبة السكّر الطبيعية في دم الإنسان بوحدة مجم / ديسيلتر مقارنة بالعمر :

	العمر	أصغر من ٥٠ سنة	أصغر من ٦٠ سنة	أكبر من أو يساوي ٦٠ سنة
نسبة السكّر في الدم	صائم	أصغر من أو تساوي ١٠٠	أصغر من أو تساوي ١١٠	أصغر من أو تساوي ١١٠
	غير صائم	أصغر من ١٤٠	أصغر من ١٥٠	أصغر من ١٦٠

معلومات مفيدة :
الأسباب المؤدّية إلى الإصابة بمرض السكّري :
تنتج الإصابة بمرض السكّري عن عدم قدرة البنكرياس على إفراز الكمّية المناسِبة من الأنسولين ما يؤدّي إلى عدم قدرة الجسم على التعامل مع الغذاء المهضوم ، وبالتالي يحدث اضطراب في عملية التمثيل الغذائي في الجسم مما ينتج عنه رفع نسبة السكّر في الدم .

التعبيرات (أصغر من) ، (أصغر من أو تساوي) ، (أكبر من) ، (أكبر من أو تساوي)

يرمز لها بالعلاقات : ($>$) ، ($\geq$) ، ($<$) ، ($\leq$)

• أعِد كتابة الجدول مستخدِمًا رموز العلاقات السابقة :

العمر		< ٥٠ سنة	٦٠ ..... سنة	..... ٦٠ سنة
نسبة السكّر في الدم	صائم	..... ١٠٠	≥ ١١٠	..... ١١٠
	غير صائم	..... ١٤٠	١٥٠	< ١٦٠

* في المعادلات نستخدم رمز علاقة المساواة (=) ، بينما في المتباينات نستخدم رموز العلاقات < ، > ، ≥ ، ≤ .

من خواص التباين :

لكل أ ، ب ، جـ ∈ ح ، إذا كان أ < ب فإنّ :

(١) أ + جـ < ب + جـ

(٢) أ − جـ < ب − جـ

(٣) أ × جـ < ب × جـ ، حيث جـ < ٠

(٤) أ × جـ > ب × جـ ، حيث جـ < ٠

تدرّب (١) :

أوجِد مجموعة حلّ المتباينة : ٢س + ٣ ≥ ٧ في ح ، ومثِّلها على خطّ الأعداد الحقيقية .

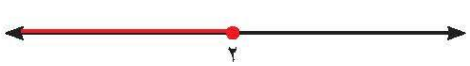
٢ س + ٣ ..... ≥ ٧ .....

٢ س ≥ .....

$\frac{١}{٢} \times ٢$ س ≥ $\frac{١}{٢}$ × ..... ضرب الطرفين في النظير الضربي للعدد ٢

س ≥ .....

مجموعة الحلّ = [..... ، ∞ −) =



تدرّب (٢) :

أوجِد مجموعة حل : ٢ − ٣ س < ١٤ في ح ، ومثِّلها على خطّ الأعداد الحقيقية .

−٣ س < ١٤ − .....

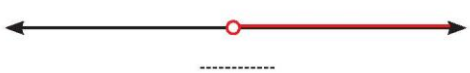
−٣ س < .....

$-\frac{١}{٣} \times -٣$ س > $-\frac{١}{٣} \times$ ..... بضرب طرفي المتباينة في $-\frac{١}{٣}$ ،

$-\frac{١}{٣}$ < ٠ (نعكس علاقة الترتيب)

س > .....

مجموعة الحل = (..... ، ∞)



تدرّب (٣) :

أوجِد مجموعة حل المتباينة : ٣ > س + ١ ≥ ٤ ، س ∈ ح ، ومثِّلها على خطّ الأعداد الحقيقية.

٣ − ١ > س + ١ − ١ ≥ ٤ − ١

..... > س ≥ .....

مجموعة الحل = (..... ، .....]

حلّ متباينات تتضمّن قيمة مطلَقة

تذكَّرْ أنّ :

• إذا كان | س | = أ

حيث أ ∈ ح+ فإن :

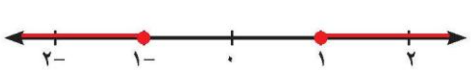
س = أ أو س = −أ

• مجموعة حل | س | ≥ ١

هي جميع الأعداد الحقيقية التي بعدها عن الصفر على خطّ الأعداد الحقيقية أصغر من أو يساوي ١

• مجموعة حل | س | ≤ ١

هي جميع الأعداد الحقيقية التي بعدها عن الصفر على خطّ الأعداد الحقيقية أكبر من أو يساوي ١



تذكَّرْ أنّ :
الرمز ⟺ يقرأ
إذا وفقط إذا .

| س | ≥ أ ⟺ -أ ≥ س ≥ أ ، حيث أ ∈ ح+ ، س ∈ ح

مثال (١) :

أوجِد مجموعة حلّ المتباينة : | س + ٤ | < ٧ في ح ، ومثِّلها على خطّ الأعداد الحقيقية .

الحل :

| س + ٤ | < ٧

-٧ < س + ٤ < ٧

-٧ - ٤ < س + ٤ - ٤ < ٧ - ٤

-١١ < س < ٣

مجموعة الحلّ = (- ١١ ، ٣)

تدرّب (٤) :

أوجِد مجموعة حلّ المتباينة | س + ٢ | - ٣ ≥ ٥ في ح ، ومثِّلها على خطّ الأعداد الحقيقية .

| س + ٢ | ≥ ٥ + ٣

| س + ٢ | ≥ .....

..... ≥ س + ٢ ≥ .....

..... ≥ س + ٢ ..... ≥ .....

..... ≥ س ≥ .....

مجموعة الحلّ = [..... ، .....]

| س | ≤ أ ⟺ س ≤ أ أو س ≥ −أ ، حيث أ ∈ ح+ ، س ∈ ح

مثال (٢) :

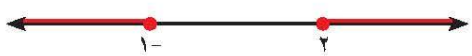
أوجِد مجموعة حلّ المتباينة : | ٢ س − ١ | ≤ ٣ في ح ، ومثِّلها على خطّ الأعداد الحقيقية .

الحل :

| ٢ س − ١ | ≤ ٣

٢ س − ١ ≤ ٣	أو ٢ س − ١ ≥ −٣
٢ س ≤ ٣ + ١	٢ س ≥ −٣ + ١
٢ س ≤ ٤	٢ س ≥ −٢
س ≤ $\frac{٤}{٢}$	س ≥ $\frac{-٢}{٢}$
س ≤ ٢	س ≥ −١
س ∈] ٢ ، ∞)	س ∈ (−∞ ، −١]

مجموعة الحل =] ٢ ، ∞) ∪ (−∞ ، −١]



تدرّب (٥) :

أوجِد مجموعة حلّ المتباينة : ٢ | ٢ − س | > ٧ في ح ، ومثِّلها على خط الأعداد الحقيقية .

| ٢ − س | > $\frac{٧}{٢}$

| س − ٢ | > $\frac{٧}{٢}$

س − ٢ >	أو س − ٢ < .....
س >	س < .....
س >	س < .....
س ∈ (.....)	س ∈ (.....)

مجموعة الحل = (.....) ∪ (.....)

فكِّر وناقِش

ما مجموعة حل $|س| < -٧$ ؟ ولماذا ؟

تدرّب (٦) :

أوجد مجموعة حلّ المتباينة : $٥ - |س| \leq ٦$ في ح .

تدرّب (٧) :

يقدم محل للعصائر الطازجة أنواع مختلفة من العصير ، فإذا كان يقدم نوع من العصير بخلط ثلاث أنواع من عصير الفواكه هي : الفراولة والمانجو والأناناس . فإذا كانت كمية عصير الفراولة $\frac{١}{٤}$ لتر ، والمانجو $١\frac{١}{٢}$ لتر ، فما هي الكمية التي يمكن إضافتها من عصير الأناناس علمًا بأن وعاء الخلط يتسع إلى ٢ لتر على الأكثر .

(اكتب متباينة لإيجاد كمية عصير الأناناس المناسبة) .

تمـــرَّنْ :

أوجِد مجموعة حلّ كلّ من المتباينات التالية في ح ، ومثِّلها على خطّ الأعداد الحقيقية .

١ س − ٥ < ٢

٢ ١ ≥ ٢ ص + ٣ < ١١

٣ | س + ٧ | > ٥

٤ | م + ٢ | ≤ ٤

٥ ٢| س |- ٣ < ٧

٦ | ٣ س + ٢ |- ٥ ≥ ٨

٧ $٥ - |س| > -٢$

٨ $٩ \geq |٣ - ٢س|$

٩ ليحصل المتعلم على تقدير امتياز في مادّة الرياضيات ، فإنّ عليه أنّ يحصل على ما لا يقلّ عن ٢٧٠ درجة في ٣ اختبارات لهذه المادّة ، حصل سالم على الدرجات ٩١ ، ٨٤ في الاختبار الأوّل والاختبار الثاني ، فما الدرجات التي يجب أنّ يحصل عليها سالم في الاختبار الثالث ليحصل على تقدير امتياز .

١-٦ الصورة العلمية باستخدام الأسس الصحيحة
Scientific Notation by Using Integer Exponents

سوف تتعلّم : كتابة الأعداد الكبيرة والأعداد متناهية الصغر بالصورة العلمية .

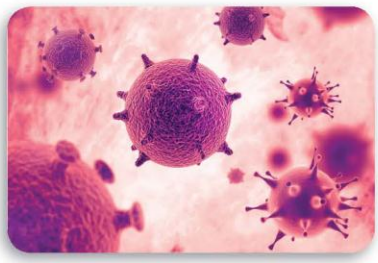
العبارات والمفردات :

صورة علمية
Scientific Notation

أسس موجَبة
Positive Exponents

أسس سالبة
Negative Exponents

نشاط :



في مختبر الأحياء يقوم العلماء بقياس أطوال بعض الكائنات الحية والكائنات المجهرية بالملّيمتر (مم) وأجزاءه ، وكانت بعض نتائجهم (في صورة قوى العدد ١٠) كما في الجدول التالي .

أكمِل الجدول لكي تكتشف النمط :

أطوال الكائنات بـ (مم)	١٠٠٠	١٠٠	١٠	١	$\frac{١}{١٠}$	$\frac{١}{١٠٠}$	$\frac{١}{١٠٠٠}$
العدد بالصورة العشرية	١٠٠٠,٠		١٠,٠	١,٠	٠,١		
الصورة الأسّية	$١٠^{٣}$	$١٠^{٢}$		$١٠^{٠}$	$١٠^{-١}$		
قوة العدد ١٠ (الأسّ)	٣	٢		٠	-١		

- صف النمط في الصفّ الثاني والثالث والرابع من الجدول .
- صف العلاقة بين العدد في الصورة العشرية والصورة الأسية له .

الصورة العلمية (القياسية) باستخدام الأسس الصحيحة الموجَبة

مثال (١) :

أُكتب العدد ٦٥ ٢٤١ بالصورة العلمية .

الحل :

٦٥ ٢٤١ , ٠

العدد في الصورة العشرية

٦٥ ٢٤١ , ٠

حرِّك الفاصلة العشرية إلى اليسار لتحصل على عدد عشري أكبر من أو يساوي واحدًا وأصغر من ١٠

$٦,٥٢٤١ \times ١٠^{٤}$

عدّ المنزلات التي تحركت بها الفاصلة العشرية إلى اليسار لتمثّل قوّة العدد ١٠

$\therefore$ ٦٥ ٢٤١ = $٦,٥٢٤١ \times ١٠^{٤}$

$\therefore$ $٦,٥٢٤١ \times ١٠^{٤}$ تُسمّى بالصورة العلمية (القياسية) للعدد

معلومات مفيدة :

الـميكروبيولوجي
Microbiology

هو علم دراسة الأحياء الدقيقة غير المرئية بالعين المجرَّدة ، مثل البكتيريا والفطريات .

الـميكرومتر : وهو أحد أجزاء وحدة المتر التي تُستخدَم لقياس المسافات والأطوال القصيرة جدًّا ، وهي تمثّل ٠,٠٠٠٠٠١ من المتر (واحد من مليون من المتر) .

النانومتر : وهو أيضًا يمثّل أحد أجزاء وحدة المتر الصغيرة جدًّا ؛ حيث يُستخدَم لقياس المسافات والأطوال الشديدة القصر ، وهي تمثّل ٠,٠٠٠٠٠٠٠٠١ من الـمتر (واحد من ألف مليون من المتر) .

الصورة العلمية (القياسية) للعدد :

يُكتَب العدد على الصورة : $أ \times ١٠^{ن}$ حيث $١ \leq |أ| < ١٠$ ، $ن \in صـ$.

فمثلًا :

الشكلّ النظامي		الصورة العلمية (القياسية)
٦٥ ٢٤١	=	$٦,٥٢٤١ \times ١٠^{٤}$

عدد عشري قيمته المطلقة أكبر من أو يساوي ١ وأصغر من ١٠

قوى العدد ١٠ في الصورة الأسية

تذكَّرْ أنّ :

- المليون = $١٠^{٦} = ١٠٠٠٠٠٠$
- المليار = $١٠^{٩} = ١٠٠٠٠٠٠٠٠٠$
- التريليون = $١٠^{١٢} = ١٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠$

تدرّب (١) :

أُكتب بالصورة العلمية كلًّا ممّا يلي :

أ) $٤ ٣٧٥ = ٤,٣٧٥ \times ١٠^{\square}$

ب) $٤١٥,٣ =$ .....

جـ) $-١ ١٨٠$ مليونًا $= - ١ ١٨٠ ٠٠٠ ٠٠٠ = - ١,١٨ \times$ .....

د) ٢٣١ مليار $=$ .....

تدرّب (٢) :

أُكتب رمز كلّ من الأعداد التالية بالشكلّ النظامي :

أ) $١,٤ \times ١٠^{٣} = ١ ٤٠٠$

ب) $٣,٤٥٦ \times ١٠^{٥} =$ .....

جـ) $٦,٨٩ \times ١٠^{٦} =$ .....

د) $٢,٠٠٣ \times ١٠^{٧} =$ .....

الصورة العلمية (القياسية) باستخدام الأسس الصحيحة السالبة

مثال (٢) :

أُكتب العدد $٠,٠٠٢٥٦$ بالصورة العلمية .

الحل :

$٠,٠٠٢٥٦$

حرِّك الفاصلة العشرية إلى اليمين لتحصل على عدد عشري أكبر من أو يساوي واحدًا وأصغر من ١٠

$٢,٥٦ \times ١٠^{-٣}$

عدّ المنزلات التي تحرّكت بها الفاصلة العشرية لليمين لتمثّل قوّة العدد ١٠

$\therefore ٠,٠٠٢٥٦ = ٢,٥٦ \times ١٠^{-٣}$

$\therefore ٢,٥٦ \times ١٠^{-٣}$ تُسمّى بالصورة العلمية (القياسية) للعدد

تدرّب (٣) :

أُكتب بالصورة العلمية كلًّا ممّا يلي :

أ) $٠,٠٠٠٥٩ = ٥,٩ \times ١٠^{\square}$

ب) $- ٠,٠٠٠٠٠٦٤٥ = -$ .....

جـ) أربعمئة وخمسون جزءًا من مئة ألف = $٠,٠٠٤٥٠$ = ...

د) ٤٣ جزءًا من مليون = ... = ...

هـ) $\frac{٥٣}{١٠٠٠٠٠}$ = ... = ...

تدرّب (٤) :

أُكتب رمز كلّ من الأعداد التالية بالشكلّ النظامي :

أ) $٢,٥ \times ١٠^{-٢}$ = ...

ب) ٣×١٠^{-٦} = ...

جـ) $- ٤,٠٠٣ \times ١٠^{-٥}$ = ...

د) $٢,٥٦٤ \times ١٠^{-٤}$ = ...

تدرّب (٥) :

قارِن بوضع $>$ ، $<$ ، $=$ في كلّ ممّا يلي لتحصل على عبارة صحيحة :

أ) $٤,٤ \times ١٠^{-٣}$ ◯ $٤,٤ \times ١٠^{-٥}$

ب) $٣,٠٥ \times ١٠^{٧}$ ◯ $٧,٢ \times ١٠^{٧}$

جـ) $٢,٧ \times ١٠^{-٦}$ ◯ $٤,٠٧ \times ١٠^{-٤}$

مثال (٣) :

أوجد ناتج ما يلي بالصورة العلمية : $١,٤ \times ١٠^{٣} + ٧,٢ \times ١٠^{٣}$

الحل :

$١,٤ \times ١٠^{٣} + ٧,٢ \times ١٠^{٣}$

$= ١٠^{٣} (١,٤ + ٧,٢)$ (بأخذ $١٠^{٣}$ عامل مشترك)

$= ١٠^{٣} (١١,٣)$

$= ١١,٣ \times ١٠^{٣}$

$= ١,١٣ \times ١٠^{٤}$

تدرّب (٦) :

أوجد ناتج ما يلي بالصورة العلمية :

أ $٦,٤ \times ١٠^{٨} - ٢,٣ \times ١٠^{٨}$

$= ١٠^{٨} ($ ..... $)$

$=$ .....

$=$ .....

تذكَّرْ أنّ :

إذا كان س ، ص أعداد صحيحة :

- $أ^{س} \times أ^{ص} = أ^{س+ص}$
- $\frac{أ^{س}}{أ^{ص}} = أ^{س-ص}$ ، حيث $أ \neq ٠$

ب $(٢,١ \times ١٠^{٥}) \div (٣ \times ١٠^{-٢})$

$\frac{٢,١ \times ١٠^{٥}}{٣ \times ١٠^{-٢}} =$ ..... $\times ١٠^{\square}$

$=$ ..... $\times ١٠^{\square}$

$=$ ..... $\times ١٠^{\square}$

جـ $(٣,٢ \times ١٠^{٧}) \times (٢ \times ١٠^{-٣})$

$= ($ ..... $\times ٣,٢) \times (١٠^{\square} \times ١٠^{\square})$

$=$ ..... $\times ١٠^{\square}$

معلومات مفيدة :

أوزان بعض كواكب مجموعتنا الشمسية بالطنّ .

(١) عطارد
$٣,٣ \times ١٠^{٢٠}$

(٢) الزهرة
$٤,٩ \times ١٠^{٢١}$

(٣) الأرض
$٥,٩ \times ١٠^{٢١}$

(٤) المشتري
$١,٩ \times ١٠^{٢٤}$

تدرّب (٧) :

يبلغ طول حشرة السوس ٠,٠٩٦٥٢ سم ، بينما يبلغ طول حشرة الماء ٠,٠١٩٨١ سم .
أُكتب العددين بالصورة العلمية ، ثمّ وضِّح أيّ الحشرتين هي الأصغر طولًا ؟

تدرّب (٨) :

يبلغ طول قطر الأرض $١,٢٨ \times ١٠^{٤}$ كم ، وطول قطر كوكب المشتري $١,٤٣ \times ١٠^{٥}$ كم ، فبكم يزيد طول قطر كوكب المشتري عن طول قطر الأرض ؟

مقدار الزيادة = $١,٤٣ \times ١٠^{٥} - ١,٢٨ \times ١٠^{٤}$

= $١٠^{٤} \times$ (..... – .....)

= $١٠^{٤} \times$ ..... = ... كم

فكّر وناقِش

١ هل يوجَد عدد لا يمكن كتابته في الصورة العلمية ؟

٢ هل ($١٠^{\text{صفر}}$) هو عدد في الصورة العلمية ؟

تمـــرَّنْ :

١ أُكتب بالصورة العلمية كلًّا ممّا يلي :

أ ٤٥٦٠٠٠ = ...

ب ٠,٠٠٣٤٢ = ...

جـ ٦١ ٣٥٤ = ...

.....

.....

د ٠,٠٠٠١٩٦٧ = ...

.....

.....

هـ ٣ ٩٤٤ مليونًا = ...

.....

.....

و ٣٤١ تريليونًا = ...

.....

.....

ز سبعمئة وأربعة وخمسون مليارًا = ...

.....

.....

ح ستّمئة وثلاثون جزءًا من عشرة آلاف = ...

.....

.....

ط ٥١ جزءًا من مليون = ...

.....

.....

ي ٣٨٦ جزءًا من مليار = ...

.....

.....

٢ أُكتب كلًّا ممّا يلي بالشكلّ النظامي :

أ $١,٢١ \times ١٠^{٥} =$ .....

.....

ب $-٣,٤ \times ١٠^{-٥} =$ .....

.....

جـ $٢,٠٩ \times ١٠^{٤} =$ .....

.....

د $٢ \times ١٠^{-٧} =$ .....

.....

هـ $-٣ \times ١٠^{٧} =$ .....

.....

و $٣,٢٣١ \times ١٠^{-٢} =$ .....

.....

---

٣ قارِن بوضع > ، < ، = في كلّ ممّا يلي لتحصل على عبارة صحيحة :

أ $٩,٩ \times ١٠^{٧}$ ◯ $١,١ \times ١٠^{٨}$

ب $٣,٢ \times ١٠^{-٢}$ ◯ $١,٧ \times ١٠^{-٣}$

جـ $٣,٥٤ \times ١٠^{-١}$ ◯ ٣٥٤ جزءًا من ألف

---

٤ أوجِد ناتج كلٍّ ممّا يلي بالصورة العلمية :

أ $٣,٥ \times ١٠^{٥} + ٢,٢ \times ١٠^{٥} =$ .....

.....

.....

ب $٩,٨ \times ١٠^{٤} - ٢,٧ \times ١٠^{٤} =$ .....

.....

.....

جـ $(٤,٣ \times ١٠^{٢}) \times (٥ \times ١٠^{-٤}) =$ .....

.....

.....

د $(٦,٣ \times ١٠^{-٤}) \div (٧ \times ١٠^{٢}) =$ .....

.....

.....

٥ بلغت مساحة مركز الشيخ عبد الله السالم الثقافي ١٢٧ ٠٠٠ متر مربّع .
أُكتب هذه المساحة في الصورة العلمية .

.....

.....

٦ في عام ٢٠١٦ م ، بلغ عدد سكّان دولة الكويت حوالى ($٤,١ \times ١٠^{٦}$) نسمة ، بينما بلغ عدد سكّان دولة الإمارات العربية المتّحدة حوالى ($٨,٣ \times ١٠^{٦}$) نسمة .
فأيّ الدولتين هي الأكثر عددًا في السكّان؟ وكم بلغ مجموع عدد سكّان الدولتين معًا بالصورة العلمية ؟

.....

.....

.....

.....

.....

.....

١-٧ مراجعة الوحدة الأولى
Revision Unit One

أوّلًا : التمارين المقالية

١ أوجِد مجموعة حل كلّ من المعادلات التالية في ح :

أ $|٢س + ٣| = ٧$

ب $٢|٦ - ص| = ١$

جـ $٤|س - ٩| + ٧ = ٧$

٢ أوجِد مجموعة حلّ كلّ من المتباينات التالية في ح ، مع تمثيل مجموعة الحلّ على خطّ الأعداد الحقيقية :

أ $|٣س - ٧| \geq ٢$

ب $|س + ١| > ٥$

جـ $٢|٩ - س| > ٦$

د $|٥س + ٤| - ٣ \leq ٨$

هـ $٤ - |س| > ١٠$

---

٣ أكمل الجدول التالي :

رمز العدد بالشكلّ النظامي	الصورة العلمية
٣٥ ٠٠٠	.....
.....	$٦,٠٣ \times ١٠^{-٣}$
٠,٠٠٠٧٣	.....
.....	$-٨,٤٤ \times ١٠^{٥}$

---

٤ أوجِد ناتج كلّ ممّا يلي بالصورة العلمية :

أ $(١,٧ \times ١٠^{٩}) + (٢,٦ \times ١٠^{٩}) =$ .....

ب $(٩,٣٦ \times ١٠^{٦}) - (٨,١ \times ١٠^{٦}) =$ .....

جـ $(٣ \times ١٠^{٥}) \times (٤,١ \times ١٠^{-٣}) =$ .....

د $(٢,٤ \times ١٠^{-٢}) \div (٦ \times ١٠^{٧}) =$ .....

---

٥ تنتج دولة الكويت كمّية من النفط تبلغ ٣,١ مليون برميل يوميًّا ، إذا أرادت زيادة إنتاجها نصف مليون برميل يوميًّا ، فكم سيبلغ إنتاجها من النفط في اليوم الواحد بعد الزيادة ؟

إنتاج الكويت في اليوم الواحد بعد الزيادة = ...

الشكلّ النظامي : .....

الصورة العلمية : .....

ثانيًا : التمارين الموضوعية

أولًا : في البنود التالية ، ظلّل (أ) إذا كانت العبارة صحيحةً ، وظلّل (ب) إذا كانت العبارة غير صحيحة .

١ $\sqrt[٧]{س + ص} = \sqrt[٧]{س} + \sqrt[٧]{ص}$	(أ)	(ب)
٢ الأعداد : $\sqrt[٧]{١٠}$ ، $٣,\overline{٦}$ ، $-\pi$ مرتّبة ترتيبًا تنازليًّا .	(أ)	(ب)
٣ مجموعة حل المعادلة $\lvert س \rvert = -٥$ في ح ، هي $\{٥ ، -٥\}$	(أ)	(ب)
٤ مجموعة حل المتباينة $\lvert س + ١ \rvert \geq ٣$ في ح ، هي $[-٤ ، ٢]$	(أ)	(ب)
٥ إذا كانت س = ٣ ، فإن قيمة $\lvert س - ٣ \rvert + ٧$ هي ٧	(أ)	(ب)

ثانيًا : لكل بند من البنود التالية أربعة اختيارات ، واحد فقط منها صحيح ، ظلّل الدائرة الدالة على الإجابة الصحيحة .

٦ الفترة التي تمثل مجموعة الأعداد الحقيقية الأصغر من ٥ والأكبر من أو تساوي -٥ هي :

(أ) $(-٥ ، ٥)$ (ب) $(-٥ ، ٥]$ (جـ) $[-٥ ، ٥)$ (د) $[-٥ ، ٥]$

٧ الفترة الممثلة على خط الأعداد ← ٢ هي :

(أ) $(٢ ، \infty)$ (ب) $[٢ ، \infty)$ (جـ) $(-\infty ، ٢]$ (د) $(-\infty ، ٢)$

٨ مجموعة حل المتباينة $\lvert ٢س - ١ \rvert > ٣$ في ح هي :

(أ) $(٢ ، \infty)$ (ب) $(-\infty ، -١] \cup [٢ ، \infty)$

(جـ) $(-\infty ، -١) \cup (٢ ، \infty)$ (د) $(-١ ، ٢)$

٩ $٨ \times \frac{٣}{٢} - \frac{\sqrt{٢٧}}{\sqrt{٣}} =$

(أ) ٩ (ب) ٣ (جـ) $١\frac{١}{٢}$ (د) $١\frac{-١}{٢}$

---

١٠ أكبر الأعداد التالية هو :

(أ) $٤,٢٣ \times ١٠^{٤}$ (ب) ٣٨٠٠٠

(جـ) $٤,٢٣ \times ١٠^{٥}$ (د) $٩,٣٧ \times ١٠^{-٤}$

---

١١ العدد ٠,٠٠٥٤٣ بالصورة العلمية هو :

(أ) $٥,٤٣ \times ١٠^{٣}$ (ب) $٥,٤٣ \times ١٠^{-٣}$

(جـ) $٥٤,٣ \times ١٠^{٢}$ (د) ٥٤٣×١٠^{-٣}

---

١٢ العدد غير النسبي في ما يلي هو :

(أ) $\sqrt{١٥}$ (ب) $\frac{٧}{٩}$ (جـ) $\frac{١}{\sqrt{٦٤}}$ (د) $٠,\overline{٣}$

الوحدة الثانية

التحليل والمعادلات
Analysis & Equations

عالم الصناعة
Industrial World

تُعَدُّ الصناعة مصدرًا من أهمّ مصادر الدخل القومي ، كما تُعتَبر عصب الاقتصاد في معظم الدول ، وترتبط الصناعة في الكويت ارتباطًا وثيقًا وفعّالًا بالأنشطة الاقتصادية المختلفة .

مشروع الوحدة : (زيارة إلى مصنع الحديد والصلب)

يُعتَبر الحديد مكوِّنًا رئيسيًّا في المباني والمعدّات والسيّارات ، والأجهزة المنزلية الرئيسية . وتُعَدّ صناعة الحديد من أهمّ الصناعات الإستراتيجية ، وتقوم بدور رئيسي في التنمية الصناعية والاقتصادية ، وهي عماد معظم الصناعات الأخرى .

خطّة العمل :

- رحلة إلى مصنع الحديد والصلب .

خطوات تنفيذ المشروع :

- يقسِّم المعلّم المتعلّمين إلى مجموعات .
- يقوم أفراد المجموعة بزيارة ميدانية إلى أحد مصانع الحديد في الكويت أو البحث على شبكة الإنترنت.
- يتعرّف أفراد المجموعة على خطوط إنتاج المصنع والمخازن التابعة له .
- لنفترض أنّ المصنع ينتج مكعّبات من الحديد تُستخدَم كقاعدة لنُصب تذكارية تختلف أحجامها ، يعتمد المصنع البعد (س + ٣) كطول لحرف المكعّب ، يُحفَر بداخل هذا المكعّب لتثبيت قاعدة النصب التذكاري بحيث تكون الحفرة على شكل مكعّب طول حرفه (س + ١) ، يحسب أفراد المجموعة حجم الحديد المستخدَم .
- إذا أنتج المصنع أبوابًا من الحديد مساحة سطحها ($س^{٢}$ – ١٨ س – ٤٠) وحدة مربعة ، فأوجِد بعدي سطح الباب .

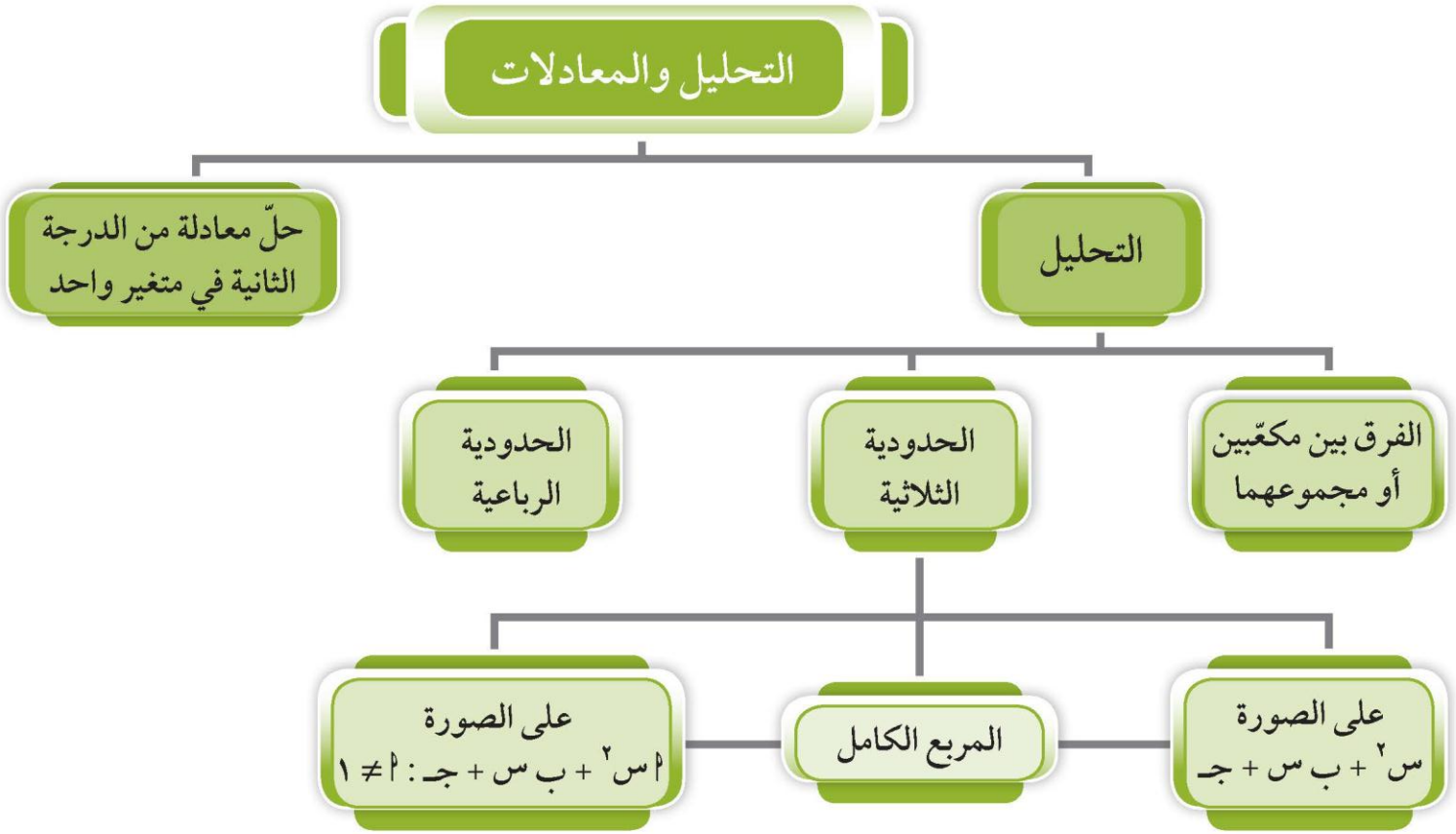
علاقات وتواصل :

- تتبادل المجموعات الحلول وتتأكّد من صحّة الحلّ .

عرض العمل :

- تعرض كل مجموعة عملها وتناقش خطوات تنفيذ العمل .

مخطَّط تنظيمي للوحدة الثانية



اِستعِدّ للوحدة الثانية

١ أوجِد العامل المشترَك الأكبر (ع . م . أ) لكلّ ممّا يلي :

أ ١٤ ، ٧

ع . م . أ = ...

ب ٦ س^{٢} ، ٨ س^{٣}

ع . م . أ = ...

٢ حلِّل ما يلي تحليلًا تامًّا :

أ ٢ س^{٢} – ٨ س

.....

ب ص^{٢} – ٤

.....

٣ أوجِد ناتج كلٍّ ممّا يلي :

أ $\sqrt[٣]{\frac{-٨}{٢٧}}$

.....

ب $\sqrt[٣]{٠,٠٦٤}$

.....

٤ أوجِد ناتج كلٍّ ممّا يلي :

أ س (س + ٣)

.....

.....

.....

ب ٣ (٢ س^{٢} – ٧ س + ٥)

.....

.....

.....

جـ (٣ س – ١) × (س + ٤)

.....

.....

.....

د (٢ ص – ١) × (٢ ص – ١)

.....

.....

.....

هـ $(س + ٥)^{٢}$

و $(س - ص)(س^{٢} + س ص + ص^{٢})$

٥ أوجِد مجموعة حل كلّ من المعادلات التالية في ح :

أ $٦ س + ٥ = ٨$

ب $س^{٢} - ١٦ = ٠$

٦ أوجِد مساحة منطقة مربعة طول ضلعها (س – ٣) سم .

٧ منطقة مستطيلة أبعادها موضَّحة في الشكل المقابل. أوجِد مساحتها .

١-٢ تحليل الفرق بين مكعّبين أو مجموعهما
Factorising the Difference Between Two Cubes or Their Sum

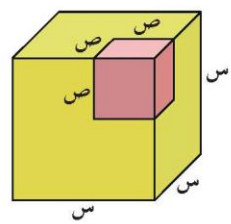
العبارات والمفردات :
- تحليل
Factorising
- الفرق بين مكعّبين
Difference Between Two Cubes
- مجموع مكعّبين
Sum of Two Cubes

سوف تتعلّم : تحليل الفرق بين مكعّبين وتحليل مجموع مكعّبين .

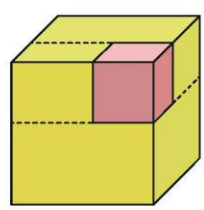
نشاط :

أنتج مصنع للإسفنج قطعة مكعّبة الشكل طول حرفها (س) وحدة طول ، ومن أحد رؤوسها تمّ قطع مكعّب صغير طول حرفه (ص) وحدة طول كما في الشكل (أ) .

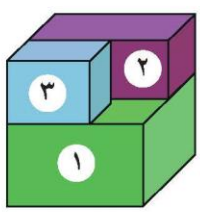
(أ)



(ب)



(جـ)



معلومات مفيدة :

الإسفنج الطبيعي يتمّ استخراجه من حيوان الإسفنج البحري ، ولكن الإسفنج المستخدم في منازلنا هو عبارة عن مادّة صناعية يتمّ تصنيعها من سيلّيلوز ألياف الخشب ، أو البوليمرات البلاستيكية الرغوية ، وكثيرًا ما يُستخدَم الإسفنج في تنظيف الأواني والأسطح المختلفة ، كما يُستخدَم أيضًا في تصنيع بعض قطع الأثاث .

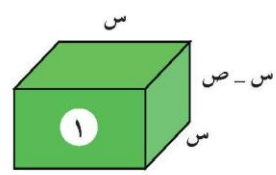
أُحسب كلًّا من : حجم المكعّب الكبير = ... × ..... × ..... = ... وحدة مكعّبة

حجم المكعّب الصغير = ... × ..... × ..... = ... وحدة مكعّبة

حجم الجزء المتبقّي = س^{٣} – ص^{٣} وحدة مكعّبة

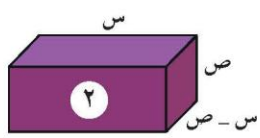
- يمكن التوصّل إلى حجم الجزء المتبقّي من قطعة الإسفنج بتجزئتها إلى ثلاثة مجسّمات ① ، ② ، ③ كلّ منها على شكل شبه مكعّب معلومة أبعاده كما يلي :

(أ)



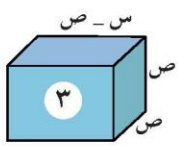
الحجم = ... × ..... × (س – ص)

(ب)



الحجم = ... × ..... × (س – ص)

(جـ)



الحجم = ... × ..... × (س – ص)

حجم الجزء المتبقّي = حجم الجزء ① + حجم الجزء ② + حجم الجزء ③

س^{٣} – ص^{٣} = ... (س – ص) + ... (س – ص) + ... (س – ص)

= (س – ص) (س^{٢} + س ..... + ...)

تحقق من ذلك بإجراء عملية الضرب.

مما سبق نستنتج أنه لتحليل الفرق بين مكعبين $س^{٣}$ ، $ص^{٣}$ نتبع القاعدة التالية :

$$س^{٣} - ص^{٣} = (س - ص) (س^{٢} + س ص + ص^{٢})$$

يمكن استبدال (ص) بـ (– ص) في القاعدة السابقة لنصل إلى الصورة :

$$س^{٣} + ص^{٣} = (س + ص) (س^{٢} - س ص + ص^{٢})$$

وهو ما يمثل مجموع مكعبين .

مثال :

حلِّل كلًّا مما يلي تحليلًا تامًّا :

أ $س^{٣} - ٢٧$

الحل :

$س^{٣} - ٢٧$

$= (س - ٣) (س^{٢} + ٣س + ٩)$

ب $٦٤ أ^{٣} + ب^{٣}$

الحل :

$٦٤ أ^{٣} + ب^{٣}$

$= (٤ أ + ب) (١٦ أ^{٢} - ٤ أ ب + ب^{٢})$

تدرّب (١) :

حلِّل كلًّا مما يلي تحليلًا تامًّا :

أ $س^{٣} - ٦٤ = (_____ - ٤) (_____ + _____ + ١٦)$

ب $١ - ٨ ص^{٣} = (_____ - ٢ ص) (_____ + _____ + _____)$

جـ $٨ ل^{٣} + ٢٧ م^{٣} = (_____) (_____)$

تدرّب (٢) :

حلِّل كلًّا مما يلي تحليلًا تامًّا :

أ $٣ ع^{٣} - ٨١ = ٣ (ع^{٣} - _____)$

$= ٣ (ع - _____) (_____ + ٣ ع + _____)$

ب $٢ س^{٤} + ١٦ س = _____ (_____ + ٨)$

$= _____ (_____ + ٢) (_____ - _____ + _____)$

جـ $٥ - ٤٠ م^{٣} = _____ (١ - _____ م^{٣})$

$= _____ (١ - _____ م) (_____)$

تدرّب (٣) :

حلِّل كلًّا مما يلي تحليلًا تامًّا :

أ) $\frac{٢٧}{٦٤} + ن^{٦} = ($ ..... $+ ن^{٢}) ($ ..... $-$ ..... $+ ن^{٤})$

ب) $\frac{١}{١٢٥} أ^{٣} - \frac{٨}{٢٧} ب^{٣} = ($ ..... $أ -$ ..... $ب) ($ ..... $+$ ..... $+$ ..... $ب^{٢})$

جـ) $س^{٣} - ٠,١٢٥ = ٠ (س -$ ..... $) ($ ..... $+$ ..... $س + ٠,٢٥)$

ملاحظة :

$م^{٦} = (م^{٢})^{٣}$

$= (م^{٣})^{٢}$

فكِّر وناقِش

هل يمكن تحليل ($م^{٦} - ن^{٦}$) بطريقتين مختلفتين ؟ وضِّح ذلك ؟ وقارن بين ما حصلت عليه .

تدرّب (٤) :

صندوق على شكل شبه مكعّب حجمه ($أ^{٣} + ٢٧$) متر مكعب وارتفاعه (أ + ٣) متر ، وظِّف مفهوم التحليل لإيجاد مساحة قاعدته .

تذكَّرْ أنّ :

حجم شبه المكعب =

مساحة القاعدة × الارتفاع

.....

.....

.....

تمـــرَّنْ :

١) حلِّل كلًّا مما يلي تحليلًا تامًّا :

أ) $أ^{٣} + ١ =$ .....

ب) $ب^{٣} - ٨ =$ .....

جـ) $٨ ل^{٣} + ١٢٥ =$ .....

د) $١ - ٢٧ هـ^{٣} =$ .....

هـ) $ل^{٣} م^{٦} + ن^{٣} =$ .....

و) $١٢٥ س^{٣} - ٦٤ ص^{٣} ع^{٣} =$ .....

٢ حلِّل كلًّا مما يلي تحليلًا تامًّا :

أ $٠,٠٢٧ - ص^{٣}$ = ...

.....

ب $\frac{٨}{٢٧} أ^{٣} + \frac{١}{٦٤} ب^{٣}$ = ...

.....

جـ $٥٤ ب^{٤} - ٢ ب$ = ...

.....

د $٨١ ك^{٣} + ٣ هـ^{٣}$ = ...

.....

هـ $٣ س^{٥} - ٢٤ س^{٢}$ = ...

.....

و $١٦ س^{٤} + ٥٤ س ص^{٣}$ = ...

.....

٣ مكعّب طول ضلعه (س + ٣) سم ، حُفِر بداخله مكعّب طول ضلعه (س + ١) سم ، فما حجم الجزء المتبقي من المكعّب بعد الحفر .

.....

.....

.....

.....

.....

.....

٢-٢ تحليل المربّع الكامل
Factorising Perfect Square

العبارات والمفردات :
مربّع كامل
Perfect Square

سوف تتعلّم : تحليل المربّع الكامل .

نشاط :

حلِّل الحدودية التالية تحليلًا تامًّا بالطريقة العملية والطريقة الجبرية :

$س^{٢} + ٤ س + ٤$

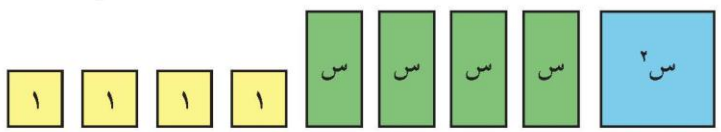
أوّلًا: الطريقة العملية :

اللوازم :

بطاقات الجبر	
$س^{٢}$	$س \times س$
س	$١ \times س$
١	١×١

الخطوة الأولى :

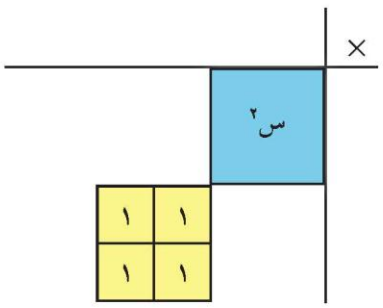
مثِّل الحدودية $س^{٢} + ٤ س + ٤$ ببطاقات الجبر كما يلي :



الخطوة الثانية :

في زاوية رقعة الضرب ضع بطاقة $س^{٢}$ ،

كذلك ضع بطاقات ١ على شكل مصفوفة كما في الشكل :



الخطوة الثالثة :

أكمل شكل المربّع على رقعة الضرب ببطاقات س ،

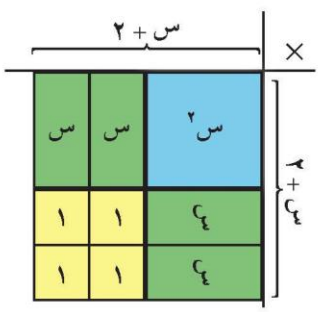
فنلاحظ أنّ طول ضلع المربّع = س + ٢

∴ مساحة المربّع = (س + ٢) (س + ٢)

$= (س + ٢)^{٢}$

∴ $س^{٢} + ٤ س + ٤ = (س + ٢) (س + ٢)$

$= (س + ٢)^{٢}$



ثانيًا: الطريقة الجبرية :

درست في ما سبق :

للضرب : $(أ + ب)^{٢} = أ^{٢} + ٢ أ ب + ب^{٢}$

= مربّع الحدّ الأوّل + ٢ × الحدّ الأوّل × الحدّ الثاني + مربّع الحدّ الثاني ،

$(أ - ب)^{٢} = أ^{٢} - ٢ أ ب + ب^{٢}$

= مربّع الحدّ الأوّل − ٢ × الحدّ الأوّل × الحدّ الثاني + مربّع الحدّ الثاني .

وللتحليل : $أ^{٢} + ٢ أ ب + ب^{٢} = (أ + ب)^{٢}$

= (الجذر التربيعي الموجَب للحدّ الأوّل + الجذر التربيعي الموجَب للحدّ الثالث)^{٢}

$أ^{٢} - ٢ أ ب + ب^{٢} = (أ - ب)^{٢}$

= (الجذر التربيعي الموجَب للحدّ الأوّل − الجذر التربيعي الموجَب للحدّ الثالث)^{٢}

∴ **لتحليل الحدودية** $س^{٢} + ٤ س + ٤$:

- الجذر التربيعي الموجب للحد الأول = س
- الجذر التربيعي الموجب للحد الثالث = ٢

∴ $س^{٢} + ٤ س + ٤ = (س + ٢)^{٢}$

وهذا المقدار ($س^{٢} + ٤ س + ٤$) يسمى مربّعًا كاملًا

وستقتصر دراستنا في هذا الكتاب على الطريقة الجبرية فقط .

مثال (١) :

حدِّد ما إذا كانت الحدودية الثلاثية التالية مربّعًا كاملًا أم لا ؟ ثم حلّل الحدودية إذا كانت مربعًا كاملًا .

$س^{٢} + ١٠ س + ٢٥$

الحل :

- هل $س^{٢}$ مربّع كامل ؟ **الإجابة :** نعم
- هل ٢٥ مربّع كامل ؟ **الإجابة :** نعم
- هل الحدّ الأوسط ضعف حاصل ضرب س × ٥

الإجابة : نعم حيث ٢ × س × ٥ = ١٠ س (الحدّ الأوسط)

∴ **الحدودية الثلاثية** $س^{٢} + ١٠ س + ٢٥$ **مربّع كامل**

∴ $س^{٢} + ١٠ س + ٢٥ = (س + ٥)^{٢}$

تدرّب (١) :

أيّ من الحدوديات الثلاثية التالية تمثّل مربعًا كاملًا :

أ) $س^{٢} - ١٤ س + ٤٩$

ب) $ص^{٢} + ٣ ص + ٩$

جـ) $٩ س^{٢} - ٦ س - ١$

د) $٤ س^{٢} + ٣٦ س + ٩$

تدرّب (٢) :

حلِّل كلًّا ممّا يلي تحليلًا تامًّا :

أ) $ص^{٢} + ٨ ص + ١٦$

$= (\ldots\ldots + \ldots\ldots)^{٢}$

ب) $١٦ ب^{٢} - ٢٤ ب + ٩$

$= (\ldots\ldots - \ldots\ldots)^{٢}$

جـ) $ص^{٢} + ١٦ ص + ٦٤$

د) $١ - ١٠ س + ٢٥ س^{٢}$

مثال (٢) :

حلِّل تحليلًا تامًّا : $٢٠ س^{٢} - ٢٠ س + ٥$

الحل :

$٢٠ س^{٢} - ٢٠ س + ٥$

$= ٥ (٤ س^{٢} - ٤ س + ١)$ (بأخذ العامل المشترك)

$= ٥ (٢ س - ١)^{٢}$

تدرّب (٣) :

حلِّل كلًّا ممّا يلي تحليلًا تامًّا :

أ) $٩ س^{٣} - ٦ س^{٢} ص + س ص^{٢}$

ب) $٤ ب^{٣} جـ + ٨ ب^{٢} جـ^{٢} + ٤ ب جـ^{٣}$

مثال (٣) :

أوجِد قيمة جـ التي تجعل الحدودية الثلاثية التالية مربعًا كاملًا :

$٩ س^{٢} + جـ س ص + ٤٩ ص^{٢}$

الحل :

الجذر التربيعي الموجَب للحدّ الأوّل = ٣ س ،

الجذر التربيعي الموجَب للحدّ الثالث = ٧ ص ،

الحدّ الأوسط = $\pm$ ٢ × ٣ س × ٧ ص

جـ س ص = $\pm$ ٤٢ س ص

∴ جـ = ٤٢ أو جـ = −٤٢

تدرّب (٤) :

وظف مفهوم المربع الكامل لإيجاد قيمة ما يلي :

$(١٠١)^{٢} = (١٠٠ + _____)^{٢}$

$= (١٠٠)^{٢} + ٢ \times ١٠٠ \times _____ + (_____)^{٢}$

$= ١٠٠٠٠ + _____ + _____ = _____$

تمـــرَّنْ :

١ أيّ من الحدوديات الثلاثية التالية تمثّل مربعًا كاملًا ؟

أ) $س^{٢} + ٢ س ص + ص^{٢}$

ب) $ع^{٢} - ٤ ع - ٤$

جـ) $١ + ١٠ س + ٢٥ س^{٢}$

د) $٩ ب^{٢} + ١٢ ب + ١٦$

٢ حلِّل كلًّا ممّا يلي تحليلًا تامًّا :

أ) $ص^{٢} - ٢ ص + ١$

ب) $١ + ٦ ب + ٩ ب^{٢}$

جـ) $س - ٤ س^{٢} + ٤ س^{٣}$

د) $س^{٢} + ٢٢ س + ١٢١$

هـ) $س^{٣} - ٦ س^{٢} + ٩ س$

و) $١٢ س^{٢} + ٣٦ س ص + ٢٧ ص^{٢}$

٣ وظف مفهوم المربع الكامل لإيجاد قيمة كلّ ممّا يلي :

أ $(١٠٣)^{٢}$

ب $(٥٩)^{٢}$

٤ أوجِد قيمة جـ التي تجعل كلًّا من الحدوديات الثلاثية التالية مربعًّا كاملًا :

أ $س^{٢} + جـ س + ٨١$

ب $٤ س^{٢} - جـ س ص + ٩ ص^{٢}$

٥ يُراد بناء مصنع على قطعة أرض مربّعة الشكل مساحتها :

$(س^{٢} + ٢٠ س + ١٠٠)$ وحدة مربعة . فما طول ضلعها بدلالة س ؟

٢-٣ تحليل الحدودية الثلاثية : س^{٢} + ب س + جـ
Factorising Trinomial : $x^2 + bx + c$

سوف تتعلّم : تحليل حدودية ثلاثية على الصورة : س^{٢} + ب س + جـ .

العبارات والمفردات :
حدودية ثلاثية
Trinomial

نشاط :

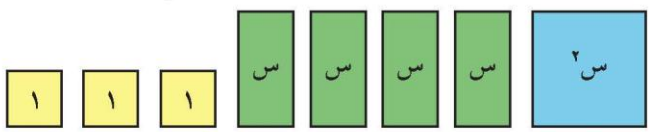
حلل الحدودية التالية تحليلًا تامًّا بالطريقة العملية والطريقة الجبرية :

س^{٢} + ٤ س + ٣

أوّلًا : الطريقة العملية :

الخطوة الأولى :

مثِّل الحدودية س^{٢} + ٤ س + ٣ ببطاقات الجبر كما يلي :

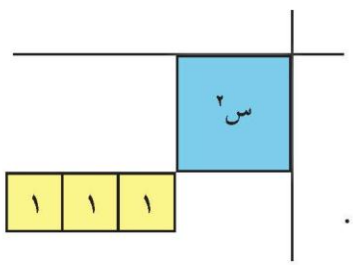


اللوازم :

بطاقات الجبر	
س^{٢}	س × س
س	١ × س
١	١ × ١

الخطوة الثانية :

ضَع البطاقة س^{٢} في زاوية رقعة الضرب ، ورتِّب بطاقات ١ . بما أنّ ٣ عدد أوّلي ، فإنّه يمكن ترتيب البطاقات الثلاث بمصفوفة ١ × ٣ كما في الشكل .



الخطوة الثالثة :

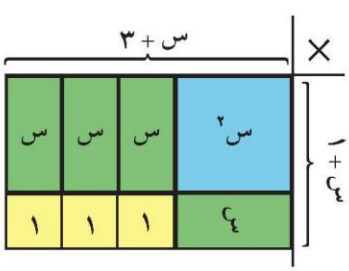
أكمِل شكل المستطيل على رقعة الضرب ببطاقات س

فيكون بذلك طول المستطيل (س + ٣)

وعرض المستطيل (س + ١)

∴ مساحة المستطيل = (س + ٣) (س + ١)

∴ س^{٢} + ٤ س + ٣ = (س + ٣) (س + ١)



ثانيًا : الطريقة الجبرية :

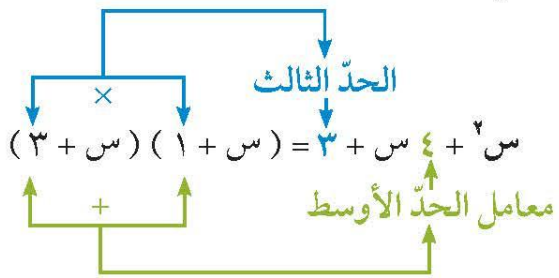
لتحليل الحدودية الثلاثية $س^{٢} + ٤ س + ٣$ إلى حاصل ضرب عاملين

نبحث عن عددين يكون :

حاصل ضربهما ٣ الحدّ الثالث

ناتج جمعهما ٤ معامل الحدّ الأوسط

كما في الشكل التالي :



لتحليل حدودية ثلاثية على الصورة $س^{٢} + ب س + جـ$ إلى عواملها ،
إبحث عن عددين م ، ن حيث ب = م + ن ، جـ = م ن
فيكون $س^{٢} + ب س + جـ = (س + م) (س + ن)$

مثال (١) :

حلِّل تحليلًا تامًّا : $س^{٢} + ٦ س + ٥$

نبحث عن عددين حاصل ضربهما ٥ وناتج جمعهما ٦

الحل :

$س^{٢} + ٦ س + ٥ = (س + ٥) (س + ١)$

تدرّب (١) :

حلِّل كلًّا مما يلي تحليلًا تامًّا :

أ $ص^{٢} + ٨ ص + ٧$

= (..... + ...) (..... + ...)

ب $س^{٢} - ٩ س + ١٨$

= (..... - .....) (..... - .....)

مثال (٢) :

حلِّل تحليلًا تامًّا : $أ^{٢} + أ - ٢$

نبحث عن عددين حاصل ضربهما (-٢) وناتج جمعهما (+١)

الحل :

$أ^{٢} + أ - ٢ = (أ + ٢) (أ - ١)$

تدرّب (٢) :

حلِّل كلًّا ممّا يلي تحليلًا تامًّا :

أ) $س^{٢} + ٢ س - ٣$

= (.....) (.....)

ب) $س^{٢} - ٥ س ص - ١٤ ص^{٢}$

= (.....) (.....)

تدرّب (٣) :

حلِّل كلًّا ممّا يلي تحليلًا تامًّا :

أ) $٥ ص^{٢} + ١٥ ص - ٢٠$

= ٥ (..... + ... − .....)

= ٥ (..... − .....) (..... + ...)

ب) $- س^{٢} + ٧ س - ١٢$

= − (.....)

= .....

فكّر وناقِش

أعطِ ثلاث قيم مختلفة لـِ جـ في الحدودية :

$س^{٢} + ٣ س -$ جـ بحيث يمكن تحليلها إلى حاصل ضرب عاملين .

تدرّب (٤) :

حلِّل الحدوديات الثلاثية التالية تحليلًا تامًّا :

أ) $ص^{٢} - ٦ ص - ٧$

.....

.....

ب) $س^{٣} + ١٢ س^{٢} + ٣٢ س$

.....

.....

جـ) $س^{٢} - ٢٠ س + ١٠٠$

.....

.....

د) $س^{٢} + ٧ س ف - ١٨ ف^{٢}$

.....

.....

فكّر وناقِش

تقول منار: إنّ تحليل الحدودية $س^{٢} + ٤ س - ٢١$ هو (س − ٣) (س + ٧)

بينما تقول سلمى: إنّ تحليلها هو (س + ٣) (س − ٧) .

أيهّما على صواب ؟ فسّر إجابتك .

تمـــرَّنْ :

١ أكمِل بوضع (+) أو (−) في كلّ ممّا يلي :

أ $س^{٢} + ٥ س + ٦ = ($ س ..... ٢ $)($ س ..... ٣ $)$

ب $س^{٢} - س - ١٢ = ($ س ..... ٣ $)($ س ..... ٤ $)$

---

٢ حلِّل كلًّا ممّا يلي تحليلًا تامًّا :

أ $س^{٢} + ٣ س + ٢$

.....

ب $س^{٢} - ٧ س + ١٠$

.....

جـ $ص^{٢} + ص - ٢٠$

.....

د $س^{٢} - ٥ س - ٦$

.....

هـ $س^{٢} - س - ٥٦$

.....

و $س^{٢} + ٧ س - ٤٤$

.....

ز $ب^{٢} - ١٠ ب ك + ١٦ ك^{٢}$

.....

ح $م^{٢} + ١٥ م ن + ٥٤ ن^{٢}$

.....

ط $ص^{٤} - ١٧ ص^{٣} + ٣٠ ص^{٢}$

.....

.....

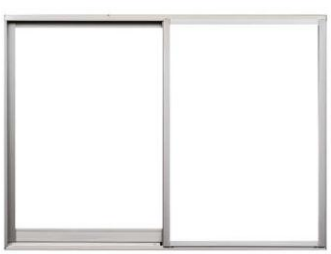
ي $-٢ س^{٢} + ٢ س + ٤$

.....

.....

---

٣ ينتج مصنع للألومينيوم نوافذ مختلفة الأشكال ، إحدى هذه النوافذ مستطيلة الشكل مساحة سطحها الأمامي يساوي ($س^{٢} + ٩ س + ٢٠$) وحدة مربعة . أوجِد بعدي السطح الأمامي للنافذة بدلالة س .



.....

.....

.....

٤-٢ تحليل الحدودية الثلاثية : أ س^{٢} + ب س + جـ
Factorising Trinomials : $a x^2 + b x + c$

سوف تتعلّم : تحليل حدودية ثلاثية على الصورة : أ س^{٢} + ب س + جـ ، حيث أ ≠ ١ .

نشاط :

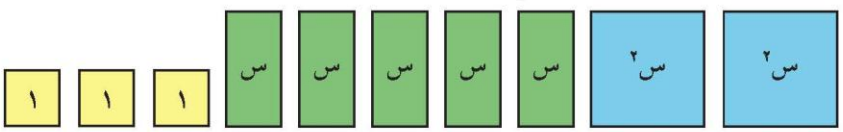
حلِّل الحدودية التالية تحليلًا تامًّا بالطريقة العملية والطريقة الجبرية :

٢ س^{٢} + ٥ س + ٣

أوّلًا : الطريقة العملية :

الخطوة الأولى :

مثّل الحدودية ببطاقات الجبر كما يلي :



اللوازم :

بطاقات الجبر	
س^{٢}	س × س
س	١ × س
١	١ × ١

الخطوة الثانية :

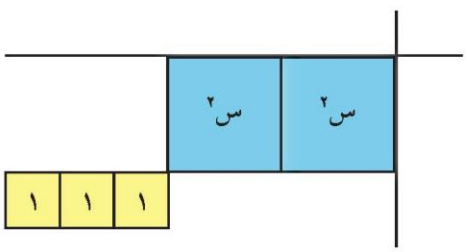
في زاوية رقعة الضرب ضع بطاقات س^{٢} ،

كذلك ضع بطاقات ١ على شكل مصفوفة

بما أن ٣ عدد أولي ، فإنه يمكن ترتيب

البطاقات الثلاث بمصفوفة ١ × ٣

كما في الشكل .



الخطوة الثالثة :

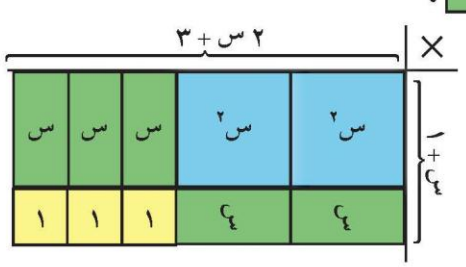
أكمل شكل المستطيل على رقعة الضرب ببطاقات س ،

فنلاحظ أنّ : طول المستطيل = ٢ س + ٣

وعرض المستطيل = س + ١

∴ مساحة المستطيل = (٢ س + ٣) (س + ١)

∴ ٢ س^{٢} + ٥ س + ٣ = (٢ س + ٣) (س + ١)



ثانيًا : الطريقة الجبرية :

لتحليل الحدودية الثلاثية $٢ س^{٢} + ٥ س + ٣$ إلى حاصل ضرب عاملين نتبع ما يلي :

الحدّ الأوّل : $٢ س^{٢}$

الحدّ الأوسط : $٥ س$ (موجب)

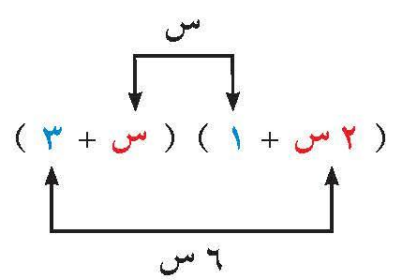
الحدّ الثالث : ٣ (موجب)

بما أنّ الحدّ الثالث موجَب والحدّ الأوسط موجَب ، نستبعد العوامل السالبة .

∴ عوامل الحدّ الأوّل $٢ س^{٢}$ هي $٢ س$ ، $س$

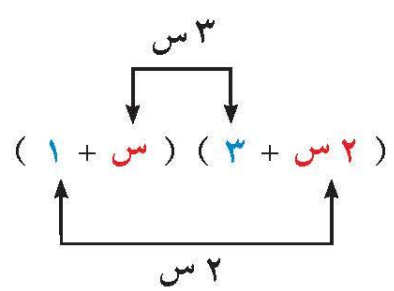
عوامل الحدّ الثالث ٣ هي ١ ، ٣

المحاولة الأولى :



$س + ٦ س = ٧ س \neq$ الحدّ الأوسط

المحاولة الثانية : (تبديل أماكن عوامل الحدّ الثالث)



$٣ س + ٢ س = ٥ س =$ الحدّ الأوسط

∴ $٢ س^{٢} + ٥ س + ٣ = (٢ س + ٣) (س + ١)$

مثال :

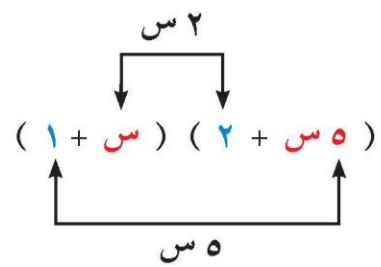
حلِّل تحليلًا تامًّا : ٥ س^{٢} + ٧ س + ٢

الحل :

الحدّ الأوّل : ٥ س^{٢} عوامل الحد الأول هي ٥ س ، س

الحدّ الأوسط : ٧ س (موجب)

الحدّ الثالث : ٢ (موجب) عوامل الحد الثالث هي ٢ ، ١



٢ س + ٥ س = ٧ س = الحدّ الأوسط

∴ ٥ س^{٢} + ٧ س + ٢ = (٥ س + ٢) (س + ١)

تدرّب (١) :

بعد إجراء التحليل
تحقق من صحته .

حلِّل تحليلًا تامًّا كلًّا ممّا يلي :

أ ٥ س^{٢} + ٨ س + ٣ = (..... + ...) (..... + ...)

ب ٤ س^{٢} − ٤ س − ٣ = (..... + ...) (..... − .....)

جـ ٣ س^{٢} + ٧ س − ٦ = (..... − .....) (..... + ...)

د ٦ س^{٢} − ١٩ س ص + ١٠ ص^{٢} = (.....) (.....)

فكّر وناقِش

أوجِد قيمتين للمعامل ك تسمحان بتحليل الحدودية :

٤ س^{٢} + ك س + ١٠

تدرّب (٢) :

حلِّل تحليلًا تامًّا كلًّا مما يلي :

أ ٢ هـ^{٢} + ٣ هـ − ٥ = ...

ب ٧ ك^{٢} − ١١ ل ك − ٦ ل^{٢} = ...

جـ ٤٢ ص^{٢} + ٣٢ ص + ٦ = ٢ (.....)

= ٢ (.....) (.....)

د ١٣ ع^{٣} + ٥ ع^{٢} − ٨ ع = ...

= .....

تمـــرَّنْ :

حلِّل تحليلًا تامًّا كلًّا مما يلي :

١ ٢ ن^{٢} + ١٥ ن + ٧

.....

.....

٢ ١١ ل^{٢} − ١٢ ل + ١

.....

.....

٣ ٢ ك^{٢} − ١١ ك − ٢١

.....

.....

٤ ٨ ص^{٢} + ١٠ ص ل − ٣ ل^{٢}

.....

.....

٥ ٢٥ س^{٢} + ١٠ س − ١٥

.....

.....

٦ ٤ س^{٢} − س ص − ٥ ص^{٢}

.....

.....

٧ ٢١ ف^{٣} − ٧٠ ف^{٢} + ٤٩ ف

.....

.....

٨ ٤ هـ^{٣} + ١٢ هـ^{٢} + ٩ هـ

.....

.....

٢-٥ تحليل الحدودية الرباعية
Factorising Quartic Polynomial

سوف تتعلّم : تحليل الحدودية الرباعية .

العبارات والمفردات :
حدودية رباعية
Quatric Polynomial

نشاط :

أوجد ناتج :

(أ + ب) (س + ص) = ----------

= ----------

تُسمّى الحدودية الناتجة **حدودية رباعية** .

قامت كلّ من سارة وشهد بتحليل الحدودية بطريقتين مختلفتين :

طريقة سارة	طريقة شهد
أ س + أ ص + ب س + ب ص	أ س + أ ص + ب س + ب ص
= (أ س + أ ص) + (ب س + ب ص)	= (أ س + ب س) + (أ ص + ب ص)
= أ (س + ص) + ب (س + ص)	= س (أ + ب) + ص (أ + ب)
= (س + ص) (أ + ب)	= (أ + ب) (س + ص)

في كلتا الطريقتين حصلنا على الناتج نفسه .

مثال (١) :

حلِّل الحدودية التالية تحليلًا تامًّا :

هـ جـ + هـ د + ب جـ + ب د

الحل :

هـ جـ + هـ د + ب جـ + ب د

= (هـ جـ + هـ د) + (ب جـ + ب د) (جزء)

= هـ (جـ + د) + ب (جـ + د) (بأخذ العامل المشترَك)

= (جـ + د) (هـ + ب) (بأخذ العامل المشترَك)

تدرّب (١) :

حلِّل كلًّا ممّا يلي تحليلًا تامًّا :

أ $س^{٢} هـ - س^{٢} د + ص^{٢} هـ - ص^{٢} د$

$= (س^{٢} هـ - س^{٢} د) + (\ldots\ldots\ldots\ldots)$

$= س^{٢} (\ldots\ldots - \ldots\ldots) + ص^{٢} (\ldots\ldots - \ldots\ldots)$

$= (\ldots\ldots - \ldots\ldots) (س^{٢} + ص^{٢})$

ب $٢ س + جـ س + ٢ جـ + جـ^{٢}$

مثال (٢) :

حلِّل تحليلًا تامًّا :

$س^{٣} - ٣ س^{٢} - ٢ س + ٦$

الحل :

$س^{٣} - ٣ س^{٢} - ٢ س + ٦ = (س^{٣} - ٣ س^{٢}) + (- ٢ س + ٦)$

$= س^{٢} (س - ٣) - ٢ (س - ٣)$

$= (س - ٣) (س^{٢} - ٢)$

تدرّب (٢) :

حلِّل كلًّا ممّا يلي تحليلًا تامًّا :

أ $س^{٢} - ٣ س - س ص + ٣ ص$

تذكَّرْ أنّ :

$(س - ص)$

$= - (ص - س)$

ب ٢٠ س^{٢} ص + ١٠ ب س^{٢} – ٤ أ ص – ٢ أ ب

= ٢ (.....)

.....

.....

.....

تذكَّرْ أنّ :

أ^{٢} – ب^{٢} =

(أ – ب) (أ + ب)

مثال (٣) :

حلِّل تحليلًا تامًّا :

س^{٣} – ٢ س^{٢} – س + ٢

الحل :

س^{٣} – ٢ س^{٢} – س + ٢ = (س^{٣} – ٢ س^{٢}) + (– س + ٢)

= س^{٢} (س – ٢) – (س – ٢)

= (س – ٢) (س^{٢} – ١)

= (س – ٢) (س – ١) (س + ١)

تدرّب (٣) :

حلِّل كلًّا مما يلي تحليلًا تامًّا :

أ س^{٣} – ٣ س^{٢} – ٤ س + ١٢

.....

.....

.....

.....

ب ص^{٣} + ٤ ص^{٢} – ٩ ص – ٣٦

.....

.....

.....

.....

تمـــرَّنْ :

حلِّل كلًّا ممّا يلي تحليلًا تامًّا :

١ س ل – م س + ل ص – م ص

٢ ٢ أ س + ٢ س ب + أ ص + ب ص

٣ ٤ س^{٢} + ٢ أ س + ٨ ب س + ٤ أ ب

٤ ٦ س^{٢} – ٨ س ص – ٣ س ب + ٤ ب ص

٥ س^{٣} – ٢ س^{٢} – ٩ س + ١٨

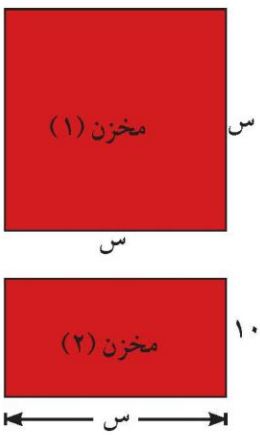
٦ س^{٣} + ٢ س^{٢} – ٢٥ س – ٥٠

٦-٢ حلّ معادلة من الدرجة الثانية في متغيّر واحد
Solving Second Degree Equation in One Variable

سوف تتعلّم : حلّ المعادلة من الدرجة الثانية في متغيّر واحد على الصورة العامة :
$أ س^{٢} + ب س + جـ = ٠$.

العبارات والمفردات :
معادلة من الدرجة الثانية في متغيّر واحد
Second Degree Equation with One Variable
حلّ معادلة
Solving an Equation

نشاط :



صُمِّم مصنع لموادّ البناء مرفق له مخزنان ، أحدهما أرضيته مربّعة الشكل والآخر أرضيته مستطيلة الشكل .

١ أُكتب مساحة أرضية المخزن (١) بدلالة س : .....

٢ أُكتب مساحة أرضية المخزن (٢) بدلالة س : .....

٣ أوجِد قيم س التي تجعل مجموع المساحتين يساوي ١ ٢٠٠ وحدة مربعة ؟

لإيجاد قيم س :

- نكتب المعادلة : ..... + ... = ١ ٢٠٠
- نضع المعادلة في صورة $أ س^{٢} + ب س + جـ = ٠$
  ..... + ... − ..... = ٠
- نحلل بطريقة مناسبة لإيجاد قيم س :
  (..... + ...) (..... − .....) = ٠
- نوجد قيم س .....

ملاحظة :
المعادلة من الدرجة الثانية في متغيّر واحد تُسمّى المعادلة التربيعية .

تذكَّرْ أنّ :
حلّ المعادلة يعني إيجاد قيم المتغيّر التي تحقّق المعادلة .

خاصّية الضرب الصفري

لكلّ أ ، ب عددان حقيقيان ، إذا كان أ × ب = ٠ فإنّ أ = ٠ أو ب = ٠

مثال :

أوجِد مجموعة حلّ المعادلة : (س + ٥) (س − ٦) = ٠ ، حيث س ∈ ح
ثمّ تحقَّقْ من صحّة الحلّ .

الحل :

(س + ٥) (س − ٦) = ٠

س + ٥ = ٠ أو س − ٦ = ٠ (اِستخدِم خاصّية الضرب الصفري)

س = − ٥ أو س = ٦

∴ مجموعة الحل = { − ٥ ، ٦ }

تحقَّقْ :

عوِّض عن س بالعدد − ٥

(−٥ + ٥) (−٥ − ٦) $\stackrel{؟}{=}$ ٠

٠ × −١١ $\stackrel{؟}{=}$ ٠

٠ = ٠ ✓

عوِّض عن س بالعدد ٦

(٦ + ٥) (٦ − ٦) $\stackrel{؟}{=}$ ٠

١١ × ٠ $\stackrel{؟}{=}$ ٠

٠ = ٠ ✓

عند حل المعادلة التربيعية سنعتبر قيم المتغير تنتمي إلى مجموعة الأعداد الحقيقية ما لم يذكر غير ذلك.

تدرّب (١) :

أوجِد مجموعة حل كلٍّ من المعادلات التالية :

أ ص^{٢} − ٥ ص = ٠

ص (..... − .....) = ٠

..... = ٠ أو ..... = ٠

.....

∴ مجموعة الحلّ = { ..... ، ..... }

ب س^{٢} = ٩

س^{٢} − ..... = ...

(..... − .....) (..... + ...) = ٠

..... أو .....

....

∴ مجموعة الحلّ = { ..... ، ..... }

تذكَّرْ أنّ :

لحلّ معادلة تربيعية :

(١) ضَع المعادلة في الصورة العامة .

(٢) حلِّل .

(٣) استخدِم خاصّية الضرب الصفري .

تدرّب (٢) :

أوجِد مجموعة حل كلٍّ من المعادلات التالية :

أ ص^{٢} − ٦ ص + ٥ = ٠

.....

.....

.....

.....

.....

ب س^{٢} = ٢ س + ٣٥

.....

.....

.....

.....

.....

تدرّب (٣) :

أوجِد مجموعة حلّ المعادلة : ٦ ص^{٢} + ٩ ص = ٢ + ص^{٢}

٦ ص^{٢} + ٩ ص − ..... − ..... = ٠

..... + ٩ ص − ..... = ٠

(.....) (.....) = ٠

تدرّب (٤) :

أوجِد مجموعة حل كلٍّ من المعادلات التالية :

أ ع (ع − ٦) = ٧

ب (س + ٢)^{٢} = ١٤٤

تذكَّرْ أنّ :

بفرض أنّ س عدد حقيقي ، فإنّ :

ضعفه هو ٢ س

مربّعه هو س^{٢}

ثلاثة أمثاله هو ٣ س

تدرّب (٥) :

ما العدد الحقيقي الذي يزيد مربّعه عن أربعة أمثاله بمقدار ٥ ؟

فكِّر وناقِش

ما مجموعة حل المعادلة $س^{٢} + ١ = ٠$ ؟

تمـــرَّنْ :

١ أوجِد مجموعة حل كلّ من المعادلات التالية :

أ $(س - ٣) (٢ س + ١) = ٠$

ب $ص^{٢} - ٣٦ = ٠$

جـ $ص^{٢} - ١٠ ص - ١١ = ٠$

د $ن^{٢} - ٦ ن + ٩ = ٠$

هـ $ك^{٢} + ٧ ك + ١٢ = ٠$

و $ل^{٢} = ٧ ل$

ز $٣ ن^{٢} + ن - ١٠ = ٠$

ح $٧ س^{٢} - ١٢ س - ٨ = ٥ س^{٢} - ٦ س$

ط $٢ ص^{٢} = ١٥ ص - ١٨$

ي $س (س + ١) = ٢$

ك $(س + ٣)^{٢} - ٤٩ = ٠$

ل $٩ م^{٢} = ١٢ م - ٤$

٢ ينتج مصنع للحديد والصلب قطعة على شكل شبه مكعّب أبعاده :
٤ سم ، (س + ٢) سم ، (س + ٢) سم وحجمه يساوي ١٠٠ سم^{٣} .
أوجِد قيمة س .

٣ مخزن أحد المصانع أرضيته مستطيلة الشكل يزيد طولها ٢٠ مترًا عن عرضها ، وكانت مساحتها ٣٠٠ م^{٢} . أوجِد بعدي أرضية المخزن .

٤ ما العدد الحقيقي الذي ينقص مربّعه عن خمسة أمثاله بمقدار ٤ ؟

٢-٧ مراجعة الوحدة الثانية
Revision Unit Two

أوّلًا : التمارين المقالية

١ حلِّل كلًّا ممّا يلي تحليلًا تامًّا :

أ $س^{٢} + ١٦ س + ٦٤$

ب $٦٤ + س^{٣}$

جـ $٣٢ س^{٣} - ٤$

د $م^{٦} - \frac{٢٧}{١٢٥} ل^{٣}$

هـ $س^{٢} + ٨ س + ٧$

و $س^{٢} - ٣ س - ١٨$

ز $٢ س^{٢} - ١٤ س + ٢٤$

ح $ص^{٤} + ١١ ص^{٣} + ٢٨ ص^{٢}$

ط $ب^{٢} - ٩ ب ك - ١٠ ك^{٢}$

ي $٢ س^{٢} - ٧ س + ٦$

ك $٦ س^{٢} + ٢١ س - ١٢$

ل $١٢ ل^{٢} + ١١ ل م - ١٥ م^{٢}$

م $٤ س^{٢} + ٤ س + ١$

ن $٩ س^{٢} ص - ٥٤ س ص + ٨١ ص$

س $س^{٣} + ٢ س^{٢} - س - ٢$

ص $س ص^{٢} + ٢ س^{٢} - ٣ ص^{٣} - ٦ س ص$

٢ أوجِد مجموعة حل كلٍّ من المعادلات التالية :

أ $س^{٢} - ٦ س = ٠$

ب $ص^{٢} - ١١ = ١٤$

جـ $س^{٢} - ٤ س = ٢١$

د $٩ ن^{٢} + ١٢ ن + ٤ = ٠$

هـ $(س - ٢)^{٢} - ٣٦ = ٠$

و $٩ س^{٢} - ٥ س = ٦ س^{٢} - ٣ س + ٥$

ز $س (س + ٢) = ٣$

ح $(٣ س - ٢)^{٢} - س^{٢} = ٠$

٣ وظف مفهوم المربع الكامل لإيجاد قيمة : $(٦١)^{٢}$

ثانيًا : التمارين الموضوعية

أولًا : في البنود التالية ، ظلِّل (أ) إذا كانت العبارة صحيحة ، وظلِّل (ب) إذا كانت العبارة غير صحيحة .

١ $س^{٣} - \frac{١}{٨} = (س - \frac{١}{٢})(س^{٢} + \frac{١}{٢} س + \frac{١}{٤})$	(أ)	(ب)
٢ إذا كانت س − ص = ٥ ، س + ص = ١١ ، فإن $س^{٢} - ص^{٢} = ٥٥$	(أ)	(ب)
٣ $س^{٢} + س + ١ = (س + ١)^{٢}$	(أ)	(ب)
٤ مجموعة حلّ المعادلة $س^{٢} + ٣ س = ٠$ ، س ∈ ح هي {٠ ، ٣}	(أ)	(ب)
٥ $(س + ص)^{٢} = س^{٢} + ص^{٢}$	(أ)	(ب)
٦ إذا كان ٤ $ص^{٢}$ + جـ ص + ٩ مربّعًا كاملًا ، فإنّ إحدى قيم جـ هي ١٢	(أ)	(ب)

ثانيًا : لكل بند من البنود التالية أربعة اختيارات ، واحد فقط منها صحيح ، ظلِّل الدائرة الدالّة على الإجابة الصحيحة .

٧ إذا كانت $أ^{٢} = ١٠$ ، $ب^{٢} = ٢$ فإنّ $(أ + ب)(أ - ب) =$

(أ) −٨ (ب) ٨ (جـ) ١٢ (د) ٢٠

٨ $س(س - ٣) - ٣ س + ٩ =$

(أ) $(س - ٣)(س + ٣)$ (ب) $(س - ٣)^{٢}$

(جـ) $(س - ٣)(س + ١)$ (د) $(س + ٣)^{٢}$

٩ إذا كان ل + م = ٣ ، $ل^{٣} + م^{٣} = ٥١$ ، فإنّ $ل^{٢} - ل م + م^{٢} =$

(أ) ١٧ (ب) ٤٨ (جـ) ٥٤ (د) ١٥٣

١٠ $(س - ٣)^{٢} - ١٦ =$

(أ) $(س - ٥)(س + ١١)$ (ب) $(س + ٥)(س - ١١)$

(جـ) $(س - ١)(س + ٧)$ (د) $(س + ١)(س - ٧)$

١١ إذا كان ٢ س^{٢} + م س − ٧ = (٢ س − ١) (س + ٧) ، فإنّ م =

(أ) −١٣ (ب) ١٣ (جـ) ١٤ (د) ١٥

---

١٢ مجموعة حلّ المعادلة س (س − ٢) = ١٥ في ح هي :

(أ) { ٣ ، −٥ } (ب) { ٣ ، ٥ }

(جـ) { ٠ ، ٢ } (د) { −٣ ، ٥ }

---

١٣ ص^{٤} + ٠,٠٢٧ ص =

(أ) ص (ص + ٠,٣) (ص^{٢} + ٠,٣ ص + ٠,٠٩)

(ب) ص (ص − ٠,٣) (ص^{٢} − ٠,٣ ص − ٠,٠٩)

(جـ) ص (ص + ٠,٣) (ص^{٢} − ٠,٣ ص + ٠,٠٩)

(د) ص (ص + ٠,٣) (ص^{٢} − ٠,٦ ص + ٠,٠٩)

---

١٤ قيمة جـ التي تجعل الحدودية الثلاثية س^{٢} − ٦ س + جـ مربعًا كاملًا هي :

(أ) −٩ (ب) ٣ (جـ) ٩ (د) ٣٦

اختر من القائمة (٢) ما يناسب كل بند من القائمة (١) لتحصل على عبارة صحيحة .

القائمة (١)		القائمة (٢)
١٥ ٦ س^{٢} − ١١ س + ٤ =	◯	(أ) (٣ س − ١) (س + ٢)
١٦ ٦ س^{٢} − ٥ س − ٤ =	◯	(ب) ٣ (٣ س − ٢) (س + ١)
١٧ ٩ س^{٢} + ٣ س − ٦ =	◯	(جـ) (٢ س − ١) (٣ س − ٤)
١٨ س (٣ س + ٥) − ٢ =	◯	(د) (٢ س + ١) (٣ س − ٤)
		(هـ) (٢ س − ١) (٣ س + ٤)

الوحدة الثالثة

الحدوديات النسبية
Rational Expressions

الرياضة
Sports

تهتمّ دولة الكويت بالنشء والشباب وتحرص على أن يمارسوا الرياضة في جوّ صحّي وتحت أيدي خبراء وتوفّر لهم الأماكن المناسِبة لممارسة رياضاتهم المفضّلة ، ومن هذه الأماكن إستاد جابر الأحمد الدولي وهو إستاد رياضي كويتي متعدّد الأغراض يقع في محافظة الفروانية جنوب مدينة الكويت . افتُتح الإستاد رسميًّا في ١٨ ديسمبر ٢٠١٥ م ، وتبلغ الطاقة الاستيعابية للإستاد حوالي ٦٠ ٠٠٠ متفرّج ، ويُعتبَر أكبر إستاد رياضي في الكويت والسابع عربيًّا ، والخامس والعشرين عالميًّا من حيث السعة .

مشروع الوحدة : (القرية الأولمبية)

يتطلع الرياضيون في الكويت إلى بناء قرية أولمبية متكاملة تشمل جميع الألعاب سواء كانت جماعية أو فردية وهو ما سيعود بالنفع على الرياضة والرياضيين في الكويت .

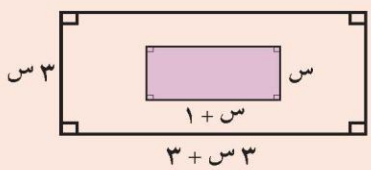
سوف نساهم في تصميم بعض المباني الداخلية للقرية الأولمبية .

خطّة العمل :

- المساهمة في تصميم قرية أولمبية بحساب أبعاد ومساحات وتكلفة بعض مرافق القرية الأولمبية .

خطوات تنفيذ المشروع :

- يقسِّم المعلّم المتعلّمين إلى مجموعات .
- لنفترِض أنّه تمّ البدء بتحديد قطعة أرض مستطيلة الشكل مساحتها ($س^{٢} - ٤$) وحدة مربّعة وأحد بعديها $\frac{س^{٢} - س - ٢}{س + ١}$ وحدة طول ، أوجِد البعد الآخر .
- إذا أردنا إنشاء ملعب لكرة القدم طوله $\frac{٦٤٠٠٠}{س}$ م وعرضه $\frac{س}{١٠}$ م ، فاحسب مساحته .
- يُراد إنشاء سور حول ملعب كرة القدم كما في الشكل .



أُكتب نسبة مساحة الملعب إلى المساحة الكلية داخل السور في أبسط صورة .

- إذا كانت تكلفة بناء فندق داخل المدينة الأولمبية تساوي $\frac{٣ س^{٢} + ٢}{٤ س^{٢} + ٢}$ مليار دينار وتكلفة تأثيث هذا الفندق تساوي $\frac{٣ س^{٢} + ١}{٤ س^{٢} + ٢}$ مليار دينار ، فأوجِد التكلفة الشاملة لهذا الفندق .

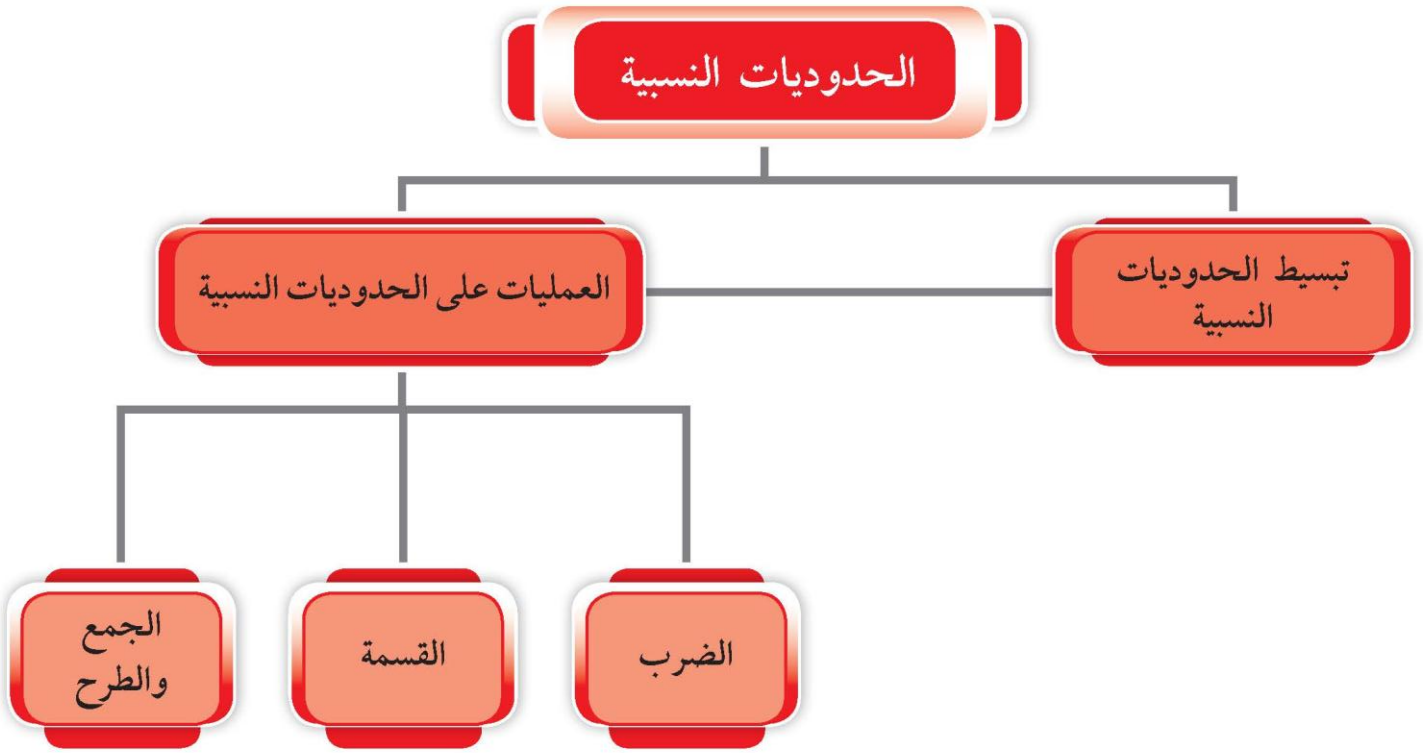
علاقات وتواصل :

- تتبادل المجموعات الأوراق وتتأكّد من صحّة الحلّ .

عرض العمل :

- تعرض كلّ مجموعة عملها وتناقش خطوات الحلّ .

مخطَّط تنظيمي للوحدة الثالثة



اِستعِدّ للوحدة الثالثة

١ أوجِد المضاعَف المشترَك الأصغر (م . م . أ) لكلّ ممّا يلي :

أ ١٤ ، ٧

م . م . أ = ...

ب ٦ ، ٨

م . م . أ = ...

٢ ضَعْ كلًّا ممّا يلي في أبسط صورة :

أ $\frac{-١٥}{٢٥}$ .....

ب $\frac{٦٣}{٣٦}$ .....

٣ أوجِد ناتج كلّ ممّا يلي في أبسط صورة :

أ $\frac{٣}{٤} \times \frac{-٢}{١٥}$

.....

.....

.....

ب $\frac{٢٢}{٣٥} \div \frac{٦}{٧}$

.....

.....

.....

جـ $\frac{١}{٦} + \frac{٣}{٤}$

.....

.....

.....

د $\frac{٥}{٧} - \frac{٢}{٣}$

.....

.....

.....

٤ أوجِد ناتج كلّ ممّا يلي :

أ $-٩ س^{٢} + ٣ س^{٢}$

.....

ب $-٩ س^{٢} \times ٣ س^{٢}$

.....

جـ $-٩ س^{٢} \div ٣ س^{٢}$

.....

٥ أوجِد ناتج جمع ٣ س – ١ ، ٩ – ٥ س

٦ أوجِد الناتج في أبسط صورة : (٣ س – ١) – (٢ س – ٥)

٧ أوجِد ناتج ٣ س × (س^{٢} – ٢ س + ١)

٨ اِقسم (٣ س^{٤} – ١٥ س^{٣} + ٢١ س^{٢}) على ٣ س^{٣}

٩ حلِّل كلًّا ممّا يلي تحليلًا تامًّا :

أ ٦ س^{٢} + ٣ س

ب س^{٢} – ١٦

جـ س^{٢} – ١١ س + ٣٠

د س^{٣} – ٢٧

هـ ٦ س^{٢} + س – ٥

و ٨ س^{٣} + ١

١-٣ الحدوديات النسبية وتبسيطها
Simplifying Rational Expressions

سوف تتعلّم : الحدوديات النسبية وتبسيطها .

العبارات والمفردات :
تبسيط
Simplify
حدودية نسبية
Rational Expression

نشاط :

حوضي سباحة كلًّا منهما على شكل شبه مكعّب ، إذا كان حجم الحوض الأول ١٢ س^{٣} ص^{٦} وحدة مكعبة ، وحجم الحوض الثاني ٢٤ س^{٦} ص^{٣} وحدة مكعبة .

معلومات مفيدة :
يقع مجمّع أحواض السباحة على شارع الخليج العربي ، ويشتمل على خمسة أحواض سباحة تعمل بالماء العذب ، منها الحوض الأولمبي وحوض الغطس وحوض للمبتدئين وحوضان للألعاب المائية .

١ أكمل ما يلي :

نسبة حجم الحوض الأول إلى حجم الحوض الثاني

$$= \frac{\text{حجم الحوض الأول}}{\text{حجم الحوض الثاني}} = \text{.....}$$

٢ اِختصِر نسبة حجم الحوض الأول إلى حجم الحوض الثاني ، وذلك بقسمة كلّ من حدّي النسبة على العامل المشترَك الأكبر (ع . م . أ) لهما .

.....

• المقادير التالية : $\frac{\text{ص}^{٣}}{٢\text{ س}^{٣}}$ ، $\frac{\text{س} + ٢}{\text{ص}}$ ، $\frac{\text{س} + ٢}{\text{س} - ٣}$ ، $\frac{\text{س}^{٢} - ٦\text{ س} + ٥}{\text{س}^{٢} - ٢٥}$

تسمى **حدوديات نسبية** .

تذكَّرْ أنّ :
المقام أينما وُجِد لا يساوي صفرًا .

حيث إنّ كلًّا من البسط والمقام يمثّل حدودية ، والمقام لا يساوي صفرًا .

• عند تبسيط الحدودية النسبية نقوم بقسمة كلّ من الحدوديتين في البسط والمقام على العامل المشترَك الأكبر (ع . م . أ) لهما .

تدرّب (١)

ضَعْ في أبسط صورة كلًّا ممّا يلي :

أ) $\frac{١٤ س^{٥}}{٧ س^{٢}}$ = ----------

ب) $\frac{٤ س^{٢} ص}{١٢ س ص^{٣}}$ = ----------

جـ) $\frac{ع + ٢}{٣ ع + ٦} = \frac{ع + ٢}{٣ (\text{-------} + \text{-------})}$

= ----------

فكِّر وناقِش

بسّط سالم الحدودية $\frac{س - ٢}{س + ٣}$ كما يلي : $\frac{\cancel{س}^{١} - ٢}{\cancel{س}^{١} + ٣} = \frac{-٢}{٣}$ ،

فهل طريقته صحيحة ؟ و لماذا ؟

مثال :

ضَعْ في أبسط صورة :

$$\frac{٢ س^{٢} + ٢ س}{س^{٢} + ٣ س + ٢}$$

الحل :

$$\frac{٢ س^{٢} + ٢ س}{س^{٢} + ٣ س + ٢}$$

$$= \frac{٢ س (س + ١)}{(س + ٢)(س + ١)}$$ (بتحليل كلٍّ من البسط و المقام)

$$= \frac{٢ س \cancel{(س + ١)}^{١}}{(س + ٢)\cancel{(س + ١)}^{١}}$$ (اِقسم على العامل المشترَك (س + ١))

$$= \frac{٢ س}{س + ٢}$$

تدرّب (٢) :

ضَعْ في أبسط صورة كلًّا ممّا يلي :

أ $\frac{س^{٢} - ٦ س + ٥}{س^{٢} - ٢٥}$

.....

.....

.....

ب $\frac{س - ٣}{س^{٢} - ٦ س + ٩}$

.....

.....

.....

تدرّب (٣) :

ضَعْ في أبسط صورة كلًّا ممّا يلي :

أ $\frac{٢ س^{٢} + ١٣ س - ٧}{س^{٢} + ٤ س - ٢١}$ = ...

.....

.....

ب $\frac{٤ س - ٢}{١ - ٢ س}$ = ...

.....

.....

تذكَّرْ أنّ :
$أ - س = - (س - أ)$

جـ $\frac{س^{٣} - ٨}{س^{٢} + ٢ س + ٤}$ = ...

.....

.....

فكِّر وناقِش

أُكتب حدودية نسبية تصبح بعد تبسيطها $\frac{٥}{س + ٥}$.

تمـــرَّنْ :

١ ضَعْ في أبسط صورة كلًّا ممّا يلي :

أ) $\frac{٣ س^{٣}}{٩ س^{٦}}$

ب) $\frac{١٠ أ^{٢} + ١٥}{٢٠}$

جـ) $\frac{س^{٢} - ٨ س + ١٥}{س^{٢} - ٩}$

د) $\frac{٦ س^{٢} + ١٧ س - ٢٨}{س^{٢} - س - ٢٠}$

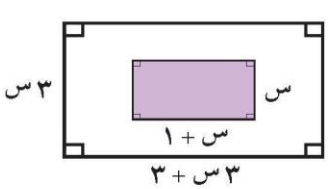
هـ) $\frac{س^{٣} + ٦٤}{س^{٢} - ٤ س + ١٦}$

و) $\frac{س^{٢} - ٢٥}{س^{٣} - ١٢٥}$

س) $\frac{٤ س^{٣} + ١٦ س^{٢} + ١٢ س}{٢ س^{٣} - ١٤ س^{٢} - ١٦ س}$

ح) $\frac{س - ٣}{٣ - س}$

٢ في الشكل المقابل :
أُكتب نسبة مساحة منطقة المستطيل المظلَّل إلى مساحة منطقة المستطيل الأكبر في صورة حدودية نسبية ، ثمّ ضَعْها في أبسط صورة .



٢-٣ ضرب الحدوديات النسبية
Multiplying Rational Expressions

سوف تتعلّم : ضرب الحدوديات النسبية .

نشاط :

ملعب لكرة القدم طوله $\frac{٦٤٠٠٠}{س}$ م ، وعرضه $\frac{س}{١٠}$ م ، أُحسب مساحته .

المساحة = الطول × ----------

$= \frac{٦٤٠٠٠}{س} \times \frac{\text{---------}}{\text{---------}}$

$= \frac{\text{---------- × ----------}}{\text{---------- × ----------}}$

= ----------

إذا كانت أ ، ب ، جـ ، د تمثّل حدوديات حيث ب ≠ ٠ ، د ≠ ٠

فإنّ : $\frac{أ}{ب} \times \frac{جـ}{د} = \frac{أ جـ}{ب د}$

العبارات والمفردات :
ضرب
Multiplying

معلومات مفيدة :
يتراوح طول ملعب كرة القدم الدولي بين ١٠٠ م ، ١١٠ م والعرض يتراوح بين ٦٤ م ، ٩١ م

مثال (١) :

أوجِد الناتج في أبسط صورة :

$$\frac{٤م}{م+١} \times \frac{م+١}{م-١}$$

الحل :

$$\frac{٤م}{م+١} \times \frac{م+١}{م-١}$$ (اِضرب)

$$= \frac{٤م \cancel{(م+١)}^{١}}{\cancel{(م+١)}^{١}(م-١)}$$ (بسّط)

$$= \frac{٤م}{م-١}$$

تدرّب (١) :

أوجِد الناتج في أبسط صورة :

أ $\frac{ع^{٣}}{٣٥} \times \frac{٧}{ع^{٢}}$

= ---

= ---

ب $\frac{٥ ل^{٣}}{ل^{٢}} \times \frac{٣ ل^{٤}}{٦ ل}$

= $\frac{\text{---} \times ٣ ل^{٤}}{\text{---} \times \text{---}}$

= ---

جـ $\frac{٢ س + ١}{٣} \times \frac{٦ س}{٤ س^{٢} - ١}$

= $\frac{(٢ س + ١) ٦ س}{٣ (٤ س^{٢} - ١)}$

= $\frac{(٢ س + ١) \text{---}}{\text{---} (\text{---}) (\text{---})}$

= ---

مثال (٢) :

أوجِد الناتج في أبسط صورة :

$$\frac{ن^{٢} + ن - ١٢}{٢ن^{٢} + ٣ن - ٢٠} \times \frac{٢ن - ٥}{ن - ٣}$$

الحل :

$$\frac{ن^{٢} + ن - ١٢}{٢ن^{٢} + ٣ن - ٢٠} \times \frac{٢ن - ٥}{ن - ٣}$$

$$= \frac{(ن^{٢} + ن - ١٢)(٢ن - ٥)}{(٢ن^{٢} + ٣ن - ٢٠)(ن - ٣)}$$

$$= \frac{(ن + ٤)(ن - ٣)(٢ن - ٥)}{(٢ن - ٥)(ن + ٤)(ن - ٣)}$$

= ١

تدرّب (٢) :

أوجِد الناتج في أبسط صورة :

أ $\frac{س^{٣} - ٢٧}{س^{٢} - ٩} \times (س + ٣)$

ب $\frac{ص + ٢}{٢ ص^{٢} + ١٤ ص} \times \frac{ص^{٢} - ٤٩}{ص^{٢} - ص - ٦}$

تمـــرَّنْ :

١ أوجِد الناتج في أبسط صورة :

أ $\frac{س^{٣}}{ص^{٢}} \times \frac{٥ ص}{س^{٢}}$

ب $\frac{٣ ص}{ص - ٢} \times \frac{٣ ص - ٦}{ص^{٢}}$

جـ $\frac{م - ١}{م + ٢} \times \frac{٤م + ٨}{م^{٢} - ١}$

د $\frac{١}{٦ - س} \times \frac{س^{٢} - ٣٦}{س + ٦}$

هـ $\frac{٣}{ص - ٥} \times (ص^{٣} - ٢٥ ص)$

و $\frac{١}{س^{٢} - ٢ س + ١} \times \frac{س^{٢} - ٦ س + ٥}{س - ٥}$

ز $\frac{٧ س^{٢} - ٢٨ س}{٢ س^{٢} - ٥ س - ١٢} \times \frac{٢ س + ٣}{١٤ س^{٣}}$

ح $\frac{س^{٣} - ٦٤}{س^{٢} + ٤ س + ١٦} \times \frac{٥ س}{س^{٢} - ١٦}$

٣-٣ قسمة الحدوديات النسبية
Dividing Rational Expressions

سوف تتعلّم : قسمة الحدوديات النسبية .

العبارات والمفردات :
قسمة
Dividing

تذكَّرْ أنّ :
النظير الضربي للحدودية أ هو $\frac{١}{أ}$ ، أ ≠ ٠

نشاط :

أكمل ما يلي :

١ $\frac{١٥}{٤} \div \frac{٥}{٢}$

$= \frac{١٥}{٤} \times$ ---

$=$ ---

$=$ ---

٢ $\frac{١٥س^{٢}}{٤ ص} \div \frac{٥س}{٢ ص}$

$= \frac{١٥س^{٢}}{---} \times$ ---

$=$ ---

$=$ ---

إذا كانت أ ، ب ، جـ ، د تمثّل حدوديات حيث ب ≠ ٠ ، جـ ≠ ٠ ، د ≠ ٠

فإنّ : $\frac{أ}{ب} \div \frac{جـ}{د} = \frac{أ}{ب} \times \frac{د}{جـ} = \frac{أ د}{ب جـ}$

تدرّب (١) :

اكتب ما يلي في صورة عملية ضرب ، وغيِّر ما يلزم :

أ $\frac{١٤}{س} \div \frac{٧}{س}$

$= \frac{---}{---} \times \frac{س}{---}$

ب $\frac{أ + ٣}{٢ - أ} \div \frac{٩ + أ٣}{٤ - أ٢}$

$= \frac{---}{---} \times \frac{---}{---}$

تدرّب (٢) :

أوجِد الناتج في أبسط صورة :

أ $\frac{س - ١}{س + ٤} \div \frac{س + ٣}{س + ٤}$

$= \frac{س - ١}{س + ٤} \times$ .....

= .....

= .....

ب $\frac{٥م + ١٠}{م - ٣} \div \frac{م + ٢}{م - ٣}$

= ..... × .....

= .....

= .....

مثال :

أوجِد الناتج في أبسط صورة : $\frac{ن^٣ - ١}{٢ن^٢ + ن - ٣} \div \frac{ن - ١}{٤ن + ٦}$

الحل :

$$\frac{ن^٣ - ١}{٢ن^٢ + ن - ٣} \div \frac{ن - ١}{٤ن + ٦}$$

$$= \frac{ن^٣ - ١}{٢ن^٢ + ن - ٣} \times \frac{٤ن + ٦}{ن - ١}$$

$$= \frac{(ن^٣ - ١)(٤ن + ٦)}{(٢ن^٢ + ن - ٣)(ن - ١)}$$

$$= \frac{\cancel{(ن - ١)}^{١}(ن^٢ + ن + ١) \times ٢ \cancel{(٢ن + ٣)}^{١}}{\cancel{(٢ن + ٣)}^{١}(\cancel{ن - ١}^{١})(ن - ١)}$$

$$= \frac{٢(ن^٢ + ن + ١)}{(ن - ١)}$$

تدرّب (٣) :

أوجِد الناتج في أبسط صورة :

أ $\frac{٤س^٣ - ٤س}{س + ١} \div (س - ١)$

.....

.....

.....

.....

ب $\frac{م^٢ + ١١م + ١٨}{م^٢ - ٨م + ٧} \div \frac{م + ٢}{م - ٧}$

.....

.....

.....

.....

تمـــرَّنْ :

١ أوجِد الناتج في أبسط صورة :

أ $\frac{٣م}{م-١} \div \frac{٦م}{م-١}$

ب $\frac{٢س}{٢س^{٢}+٥س-٣} \div \frac{س-٣}{س^{٢}-٩}$

جـ $\frac{٣س+٩}{س} \div (س+٣)$

د $\frac{٥س^{٢}+١٠س-١٥}{س^{٢}+٢س-٣} \div \frac{س^{٢}-١٤س+٤٩}{س^{٢}-٤٩}$

هـ $\frac{س^{٣}+٢٧}{س^{٢}-٥س-٢٤} \div \frac{س^{٢}-٣س+٩}{٢س-١٦}$

٢ إذا كانت م = $\frac{س^{٢} + ٢ س}{س^{٢} + س - ٢}$ ، ن = $\frac{س^{٢} - ٢ س + ١}{س^{٢} + ٤ س - ٥}$ ، فأوجِد :

أ م × ن

ب م ÷ ن

---

٣ يُراد إقامة قرية أولمبية على قطعة أرض مستطيلة الشكل مساحتها (س^{٢} – ٤) وحدة مربّعة وأحد بعديها $\frac{س^{٢} - س - ٢}{س + ١}$ وحدة طول .

أوجِد البعد الآخر لقطعة الأرض .

٤-٣ جمع الحدوديات النسبية وطرحها
Adding and Subtracting Rational Expressions

سوف تتعلّم : جمع الحدوديات النسبية وطرحها.

العبارات والمفردات :
جمع Adding
طرح Subtracting

جمع الحدوديات النسبية

نشاط :

أكمل ما يلي :

١ $\frac{٣}{٧} + \frac{٢}{٧}$

$= \frac{\text{---------} + \text{---------}}{٧}$

$= \frac{\text{----------}}{٧}$

٢ $\frac{٣}{٧ س} + \frac{٢}{٧ س}$

$= \frac{\text{---------} + \text{---------}}{٧ س}$

$= \frac{\text{----------}}{٧ س}$

إذا كانت أ ، ب ، جـ تمثّل حدوديات ، جـ ≠ ٠ فإنّ : $\frac{أ}{جـ} + \frac{ب}{جـ} = \frac{أ + ب}{جـ}$

تدرّب (١) :

أوجِد ناتج كلاً ممّا يلي في أبسط صورة :

أ $\frac{٣}{س + ٥} + \frac{٤}{س + ٥}$

$= \frac{\text{---------} + \text{---------}}{س + ٥}$

$= \frac{\text{----------}}{س + ٥}$

ب $\frac{ص}{ص - ٢} + \frac{٣ ص}{ص - ٢}$

$= \frac{\text{---------} + \text{---------}}{\text{----------}}$

$= \frac{\text{----------}}{\text{----------}}$

جـ $\frac{٥ن}{ن + ١} + \frac{٥}{ن + ١}$

$= \frac{\text{---------} + \text{---------}}{\text{----------}}$

$= \frac{\text{----------}}{\text{----------}} = \text{---------}$

لاحِظ لإيجاد م . م . أ (المضاعَف المشترَك الأصغر) للعددين ٨ ، ١٢ نتبع ما يلي:

٨ = ٢ × ٢ × ٢

١٢ = ٢ × ٢ × ٣

∴ م . م . أ للعددين = ٢ × ٢ × ٢ × ٣ = ٢٤

وكذلك لإيجاد م . م . أ للحدين ٦س ، ٤س نتبع نفس الطريقة السابقة :

٦س = ٢ × ٣ × س

٤س = ٢ × ٢ × س

∴ م . م . أ للحدين = ٢ × ٢ × ٣ × س = ١٢ س

وأيضًا لإيجاد م . م . أ للحدوديتين (س^{٢} – ٤) ، (س^{٢} – ٥س + ٦)

س^{٢} – ٤ = (س – ٢) (س + ٢)

س^{٢} – ٥س + ٦ = (س – ٢) (س – ٣)

∴ م . م . أ للحدوديتين = (س – ٢) (س + ٢) (س – ٣)

تدرّب (٢) :

أوجد م . م . أ في كلٍّ مما يأتي :

	الحدوديات	م . م . أ
١	س ، ص	
٢	٢أ ، ٦ ب	
٣	٣ ص ، ٢ ص^{٢}	٦ ص^{٢}
٤	ص ، (ص – ٥)	
٥	(س – ١) ، (س – ٢)	
٦	(٤ س^{٢} – ١) ، (٢ س – ١)	(٢ س – ١) (٢ س + ١)
٧	(ص – ٣) ، (–٦ + ٢ص)	
٨	(ص – ٢)^{٢} ، (ص – ٢) (ص + ٢)	
٩	(س^{٣} – ١) ، (س – ١)	
١٠	(س^{٢} – ٦ س + ٩) ، (س^{٢} – ٩)	

مثال (١) :

أوجِد الناتج في أبسط صورة :

$$\frac{١}{٦ س^{٢}} + \frac{٣}{٤ س}$$

الحل :

$$\frac{١}{٦ س^{٢}} + \frac{٣}{٤ س}$$ (م . م . أ للمقامات هو ١٢ $س^{٢}$)

$$= \frac{١ \times ٢}{٦ س^{٢} \times ٢} + \frac{٣ \times ٣ س}{٤ س \times ٣ س}$$

$$= \frac{٢}{١٢ س^{٢}} + \frac{٩ س}{١٢ س^{٢}} = \frac{٢ + ٩ س}{١٢ س^{٢}}$$

تدرّب (٣) :

أوجِد الناتج في أبسط صورة :

$$\frac{٢}{ب + ٢} + \frac{٣ ب}{٢ ب - ١}$$ (م . م . أ للمقامات هو (ب + ٢) (٢ ب - ١))

$$= \frac{٢ (٢ ب - ١)}{(ب + ٢) (٢ ب - ١)} + \frac{٣ ب \times (\quad\quad)}{(٢ ب - ١) (ب + ٢)}$$

$$= \frac{٤ ب \quad\quad}{(ب + ٢) (٢ ب - ١)} + \frac{\quad\quad}{(ب + ٢) (٢ ب - ١)}$$

$$= \frac{٤ ب \quad\quad + ٣ ب^{٢} \quad\quad}{(ب + ٢) (٢ ب - ١)}$$

$$= \frac{\quad\quad}{\quad\quad}$$

لاحِظ أنّ : (٣ $ب^{٢}$ + ١٠ ب - ٢) لا تُحلَّل .

مثال (٢) :

أوجِد الناتج في أبسط صورة : $\frac{١٢}{س^{٢} - ٤} + \frac{٣}{س + ٢}$

الحل :

$$\frac{١٢}{س^{٢} - ٤} + \frac{٣}{س + ٢}$$

$$= \frac{١٢}{(س - ٢)(س + ٢)} + \frac{٣}{س + ٢}$$ (م . م . أ للمقامات هو (س + ٢) (س - ٢))

$$= \frac{١٢}{(س - ٢)(س + ٢)} + \frac{٣(س - ٢)}{(س + ٢)(س - ٢)}$$

$$= \frac{١٢ + ٣س - ٦}{(س - ٢)(س + ٢)}$$

$$= \frac{٣س + ٦}{(س - ٢)(س + ٢)}$$

$$= \frac{٣\cancel{(س + ٢)}^{١}}{(س - ٢)\cancel{(س + ٢)}}$$

$$= \frac{٣}{س - ٢}$$

تدرّب (٤) :

أوجِد الناتج في أبسط صورة :

$$\frac{٤}{س^{٢} + ٤س + ٣} + \frac{٣}{س + ١}$$

$$= \frac{٤}{(\quad)(\quad)} + \frac{٣}{\quad}$$

$$= \frac{\quad}{(\quad)(\quad)} + \frac{\quad \times (س + ٣)}{(\quad)(س + ٣)}$$ (م . م . أ للمقامات هو (س + ١) (س + ٣))

$$= \frac{\quad}{\quad}$$

$$= \frac{\quad}{\quad}$$

تدرّب (٥) :

أوجِد الناتج في أبسط صورة :

$$\frac{س + ٣}{س^{٢} - ٩} + \frac{٢س + ٤}{س^{٢} - س - ٦}$$

$$= \frac{(\quad س + ٣ \quad)}{(\quad س \quad \text{-----} \quad)(\quad س \quad \text{-----} \quad)} + \frac{٢(\quad \text{-----} \quad)}{(\quad س \quad \text{-----} \quad)(\quad س \quad \text{-----} \quad)}$$

$$= \frac{١}{\text{-----}} + \frac{٢}{\text{-----}}$$

$$= \frac{\text{-----}}{\text{-----}}$$

معلومات مفيدة :

يستخدم المتسابقون في مباريات التجديف ، طرح الحدوديات النسبية لمعرفة تأثير مقاومة التيّار على انسياب القوارب .

طرح الحدوديات النسبية

إذا كانت أ ، ب ، جـ تمثّل حدوديات ، جـ ≠ ٠ ،

فإنّ : $\frac{أ}{جـ} - \frac{ب}{جـ} = \frac{أ - ب}{جـ}$

تدرّب (٦) :

أوجِد ناتج كلّ ممّا يلي في أبسط صورة :

أ $\frac{٣م}{م - ١} - \frac{م}{م - ١}$

$$= \frac{٣م - \text{-----}}{م - ١}$$

$$= \frac{\text{-----}}{\text{-----}}$$

ب $\frac{٢هـ + ١}{هـ - ١} - \frac{هـ + ٢}{هـ - ١}$

$$= \frac{(٢هـ + ١) - (\quad \text{-----} \quad)}{هـ - ١}$$

$$= \frac{\text{-----}}{هـ - ١}$$

$$= \frac{\text{-----}}{هـ - ١}$$

$$= \text{-----}$$

لاحِظ أنّ :

النظير الجمعي للحدودية :
٣ س - ٢ ص هو
- (٣ س - ٢ ص)
= - ٣ س + ٢ ص

مثال (٣) :

أوجد الناتج في أبسط صورة :

$$\frac{ن + ٣}{ن^{٢} + ن - ٦} - \frac{ن - ٣}{ن^{٢} - ٩}$$

الحل :

$$\frac{ن + ٣}{ن^{٢} + ن - ٦} - \frac{ن - ٣}{ن^{٢} - ٩}$$

$$= \frac{(ن + ٣)}{(ن + ٣)(ن - ٢)} - \frac{(ن - ٣)}{(ن + ٣)(ن - ٣)}$$

$$= \frac{\cancel{(ن + ٣)}^{١}}{(ن - ٢)\cancel{(ن + ٣)}^{١}} - \frac{\cancel{(ن - ٣)}^{١}}{(ن + ٣)\cancel{(ن - ٣)}^{١}}$$

$$= \frac{١}{(ن - ٢)} - \frac{١}{(ن + ٣)}$$

$$= \frac{١ \times (ن + ٣)}{(ن - ٢)(ن + ٣)} - \frac{١ \times (ن - ٢)}{(ن + ٣)(ن - ٢)}$$

$$= \frac{(ن + ٣) - (ن - ٢)}{(ن - ٢)(ن + ٣)}$$

$$= \frac{ن + ٣ - ن + ٢}{(ن - ٢)(ن + ٣)}$$

$$= \frac{٥}{(ن - ٢)(ن + ٣)}$$

تدرّب (٧) :

أوجِد الناتج في أبسط صورة :

$$\frac{٦}{س - ٣} - \frac{٥}{س + ٢}$$

$$= \frac{٦ \times (س + ٢)}{(س - ٣)(س + ٢)} - \frac{٥ \times (\quad\quad)}{(س + ٢)(س - ٣)}$$

$$= \frac{٦ س + \quad\quad}{(س - ٣)(س + ٢)} - \frac{٥ س - \quad\quad}{(س - ٣)(س + ٢)}$$

$$= \frac{(٦ س + \quad\quad) - (٥ س - \quad\quad)}{(س - ٣)(س + ٢)}$$

$$= \frac{\quad\quad\quad\quad\quad\quad}{(س - ٣)(س + ٢)}$$

$$= \frac{\quad\quad\quad\quad}{(س - ٣)(س + ٢)}$$

تمـــرَّنْ :

أوجِد ناتج كلّ ممّا يلي في أبسط صورة :

١ $\frac{٥}{٢ م} + \frac{٣}{٢ م}$

---

٢ $\frac{٤}{٦ س - ١} - \frac{٣}{٦ س - ١}$

---

٣ $\frac{س^{٢}}{س+٣} - \frac{٩}{س+٣}$

٤ $\frac{١}{٢ب-١} - \frac{٣}{١-٢ب}$

تذكَّرْ أنّ :
أ - ب = - (ب - أ)

٥ $\frac{٥}{٧ل} - \frac{٣}{٥ل^{٢}}$

٦ $\frac{٤}{س} + \frac{٣}{س+٢}$

٧ $\frac{س}{س + ٥} - \frac{٤}{س + ٣}$

٨ $\frac{٤}{٣ س + ٦} + \frac{٣}{٢ س + ٤}$

٩ $\frac{ص - ٦}{ص^{٢} - ٣ ص - ١٨} - \frac{٣}{ص + ٣}$

١٠ $\frac{س^{٣} + ١}{٣ س^{٢} + ٨ س + ٥} + \frac{٧ س}{٣ س^{٢} + ٥ س}$

١١ $\frac{\text{س}}{\text{س}^{٢} - ٩} - \frac{\text{س}}{\text{س}^{٢} + ٦\text{س} + ٩}$

١٢ $\frac{\text{س} + ٤}{\text{س} + ٣} - \frac{١}{\text{س} - ٣} + \frac{٦}{\text{س}^{٢} - ٩}$

١٣ إذا كانت تكلفة بناء فندق داخل القرية الأولمبية تساوي $\frac{٣\text{س}^{٢} + ٢}{٤\text{س}^{٢} + ٢}$ مليار دينار وتكلفة تأثيث هذا الفندق تساوي $\frac{٣\text{س}^{٢} + ١}{٤\text{س}^{٢} + ٢}$ مليار دينار ، فأوجِد التكلفة الشاملة لهذا الفندق .

٣-٥ مراجعة الوحدة الثالثة
Revision Unit Three

أوّلًا : التمارين المقالية

١ ضَعْ في أبسط صورة كلًّا ممّا يلي :

أ) $\frac{٦أ + ٩}{١٢}$

ب) $\frac{٢س - ٥}{٦س - ١٥}$

جـ) $\frac{٢س^{٢} + ٢س}{٣س^{٢} + ٣س}$

د) $\frac{٨ - ٢ب}{ب^{٢} - ١٦}$

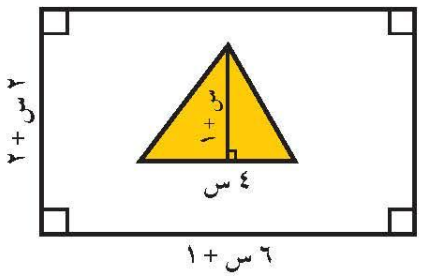
هـ) $\frac{ل^{٢} - ٦ل + ٨}{ل^{٢} + ل - ٦}$

و) $\frac{٢ر^{٢} + ٩ر - ٥}{ر^{٢} + ١٠ر + ٢٥}$

ز) $\frac{٧ص^{٢} - ١٣ص + ٦}{ص^{٢} + ٢ص - ٣}$

ح) $\frac{٢٧س^{٣} + ١٢٥}{٣س^{٢} - س - ١٠}$

٢ أُكتب نسبة مساحة المنطقة المثلّثة إلى مساحة المنطقة المستطيلة في صورة حدودية نسبية وضعها في أبسط صورة .



٣ أوجِد الناتج في أبسط صورة لكلّ ممّا يلي :

أ $\frac{٤ س + ٤}{س - ٣} \times (س^{٢} - س - ٦)$

ب $\frac{٣ س^{٢} + ١٢ س}{٢ س^{٢} + ٧ س - ٤} \times \frac{٦ س^{٢} - ١٣ س + ٥}{٩ س^{٣}}$

جـ $\frac{س^{٢} - س ص + ص^{٢}}{س^{٣} + ص^{٣}} \times \frac{س + ص}{س - ص}$

د $\frac{٨ س^{٣}}{س^{٣} - ص^{٣}} \div \frac{٤ س^{٢}}{س^{٢} + س ص + ص^{٢}}$

هـ $\frac{٥ س^{٢} + ١٠ س - ١٥}{س^{٢} - ٦ س + ٥} \div \frac{٢ س^{٢} + ٧ س + ٣}{٤ س^{٢} - ٨ س - ٥}$

و $\frac{ص^{٢} + ٥ ص + ٦}{ص - ٣} \div \frac{ص^{٢} + ٣ ص + ٢}{ص^{٢} - ٢ ص - ٣}$

٤ أوجِد الناتج في أبسط صورة لكلّ ممّا يلي :

أ $\frac{٥}{٨ م} + \frac{٣}{٨ م}$

ب $\frac{س}{س + ٦} + \frac{٢}{س + ٣}$

جـ $\frac{٢ س - ٤}{س^{٢} - ٤} + \frac{س^{٢} - س}{س^{٢} + س - ٢}$

د $\frac{٤}{س + ٣} - \frac{٦}{س - ٢}$

هـ $\frac{٦}{س^{٢} + ٣ س + ٢} - \frac{٤}{س + ٢}$

و $\frac{٢ ن - ١}{٢ ن^{٢} + ٥ ن - ٣} - \frac{ن + ٣}{ن^{٢} - ٩}$

٥ $(س^{٢} - ص^{٢}) \div (س^{٣} - ص^{٣}) \times \frac{س^{٢} + س ص + ص^{٢}}{س + ص}$

* ٦ أوجِد الناتج في أبسط صورة :

$(\frac{س^{٢}}{ص} + \frac{ص^{٢}}{س}) \div (\frac{س^{٢}}{ص^{٢}} - \frac{س - ص}{ص})$

ثانيًا : التمارين الموضوعية

أولًا : في البنود التالية ، ظلِّل (أ) إذا كانت العبارة صحيحة ، وظلِّل (ب) إذا كانت العبارة غير صحيحة .

١ $\frac{س - ٣}{٣ - س} = -١$	(أ)	(ب)
٢ $\frac{٢}{س + ١} + \frac{٣}{س + ٣} = \frac{٥}{٢س + ٤}$	(أ)	(ب)
٣ $\frac{٥س}{٣س - ٢} - \frac{٢س}{٣س - ٢} = \frac{٣س}{٣س - ٢}$	(أ)	(ب)
٤ $\frac{ص + ٢}{ص + ٣} \div (ص + ٢) = \frac{١}{ص + ٣}$	(أ)	(ب)

ثانيًا: لكلّ بند من البنود التالية أربعة اختيارات ، واحد فقط منها صحيح ، ظلِّل الدائرة الدالّة على الإجابة الصحيحة .

٥ $\frac{٣م}{م - ١} \div \frac{٦م}{م - ٢} =$

(أ) $\frac{م - ٢}{م - ١}$ (ب) $\frac{١٨م^{٢}}{(م - ١)(م - ٢)}$ (جـ) $\frac{م - ٢}{٢(م - ١)}$ (د) $\frac{م - ١}{٢(م - ٢)}$

٦ $\frac{س^{٢}}{س - ٢} - \frac{٤}{س - ٢} =$

(أ) س − ٢ (ب) س + ٢ (جـ) $س^{٢} - ٤$ (د) ١

٧ الحدودية النسبية التي في أبسط صورة هي :

(أ) $\frac{ص + ١}{ص^{٢} - ١}$ (ب) $\frac{٢ن - ١}{ن^{٢} + ٤}$ (جـ) $\frac{س - ٧}{٧ - س}$ (د) $\frac{٣م - ٣}{م - ١}$

٨ $\frac{٢س}{س + ٢} + \frac{٤}{س + ٢} =$

(أ) $\frac{٦س}{س + ٢}$ (ب) ٢س (جـ) ٢ (د) ١

٩ $\frac{٢س}{س + ٢} \times \frac{٣س + ٦}{س^{٢}} =$

(أ) $\frac{٦}{س}$ (ب) $\frac{س}{٦}$ (جـ) ٦س (د) $\frac{٣}{س}$

١٠ $\frac{٢ص}{ص + ١} - \frac{ص}{ص + ١} + \frac{١}{ص + ١} =$

(أ) ص + ١ (ب) $\frac{ص + ١}{٣ص + ٣}$ (جـ) $\frac{٣ص + ١}{ص + ١}$ (د) ١

الوحدة الرابعة الهندسة الإحداثية وهندسة التحويلات

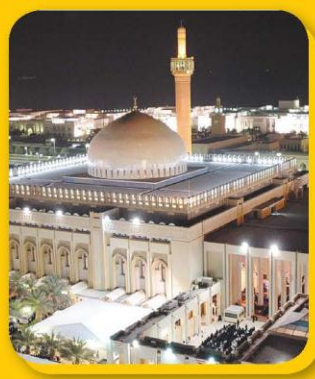
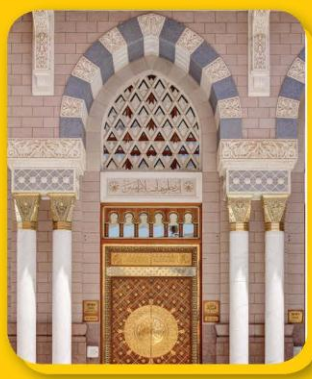
Analytic Geometry and Transformations

معالم حضارية
Cultural Landmarks

تهتمّ دولتنا الحبيبة الكويت بمعالمها الحضارية اهتمامًا واضحًا ، فقد زخرت بالعديد من المظاهر العمرانية العصرية والمباني الشاهقة ذات التصاميم الجميلة ومجمّعات التسوّق الضخمة والتي شُيّدت على أحدث طراز .

مشروع الوحدة : (معالم حضارية)

تعتمد الزخرفة الهندسية على التكرار والتداخل للأشكال الهندسية واللذين يعتمدان بدورهما على التحويلات الهندسية للأشكال ، وقد أبدع المسلمون في استخدام أشكال الزخارف الهندسية في فنون العمارة ، ومن الأمثلة على ذلك المسجد النبوي في المدينة المنوَّرة والمسجد الكبير في مدينة الكويت .

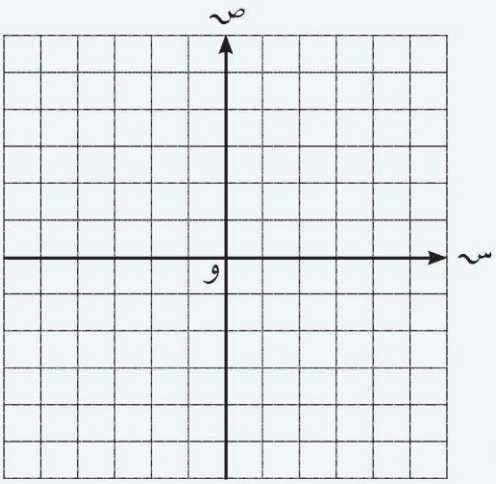



خطّة العمل :

- عمل تصميم زخرفي بتوظيف التحويلات الهندسية .

خطوات تنفيذ المشروع :

- يقسِّم المعلّم المتعلّمين إلى مجموعات .
- أنشِئ المربّع أ ب جـ د الذي إحداثيات رؤوسه أ (١ ، ١) ، ب (- ١ ، ١) ، جـ (- ١ ، - ١) ، د (١ ، - ١) .
- أُرسم المربّع أَ بَ جَ دَ صورة المربّع أ ب جـ د بتكبير ت (و ، ٢) حيث (و) نقطة الأصل .
- ثمّ ارسم المربّع أً بً جً دً صورة المربّع أ ب جـ د بتكبير ت (و ، ٤) .
- قُمْ بتدوير المربّعات التي رسمتها بدوران مركزه نقطة الأصل (و) وفي اتّجاه حركة عقارب الساعة وبزاوية قياسها ٤٥° (اِستخدِم الأدوات الهندسية).
- لوِّن الشكل الناتج للحصول على شكل زخرفي جميل.



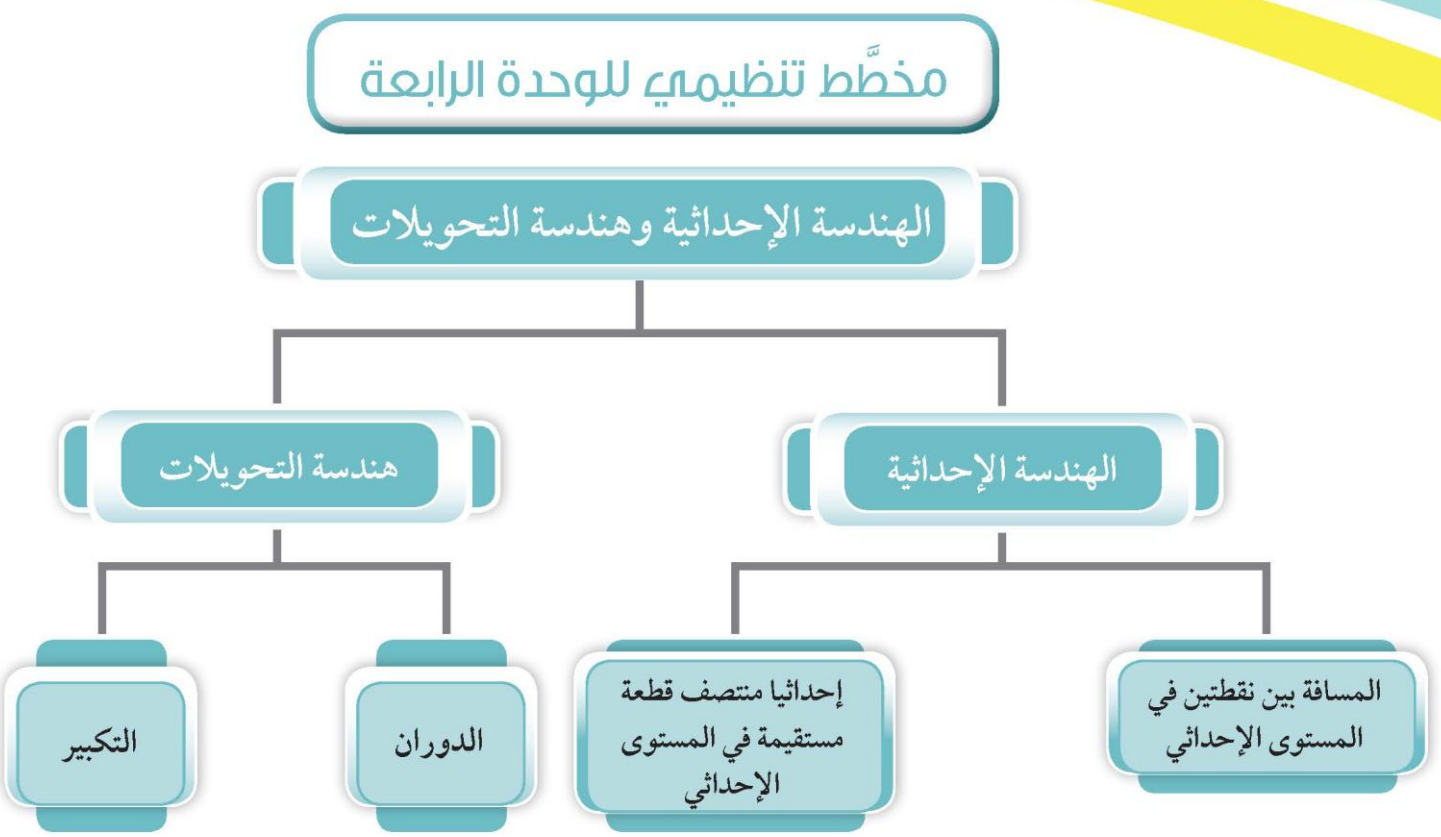
علاقات وتواصل :

- تتبادل المجموعات العمل وتتأكّد من صحّته .

عرض العمل :

- تعرض كلّ مجموعة عملها وتناقش خطوات تنفيذ العمل .

مخطَّط تنظيمي للوحدة الرابعة



اِستعِدّ للوحدة الرابعة

١ أكمل ما يلي :

أ $\sqrt{٤٠} = \sqrt{\quad} \times \sqrt{\quad}$

$= \quad \times$

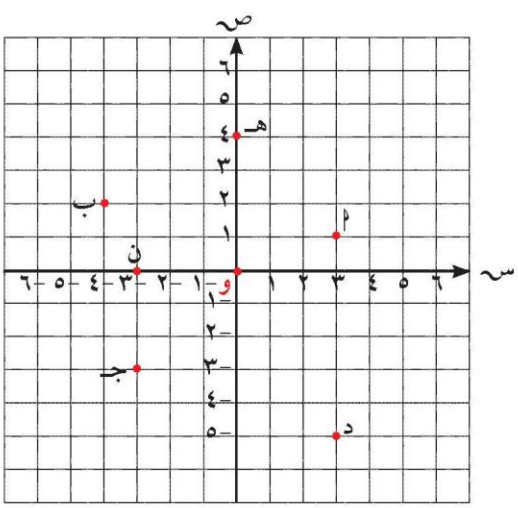
$=$

ب $|-٣-(-١)| =$

$=$

$=$

٢ في المستوى الإحداثي ،
اكتب إحداثيات النقاط التالية :



أ (..... ، .....)

ب (..... ، .....)

جـ (..... ، .....)

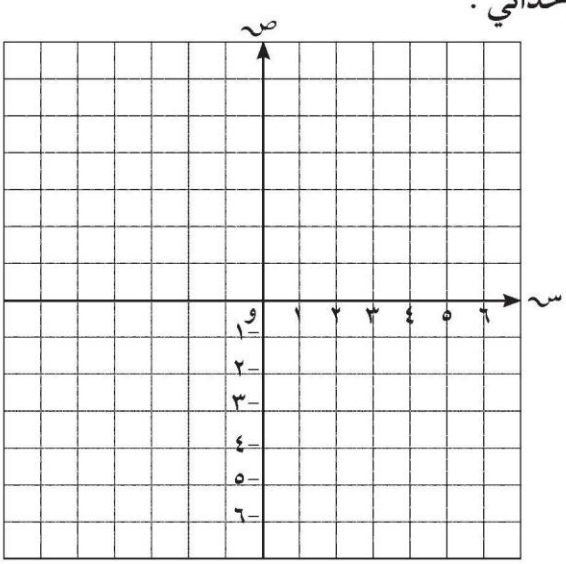
د (..... ، .....)

هـ (..... ، .....)

ن (..... ، .....)

و (..... ، .....)

٣ عيِّن النقاط التالية على المستوى الإحداثي :



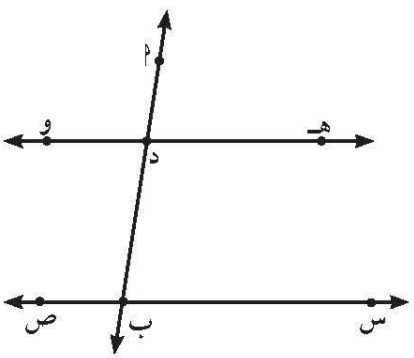
ع (٥ ، – ١) ، ك (– ٢ ، – ٦) ،
ف (٢ ، ٠) ، ط (٠ ، – ٣) ،
م (– ٥ ، ٥) ، ي (٤ ، ٣)

٤ حلّ المعادلات التالية :

أ $\frac{س + ٢}{٢} = -١$

ب $\frac{٥ + ص}{٢} = ٣$

٥ في الشكل المقابل : تحقّق من توازي $\overline{هـ و}$ ، $\overline{س ص}$ باستخدام الأدوات الهندسية .



٦ حُلَّ التناسب في كلٍّ ممّا يلي :

أ $\frac{س}{٤} = \frac{٦}{٨}$

ب $\frac{٣}{٥} = \frac{٩}{ص}$

١-٤ المسافة بين نقطتين في المستوى الإحداثي
Distance Between Two Points In a Plane

سوف تتعلّم : إيجاد المسافة (البعد) بين نقطتين في المستوى الإحداثي .

العبارات والمفردات :
المسافة
Distance
المستوى
Plane

نشاط :

المسافة (البعد) بين نقطتين على محور الإحداثيات هي القيمة المطلقة للفرق بين إحداثيي هاتين النقطتين .

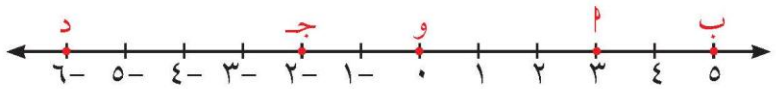
$$\text{ا ب} = |\text{ع}_٢ - \text{ع}_١|$$

طول ا ب : إحداثي النقطة ب ، إحداثي النقطة ا

معلومات مفيدة :
يستخدم المساحون البعد بين نقطتين لإيجاد البعد بين القرى والمدن .

لاحظ أن :
$|\text{ع}_٢ - \text{ع}_١| = |\text{ع}_١ - \text{ع}_٢|$

من الشكل المرسوم ، أكمل ما يلي :



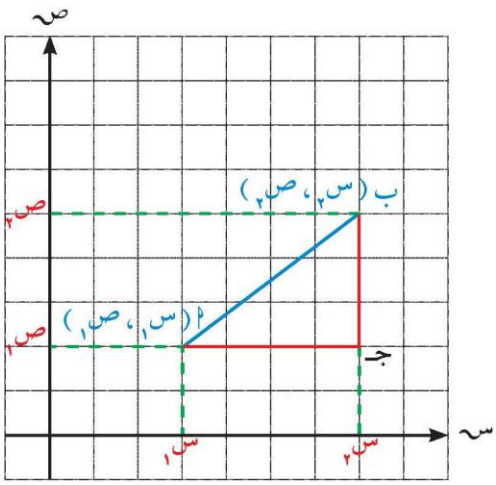
١ ا ب = | ٥ - ٣ | = | ..... | = ... وحدة طول

٢ ا جـ = | (٢-) - ..... | = | ..... | = ...

٣ جـ د = | ..... - ..... | = | ..... | = ...

(تحقق بالعدّ في كلٍّ مما سبق)

لإيجاد البعد بين النقطتين أ (س$_1$ ، ص$_1$) ، ب (س$_2$ ، ص$_2$) في المستوى الإحداثي .



من الشكل المقابل :

أ جـ = | س$_2$ − س$_1$ |

جـ ب = | ص$_2$ − ص$_1$ |

∵ المثلث أ ب جـ قائم الزاوية في جـ

∴ (أ ب)^2 = (أ جـ)^2 + (جـ ب)^2

= (| س$_2$ − س$_1$ |)^2 + (| ص$_2$ − ص$_1$ |)^2

= (س$_2$ − س$_1$)^2 + (ص$_2$ − ص$_1$)^2

∴ أ ب = $\sqrt{\ }$ (س$_2$ − س$_1$)^2 + (ص$_2$ − ص$_1$)^2

لاحظ أن :
| س^2 | = | س |^2 = س^2

أي أن :

البعد بين النقطتين أ (س$_1$ ، ص$_1$) ، ب (س$_2$ ، ص$_2$) هو :

أ ب = $\sqrt{\ }$ (س$_2$ − س$_1$)^2 + (ص$_2$ − ص$_1$)^2

لاحظ أن :
(س$_2$ − س$_1$)^2 = (س$_1$ − س$_2$)^2

مثال (١) :

أوجد البعد بين النقطتين أ (١ ، ١) ، ب (٥ ، ٤)

الحل :

أ ب = $\sqrt{\ }$ (س$_2$ − س$_1$)^2 + (ص$_2$ − ص$_1$)^2

= $\sqrt{\ }$ (٥ − ١)^2 + (٤ − ١)^2

= $\sqrt{\ }$ (٤)^2 + (٣)^2

= $\sqrt{\ }$ ١٦ + ٩

= $\sqrt{\ }$ ٢٥ = ٥ وحدة طول

تدرّب (١) :

أوجد البعد بين النقطتين أ(٢ ، ٥) ، ب (٨ ، -٣) .

أ ب = $\sqrt{(س_٢ - س_١)^٢ + (ص_٢ - ص_١)^٢}$

= $\sqrt{(\quad - \quad)^٢ + (\quad - \quad)^٢}$

= $\sqrt{(\quad)^٢ + (\quad)^٢}$

= $\sqrt{\quad + \quad}$

= $\sqrt{\quad}$ = ... وحدة طول

تدرّب (٢) :

إذا كانت أ(٢ ، -١) ، ب (-٢ ، -٦) ، أوجد أ ب .

أ ب = $\sqrt{(س_٢ - س_١)^٢ + (\quad - \quad)^٢}$

= $\sqrt{(\quad - \quad)^٢ + (\quad - \quad)^٢}$

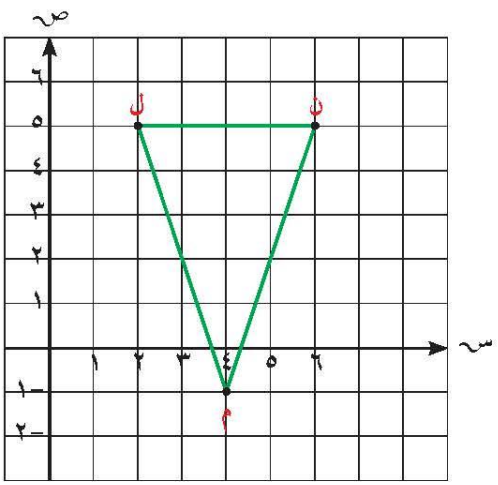
= $\sqrt{(\quad)^٢ + (\quad)^٢}$

= $\sqrt{\quad + \quad}$

= $\sqrt{\quad}$ وحدة طول

مثال (٢) :

في الشكل أدناه : بيِّن نوع المثلث ل م ن بالنسبة إلى أطوال أضلاعه حيث إحداثيات رؤوسه هي : ل (٢ ، ٥) ، م (٤ ، −١) ، ن (٦ ، ٥) .



الحل :

$$ل م = \sqrt{(س_٢ - س_١)^٢ + (ص_٢ - ص_١)^٢}$$

$$= \sqrt{(٤ - ٢)^٢ + (-١ - ٥)^٢}$$

$$= \sqrt{(٢)^٢ + (-٦)^٢}$$

$$= \sqrt{٤ + ٣٦}$$

$$= \sqrt{٤٠}$$

$$= \sqrt{٤ \times ١٠} = ٢\sqrt{١٠}$$ وحدة طول

$$م ن = \sqrt{(س_٢ - س_١)^٢ + (ص_٢ - ص_١)^٢}$$

$$= \sqrt{(٦ - ٤)^٢ + (٥ - (-١))^٢}$$

$$= \sqrt{(٢)^٢ + (٦)^٢}$$

$$= \sqrt{٤ + ٣٦}$$

$$= \sqrt{٤٠}$$

$$= \sqrt{٤ \times ١٠} = ٢\sqrt{١٠}$$ وحدة طول

$$ل ن = \sqrt{(س_٢ - س_١)^٢ + (ص_٢ - ص_١)^٢}$$

$$= \sqrt{(٦ - ٢)^٢ + (٥ - ٥)^٢}$$

$$= \sqrt{(٤)^٢ + (٠)^٢}$$

$$= \sqrt{١٦}$$

= ٤ وحدة طول

∵ المثلث ل م ن فيه ل م = م ن

∴ المثلث ل م ن متطابق الضلعين

تدرّب (٣) :

استخدم الحساب الذهني لإيجاد البعد بين النقطتين التاليتين :

أ) أ (٧ ، -٦) ، ب (٧ ، -٢)

.....

.....

ب) ل (٠ ، -٤) ، ن (٣ ، ٠)

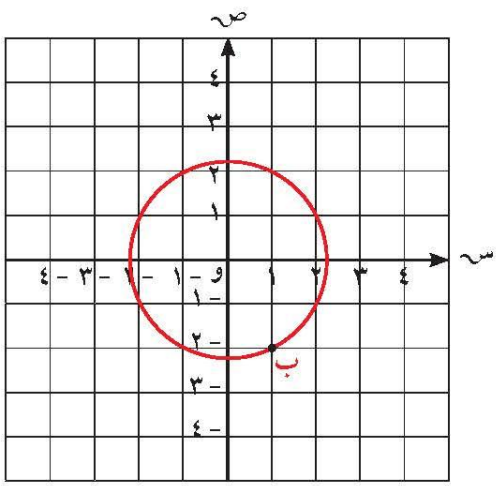
.....

.....

تدرّب (٤) :

لتكن ب نقطة تنتمي إلى دائرة مركزها نقطة الأصل و .

أوجد طول نصف قطر الدائرة .



$\overline{ب\ و}$ تمثل ..... الدائرة

إحداثيات النقطتين ب ، و هما :

ب (..... ، .....) ، و (..... ، .....)

ب و = ...

= .....

= .....

= .....

تمـــرَّنْ :

١ أوجد البعد بين النقطتين أ (٤ ، ٢) ، ب (٧ ، ٦) .

.....

.....

.....

.....

.....

٢ إذا كانت أ(٨ ، -٣) ، ب(٢ ، ٥) ، أوجد طول $\overline{أب}$.

٣ أوجد البعد بين النقطتين ع(-٣ ، ٥) ، ك(-١ ، ٥) .

٤ أوجد البعد بين النقطتين ل(٤ ، ٠) ، ن(٠ ، -٢) .

٥ لتكن أ(٥ ، ١٢) نقطة تنتمي إلى دائرة مركزها نقطة الأصل و .
أوجد طول نصف قطر الدائرة .

٦ $\overline{\text{ط ل}}$ قطر في دائرة حيث ط (٠ ، ٢) ، ل (٨ ، -٤) .
أوجد طول نصف قطر الدائرة .

٧ أوجد طول قطر المستطيل أ ب جـ د الذي إحداثيات رؤوسه هي :
أ (٦ ، ٢) ، ب (٦ ، ٨) ، جـ (-١ ، ٨) ، د (-١ ، ٢)

٨ بين نوع المثلث ل م ن بالنسبة إلى أطوال أضلاعه حيث إحداثيات رؤوسه هي :
ل (٣ ، -٥) ، م (-٣ ، ٠) ، ن (١ ، ٢) .

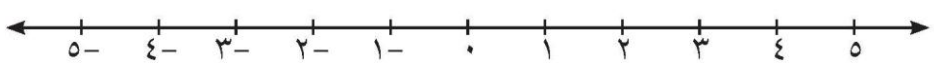
٢-٤ إحداثيا نقطة منتصف قطعة مستقيمة في المستوى الإحداثي
Midpoint Coordinates in a Plane

سوف تتعلّم : إيجاد إحداثيا نقطة منتصف قطعة مستقيمة في المستوى الإحداثي .

العبارات والمفردات :
منتصف قطعة مستقيمة
Midpoint of a Segment
إحداثيات
Coordinates

نشاط :

مثِّل النقطة أ التي إحداثيها -٣ ، والنقطة ب التي إحداثيها ٥ على المحور الإحداثي .



١ مثِّل النقطة جـ منتصف $\overline{أب}$.

٢ أكمل :

$$\frac{\text{إحداثي النقطة أ} + \text{إحداثي النقطة ب}}{٢}$$

$$= \frac{\text{---------- + ----------}}{٢}$$

$$= \frac{\text{----------}}{٢} = \text{----------}$$

= إحداثي النقطة جـ

أي أن :

إذا كانت $س_١$ إحداثي النقطة أ ، $س_٢$ إحداثي النقطة ب ، حيث أ ، ب نقطتين على محور إحداثي وكانت جـ نقطة منتصف $\overline{أب}$ فإن :

إحداثي النقطة جـ هو $\frac{س_١ + س_٢}{٢}$.

تدرّب (١) :

أوجد إحداثي النقطة د منتصف $\overline{لع}$ ، إذا كان إحداثي النقطة ل هو -١٢ ، وإحداثي النقطة ع هو ٦ .

مثال (١) :

إذا كانت النقطة ك تنصف $\overline{د ب}$ على محور إحداثي ، بفرض أن

إحداثي النقطة ك هو ١ وإحداثي النقطة د هو ٤ ، أوجد إحداثي النقطة ب .

الحل :

نفرض أن إحداثيات النقاط د ، ك ، ب على الترتيب هي $س_١$ ، س ، $س_٢$

فيكون $س = \frac{س_١ + س_٢}{٢}$

$١ = \frac{٤ + س_٢}{٢}$

$٢ = ٤ + س_٢$

$س_٢ = ٢ - ٤ = -٢$

∴ إحداثي النقطة ب هو -٢

في المستوى الإحداثي إذا كانت أ ($س_١$ ، $ص_١$) ، ب ($س_٢$ ، $ص_٢$) فإنّ :

إحداثيا نقطة منتصف $\overline{أ ب}$ هي

$$\left(\frac{س_١ + س_٢}{٢} \ ، \ \frac{ص_١ + ص_٢}{٢} \right)$$

مثال (٢) :

إذا كانت ط (٢ ، -٣) ، ق (-٤ ، ١) ، فأوجد النقطة م التي تنصف $\overline{ط ق}$.

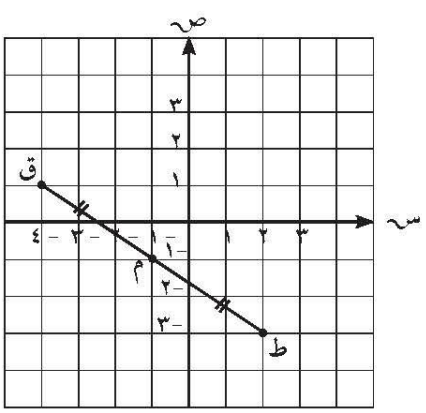
الحل :

نقطة المنتصف م $\left(\frac{س_١ + س_٢}{٢} \ ، \ \frac{ص_١ + ص_٢}{٢} \right)$

$= \left(\frac{٢ + (-٤)}{٢} \ ، \ \frac{١ + (-٣)}{٢} \right)$

$= \left(\frac{(-٢)}{٢} \ ، \ \frac{(-٢)}{٢} \right)$

$= (-١ ، -١)$



تدرّب (٢) :

أوجد إحداثيا النقطة ف منتصف $\overline{ع ل}$ في كل مما يلي :

أ ع (٣، -٥) ، ل (-٣، ١)

ب ع (-٢، ٧) ، ل (-١، -٤)

مثال (٣) :

إذا كانت أ (٢، ٣) تنصف $\overline{ب جـ}$ حيث ب (-١، ٠) ، جـ (س$_٢$، ص$_٢$) ، فأوجد النقطة جـ .

الحل :

∵ نقطة المنتصف أ $\left(\frac{س_١ + س_٢}{٢} ، \frac{ص_١ + ص_٢}{٢} \right)$

∴ $\left(\frac{-١ + س_٢}{٢} ، \frac{٠ + ص_٢}{٢} \right)$ = (٢، ٣)

$\frac{-١ + س_٢}{٢} = ٢$

$-١ + س_٢ = ٤$

$س_٢ = ٤ + ١$

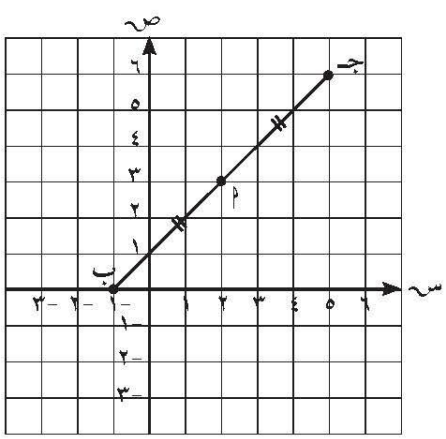
$= ٥$

$\frac{٠ + ص_٢}{٢} = ٣$

$٠ + ص_٢ = ٦$

$ص_٢ = ٦$

∴ النقطة جـ (٥، ٦)



تدرّب (٣) :

إذا كانت م (-٢ ، -١) نقطة منتصف $\overline{أب}$ حيث أ (٢ ، -٣) ، أوجد النقطة ب .

تمـــرَّنْ :

١ أوجد النقطة م منتصف $\overline{أب}$ حيث أ (-١ ، ٣) ، ب (٧ ، -١) .

٢ أوجد النقطة ن منتصف $\overline{جـد}$ حيث جـ (٥ ، -٣) ، د (-٤ ، -٩) .

٣ أوجد النقطة ع منتصف $\overline{ف ق}$ حيث ف (-١١ ، ٦) ، ق (٨ ، ٦) .

٤ أوجد النقطة ت منتصف $\overline{ح ز}$ حيث ح (١٧ ، -١٠) ، ز (١٣ ، -٥) .

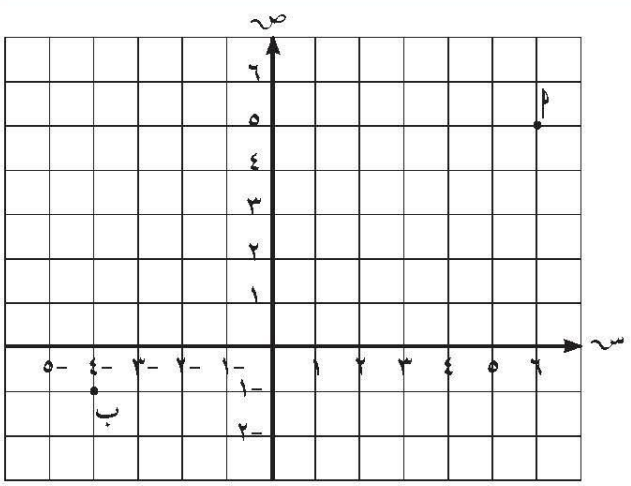
٥ إذا كانت ك (٩ ، ٣) تنصف $\overline{د ف}$ حيث د (-٣ ، -١) ، فأوجد النقطة ف .

٦ $\overline{أب}$ قطر في الدائرة التي مركزها م حيث أ (٥ ، -١) ، ب (-١ ، ٧) ،
أوجد :

أ النقطة م مركز الدائرة .

ب طول نصف قطر الدائرة .

٧ النقطتان أ ، ب تمثلان موقعين لمبنيين يملكهما أحمد .
أراد أحمد إنشاء مخزن يقع في منتصف المسافة بين المبنيين .
أوجد النقطة التي تمثل موقع المخزن إذا كانت أ (٦ ، ٥) ، ب (-٤ ، -١) كما في الشكل .

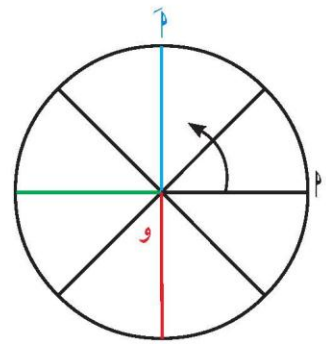


٤-٣ الدوران
Rotation

سوف تتعلّم : الدوران وكيفية إيجاد صورة شكل هندسي بالدوران .

العبارات والمفردات :
التحويل الهندسي
Transformation
الدوران
Rotation

نشاط (١) :



عجلة الدراجة

من الشكل المرسوم :

يوضّح السهم اتّجاه حركة عجلة الدرّاجة الهوائية وهي تدور حول نقطة ثابتة ولتكن مركز الدائرة (و) . أكمِل كلًّا ممّا يلي :

$\overline{و ب}$ هو ..... للدائرة

$\overline{و أ}$ هو ..... آخر للدائرة

∴ و ب ..... و أ

ملاحظة :

(١)

اللعبة الموضّحة في الشكل تدور حول نقطة ثابتة ، ويكون الدوران في اتّجاه حركة عقارب الساعة .

(٢)

اللعبة الموضّحة في الشكل تدور حول نقطة ثابتة ، ويكون الدوران في اتّجاه مضادّ لحركة عقارب الساعة .

الدوران هو تحويل هندسي يعيّن لكل نقطة ب في المستوى نقطة أخرى أ بحيث :

ب ⟵ أ ، و ⟵ و (و نقطة صامدة ، تُسمّى **مركز الدوران**) ،

و ب = و أ ،

(ب و̂ أ) هي زاوية الدوران وقياسها هـ° .

نرمز إلى الدوران الذي مركزه نقطة الأصل (و) وقياس زاويته (هـ°) بالرمز د (و ، هـ°) .

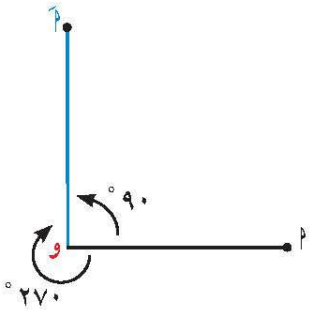
سنعتبر الدوران **موَجبًا** إذا كان **عكس** اتّجاه حركة عقارب الساعة ،

وسنعتبر الدوران **سالبًا** إذا كان **مع** اتّجاه حركة عقارب الساعة .

تذكَّرْ أنّ :
إذا كانت صورة النقطة تحت تأثير أيّ تحويل هندسي هي النقطة نفسها ، فإنّها تُسمّى نقطة صامدة .

من النشاط السابق :

• **في الشكل (١) :**



الشكل (١)

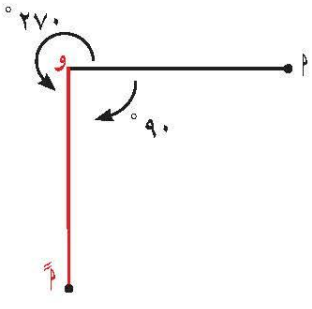
عندما تدور العجلة من الوضع ب إلى الوضع أ يتعيّن دورانًا موجَبًا (عكس اتّجاه حركة عقارب الساعة) مركزه (و) قياس زاويته ٩٠° ونعبّر عنه بالرمز : د (و ، ٩٠°)

لاحِظ أنّ دورانًا موجَبًا حول (و) قياس زاويته ٩٠° يكافئ دورانًا سالبًا حول (و) قياس زاويته ٢٧٠°

ففي الحالتين تدور العجلة من الوضع ب إلى الوضع أ

د (و ، ٩٠°) يكافىء د (و ، – ٢٧٠°) .

• **في الشكل (٢) :**



الشكل (٢)

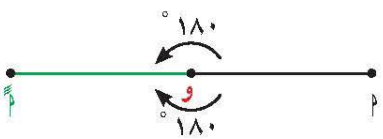
عندما تدور العجلة من الوضع ب إلى الوضع أ يتعيّن دورانًا سالبًا (مع اتّجاه حركة عقارب الساعة) مركزه (و) قياس زاويته ٩٠° ونعبّر عنه بالرمز : د (و ، – ٩٠°)

كذلك نلاحظ أنّ دورانًا سالبًا حول (و) قياس زاويته ٩٠° يكافئ دورانًا موجَبًا حول (و) قياس زاويته ٢٧٠°

ففي الحالتين تدور العجلة من الوضع ب إلى الوضع أ

د (و ، – ٩٠°) يكافىء د (و ، ٢٧٠°) .

• **في الشكل (٣) :**



الشكل (٣)

كذلك نلاحظ أنّ دورانًا سالبًا حول (و) قياس زاويته ١٨٠° يكافئ دورانًا موجَبًا حول (و) قياس زاويته ١٨٠°

ففي الحالتين تدور العجلة من الوضع ب إلى الوضع أ

د (و ، – ١٨٠°) يكافىء د (و ، ١٨٠°) .

تدرّب (١) :

أكمل ما يلي :

أ د (و ، ٣٠°) هو :

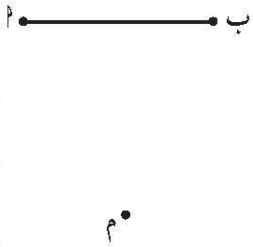
دوران حول ..... في اتجاه ..... حركة عقارب الساعة بزاوية قياسها .....

ب د (و ، – ١٢٠°) هو :

دوران حول ..... في اتجاه ..... حركة عقارب الساعة بزاوية قياسها .....

مثال تمهيدي :

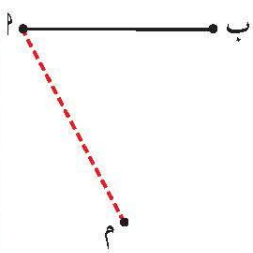
ارسم صورة $\overline{أب}$ تحت تأثير الدوران :
د (م ، – ٧٥°)



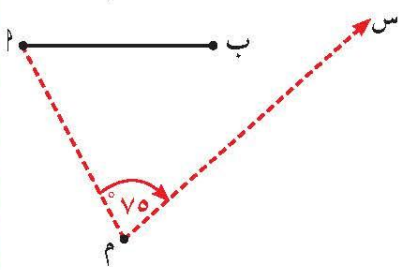
الحل :

١ نعيّن أَ صورة النقطة أ كالآتي :

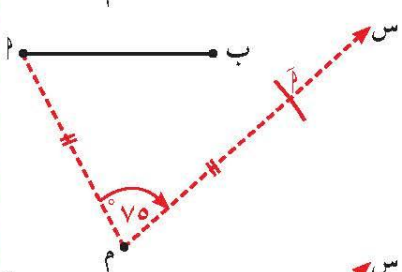
أ نرسم القطعة المستقيمة م أ



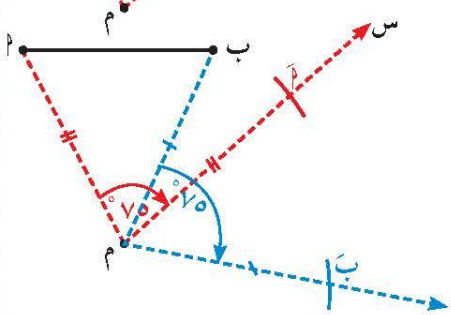
ب باستخدام المنقلة نرسم زاوية قياسها ٧٥°
رأسها النقطة م وضلعيها $\overleftarrow{م أ}$ ، $\overleftarrow{م س}$



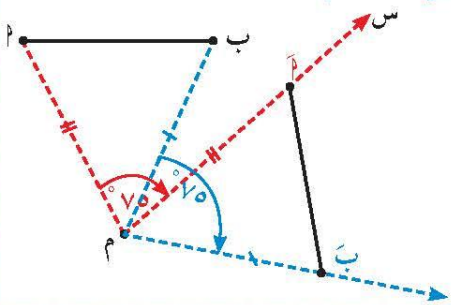
جـ باستخدام الفرجار نعيّن أَ على $\overleftarrow{م س}$
حيث م أ = م أَ



٢ نعيّن بَ صورة النقطة ب بالطريقة نفسها .



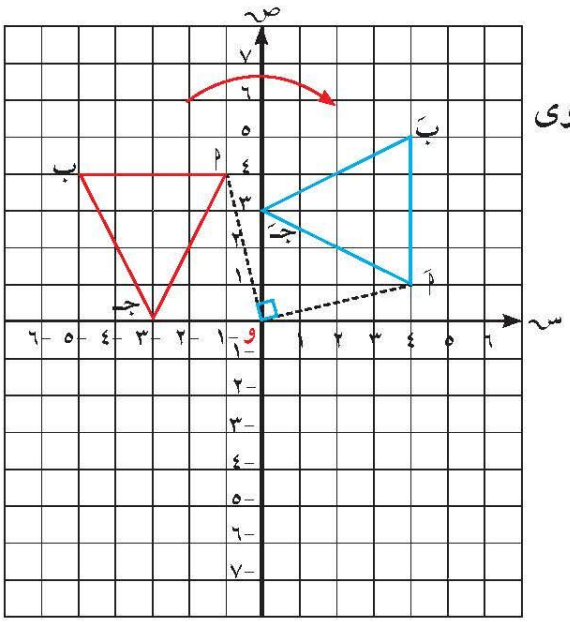
٣ نرسم $\overline{أَبَ}$ صورة $\overline{أب}$.



نشاط (٢):

رُسِمَ المثلّث أ ب جـ على شبكة المستوى الإحداثي حيث أ (- ١ ، ٤) ،

ب (- ٥ ، ٤) ، جـ (- ٣ ، ٠)



- ثبّت ورقة شفّافة على المستوى وقُمْ برسم المثلّث أ ب جـ والمحاور على الورقة الشفّافة.
- ثبّت سنّ دبوس عند النقطة (و) وقُمْ بتدوير الورقة الشفّافة بزاوية قياسها ٩٠° مع اتّجاه حركة عقارب الساعة لتحصل على المثلث أَ بَ جَ صورة المثلث أ ب جـ ونعبر عن ذلك كالتالي :

Δ أ ب جـ $\xleftarrow{\text{د (و ، - ٩٠°)}}$ Δ ....

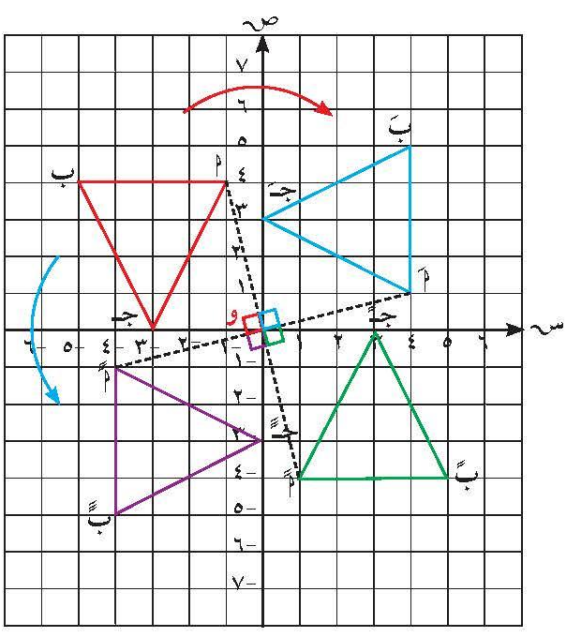
- وباستخدام نفس الورقة الشفّافة السابقة ، دوِّر وارسم صورة Δ أ ب جـ :

١ حول نقطة الأصل (و) بزاوية قياسها ١٨٠° مع اتّجاه حركة عقارب الساعة

Δ أ ب جـ $\xleftarrow{\text{د (و ، - ١٨٠°)}}$ Δ ....

٢ حول نقطة الأصل (و) بزاوية قياسها ٩٠° عكس اتّجاه حركة عقارب الساعة

Δ أ ب جـ $\xleftarrow{\text{د (و ، ٩٠°)}}$ Δ ....



٣ أكمِل الجدول التالي وفقًا للخطوات السابقة :

الرؤوس / الدوران	أ (– ١ ، ٤)	ب (– ٥ ، ٤)	جـ (– ٣ ، ٠)
د (و ، – ٩٠°)	أَ (١ ، ٤)	بَ (..... ، .....)	جَ (..... ، .....)
د (و ، – ١٨٠°)	أً (..... ، .....)	بً (٥ ، – ٤)	جً (..... ، .....)
د (و ، ٩٠°)	أً (..... ، .....)	بً (..... ، .....)	جً (٠ ، – ٣)
د (و ، – ٢٧٠°)			
د (و ، ٢٧٠°)			
د (و ، ١٨٠°)			

ماذا تلاحظ ؟

ممّا سبق نستنتج أنّه :

إذا كانت (س ، ص) نقطة في المستوى الإحداثي فإنّ :

(١) (س ، ص) $\xleftarrow{د(و، -٩٠°)}$ (ص ، – س) يُسمّى دوران ربع دورة ($\frac{١}{٤}$ دورة) .

(س ، ص) $\xleftarrow{د(و، ٩٠°)}$ (– ص ، س) يُسمّى دوران ربع دورة ($\frac{١}{٤}$ دورة) .

(٢) (س ، ص) $\xleftarrow{د(و، -١٨٠°)}$ (– س ، – ص) يُسمّى دوران نصف دورة ($\frac{١}{٢}$ دورة) .

(س ، ص) $\xleftarrow{د(و، ١٨٠°)}$ (– س ، – ص) يُسمّى دوران نصف دورة ($\frac{١}{٢}$ دورة) .

(٣) (س ، ص) $\xleftarrow{د(و، -٢٧٠°)}$ (– ص ، س) يُسمّى دوران $\frac{٣}{٤}$ دورة .

(س ، ص) $\xleftarrow{د(و، ٢٧٠°)}$ (ص ، – س) يُسمّى دوران $\frac{٣}{٤}$ دورة .

خواصّ الدوران

تحقَّقْ من الخواصّ التالية :

(١) الدوران يحافظ على الاستقامة .

(٢) الدوران يحافظ على البينية .

(٣) الدوران يحافظ على قياسات الزوايا .

(٤) الدوران يحافظ على التوازي .

(٥) الدوران يحافظ على الأبعاد .

(٦) الدوران يحافظ على الاتّجاه الدوراني .

تدرّب (٢) :

أكمل كلًّا ممّا يلي حيث (و) نقطة الأصل :

(٣ ، ٥) $\xleftarrow{د(و، ٩٠^\circ)}$ (..... ، .....)

(١ ، − ٤) $\xleftarrow{د(و، -٩٠^\circ)}$ (..... ، .....)

(٢ ، ٠) $\xleftarrow{د(و، ١٨٠^\circ)}$ (..... ، .....)

(− ٦ ، − ٣) $\xleftarrow{د(و، -١٨٠^\circ)}$ (..... ، .....)

(٠ ، − ١) $\xleftarrow{د(و، ٢٧٠^\circ)}$ (..... ، .....)

(− ٧ ، ٢) $\xleftarrow{د(و، -٢٧٠^\circ)}$ (..... ، .....)

فكِّر وناقِش

هل د (و ، ١٠٠°) يكافئ د (و ، − ٢٦٠°) ؟ فسر إجابتك .

مثال :

أُرسم المثلّث أ ب و الذي رؤوسه : أ (٥ ، ٢) ، ب (٢ ، ٤) ، و (٠ ، ٠) ،
ثمّ ارسم صورته بدوران حول نقطة الأصل وبزاوية قياسها ٩٠° مع اتّجاه حركة عقارب الساعة .

الحل :

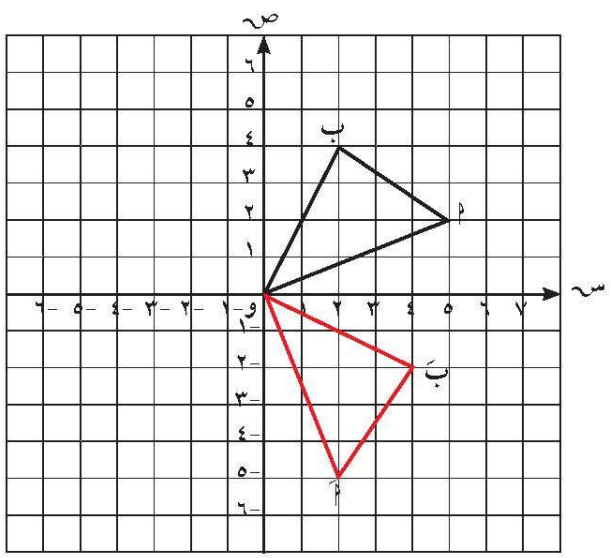
(س ، ص) $\xleftarrow{د(و ، -٩٠^\circ)}$ (ص ، - س)

أ (٥ ، ٢) $\xleftarrow{د(و ، -٩٠^\circ)}$ أَ (٢ ، - ٥)

ب (٢ ، ٤) $\xleftarrow{د(و ، -٩٠^\circ)}$ بَ (٤ ، - ٢)

و (٠ ، ٠) $\xleftarrow{د(و ، -٩٠^\circ)}$ و (٠ ، ٠) نقطة صامدة

∴ Δ أ ب و $\xleftarrow{د(و ، -٩٠^\circ)}$ Δ أَ بَ و



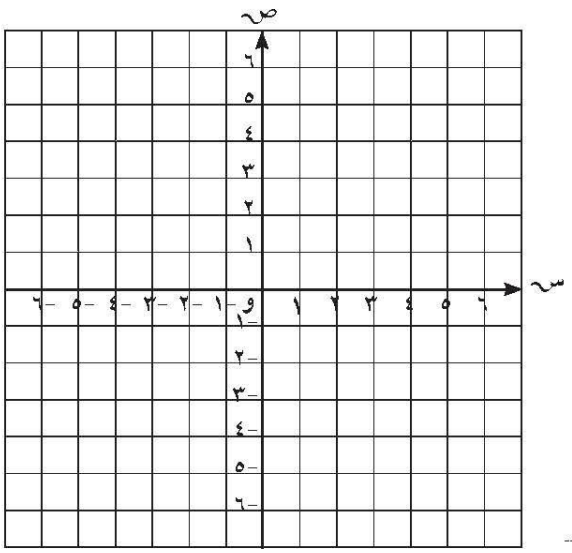
تدرّب (٣) :

أُرسم المثلّث ل م ن الذي إحداثيات رؤوسه :

ل (-١ ، ٠) ، م (٢ ، ٥) ،

ن (-٥ ، ٣) ،

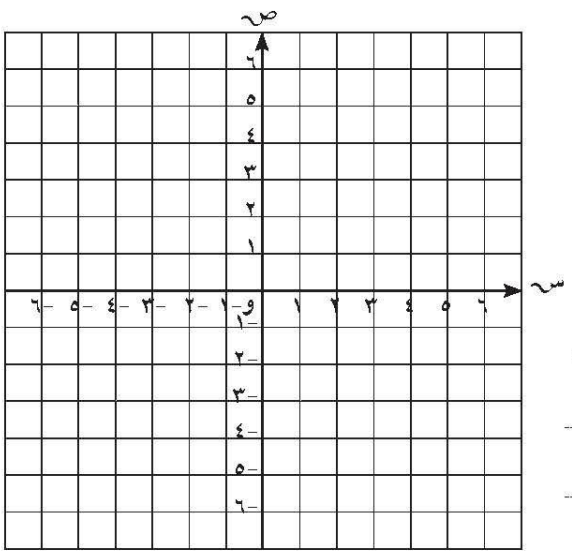
ثمّ ارسم صورته بدوران حول نقطة الأصل وبزاوية قياسها ١٨٠° عكس اتّجاه حركة عقارب الساعة .



تدرّب (٤) :

أُرسم المربّع أ ب جـ هـ الذي إحداثيات رؤوسه : أ (١ ، ١) ، ب (١ ، ٤) ، جـ (٤ ، ٤) ، هـ (٤ ، ١) ،

ثمّ ارسم صورته تحت تأثير د (و ، - ٢٧٠°) حيث (و) نقطة الأصل .



فكِّر وناقِش

إذا كان قياس زاوية الدوران ٣٦٠° لشكل ما ، فما العلاقة بين الشكل وصورته ؟

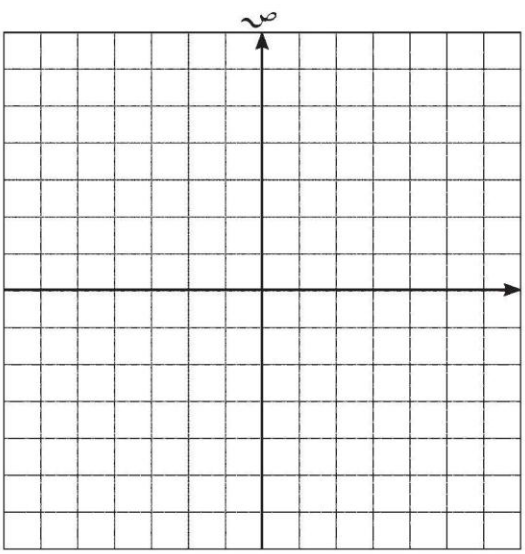
تمـــرَّنْ :

١ أكمِل كلًّا ممّا يلي حيث (و) نقطة الأصل :

(١ ، ٤)	د (و ، ٩٠°) ←	(..... ، .....)
(٢ ، −١٠)	د (و ، − ٩٠°) ←	(..... ، .....)
(٦ ، ٠)	د (و ، ١٨٠°) ←	(..... ، .....)
(−٣ ، − ٧)	د (و ، − ١٨٠°) ←	(..... ، .....)
(٠ ، − ٤)	د (و ، ٢٧٠°) ←	(..... ، .....)
(− ٥ ، ١١)	د (و ، − ٢٧٠°) ←	(..... ، .....)

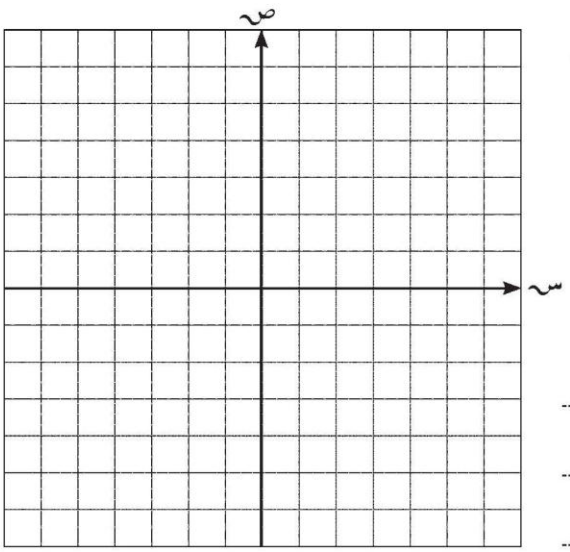
٢ أُرسم المثلّث ك م ل الذي إحداثيات رؤوسه : ك (٤ ، ٢) ، م (١ ، ١) ، ل (٢ ، ٥) ،

ثمّ ارسم صورته بدوران حول نقطة الأصل وبزاوية قياسها ٩٠° عكس اتّجاه حركة عقارب الساعة .



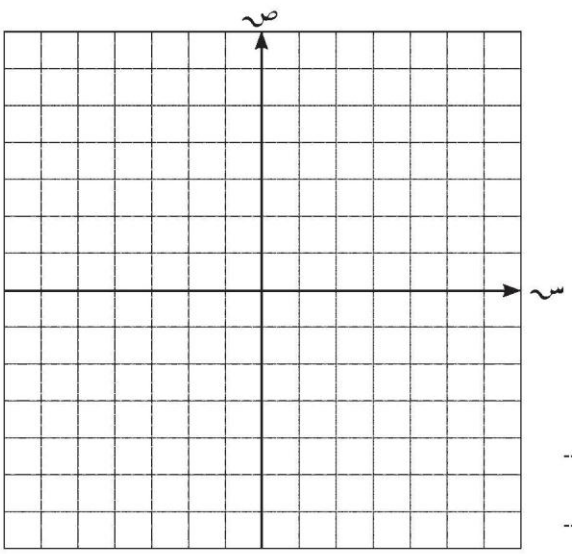
---

٣ أُرسم المثلّث أ ب جـ الذي إحداثيات رؤوسه : أ (-١ ، -٤) ، ب (-٢ ، ٤) ، جـ (٣ ، ٣) ، ثمّ ارسم صورته بدوران حول نقطة الأصل وبزاوية قياسها ١٨٠° مع اتّجاه حركة عقارب الساعة .



---

٤ أُرسم المستطيل ف هـ ي م الذي إحداثيات رؤوسه : ف (٣ ، ١) ، هـ (٣ ، -١) ، ي (-٣ ، -١) ، م (-٣ ، ١) ، ثمّ ارسم صورته تحت تأثير د (و ، ٢٧٠°) حيث (و) نقطة الأصل .



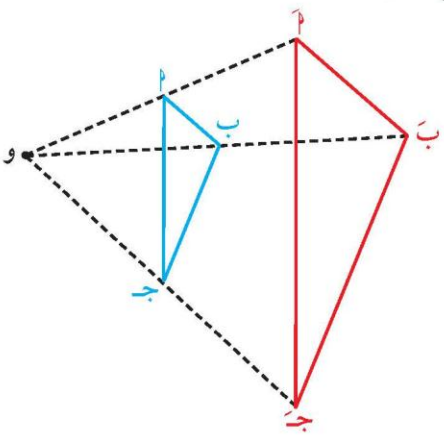
٤-٤ التكبير
Enlargement

العبارات والمفردات :
تكبير
Enlargement
تصغير
Reduction

سوف تتعلّم : تغيير الأبعاد .

درست فيما سبق ثلاثة أنواع من التحويلات الهندسية هي : الانعكاس والإزاحة والدوران وتسمّى تحويلات متقايسة (تحافظ على الأبعاد) .
ويكون الشكل وصورته تحت تأثير هذه التحويلات المتقايسة متطابقين .

هل يوجد تحويل غير متقايس (لا يحافظ على الأبعاد) ؟



نشاط :

اِعتبِر التحويل الهندسي الموضَّح في الشكل المقابل :

و ⟵ و ، أ ⟵ أَ

ب ⟵ بَ ، جـ ⟵ جـَ

حيث $\frac{\text{و أَ}}{\text{و أ}} = \frac{\text{و بَ}}{\text{و ب}} = \frac{\text{و جـَ}}{\text{و جـ}} = ٢$ **(مثلًا)** ،

$\overline{\text{أ ب}}$ ⟵ $\overline{\text{أَ بَ}}$ تحت تأثير هذا التحويل بينما أ ب ≠ أَ بَ

أوجِد بالقياس :

$\frac{\text{أَ بَ}}{\text{أ ب}} = \text{---------} = \text{---------}$

$\frac{\text{بَ جـَ}}{\text{ب جـ}} = \text{---------} = \text{---------}$

$\frac{\text{أَ جـَ}}{\text{أ جـ}} = \text{---------} = \text{---------}$

∴ هذا التحويل غير متقايس (لا يحافظ على الأبعاد) .

نلاحظ أنّ :

(١) أَبَ = ٢ أ ب	و أَ = ٢ و أ
بَ جَ = ٢ ب جـ	و بَ = ٢ و ب
أَ جَ = ٢ أ جـ	و جَ = ٢ و جـ

(٢) النقطة وصورتها ومركز التكبير تقع على استقامة واحدة .

(٣) تحقق باستخدام الأدوات الهندسية من توازي :

$\overline{أَ جَ}$ ، $\overline{أ جـ}$

$\overline{أَ بَ}$ ، $\overline{أ ب}$

$\overline{بَ جَ}$ ، $\overline{ب جـ}$

يُسمّى هذا التحويل **تكبيرًا** .

وتُسمّى النقطة الصامدة (و) مركز التكبير ، ويُسمّى العدد ٢ (هنا) **معامل التكبير** .

وعمومًا :

إذا كانت (و) إحدى نقاط المستوى ، فإنّ التحويل الهندسي الذي يُعيِّن لكلّ نقطة أ غير (و) صورة أَ ∋ $\overleftarrow{و أ}$ بحيث يكون $\frac{و أَ}{و أ}$ = عددًا ثابتًا ، و ⟵ و

يُسمّى (تكبيرًا) وتُسمّى النقطة الصامدة (و) مركز التكبير

ويُسمّى العدد الثابت معامل التكبير ويُرمَز له بالرمز م

ويُرمَز لهذا التحويل بالرمز ت (و ، م) ويُقرَأ ت تكبير مركزه النقطة (و) ومعامله م .

لاحظ أنّ :

(١) $\frac{و أَ}{و أ}$ = م ⇔ و أَ = م × و أ

(٢) القطعة المستقيمة وصورتها تحت تأثير التكبير متوازيتان .

(٣) سنكتفي بالتكبير الذي معامله م > صفر .

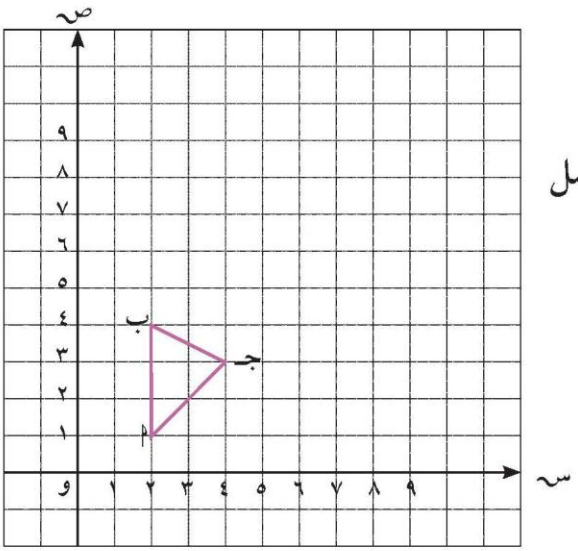
(٤) يُقصَد بالتكبير (تكبير أو تصغير) :

- إذا كان م > ١ فالتحويل يمثّل تكبيرًا .
- إذا كان صفر < م < ١ فالتحويل يمثّل تصغيرًا .

التكبير في المستوى الإحداثي

إذا كانت (س ، ص) نقطة في المستوى الإحداثي حيث (و) نقطة الأصل ،

م معامل التكبير فإنّ : (س ، ص) $\xleftarrow{\text{ت (و ، م)}}$ (م س ، م ص) .



مثال (١) :

أُرسم صورة المثلّث أ ب جـ
مستخدِمًا التكبير الذي مركزه نقطة الأصل
ومعامله ٢ .

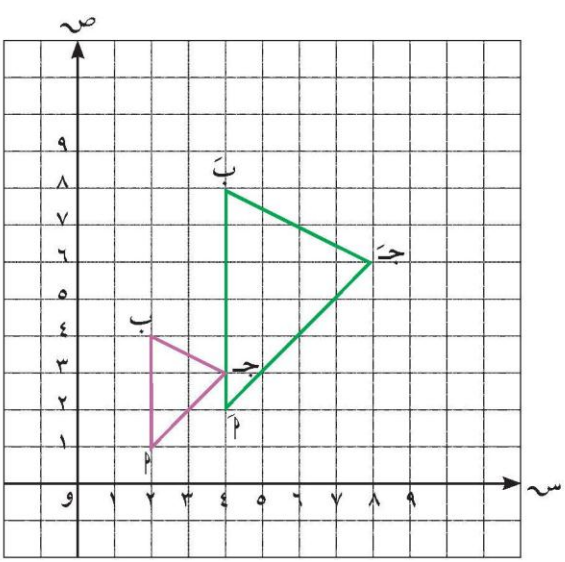
الحل :

(س ، ص) $\xleftarrow{\text{ت (و ، ٢)}}$ (٢ س ، ٢ ص)

أ (٢ ، ١) $\xleftarrow{\text{ت (و ، ٢)}}$ أَ (٢ × ٢ ، ٢ × ١) = أَ (٤ ، ٢)

ب (٢ ، ٤) $\xleftarrow{\text{ت (و ، ٢)}}$ بَ (٢ × ٢ ، ٢ × ٤) = بَ (٤ ، ٨)

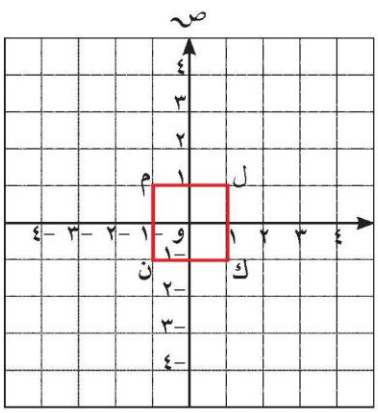
جـ (٤ ، ٣) $\xleftarrow{\text{ت (و ، ٢)}}$ جـَ (٢ × ٤ ، ٢ × ٣) = جـَ (٨ ، ٦)



تدرّب (١) :

أُرسم صورة المربّع ل م ن ك مستخدمًا التكبير ت (و ، ٤) .

(س ، ص) $\xleftarrow{\text{ت (و ، ٤)}}$ (٤ س ، ٤ ص)



ل (١ ، ١) $\xleftarrow{\text{ت (و ، ٤)}}$ لَ (..... ، .....)

م (-١ ، ١) $\xleftarrow{\text{ت (و ، ٤)}}$ مَ (..... ، .....)

ن (-١ ، -١) $\xleftarrow{\text{ت (و ، ٤)}}$ نَ (..... ، .....)

ك (١ ، -١) $\xleftarrow{\text{ت (و ، ٤)}}$ كَ (..... ، .....)

∴ المربّع ل م ن ك $\xleftarrow{\text{ت (و ، ٤)}}$ المربّع لَ مَ نَ كَ

خواص التكبير

بالرجوع إلى تدرّب (١) تحقَّقْ من الخواصّ التالية :

(١) التكبير يحافظ على الاستقامة .

(٢) التكبير يحافظ على البينية .

(٣) التكبير يحافظ على قياسات الزوايا .

(٤) التكبير يحافظ على التوازي .

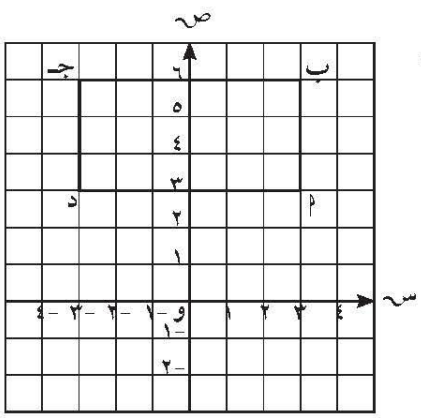
(٥) التكبير يحافظ على الاتّجاه الدوراني .

(٦) التكبير لا يحافظ على الأبعاد (تحويل غير متقايس) .

تدرّب (٢) :

١ أُكتب النقاط التي تمثّل رؤوس الشكل أ ب جـ د ، ثمّ ارسم صورة الشكل مستخدِمًا التصغير الذي مركزه نقطة الأصل ومعامله $\frac{١}{٣}$.

(س ، ص) $\xleftarrow{ت(و، \frac{١}{٣})}$ ($\frac{١}{٣}$ س ، $\frac{١}{٣}$ ص)



أ (..... ، .....) $\xleftarrow{ت(و، \frac{١}{٣})}$ أَ (..... ، .....)

ب (..... ، .....) $\xleftarrow{ت(و، \frac{١}{٣})}$ بَ (..... ، .....)

جـ (..... ، .....) $\xleftarrow{ت(و، \frac{١}{٣})}$ جـَ (..... ، .....)

د (..... ، .....) $\xleftarrow{ت(و، \frac{١}{٣})}$ دَ (..... ، .....)

∴ الشكل أ ب جـ د $\xleftarrow{ت(و، \frac{١}{٣})}$ الشكل أَ بَ جـَ دَ

٢ أكمل من الرسم في الشكل السابق :

أ نسبة محيط المستطيل أَ بَ جـَ دَ إلى محيط المستطيل أ ب جـ د

= .....

ب نسبة مساحة المستطيل أَ بَ جـَ دَ إلى مساحة المستطيل أ ب جـ د

= .....

إذا كان ت (و ، م) فإن :

(١) نسبة محيط صورة الشكل الهندسي إلى محيطهُ تساوي معامل التكبير (م) .

(٢) نسبة مساحة صورة الشكل الهندسي إلى مساحته تساوي مربع معامل التكبير ($م^{٢}$) .

تدرّب (٣) :

مربع طول ضلعه ٥ سم . أوجد مساحة صورته تحت تأثير تكبير ت (و ، ٢) :

مساحة المربع = ...

$$\frac{\text{مساحة صورة المربع}}{\text{مساحة المربع}} = \text{.....}$$

$$\frac{\text{س}}{\text{.....}} = \text{.....}$$

س = ...

∴ مساحة صورة المربع = ...

تدرّب (٤) :

ليكن ت (و ، م) تكبير حيث (و) نقطة الأصل ، أ ⟵ أَ ، ب ⟵ بَ .

أوجِد معامل التكبير أو التصغير (م) في كلّ من الحالات التالية :

أ أ (٢ ، -١) ، أَ (٨ ، -٤)

م = $\frac{٨}{٢}$ = ...

أو م = $\frac{-٤}{-١}$ = ...

ب أ (٦ ، ٩) ، أَ (٢ ، ٣)

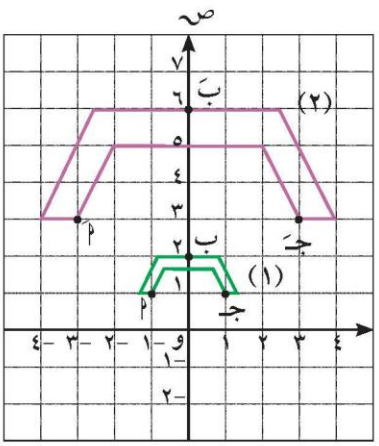
.....

جـ أب = ٦ سم ، أَبَ = ٣٠ سم

.....

تدرّب (٥) :

في الشكل المقابل : أوجِد معامل التكبير المستخدَم لتحويل المضلّع (١) إلى المضلّع (٢) .

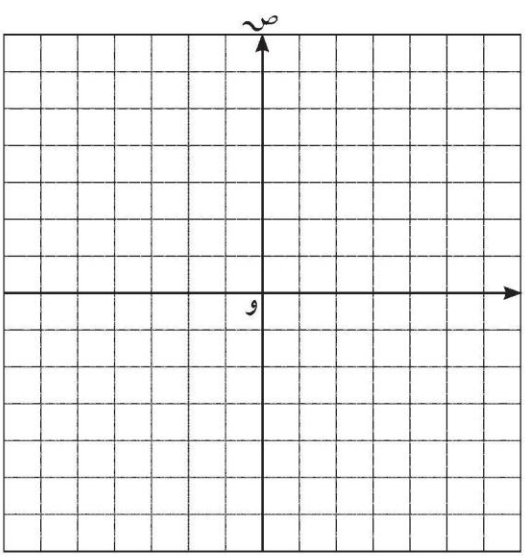


فكّر وناقِش

إذا كان معامل التكبير يساوي ١ فما هي العلاقة بين الشكل وصورته ؟

تدرّب (٦) :

أُرسم المثلّث أ ب جـ حيث أ (٢ ، ٠) ، ب (٠ ، ٢) ، جـ (-٢ ، -٢) ثم أُرسم صورته تحت تأثير ت (و ، ٣) حيث (و) نقطة الأصل .



تمـــرَّنْ :

١ أكمِل ما يلي حيث (و) نقطة الأصل :

أ ا (٢ ، ١) $\xleftarrow{\text{ت}(\text{و}، ٥)}$ ا' (..... ، .....)

ب ب (١ ، -٣) $\xleftarrow{\text{ت}(\text{و}، ٦)}$ بَ (..... ، .....)

جـ جـ (٠ ، ٤) $\xleftarrow{\text{ت}(\text{و}، \frac{١}{٤})}$ جـَ (..... ، .....)

د د (-٦ ، ٤) $\xleftarrow{\text{ت}(\text{و}، \frac{١}{٢})}$ .....

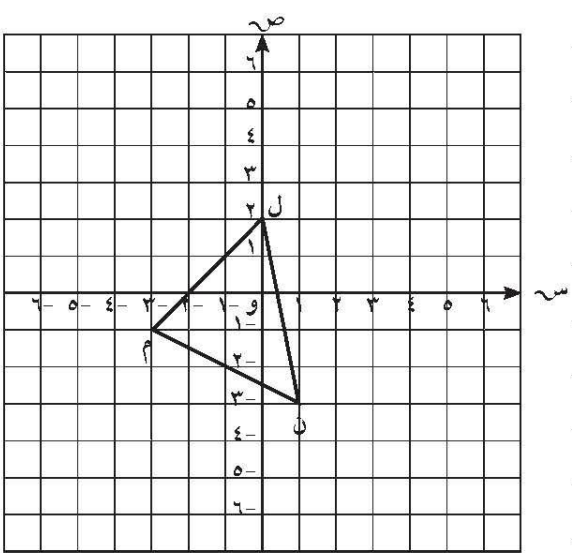
هـ ك (-٨ ، -٢) $\xleftarrow{\text{ت}(\text{و}، \frac{٣}{٢})}$ .....

و ل (٣ ، -٧) $\xleftarrow{\text{ت}(\text{و}، ١)}$ ..... ، ماذا تلاحظ ؟

.....

.....

٢ أُكتب النقاط التي تمثّل رؤوس المثلث ل م ن ثمّ ارسم المثلّث لَ مَ نَ صورة المثلّث ل م ن تحت تأثير ت (و ، ٢) .



.....

.....

.....

.....

.....

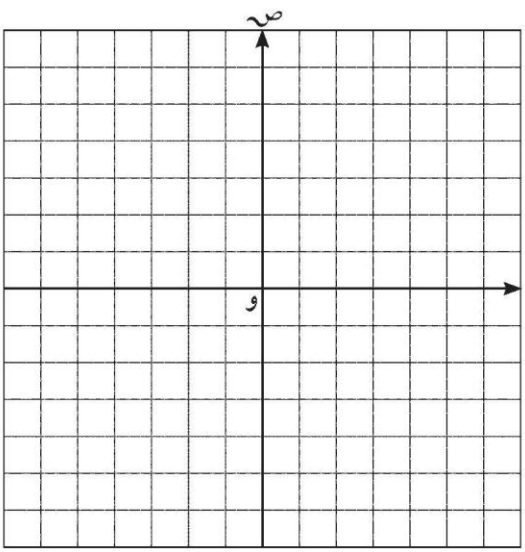
.....

.....

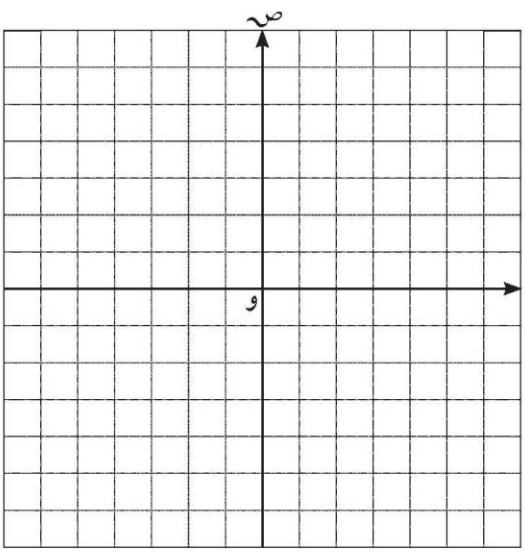
.....

.....

٣ أُرسم $\overline{أب}$ إذا كانت أ (-١ ، ٢) ، ب (٢ ، -٢) ثمّ ارسم $\overline{أَبَ}$ صورة $\overline{أب}$ بتكبير مركزه نقطة الأصل ومعامله ٣ .



٤ أُرسم الشكل الرباعي ف هـ ي د الذي فيه ف (٦ ، ٠) ، هـ (٠ ، ٦) ، ي (-٦ ، ٠) ، د (٠ ، -٦) ، ثمّ ارسم الشكل فَ هـَ يَ دَ صورة الشكل ف هـ ي د تحت تأثير ت (و ، $\frac{١}{٢}$) .



٥ أوجِد معامل التكبير أو التصغير (م) في كلّ من الحالات التالية حيث النقطة أَ صورة النقطة أ ، والنقطة بَ صورة النقطة ب .

أ أ (٤ ، ١) ، أَ (١٢ ، ٣)

ب أ (٠ ، ٥) ، أَ (٠ ، ١٠)

جـ أ (-٢ ، -٦) ، أَ (-١ ، -٣)

د أب = ٨ سم ، أَبَ = ١ سم

٦ مستطيل بعداه ٣ سم ، ٥ سم . أوجد محيط ومساحة صورته تحت تأثير تكبير ت (و ، ٣) .

٤-٥ مراجعة الوحدة الرابعة
Revision Unit Four

أوّلًا : التمارين المقالية

١ إذا كانت ل (٣ ، ٨) ، م (-٢ ، ٣) :

أ أوجد طول $\overline{ل م}$.

ب أوجد إحداثيا النقطة هـ منتصف $\overline{ل م}$.

٢ إذا كانت ل (٢ ، -١) ، ن (-١ ، -٣) ، م (٠ ، -٤) ، أثبت أن : ل ن = ل م .

٣ أكمِل كلًّا ممّا يلي :

أ أ (١ ، -٣) $\xleftarrow{د (و ، ٩٠^\circ)}$ .....

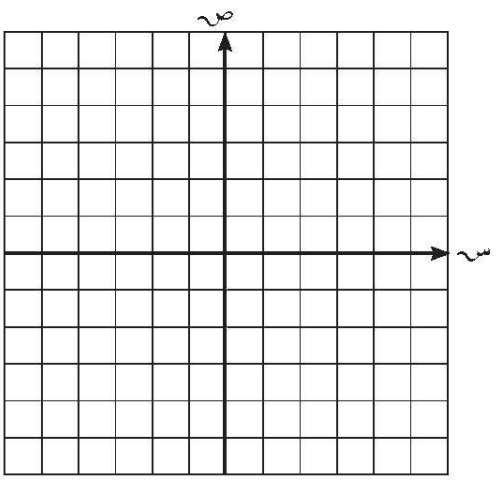
ب أ (١ ، -٣) $\xleftarrow{د (و ، -٩٠^\circ)}$ .....

جـ أ (١ ، -٣) $\xleftarrow{د (و ، ١٨٠^\circ)}$ .....

د أ (٣ ، -٥) $\xleftarrow{ت (و ، ٤)}$ .....

هـ أ (٠ ، -٦) $\xleftarrow{ت (و ، \frac{١}{٢})}$ .....

٤ ارسم المثلث ع م ل الذي رؤوسه : ع (٠ ، -٤) ، م (-٣ ، ٠) ، ل (٢ ، ١) ، ثم ارسم صورته بدوران حول نقطة الأصل وبزاوية قياسها ٢٧٠° عكس اتجاه حركة عقارب الساعة .

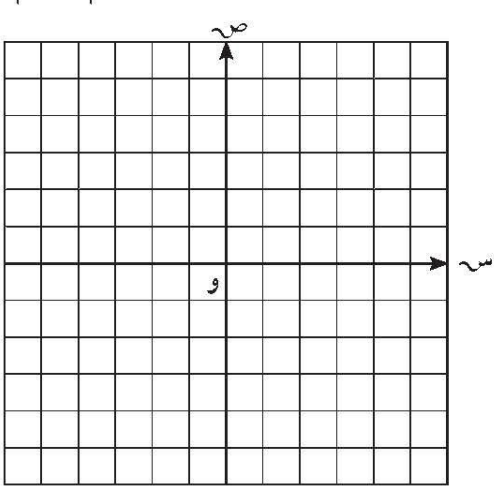


٥ ليكن ت (و ، م) تكبير حيث (و) نقطة الأصل ، ب ⟵ بَ ، جـ ⟵ جَ .
أوجد معامل التكبير أو التصغير (م) في كل من الحالات التالية :

أ ب (٣ ، ٦) ، بَ (١ ، ٢)

ب ب جـ = ٤ سم ، بَ جَ = ٢٤ سم

٦ ارسم Δ أ ب جـ الذي رؤوسه هي : أ (٠ ، ٥) ، ب (٥ ، ٠) ، جـ (-٥ ، ٥) ، ثم ارسم صورته بتكبير ت (و ، $\frac{٢}{٥}$) .



ثانيًا : التمارين الموضوعية

أوّلًا : في البنود التالية ، ظلِّل (أ) إذا كانت العبارة صحيحة ، وظلِّل (ب) إذا كانت العبارة غير صحيحة .

١ د (و ، ٦٠°) يكافئ د (و ، -٣٠٠°)	(أ)	(ب)
٢ التكبير هو تحويل هندسي لا يحافظ على الأبعاد .	(أ)	(ب)
٣ الدوران لا يحوي نقاطًا صامدة .	(أ)	(ب)
٤ إذا كانت جـ منتصف $\overline{أب}$ وكانت جـ (٣ ، ٥) ، أ (-١ ، ٣) فإن ب (١ ، ٤) .	(أ)	(ب)
٥ مثلث أطوال أضلاعه ٥ سم ، ٦ سم ، ٣ سم فإن محيط صورته تحت تأثير تكبير ت (و ، ٢) هو ٢٨ سم .	(أ)	(ب)

ثانيًا : لكلّ بند من البنود التالية أربعة اختيارات ، واحد فقط منها صحيح ، ظلِّل الدائرة الدالّة على الإجابة الصحيحة .

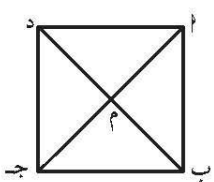
٦ إذا كانت ق (٣ ، ٠) ، ك (١ ، ٠) فإن : ق ك = ... وحدة طول .

(أ) ٤ (ب) ٢ (جـ) $\sqrt{٧}$ (د) -٢

٧ شكل هندسي مساحته ٤ سم^{٢} ومساحة صورته تحت تأثير تكبير ما هي ٣٦ سم^{٢} فإن معامل التكبير هو :

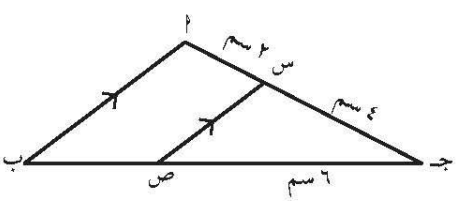
(أ) ٣ (ب) ٤,٥ (جـ) ٩ (د) ٨١

٨ أ ب جـ د مربّع تقاطع قطريه في النقطة م ، صورة Δ أ ب م بدوران د (م ، -٢٧٠°) هي :



(أ) Δ ب جـ م (ب) Δ أ ب م (جـ) Δ جـ د م (د) Δ د أ م

٩ في الشكل المقابل : إذا كانت $\overline{س ص}$ صورة $\overline{أب}$ بتكبير مركزه جـ ، فإن معامله هو :



(أ) $\frac{٢}{٣}$ (ب) $\frac{٣}{٢}$ (جـ) $\frac{١}{٢}$ (د) ٢

١٠ إذا كانت النقطة جـ (٢ ، ٤) هي صورة النقطة أ بتصغير ت (و ، $\frac{١}{٢}$) فإن أ هي :

(أ) ($\frac{١}{٢}$ ٢ ، $\frac{١}{٢}$ ٤) (ب) (٢ ، ١) (جـ) (٨ ، ٤) (د) (٦ ، ٤)

الوحدة الخامسة

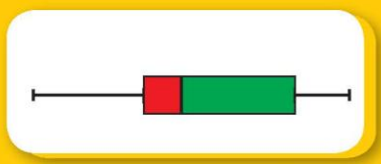
الإحصاء والاحتمال
Statistics and Probability

عالم البيانات
Data World

اِهتمّت دولة الكويت بالتخطيط العلمي باعتباره الأسلوب الأمثل لكشف آفاق المستقبل ولتحقيق التنمية الاقتصادية والاجتماعية الشاملة ، ويُعتَبر الجهاز الإحصائي من أوائل المؤسَّسات التي واكبت إنشاء دولة الكويت عشيّة الاستقلال في مطلع الستّينات . ولكي يتمكّن هذا الجهاز من تأدية عمله على أكمل وجه لا بدّ له أن يبحث عن البيانات المناسِبة . والبيانات بمفهومها العامّ هي مجموعة من الحروف أو الكلمات أو الأرقام أو الرموز أو الصور المتعلّقة بموضوع ما يتمّ جمعها ومعالجتها وتحويلها إلى معلومات مفيدة لاتّخاذ القرارات المناسِبة .

مشروع الوحدة : (صحّتي المدرسية)

إنّ الصحّة الجيّدة للمتعلّمين في المدارس هي استثمار للمستقبل، وصحّة الأطفال والمراهقين تُعتبَر عنصرًا أساسيًّا في النسيج الاجتماعي والاقتصادي للمجتمع . ولكي يؤدّي برنامج الصحّة المدرسية دوره على أكمل وجه يحتاج إلى جمع بعض البيانات عن المتعلّمين مثل : العمر ، الطول ، الوزن وغيرها .



خطّة العمل :

- مساعدة برنامج الصحّة المدرسية في جمع وتمثيل بيانات المتعلّمين .

خطوات تنفيذ المشروع :

- يقسِّم المعلّم المتعلّمين إلى ٣ مجموعات ويسند إليهم المهام التالية :
- المجموعة الأولى : قياس أطوال المتعلّمين في الفصل وتنظيمها في جدول تكراري ذي فئات ثم تمثيلها بمدرَّج تكراري .
- المجموعة الثانية : قياس أطوال المتعلّمين في الفصل وتنظيمها في جدول تكراري ذي فئات ثم تمثيلها بمضلَّع تكراري .
- المجموعة الثالثة : جمع وتسجيل أوزان متعلّمي الفصل ثم تمثيلها في صندوق ذي عارضتين مع تحديد الوسيط والأرباعي الأدنى والأرباعي الأعلى للأوزان .

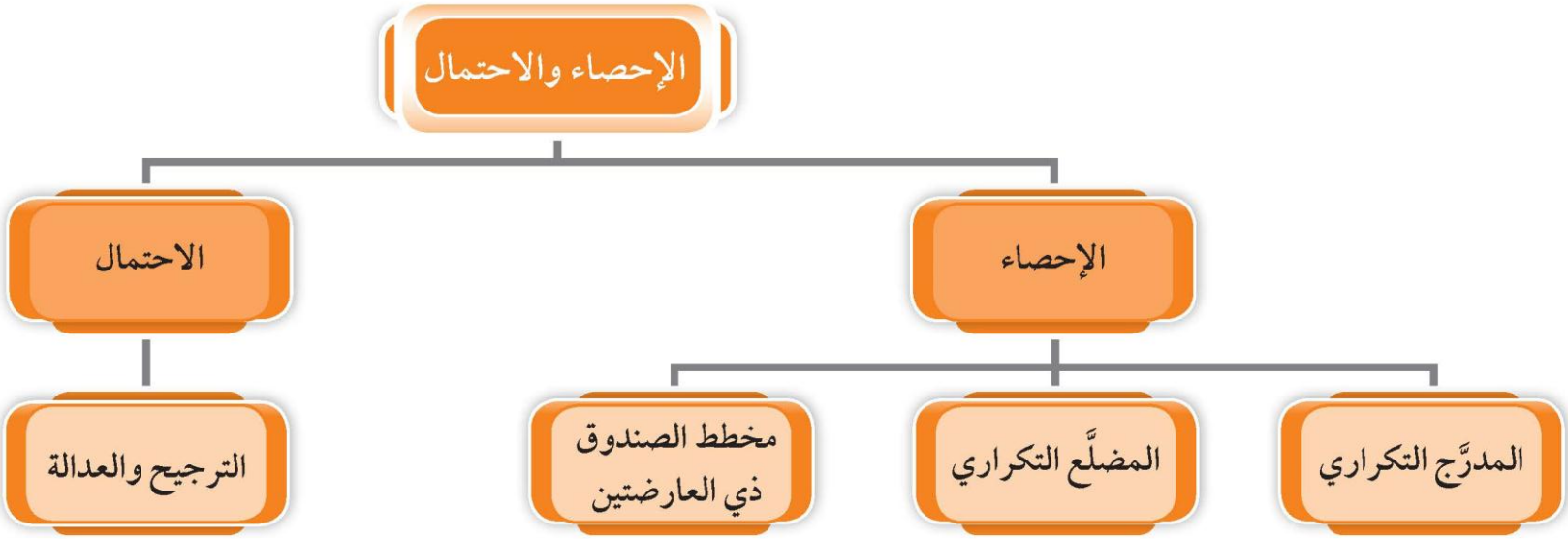
علاقات وتواصل :

- تتبادل المجموعات العمل وتتأكّد من صحّته .

عرض العمل :

- تعرض كلّ مجموعة عملها وتناقش خطوات تنفيذه .

مخطَّط تنظيمي للوحدة الخامسة



اِستعِدّ للوحدة الخامسة

١ أوجِد المدى والمتوسط الحسابي والوسيط للقيم التالية :

٣ ، ٥ ، ٩ ، ٧ ، ٥ ، ٨ ، ٥

أ المدى = ...

ب المتوسط الحسابي = ...

.....

جـ الوسيط = ...

---

٢ أوجِد المدى والوسيط للقيم التالية :

١٢ ، ١٥ ، ١٩ ، ١٧ ، ١٤ ، ١٨ ، ١٥ ، ٤٠

أ المدى = ...

ب الوسيط = ...

---

٣ أكمل الجدول التكراري التالي بإيجاد مراكز الفئات ثم أجب عما يلي :

الفئات	التكرار	مراكز الفئات
٤ –	٢	
٦ –	٤	
٨ –	٢	
١٠ –	٣	

أ طول الفئة = ...

ب الحدّ الأدنى للفئة الثالثة = ...

جـ الحدّ الأعلى للفئة الأخيرة = ...

٤ اكتب جميع النواتج الممكنة في كلٍّ مما يلي :

أ رمي قطعة نقود مرة واحدة .

.....

ب سحب كرة عشوائيًا من كيس فيه ٤ كرات صفراء ، ٣ كرات حمراء .

.....

.....

٥ عند رمي مكعب منتظم مرقم من ١ إلى ٦ مرة واحدة . أوجد ما يلي :

أ احتمال (ظهور عدد أولي) .....

ب احتمال (ظهور عدد غير أولي) .....

جـ احتمال (ظهور عدد أكبر من ٥) .....

د احتمال (ظهور عدد أصغر من ٧) .....

هـ احتمال (ظهور عدد أكبر من ٦) .....

١-٥ المدرَّج التكراري
Histogram Frequency

سوف تتعلّم : عرض وتمثيل البيانات بمدرجات تكرارية .

العبارات والمفردات :
المدرَّج التكراري
Histogram Frequency

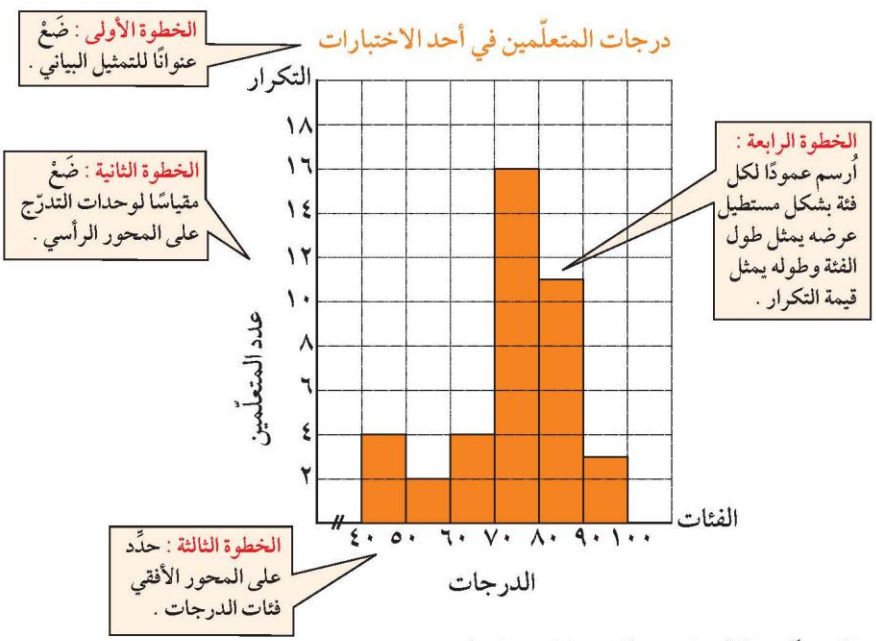
نشاط :

سبق لك دراسة الجدول التكراري ذي الفئات والذي يُعتبَر وسيلة مهمّة في تنظيم عدد كبير من البيانات ، ويمكن تمثيل البيانات الواردة في الجداول التكرارية بواسطة المدرَّج التكراري .

يوضّح الجدول التالي الدرجات النهائية التي حصل عليها ٤٠ متعلّمًا في أحد الاختبارات (النهاية العظمى ١٠٠) .

الفئات	٤٠ –	٥٠ –	٦٠ –	٧٠ –	٨٠ –	٩٠ –
التكرار	٤	٢	٤	١٦	١١	٣

لتمثيل بيانات الجدول التكراري من خلال المدرَّج التكراري ، اتّبع الخطوات التالية :



اِستخدِم المدرَّج التكراري للإجابة عمّا يلي :

١ كم عدد المتعلّمين الذين حصلوا على أقلّ من ٧٠ درجة ؟ .....

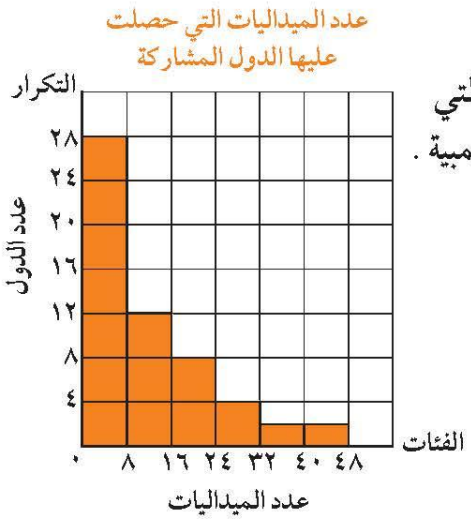
٢ بكم يزيد عدد المتعلّمين في الفئة الرابعة عن عدد المتعلمين في الفئة الخامسة؟

.....

المدرَّج التكراري هو تمثيل بياني بالأعمدة المتلاصقة يُستخدَم لعرض مجموعة البيانات المنظَّمة في جدول تكراري ذي فئات .

تدرّب (١) :

يبيّن المدرَّج التكراري المقابل عدد الميداليات التي حصدتها الدول المشارِكة في إحدى الدورات الأولمبية .



أجِب عمّا يلي :

أ ما طول الفئة ؟ .....

ب كم عدد الدول التي حصلت على ٣٢ ميدالية فأكثر ؟ .....

جـ كم عدد الدول التي حصلت على أقلّ من ٢٤ ميدالية ؟ .....

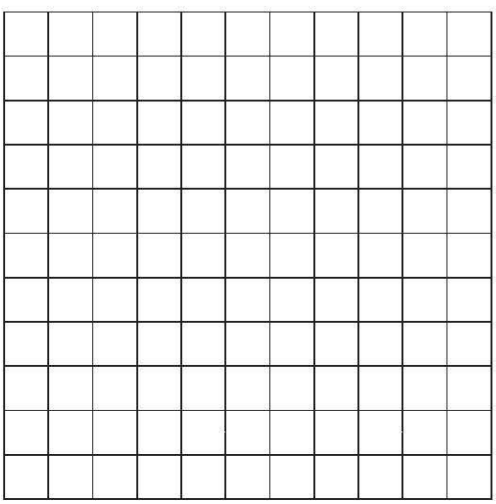
تدرّب (٢) :

السرعة القصوى في أحد الشوارع التجارية في مدينة الكويت العاصمة ٤٥ كم / س ، يبيّن الجدول المقابل عدد المخالفات المسجَّلة بحقّ عدد من سائقي المركبات الذين لم يلتزموا بالقانون . مثِّل البيانات الواردة في الجدول باستخدام المدرَّج التكراري ، ثمّ أجِب عما يلي :

الفئات	التكرار
٤٥ –	٥
٥٠ –	٨
٥٥ –	١٠
٦٠ –	٦
٦٥ –	٣

كم عدد مخالفات سائقي المركبات الذين بلغت سرعتهم ٥٥ كم / س فأكثر ؟

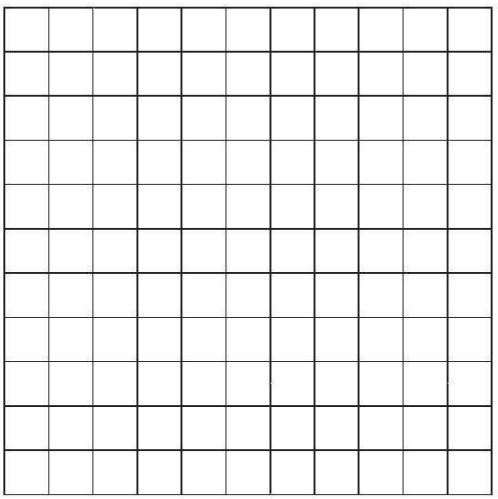
.....



تدرّب (٣) :

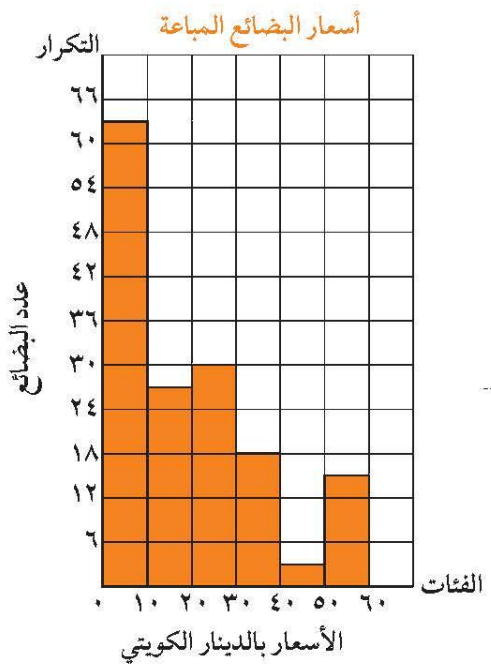
يوضّح الجدول التكراري المقابل فئات أسعار أسهم بعض الشركات والمؤسَّسات التجارية المدرَجة في أحد الأسواق المالية بالدولار الأميركي .
اِصنع مدرَّجًا تكراريًّا لهذه البيانات .

الفئات	٦٠ –	٧٠ –	٨٠ –	٩٠ –
التكرار	٢٨	٣٤	١٦	١٠



تمـــرَّنْ :

١ يبيّن المدرَّج التكراري المقابل أسعار مختلف البضائع المباعة في إحدى الجمعيات التعاونية بالدينار الكويتي :



أجِب عمّا يلي :

أ ما طول الفئة ؟ .....

ب كم عدد البضائع التي بلغ سعرها ٣٠ دينارًا فأكثر ؟ .....

جـ ما الفئة الأكثر مبيعًا ؟ .....

٢ يبيّن الجدول التالي الزمن بالدقائق الذي استغرقه ٤٠ متعلّمًا للوصول من المنزل إلى المدرسة ، اِصنع مدرَّجًا تكراريًّا لهذه البيانات .

الفئات	التكرار
١٠ –	١٤
١٥ –	١١
٢٠ –	٦
٢٥ –	٥
٣٠ –	٤

أجِب عمّا يلي :

أ كم عدد المتعلّمين الذين يصلون إلى المدرسة في أقلّ من ٢٠ دقيقة ؟ .....

ب كم عدد المتعلّمين الذين يصلون إلى المدرسة في ٢٥ دقيقة فأكثر ؟ .....

---

٣ يوضّح الجدول التكراري أطوال بعض المتعلّمين في إحدى المدارس ، اِصنع مدرَّجًا تكراريًّا لتمثيل البيانات .

الفئات	التكرار
١١٥ –	٨
١٢٥ –	١٢
١٣٥ –	٢٠
١٤٥ –	١٩
١٥٥ –	١٥

٢-٥ المضلّع التكراري
Polygon Frequency

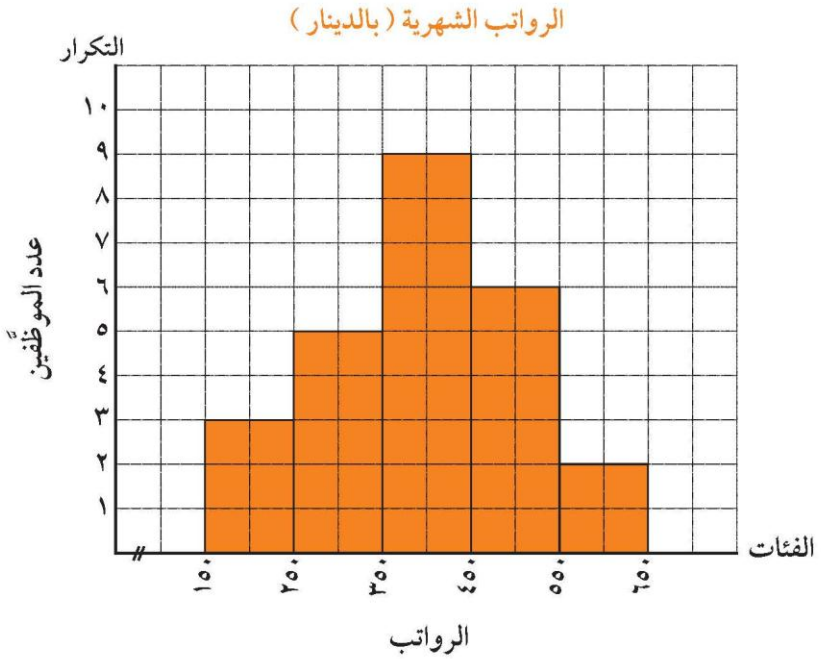
سوف تتعلّم : عرض وتمثيل البيانات بمضلّعات تكرارية .

العبارات والمفردات :
المضلّع التكراري
Polygon Frequency

نشاط :

يمثّل الجدول التالي فئات الرواتب الشهرية (بالدينار) للموظّفين في إحدى الشركات وتمّ تمثيلها بمدرج تكراري (شكل ١) .

الفئات	١٥٠ –	٢٥٠ –	٣٥٠ –	٤٥٠ –	٥٥٠ –
التكرار	٣	٥	٩	٦	٢
مراكز الفئات					



شكل (١)

تذكّرْ أنّ :
مركز الفئة = (الحدّ الأعلى للفئة + الحد الأدنى للفئة) ÷ ٢

اللوازم :
مسطرة

١ أكمِل الجدول السابق (أُكتب مراكز الفئات) .

٢ في شكل (٢) اتّبع الخطوات التالية :

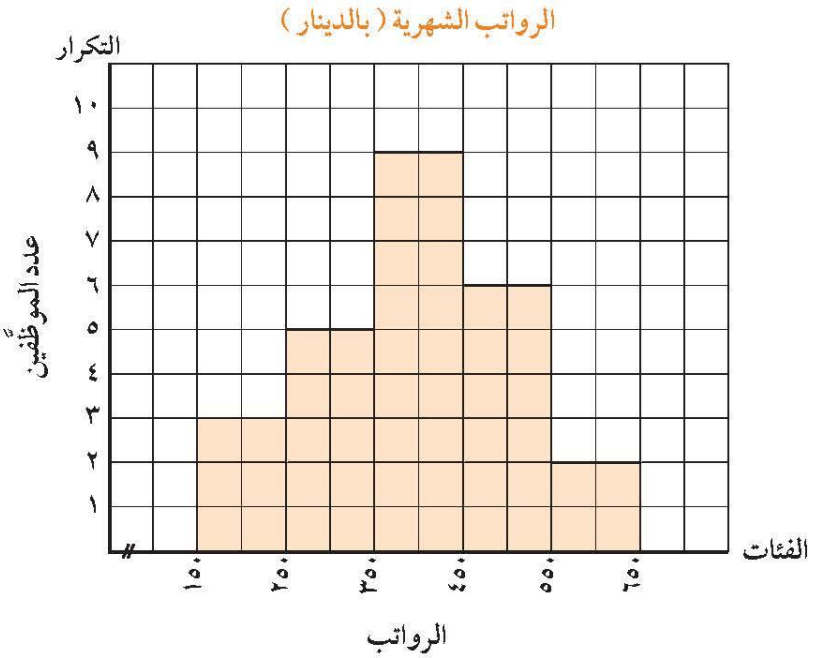
أ مثِّل مراكز الفئات على المحور الأفقي .

ب عيّن النقاط التي تمثل : (مركز الفئة ، التكرار) .

جـ صِلْ بين النقاط السابقة على التوالي مستخدِمًا حافّة المسطرة .

د أكمل رسم المضلّع بتمثيل النقطتين (١٠٠ ، ٠) ، (٧٠٠ ، ٠) ثم صل .

(هاتان النقطتان ليستا من ضمن هذه البيانات)



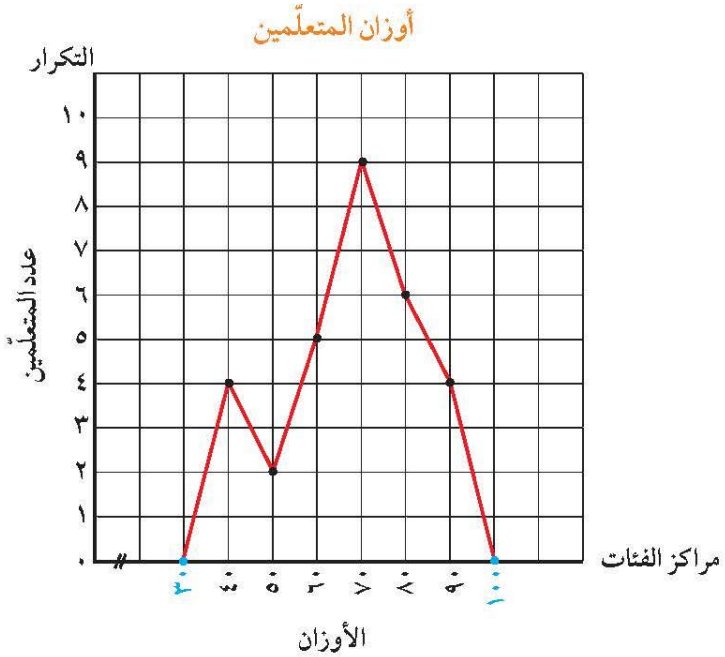
شكل (٢)

لاحظ أنّ :

الشكل الناتج في النشاط السابق يُسمّى **مضلَّعًا تكراريًّا** ، ويُعبِّر بوجه عامّ عن مقدار واتّجاه التغيّر في مجموعة من القيم .

تدرّب (١) :

يمثّل الشكل التالي أوزان متعلّمي أحد فصول الصف التاسع .



تأمَّلِ الشكل ثمّ أجِب عمّا يلي :

أ ماذا يُسمّى التمثيل البياني ؟ .....

ب ما مركز الفئة الأكثر تكرارًا ؟ .....

جـ ما مركز الفئة الأقل تكرارًا ؟ .....

مثال :

يبيّن الجدول التالي المسافة المقطوعة بالكيلومتر من قبل ٨٤ سائقًا في إحدى شركات سيّارات الأجرة في يوم من الأيّام .

الفئات	١٠٠ -	١٥٠ -	٢٠٠ -	٢٥٠ -	٣٠٠ -	٣٥٠ -
التكرار	٦	٩	١٦	٢٤	١٨	١١

مثّل البيانات في الجدول السابق بمضلع تكراري .

الحل :

أ نكمِل الجدول بإيجاد مراكز الفئات .

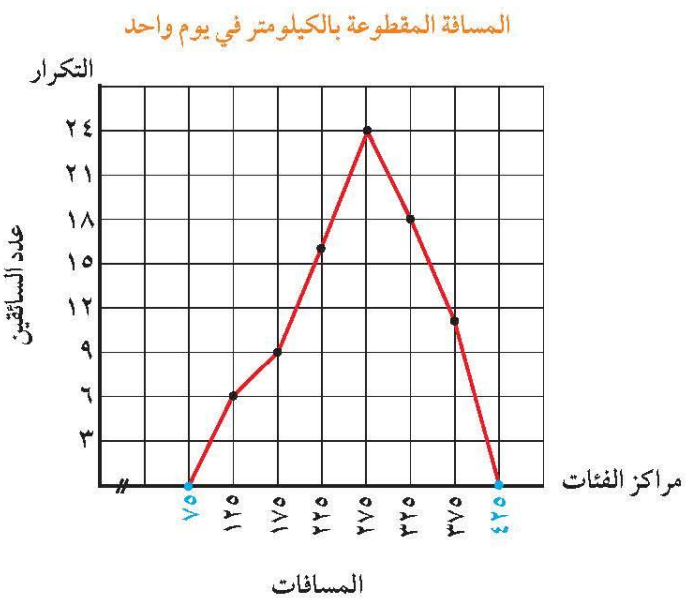
الفئات	١٠٠ -	١٥٠ -	٢٠٠ -	٢٥٠ -	٣٠٠ -	٣٥٠ -
التكرار	٦	٩	١٦	٢٤	١٨	١١
مراكز الفئات	١٢٥	١٧٥	٢٢٥	٢٧٥	٣٢٥	٣٧٥

ب نمثِّل مراكز الفئات على المحور الأفقي ، والتكرار على المحور الرأسي .

جـ نعيِّن النقاط التي تمثل : (مركز الفئة ، التكرار) .

د نصِلُ بين النقاط السابقة على التوالي مستخدِمًا حافّة المسطرة .

هـ نكمل رسم المضلّع .



تدرّب (٢) :

يبيّن الجدول التالي أطوال متعلّمي الصفّ التاسع بالسنتيمتر في إحدى المدارس :

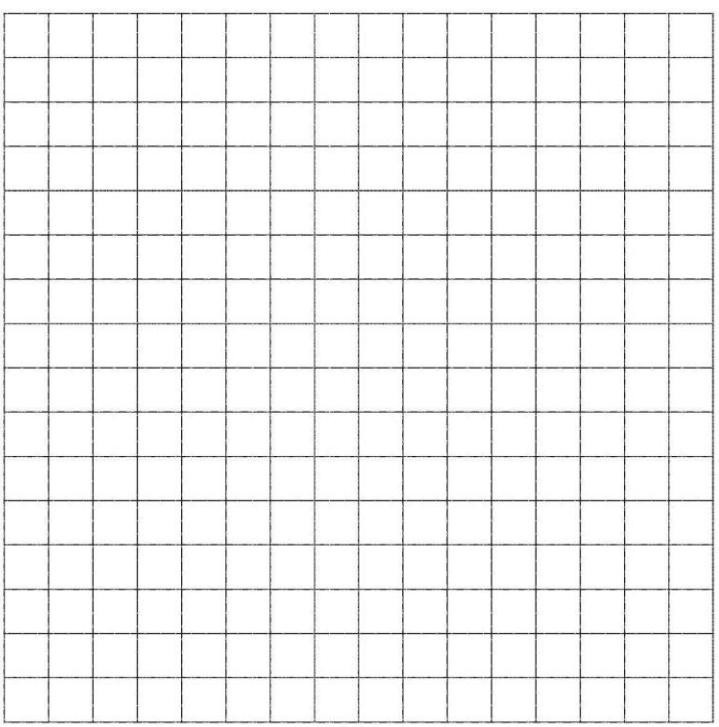
الفئات	١٤٠ –	١٥٠ –	١٦٠ –	١٧٠ –	١٨٠ –
التكرار	٣	٧	٩	٤	٢
مراكز الفئات	١٤٥		١٦٥		١٨٥

أ أكمِل الجدول السابق بإيجاد مراكز الفئات .

ب كم عدد المتعلمين الذين تقل أطوالهم عن ١٦٠ سم ؟

جـ ما مركز الفئة الأكثر تكرارًا ؟ .....

د مثِّل البيانات في الجدول السابق بمضلع تكراري .



تدرّب (٣) :

يوضّح الجدول التالي فئات الأعمار لمشاهدة برنامج تلفزيوني :

الفئات	١٤ -	١٩ -	٢٤ -	٢٩ -	٣٤ -	٣٩ -	٤٤ -
التكرار	٨	١٦	٢٠	٢٦	٣٦	٢١	١٢
مراكز الفئات	١٦,٥			٣١,٥			

أ أكمِل الجدول السابق بإيجاد مراكز الفئات .

ب مثِّل البيانات في الجدول السابق بمضلع تكراري .

تمـــرَّنْ :

١ يمثّل الشكل التالي أسعار الأجهزة الكهربائية التي بيعت خلال شهر في أحد المحلّات.

تأمّلِ الشكل ثمّ أجِب عمّا يلي :

أ ماذا يُسمّى التمثيل البياني ؟ .....

ب ما مركز الفئة الأكثر تكرارًا ؟ .....

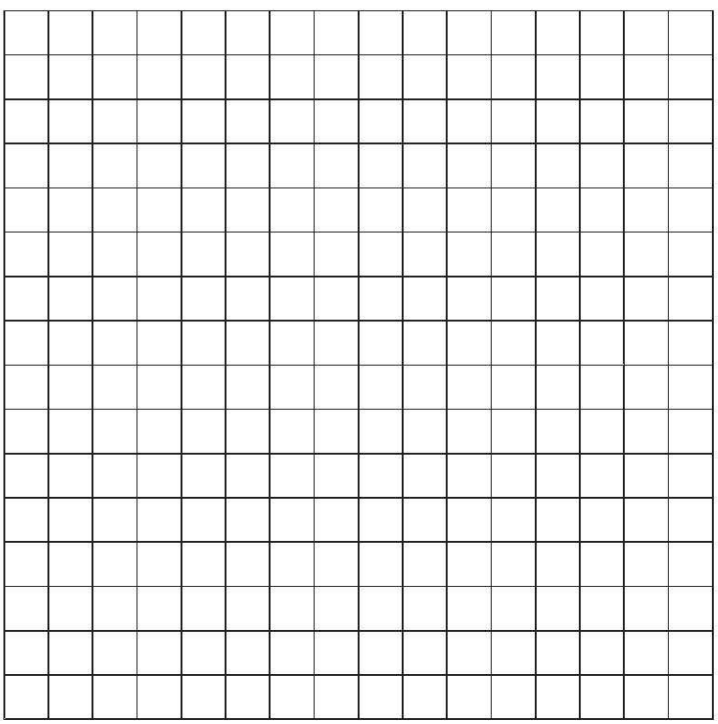
جـ ما التكرار المقابِل لمركز الفئة ١٥٠ ؟ .....

٢ يوضّح الجدول التالي درجات الحرارة المسجلة لبعض دول العالم خلال أحد الأشهر.

الفئات	١٠ –	٢٠ –	٣٠ –	٤٠ –	٥٠ –
التكرار	٣	٦	٩	٧	٥
مراكز الفئات					

أ أكمِل الجدول السابق بإيجاد مراكز الفئات .

ب مثِّل البيانات في الجدول السابق بمضلَّع تكراري .



٣ يوضّح الجدول التالي أوزان بعض متعلّمي الصفّ التاسع .

الفئات	٤٥ –	٥٥ –	٦٥ –	٧٥ –	٨٥ –	٩٥ –
التكرار	٦	٧	٢١	٢٧	١١	٣
مراكز الفئات						

أ تأمَّلِ الجدول السابق ثمّ أجِب عمّا يلي :

– ما طول الفئة ؟ .....

– كم عدد المتعلّمين الذين يبلغ وزنهم ٦٥ كيلوجرامًا فأكثر ؟

.....

ب أكمِل الجدول السابق بإيجاد مراكز الفئات .

جـ مثِّل البيانات في الجدول السابق بمضلّع تكراري .

٤ يوضّح الجدول التالي أعمار بعض زوّار مركز الشيخ جابر الأحمد الثقافي في أحد الأيّام .

الفئات	٦ -	١٢ -	١٨ -	٢٤ -	٣٠ -	٣٦ -	٤٢ -
التكرار	٥٠	٨٥	٦٠	٧٢	٤٥	٣٨	٢٠
مراكز الفئات							

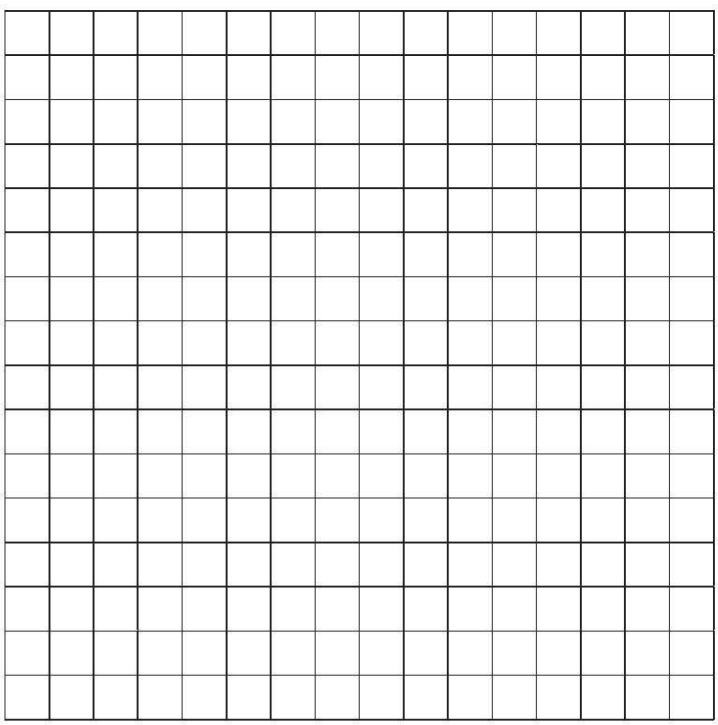
أ تأمَّلِ الجدول السابق ثمّ أجِب عمّا يلي :

- ما طول الفئة ١٢ - ؟ .....

- ما الحد الأعلى للفئة الأخيرة ؟ .....

ب أكمِل الجدول السابق بإيجاد مراكز الفئات .

جـ مثِّل البيانات في الجدول السابق بمضلّع تكراري .



٣-٥ مخطَّط الصندوق ذي العارضتين
Box – and – Whisker Plots

سوف تتعلّم : تحليل وتمثيل انتشار وتوزيع البيانات مستخدِمًا مخطَّط الصندوق ذي العارضتين .

العبارات والمفردات:
مخطَّط الصندوق ذي العارضتين
Box and Wisker plot
الأرباعيات
Quartils
الأرباعي الأدنى
Lower Quartil
الأرباعي الأعلى
Upper Quartil

نشاط :

لديك البيانات التالية : ٨٢ ، ٧٧ ، ٨٥ ، ٧٦ ، ٨٠ ، ٧٥ ، ٨٤

١ رتِّب البيانات تصاعديًّا .....

٢ أوجِد المدى .....

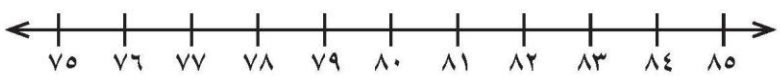
٣ أوجِد الوسيط .....

٤ أوجِد الوسيط للقيم الثلاث الصغرى .....

٥ أوجِد الوسيط للقيم الثلاث الكبرى .....

٦ مثِّل على خطّ الأعداد كلًّا ممّا يلي :

أكبر قيمة ، أصغر قيمة ، الوسيط ، الوسيط للقيم الثلاث الصغرى ، الوسيط للقيم الثلاث الكبرى .



مخطَّط الصندوق ذي العارضتين هو طريقة بصرية لتوضيح قيم الوسيط لمجموعة من البيانات .

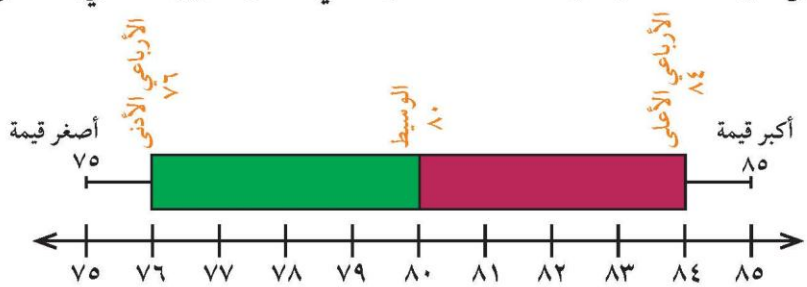
الأرباعيات هي ثلاثة أعداد تقسم مجموعة البيانات إلى أربعة أرباع .

الأرباعي الأوسط هو الوسيط .

الأرباعي الأدنى هو الوسيط للنصف الأدنى من مجموعة البيانات .

الأرباعي الأعلى هو الوسيط للنصف الأعلى من مجموعة البيانات .

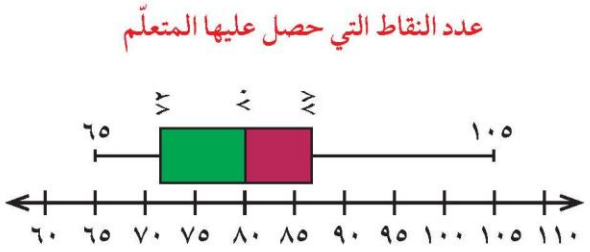
يمكن تمثيل البيانات السابقة بمخطّط الصندوق ذي العارضتين كما في الشكل .



تدرّب (١) :

يبيّن مخطَّط الصندوق ذي العارضتين عدد النقاط التي حصل عليها أحد متعلّمي الصفّ التاسع في إحدى المسابقات .

أكمِل كلًّا ممّا يلي :



أ أصغر قيمة من البيانات هي ٦٥
وأكبر قيمة من البيانات هي .....

ب الأرباعي الأوسط (الوسيط)
هو .....

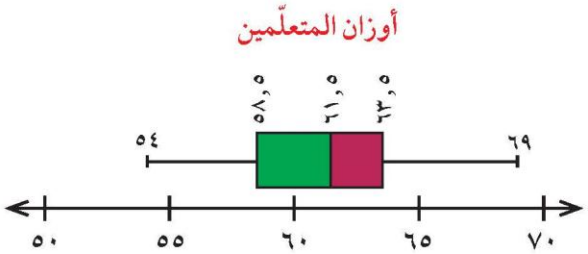
جـ الأرباعي الأدنى هو .....

د الأرباعي الأعلى هو .....

تدرّب (٢) :

يبيّن مخطَّط الصندوق ذي العارضتين أوزان بعض متعلّمي الصفّ التاسع بالكيلوجرامات .

أكمل كلًّا ممّا يلي :



أ القيمة الصغرى للبيانات هي ..... والقيمة الكبرى للبيانات هي .....

ب الأرباعي الأوسط (الوسيط) هو .....

جـ الأرباعي الأدنى هو .....

د الأرباعي الأعلى هو .....

مثال :

يتغيّر سعر الإعلان في الصحف الكبرى وفقًا ليوم الإعلان وعدد أسطره ومساحته ، إليك بعض هذه الأسعار بالدينار :

٥ ، ٤ ، ٣ ، ١٥ ، ٦ ، ٧ ، ١٢ ، ٨ ، ٢٥ ، ٩ ، ١٠ ، ١٤ ، ٢٧ ، ١٦

اِصنع مخطَّطًا لصندوق ذي عارضتين لهذه الأسعار ، بيِّن في أيّ قيم يقع النصف الأوسط للأسعار ؟

الحل :

(١) رتِّب القيم تصاعديًّا :

٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨ ، ٩ ، ١٠ ، ١٢ ، ١٤ ، ١٥ ، ١٦ ، ٢٥ ، ٢٧

(٢) المدى = ٢٧ − ٣ = ٢٤

(٣) الوسيط = $\frac{٩ + ١٠}{٢}$ = ٩,٥ دينار

(٤) نحدّد النصف الأدنى للبيانات : ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨ ، ٩

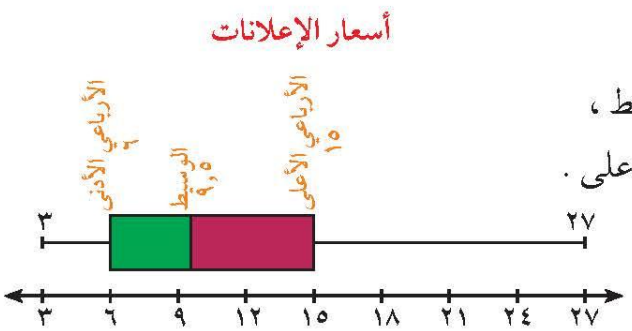
الأرباعي الأدنى = ٦

(٥) نحدّد النصف الأعلى للبيانات : ١٠ ، ١٢ ، ١٤ ، ١٥ ، ١٦ ، ٢٥ ، ٢٧

الأرباعي الأعلى = ١٥

(٦) اُرسم خطًّا يوضّح المدى ، ثمّ عيِّن عليه موقع كلًّا من : الوسيط ، الأرباعي الأدنى ، الأرباعي الأعلى .

(٧) اُرسم صندوقًا يبيّن الأرباعيات ثمّ اُكتب عنوانًا .



لاحظ أنّ :

يقع النصف الأوسط للأسعار بين ٦ ، ١٥

تدرّب (٣) :

في مسابقة مادّة الرياضيات ، حصل أعضاء فريق إحدى المدارس المحلّية على الدرجات التالية (مرتَّبة ترتيبًا تصاعديًّا) : ٩٠ ، ٩٣ ، ٩٤ ، ٩٥ ، ٩٦ ، ٩٩ ، ١٠٠

أوجِد كلًّا ممّا يلي :

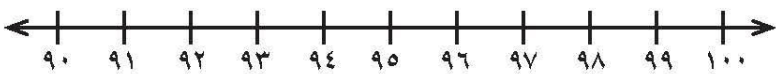
أ القيمة الصغرى للبيانات هي ..... والقيمة الكبرى للبيانات هي .....

ب الأرباعي الأوسط (الوسيط) هو .....

جـ الأرباعي الأدنى هو .....

د الأرباعي الأعلى هو .....

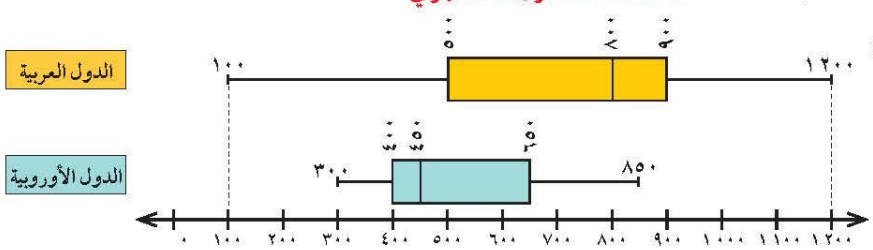
هـ أُرسم مخطَّط الصندوق ذي العارضتين لهذه المجموعة من البيانات .



تدرّب (٤) :

في الشكل التالي يمثّل مخطَّط الصندوق ذي العارضتين (العلوي) بيانات معدَّل مصروف المنزل الشهري على الطعام بالدولار الأميركي في ١٢ دولة عربية ، ويمثّل مخطَّط الصندوق ذي العارضتين (السفلي) بيانات معدَّل مصروف المنزل الشهري على الطعام بالدولار الأميركي في ١٢ دولة أوروبية.

أكمِل الجدول التالي :



	الدول العربية	الدول الأوروبية
المدى		
الوسيط		
الأرباعي الأدنى		
الأرباعي الأعلى		
الوسيط أقرب إلى الأرباعي		
الوسيط أبعد عن الأرباعي		

نلاحظ أنّ :

١ الدول العربية تنفق أكثر على الطعام من الدول الأوروبية .

٢ التفاوت في الإنفاق على الطعام في الدول العربية أكبر من التفاوت في الإنفاق على الطعام في الدول الأوروبية .

فكِّر وناقِش

كيف تؤثّر القيمة المتطرّفة على طول العارضتين في مخطَّط الصندوق ذي العارضتين ؟

تمـــرَّنْ :

١ سُئِل عدد من المتعلّمين في أحد فصول الصفّ التاسع عن عدد مرّات زياراتهم لمحلّات بيع الملابس الرياضية خلال فترة ما ، والنتائج موضَّحة في مخطَّط الصندوق ذي العارضتين في الشكل المقابِل .

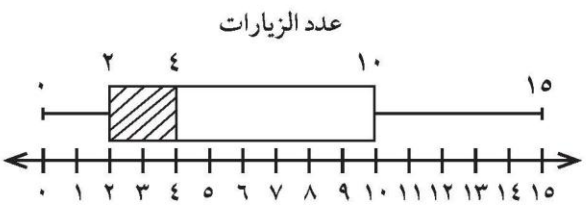
أوجِد كلًّا ممّا يلي :

أ مدى البيانات .....

ب الوسيط .....

جـ الأرباعي الأدنى .....

د الأرباعي الأعلى .....



---

٢ في مجموعة البيانات التالية : ٤ ، ٨ ، ٥ ، ٣ ، ١ ، ٧ ، ٦

أ أوجِد كلًّا ممّا يلي :

(١) القيمة الصغرى للبيانات هي .....

(٢) القيمة الكبرى للبيانات هي .....

(٣) المدى هو .....

(٤) الوسيط هو .....

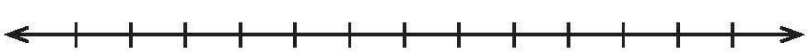
(٥) الأرباعي الأدنى هو .....

(٦) الأرباعي الأعلى هو .....

ب أُرسم مخطَّط الصندوق ذي العارضتين لهذه المجموعة من البيانات .

٣ تصفّحت حصّة كتيّبًا دعائيًّا لأحد متاجر الملابس . سجّلت أسعار الفساتين فيه (بالدينار) كالتالي : ٢٥ ، ١٦ ، ٢٠ ، ٢٣ ، ٢٢ ، ٢٥ ، ٢٤ ، ٢٠ .
أُرسم مخطَّط الصندوق ذي العارضتين لمجموعة البيانات السابقة .

٤ ارسم مخطط الصندوق ذي العارضتين لمجموعة البيانات التالية :
٩٠٠ ، ٧٠٠ ، ٧٧٥ ، ٦٢٤ ، ٦٨٨ ، ٧٦٠ ، ٧٢٠ ، ٧٨٩ ، ٦٤٤ ، ٦٠٠ .



٤-٥ الترجيح والعدالة – الاحتمال
Odds and Fairness – Probability

سوف تتعلّم : إيجاد ترجيح وقوع حدث ما ، واحتمال وقوع حدث ما .

العبارات والمفردات :

تجربة
Experiment

تجربة عشوائية
Random Experiment

حدث **Event**

ترجيح **Odds**

ألعاب عادلة
Fair Games

الإحتمال
Probability

نشاط :

يلعب جمال وعماد لعبة من ألعاب الفرص وهي رمي مكعبين منتظمين مرقمين من ١ إلى ٦ وملاحظة حاصل ضرب العددين الظاهرين .

يربح جمال نقطة إذا كان حاصل ضرب العددين الظاهرين عددًا فرديًا ، ويربح عماد نقطة إذا كان حاصل ضرب العددين الظاهرين عددًا زوجيًا .

بتكرار اللعبة ١٠ مرات لكل لاعب ، الفائز هو اللاعب الذي يحصل على أكبر عدد من النقاط .

١ **حدد أيهما لديه فرصة أكبر للفوز ؟ اشرح ذلك .**

٢ **هل هذه اللعبة عادلة ؟ فسّر إجابتك .**

معلومات مفيدة :

يحتاج مربو الطيور إلى أن يعرفوا ترجيحات ظهور صفات وراثية معينة لدى صغار الطيور .

مثال (١) :

اكتب النواتج الممكنة في كل من التجارب العشوائية التالية :

أ رمي مكعب منتظم مرقم من ١ إلى ٦ مرة واحدة .

الحل :

النواتج الممكنة هي : ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ .

ب رمي قطعة نقود معدنية مرة واحدة .

الحل :

النواتج الممكنة هي : صورة ، كتابة .

يمكننا استخدام كلمة ترجيح لوصف فرصة وقوع حدث ما .

ترجيح حدث ما هو نسبة عدد نواتج وقوع الحدث إلى عدد نواتج عدم وقوعه .

$$\text{ترجيح حدث ما} = \frac{\text{عدد نواتج وقوع الحدث}}{\text{عدد نواتج عدم وقوع الحدث}}$$

مثال (٢) :

أوجد ترجيح ظهور العدد ٢ عند رمي مكعب منتظم مرقم من ١ إلى ٦ مرة واحدة .

الحل :

عدد نواتج (ظهور العدد ٢) = ١

عدد نواتج (عدم ظهور العدد ٢) = ٥

$$\text{ترجيح (ظهور العدد ٢)} = \frac{\text{عدد نواتج (ظهور العدد ٢)}}{\text{عدد نواتج (عدم ظهور العدد ٢)}} = \frac{١}{٥} \text{ أو } ١ : ٥$$

تدرّب (١) :

أوجد ترجيح سحب قرص أزرق من حقيبة تحتوي على قرصين أزرقي اللون و ٥ أقراص حمراء اللون و ٤ أقراص بيضاء اللون .

عدد نواتج (سحب قرص أزرق) = ...

عدد نواتج (عدم سحب قرص أزرق) = ...

ترجيح (سحب قرص أزرق) = ...

= .....

تدرّب (٢) :

أوجد ترجيح كل حدث مما يلي :

أ ظهور صورة عند رمي قطعة نقود معدنية مرة واحدة .

.....

.....

ب ظهور العدد (٢ أو ٥) عند رمي مكعب منتظم مرقم من ١ إلى ٦ مرة واحدة .

.....

.....

اللعبة التي يكون فيها عدد نواتج وقوع الحدث مساويًا لعدد نواتج عدم وقوعه تسمى **لعبة عادلة** أي أن اللعبة التي يكون ترجيح الفوز فيها متساويًا لجميع اللاعبين (تكافؤ الفرص) تسمى **لعبة عادلة** .

مثال (٣) :

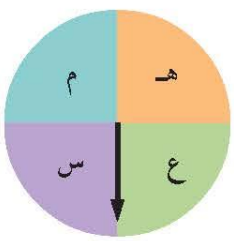
يلعب كل من عبد الله وخالد وعيسى لعبة المكعّبات المرقمة من ١ إلى ٦ .
يحصل عبد الله على نقطة إذا ظهر على المكعّب العدد ١ .
يحصل خالد على نقطة إذا ظهر على المكعب عدد زوجي .
يحصل عيسى على نقطة إذا ظهر على المكعّب العدد (٣ أو ٥) .
أوجد ترجيح الفوز لكل لاعب ، ثم اذكر ما إذا كانت اللعبة عادلة أم غير عادلة .

الحل :

ترجيح فوز عبد الله = $\frac{١}{٥}$ ، ترجيح فوز خالد = $\frac{٣}{٣}$ ، ترجيح فوز عيسى = $\frac{٢}{٤} = \frac{١}{٢}$

∴ اختلف ترجيح الفوز من لاعب لآخر ، لذلك تكون اللعبة غير عادلة .

تدرّب (٣) :



تتبادل كل من عائشة وهناء ومنيرة وسارة تدوير المؤشر في الشكل المقابل ، على أن تحصل كل لاعبة على نقطة إذا توقف المؤشر عند الحرف الأول من اسمها ، أوجد ترجيح الفوز لكل لاعبة ، ثم اذكر ما إذا كانت اللعبة عادلة أم غير عادلة .

.....

.....

تدرّب (٤) :

في كل لعبة ، حدّد ترجيح فوز كل لاعب ، ثم اذكر ما إذا كانت اللعبة عادلة أم غير عادلة .

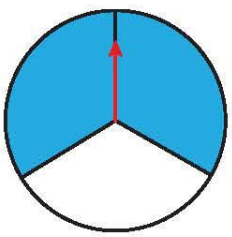
أ ترمي نوف وحنان قطعة نقود معدنية . تفوز نوف بنقطة إذا ظهرت صورة ، وتفوز حنان بنقطة إذا ظهرت كتابة .

ترجيح فوز نوف = ...

ترجيح فوز حنان = ...

∴ **اللعبة** .....

ب في الدّوّارة المقابلة يدير سالم ونايف المؤشر الدوار . يفوز سالم بنقطة إذا توقف المؤشر في المنطقة الزرقاء ، ويفوز نايف بنقطة إذا توقف المؤشر في المنطقة البيضاء .



ترجيح فوز سالم = ...

ترجيح فوز نايف = ...

∴ **اللعبة** .....

جـ عند رمي مكعّب منتظم مرقم من ١ إلى ٦ . إذا ظهر عدد زوجي تفوز منى بنقطة ، وإذا ظهر عدد أولي تفوز أمل بنقطة ، وإذا ظهر عدد يقبل القسمة على ٣ تفوز إيمان بنقطة .

ترجيح فوز منى = ...

ترجيح فوز أمل = ...

ترجيح فوز إيمان = ...

∴ **اللعبة** .....

احتمال وقوع حدث (أ) :

$$ل(أ) = \frac{\text{عدد نواتج الحدث (أ)}}{\text{عدد كل النواتج الممكنة}}$$

تدرّب (٥) :

يحتوي صندوق على ٧ أقلام صفراء ، ٣ أقلام خضراء ، ٤ أقلام زرقاء . إذا تم اختيار قلم واحد عشوائيًا ، فأوجد كلًّا مما يلي :

أ ل (أزرق) .....

ب ل (أصفر) .....

جـ ل (ليس أخضر) .....

د ل (أحمر) .....

تدرّب (٦) :

في تجربة إلقاء مكعب منتظم مرقم من ١ إلى ٦ مرة واحدة ، أكمل ما يلي :

أ عدد النواتج الممكنة = ٦

ب عدد نواتج الحدث أ (ظهور عدد فردي) = ...

جـ عدد نواتج الحدث ب (ظهور عامل من عوامل العدد ٦) = ...

د ل (أ) = $\frac{\text{.....}}{\text{.....}}$

هـ ل (ب) = $\frac{\text{.....}}{\text{.....}}$

و ترجيح الحدث أ = $\frac{\text{.....}}{\text{.....}}$

ز ترجيح الحدث ب = $\frac{\text{.....}}{\text{.....}}$

مثال (٤) :

إذا كان ترجيح حدث ما هو ٣ : ١٠ ، أوجد احتمال وقوع هذا الحدث .

الحل :

∵ ترجيح الحدث هو ٣ : ١٠

∴ عدد نواتج وقوع الحدث = ٣

عدد نواتج عدم وقوع الحدث = ١٠

∴ عدد النواتج الممكنة = ٣ + ١٠ = ١٣

∴ احتمال وقوع هذا الحدث = $\frac{٣}{١٣}$

تدرّب (٧) :

إذا كان ترجيح حدث ما هو ٧ : ١ ، فما هو احتمال وقوع هذا الحدث ؟

تدرّب (٨) :

إذا كان احتمال وقوع حدث ما هو $\frac{٣}{٥}$ ، فما هو ترجيح هذا الحدث ؟

فكِّر وناقِش

إذا كان احتمال وقوع حدث ما يساوي $\frac{١}{٢}$. فما ترجيح هذا الحدث ؟

تمـــرَّنْ :

١ أوجد ترجيح كل حدث مما يلي :

أ (ظهور كتابة) عند رمي قطعة نقود معدنية مرة واحدة .....

ب الحصول على (عدد أكبر من أو يساوي ٢) عند رمي مكعب منتظم مرقم من ١ إلى ٦ مرة واحدة .....

جـ (سحب كرة خضراء) من حقيبة تحتوي على ٤ كرات خضراء و ٣ كرات حمراء .....

٢ أوجد ترجيح الفوز في كل حالة ، ثم اذكر ما إذا كانت اللعبة عادلة أم لا :

أ عند رمي قطعة نقود معدنية ، يحصل سالم على نقطة إذا ظهرت صورة ويحصل سعود على نقطة إذا ظهرت كتابة .

.....

.....

.....

ب عند رمي مكعب منتظم مرقم من ١ إلى ٦ ، تحصل حصة على نقطة إذا ظهر العدد ١ وتحصل عبير على نقطة إذا ظهر العدد (٢ أو ٣ أو ٤ أو ٥) وتحصل هدى على نقطة إذا ظهر العدد ٦ .

.....

.....

.....

.....

٣ أوجد احتمال وقوع كل حدث مما يلي :

أ (ظهور كتابة) عند رمي قطعة نقود معدنية مرة واحدة .....

ب الحصول على (عدد أكبر من أو يساوي ٢) عند رمي مكعب منتظم مرقم من ١ إلى ٦ مرة واحدة .....

جـ (سحب كرة خضراء) من حقيبة تحتوي على ٤ كرات خضراء و ٣ كرات حمراء .....

٤ أوجد احتمال (سحب كرة سوداء) من حقيبة تحتوي على مجموعة كرات في كلٍّ من الحالات التالية :

أ ٢ صفراء ، ٤ سوداء ، ١ حمراء .....

ب ٥ سوداء .....

جـ ٢ خضراء .....

---

٥ يمارس ٢٥ متعلمًا في الصف التاسع رياضات مختلفة ، منهم ١٠ يمارسون رياضة كرة السلة فقط ، ٨ يمارسون رياضة كرة القدم فقط والباقون يمارسون رياضة الجري فقط . اختير متعلم عشوائيًا .
ما احتمال أن يكون هذا المتعلم :

أ ممارسًا كرة السلة : .....

ب لا يمارس رياضة الجري : .....

جـ ممارسًا كرة القدم أو رياضة الجري : .....

---

٦ أوجد احتمال وقوع الأحداث التي ترجيحها كما يلي :

أ ١ : ١ .....

ب ٣ : ٢ .....

جـ ١ : ٧ .....

د ١١ : ٩ .....

هـ ٥٥ : ٤٤ .....

---

٧ إذا كان احتمال وقوع حدثًا ما هو $\frac{٥}{٩}$. فما هو ترجيح هذا الحدث ؟

.....

٥-٥ مراجعة الوحدة الخامسة
Revision Unit Five

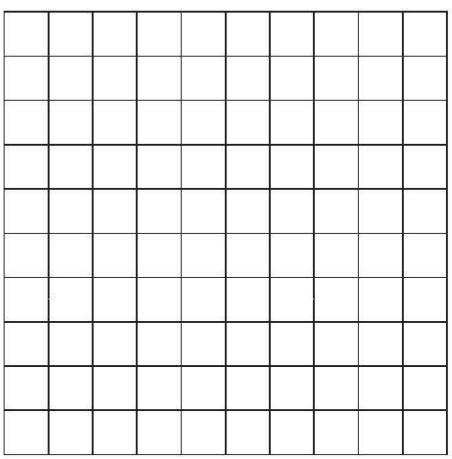
أوّلًا : التمارين المقالية

١ من الجدول التكراري التالي :

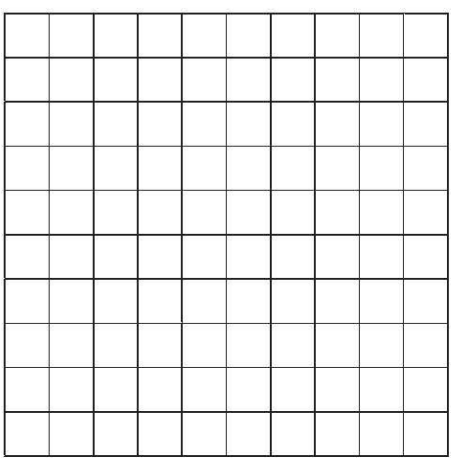
الفئات	٥ –	١٠ –	١٥ –	٢٠ –	٢٥ –
التكرار	٩	٦	٨	٥	٤
مراكز الفئات					

أ أكمل الجدول السابق بإيجاد مراكز الفئات .

ب مثِّل البيانات السابقة بمدرَّج تكراري .



جـ مثِّل البيانات السابقة بمضلّع تكراري .

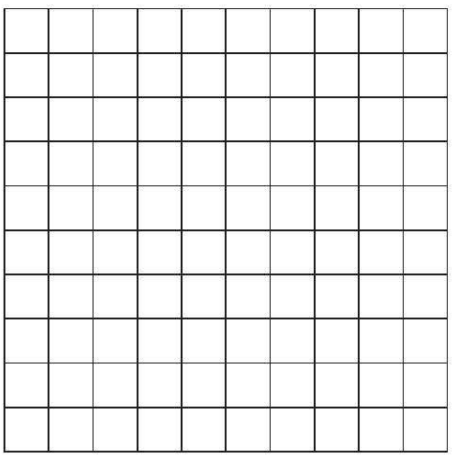


٢ من الجدول التكراري التالي :

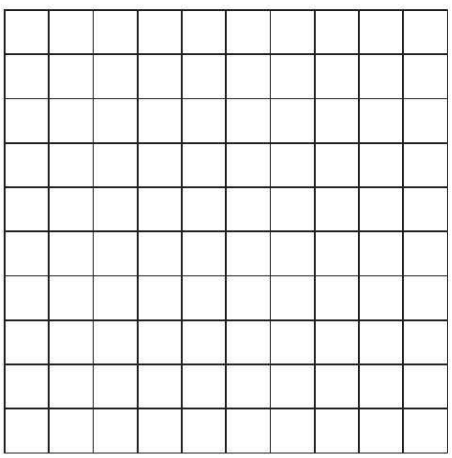
الفئات	١٠ –	٢٠ –	٣٠ –	٤٠ –	٥٠ –
التكرار	٥	١٠	٢٠	١٠	٥
مراكز الفئات					

أ أكمل الجدول السابق بإيجاد مراكز الفئات .

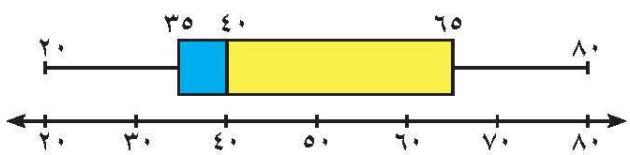
ب مثِّل البيانات السابقة بالمدرَّج التكراري .



جـ مثِّل البيانات السابقة بالمضلّع التكراري .



٣ يبيّن مخطَّط الصندوق ذي العارضتين مجموعة من البيانات ، أوجِد كلًّا مما يلي :



أ المدى = ...

ب الوسيط = ...

جـ الأرباعي الأدنى = ...

د الأرباعي الأعلى = ...

٤ جاءت أوزان عدد من متعلّمي الصفّ التاسع بالكيلوجرام كما يلي :

٦٥ ، ٥٧ ، ٥٩ ، ٦١ ، ٥٠ ، ٦٧ ، ٦٤ ، ٦٦ ، ٦٠ ، ٦٣ ، ٦٩

فأوجِد كلًّا من :

أ الوسيط = ...

ب الأرباعي الأدنى = ...

جـ الأرباعي الأعلى = ...

د أُرسم مخطَّط الصندوق ذي العارضتين .

٥ أوجد احتمال وقوع الأحداث التي ترجيحها كالتالي :

أ ١ : ٥

.....

.....

ب ٤ : ٣

.....

.....

٦ يحتوي كيس على ٦ كرات زرقاء و ٣ كرات خضراء و ٥ كرات حمراء وكرة واحدة بيضاء .

سحبت كرة واحدة عشوائيًا. أوجد كلًّا مما يلي :

أ ل (زرقاء) .....

ب ل (بيضاء) .....

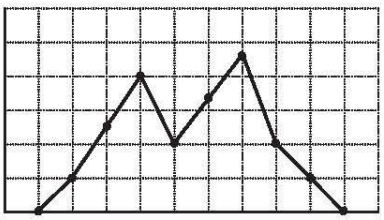
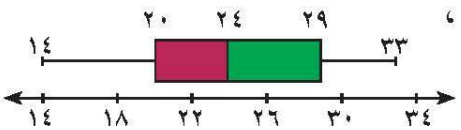
جـ ل (ليست خضراء) .....

د ترجيح (سحب كرة زرقاء) .....

هـ ترجيح (سحب كرة حمراء) .....

ثانيًا : التمارين الموضوعية

أوّلًا : في البنود التالية ، ظلِّل (أ) إذا كانت العبارة صحيحة ، وظلِّل (ب) إذا كانت العبارة غير صحيحة .

١ طول الفئة (٦ – ١٠) هو ٤	(أ)	(ب)
٢ أسلوب التمثيل في الشكل المجاوِر هو المدرَّج التكراري . 	(أ)	(ب)
٣ في مخطَّط الصندوق ذي العارضتين المقابِل ، الأرباعي الأدنى لهذه البيانات هو ٢٠ 	(أ)	(ب)
٤ عند رمي مكعب منتظم مرقم من ١ إلى ٦ ، يفوز عيد بنقطة إذا ظهر عدد أولي ، ويفوز فهيد بنقطة إذا ظهر عدد زوجي ، فإن هذه اللعبة عادلة .	(أ)	(ب)

ثانيًا: لكلّ بند من البنود التالية أربعة اختيارات ، واحد فقط منها صحيح ، ظلِّل الدائرة الدالّة على الإجابة الصحيحة .

٥ مركز الفئة الثالثة هو :

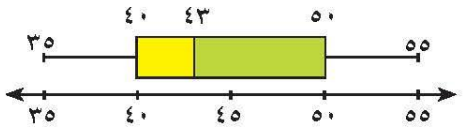
الفئات	١٤ –	١٨ –	٢٢ –	٢٦ –
التكرار	٦	١٨	١٨	١٠

(أ) ١٨ (ب) ٢٠ (جـ) ٢٢ (د) ٢٤

٦ في البيانات الإحصائية إذا كان مركزا فئتين متتاليتين هما ١٥ ، ٢٥ على الترتيب ، فإنّ طول الفئة يساوي :

(أ) ١٠ (ب) ١٥ (جـ) ٢٠ (د) ٢٥

٧ في مخطَّط الصندوق ذي العارضتين المقابِل ، المدى لهذه البيانات هو :



(أ) ٥٠ (ب) ٤٣ (جـ) ٤٠ (د) ٢٠

---

٨ إذا كان الترجيح لحدث ما يساوي ٢ : ٣ فإن احتمال وقوع هذا الحدث يساوي :

(أ) $\frac{٢}{٥}$ (ب) $\frac{٢}{٣}$ (جـ) $\frac{٣}{٢}$ (د) $\frac{٣}{٥}$

---

٩ إذا كان احتمال وقوع حدث ما $\frac{٧}{١١}$ فإن ترجيح هذا الحدث هو :

(أ) ٤ : ٧ (ب) ٤ : ١١ (جـ) ٧ : ٤ (د) ٧ : ١٨

---

١٠ ترجيح ظهور العدد (٣ أو ٤) عند رمي مكعب منتظم مرقم من ١ إلى ٦ مرة واحدة هو :

(أ) ١ : ٣ (ب) ١ : ٢ (جـ) ٢ : ١ (د) ٣ : ٤